JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FERDINAND CASPARY

Sur les relations qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thêta et sigma d'un seul argument et aux fonctions elliptiques et sur une théorie élémentaire de ces transcendantes, déduite desdites relations

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 6 (1890), p. 367-404.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1890_4_6__367_0>

Sur les relations qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thêta et sigma d'un seul argument et aux fonctions elliptiques et sur une théorie élémentaire de ces transcendantes, déduite desdites relations;

PAR M. FERDINAND **CASPARY**.

Mes recherches, relatives aux fonctions thêta d'un nombre quelconque d'arguments, m'ont conduit à des relations entre ces fonctions et les coefficients d'un système orthogonal.

Dans le cas où le nombre des arguments est égal à 1 et à 2, ces relations prennent une forme extrêmement simple.

Il y a, dans ce cas, pour les fonctions thêta, pour les fonctions sigma et, par conséquent, aussi pour les fonctions elliptiques et pour les fonctions hyperelliptiques de première espèce des théorèmes qui lient, d'une façon très simple, toutes ces fonctions aux neuf coefficients a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ d'un système orthogonal et aux six quantités

$$\begin{aligned} p_h &= -(a_{1k}\,da_{1l} + a_{2k}\,da_{2l} + a_{3k}\,da_{3l}), \\ v_h &= \quad a_{k1}\,da_{l1} + a_{k2}\,da_{l2} + a_{k3}\,da_{l3}, \end{aligned}$$

où h, k, l désignent les nombres 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2.

Entre ces quinze quantités a_{mn}, p_h, v_h, que j'appellerai *éléments* *d'un système orthogonal,* existent un grand nombre d'identités algébriques et différentielles.

Les identités algébriques, dues à Euler, sont bien connues et se sont présentées très souvent en Mathématiques pures et appliquées.

Les identités différentielles, au contraire, bien que Lagrange et Poisson en aient déjà donné les plus simples, ont été employées seulement, dans ces derniers temps, par M. Hermite et par M. Darboux. En me réservant d'établir, dans une autre occasion, ces identités différentielles d'une façon plus complète qu'on ne l'a fait jusqu'à présent, et d'en déduire des résultats, relatifs aux fonctions elliptiques et aux fonctions hyperelliptiques de première espèce, je me permets de si-signaler ici une seule conséquence.

On connaît les recherches élégantes et profondes, dues à M. Hermite et à M. Picard, relatives à l'intégration de quelques équations différentielles du second et du troisième ordre au moyen des fonctions elliptiques; ces résultats importants peuvent être tirés des identités entre les différentielles $d^r a_{mn}$ et $d^{r-1} p_h$, $d^{r-1} v_h$ pour r égal à 2 et à 3. A l'aide de cette remarque, on peut généraliser ces découvertes de M. Hermite et de M. Picard et l'on peut établir des résultats analogues pour les équations différentielles d'un ordre supérieur et pour les fonctions hyperelliptiques de première espèce.

Les identités différentielles entre les éléments a_{mn}, p_h, v_h et entre leurs différentielles $d^r a_{mn}$, $d^{r-1} p_h$, $d^{r-1} v_h$ s'emploient en deux sens.

D'une part, on peut en déduire la théorie des fonctions thêta et sigma d'un seul argument et de deux arguments, ainsi que la théorie des fonctions elliptiques et hyperelliptiques de première espèce.

D'autre part, ces identités conduisent à l'application desdites fonctions aux problèmes de la Mécanique et de la Géométrie, à cause de la nature des éléments a_{mn}, p_h, v_h. Les coefficients a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ désignent, comme on le sait, les cosinus des angles, formés par les axes rectangulaires de deux systèmes de coordonnées. Par conséquent, en

Mécanique, les quantités p_h et v_h sont proportionnelles aux composantes de la vitesse de rotation autour de l'axe central suivant les directions des axes rectangulaires pour le mouvement direct et inverse. En Géométrie, ces mêmes quantités sont liées à la théorie de la courbure des courbes gauches et des surfaces. C'est à M. Darboux que l'on doit la découverte de cette liaison dont cet illustre géomètre a tiré des résultats du plus haut intérêt.

Le Mémoire présent est consacré exclusivement à la théorie des fonctions thêta et sigma d'un seul argument et à la théorie des fonctions elliptiques.

Après avoir exprimé identiquement les quinze éléments d'un système orthogonal par quatre quantités quelconques (n° **1**), je déduis de ces identités, au moyen des transformations du second degré (n° **2**), les théorèmes I et II qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thêta et sigma (n^{os} **3** et **4**).

Les théorèmes énoncés fournissent, d'une façon élémentaire, et avec très peu de calcul, la théorie des fonctions thêta et sigma, en toute leur généralité.

Pour en donner les principes, j'établis quelques-unes des identités qui ont lieu entre les éléments a_{mn}, p_h, v_h (n° **5**). D'abord je tire de ces identités les relations, relatives aux fonctions thêta (n° **6**) qui fournissent l'inversion des intégrales elliptiques de première espèce (n° **7**); de plus je transforme un cas spécial du théorème I en le théorème III qui lie les éléments d'un sytème orthogonal aux fonctions elliptiques (n° **8**) et, pour montrer, par un seul exemple, la fécondité de ce théorème, j'en tire, sous des formes bien différentes, les formules d'addition des fonctions elliptiques sn, cn, dn (n° **9**). En joignant alors le théorème III aux théorèmes I et II, j'obtiens les expressions des intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèce au moyen des fonctions thêta, leurs théorèmes d'addition, et les formules fondamentales, relatives à la fonction $\wp(u)$ et aux fonctions sigma (n^{os} **10** et **11**). Enfin j'aborde les fonctions doublement périodiques de seconde espèce et j'ajoute quelques remarques sur les différents points de vue sous lesquels les recherches que l'on va lire peuvent être continuées (n° **12**).

1. *Expressions identiques des éléments d'un système orthogonal.* — Les neuf coefficients $a_{mn}(m, n = 1, 2, 3)$ d'un système orthogonal, liés entre eux par les relations

$$\left.\begin{aligned} a_{m1}^2 + \quad a_{m2}^2 + \quad a_{m3}^2 &= 1 \\ a_{l1}a_{m1} + a_{l2}a_{m2} + a_{l3}a_{m3} &= 0 \end{aligned}\right\} (l \neq m;\ l, m = 1, 2, 3)$$

et les six quantités

$$\left.\begin{aligned} p_h &= -(a_{1k}\,da_{1l} + a_{2k}\,da_{2l} + a_{3k}\,da_{3l}) \\ v_h &= \quad a_{k1}\,da_{l1} + a_{k2}\,da_{l2} + a_{k3}\,da_{l3} \end{aligned}\right\} \left(\begin{aligned} h, k, l = 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \end{aligned}\right)$$

peuvent être représentées *identiquement* au moyen de quatre quantités quelconques a_1, a_2, a_3, a_4, comme il suit :

$$(5)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = a_1 a_4 - a_2 a_3, \qquad i = \sqrt{-1}; \\ \mathcal{A}(a_{11} + ia_{21}) = \qquad a_1^2 + a_2^2, \\ \mathcal{A}(a_{12} + ia_{22}) = -\,i(a_1^2 - a_2^2), \\ \mathcal{A}(a_{13} + ia_{23}) = -\,2ia_1 a_2; \\ \mathcal{A}(a_{11} - ia_{21}) = \qquad a_3^2 + a_4^2, \\ \mathcal{A}(a_{12} - ia_{22}) = -\,i(a_3^2 - a_4^2), \\ \mathcal{A}(a_{13} - ia_{23}) = -\,2ia_3 a_4; \\ \mathcal{A}a_{31} = -\,i(a_1 a_3 + a_2 a_4), \\ \mathcal{A}a_{32} = -\quad (a_1 a_3 - a_2 a_4), \\ \mathcal{A}a_{33} = -(a_1 a_4 + a_2 a_3); \end{cases}$$

$$(5')\quad \begin{cases} \mathcal{A}(p_1 + ip_2) = \quad 2\,(a_1\,da_3 - a_3\,da_1), \\ \mathcal{A}(v_1 + iv_2) = -\,2\,(a_1\,da_2 - a_2\,da_1), \\ \mathcal{A}(p_3 + v_3) = -\,2i(a_2\,da_3 - a_3\,da_2), \\ \mathcal{A}(p_1 - ip_2) = \quad 2\,(a_2\,da_4 - a_4\,da_2), \\ \mathcal{A}(v_1 - iv_2) = -\,2\,(a_3\,da_4 - a_4\,da_3), \\ \mathcal{A}(p_3 - v_3) = -\,2i(a_1\,da_4 - a_4\,da_1). \end{cases}$$

2. *Formules auxiliaires, relatives aux fonctions thêta.* — Pour transformer les identités (5) et (5′) en relations relatives aux fonctions thêta, je rappelle rapidement quelques formules auxiliaires.

Jacobi a défini les quatre fonctions thêta par les séries

$$\vartheta\,(w,q) = \sum_{\mu}(-1)^{\mu}q^{\mu^2}e^{2\mu w i} = 1 - 2q\cos 2w + 2q^4\cos 4w - 2q^9\cos 6w + \ldots),$$

$$\vartheta_1(w,q) = -\sum_{\mu} i^{2\mu+1}q^{\frac{1}{4}(2\mu+1)^2}e^{(2\mu+1)wi} = 2\sqrt[4]{q}(\sin w - q^2\sin 3w + q^6\sin 5w - \ldots),$$

$$\vartheta_2(w,q) = \sum_{\mu} q^{\frac{1}{4}(2\mu+1)^2}e^{(2\mu+1)wi} = 2\sqrt[4]{q}(\cos w + q^2\cos 3w + q^6\cos 5w + \ldots),$$

$$\vartheta_3(w,q) = \sum_{\mu} q^{\mu^2}e^{2\mu w i} = 1 + 2q\cos 2w + 2q^4\cos 4w + 2q^9\cos 6w + \ldots,$$

$$(\mu = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots,\ \pm\infty).$$

Si l'on forme les produits $\vartheta(w,q)\,\vartheta(x,q)\ldots\vartheta_3(w,q)\,\vartheta_3(x,q)$, on trouve aisément les formules suivantes, connues sous le nom de *transformations du second degré* [1] :

$$(\mathcal{A})\quad\begin{cases}\vartheta\,(w,q)\,\vartheta\,(x,q) = \vartheta_3(w+x,q^2)\,\vartheta_3(w-x,q^2) \\ \qquad\qquad - \vartheta_2(w+x,q^2)\,\vartheta_2(w-x,q^2), \\ \vartheta_1(w,q)\,\vartheta_1(x,q) = \vartheta_3(w+x,q^2)\,\vartheta_2(w-x,q^2) \\ \qquad\qquad - \vartheta_2(w+x,q^2)\,\vartheta_3(w-x,q^2), \\ \vartheta_2(w,q)\,\vartheta_2(x,q) = \vartheta_3(w+x,q^2)\,\vartheta_2(w-x,q^2) \\ \qquad\qquad + \vartheta_2(w+x,q^2)\,\vartheta_3(w-x,q^2), \\ \vartheta_3(w,q)\,\vartheta_3(x,q) = \vartheta_3(w+x,q^2)\,\vartheta_3(w-x,q^2) \\ \qquad\qquad + \vartheta_2(w+x,q^2)\,\vartheta_2(w-x,q^2).\end{cases}$$

---

(1) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIII, p. 93; mai 1889.

Les formules qui représentent les transformations du second degré sont les conséquences les plus spéciales d'une expression importante que M. Schröter a établie pour les transformations du degré n dans sa célèbre Thèse de doctorat, intitulée : *De æquationibus modularibus*. Regiomonti Pr., p. 7; 1854.

On pourra consulter à ce sujet aussi la Note de M. Schröter, publiée dans ce Journal, 2e série, t. III, p. 258; 1858.

En introduisant les quatre quantités

$$(\mathcal{A}_1)\quad \begin{cases} \alpha_{11} = A_1\,\vartheta_3(w+x, q^2), & \alpha_{21} = A_2\,\vartheta_3(w-x, q^2), \\ \alpha_{12} = A_1\,\vartheta_2(w+x, q^2), & \alpha_{22} = A_2\,\vartheta_2(w-x, q^2), \end{cases}$$

où A_1, A_2 désignent deux fonctions quelconques, et en écrivant, pour abréger la notation, au lieu de $\vartheta(w, q)$, $\vartheta(x, q)$, $\ldots$, $\vartheta_3(w, q)$, $\vartheta_3(x, q)$, plus brièvement $\vartheta(w)$, $\vartheta(x)$, $\ldots$, $\vartheta_3(w)$, $\vartheta_3(x)$, les formules $(\mathcal{A})$ prennent la forme suivante

$$(\mathcal{A}_2)\quad \begin{cases} \alpha_{11}\alpha_{21} - \alpha_{12}\alpha_{22} = A_1 A_2\,\vartheta\,(w)\,\vartheta\,(x), \\ \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} = A_1 A_2\,\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x), \\ \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = A_1 A_2\,\vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x), \\ \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21} = A_1 A_2\,\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x). \end{cases}$$

De plus, on déduit des formules $(\mathcal{A})$

$$(\mathcal{A}_3)\quad \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = A_1^2\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_3(w+x), & \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = A_2^2\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_3(w-x), \\ \alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2 = A_1^2\,\vartheta\,(0)\,\vartheta\,(w+x), & \alpha_{21}^2 - \alpha_{22}^2 = A_2^2\,\vartheta\,(0)\,\vartheta\,(w-x), \\ 2\alpha_{11}\alpha_{12} = A_1^2\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_2(w+x); & 2\alpha_{21}\alpha_{22} = A_2^2\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_2(w-x). \end{cases}$$

Enfin on obtient, par la différentiation des formules $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_3)$

$$(\mathcal{A}')\quad \begin{cases} \alpha_{\lambda 1}\,d\alpha_{\lambda 2} - \alpha_{\lambda 2}\,d\alpha_{\lambda 1} = -\tfrac{1}{2}A_\lambda^2\,\vartheta_1'(0)\,\vartheta_1(w\pm x)(dw\pm dx) \qquad (\lambda = 1, 2); \\ \alpha_{1\lambda}\,d\alpha_{2\lambda} - \alpha_{2\lambda}\,d\alpha_{1\lambda} = -\tfrac{1}{2}A_1A_2[\vartheta_3'(x)\,\vartheta_3(w) \pm \vartheta'(x)\,\vartheta(w)]\,dw \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{2}A_1A_2[\vartheta_3'(w)\,\vartheta_3(x) \pm \vartheta'(w)\,\vartheta(x)]\,dx \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{2}(A_2\,dA_1 - A_1\,dA_2)[\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x) \pm \vartheta(w)\,\vartheta(x)]; \\ \alpha_{1\lambda}\,d\alpha_{2\varkappa} - \alpha_{2\varkappa}\,d\alpha_{1\lambda} = -\tfrac{1}{2}A_1A_2[\vartheta_2'(x)\,\vartheta_2(w) \pm \vartheta_1'(x)\,\vartheta_1(w)]\,dw \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{2}A_1A_2[\vartheta_2'(w)\,\vartheta_2(x) \pm \vartheta_1'(w)\,\vartheta_1(x)]\,dx \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{2}(A_2\,dA_1 - A_1\,dA_2)[\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x) \pm \vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)]; \end{cases}$$

où à la valeur $\lambda = 1$ correspond le signe $+$ et à la valeur $\lambda = 2$ le signe $-$. Dans la troisième formule pour $\lambda = 1$ ou 2 l'indice $\varkappa$ est égal à 2 ou 1.

3. *Théorème relatif aux fonctions thêta.* — Si l'on introduit

$$A_1 : A_2 = \mathfrak{F}; \qquad e' = \pm 1, \qquad e'' = \pm 1, \qquad e = e'e'',$$

et si l'on pose successivement

1.......	$a_1 = e'\alpha_{11}$	$a_2 = e''\alpha_{12}$	$a_3 = e''\alpha_{22}$	$a_4 = e'\alpha_{21}$
2.......	$a_1 = e'\alpha_{11}$	$a_2 = e''\alpha_{12}$	$a_3 = e''\alpha_{21}$	$a_4 = e'\alpha_{22}$
3.......	$a_1 = e'\alpha_{11}$	$a_2 = e''\alpha_{12}$	$a_3 = -e''\alpha_{21}$	$a_4 = e'\alpha_{22}$
4.......	$a_1 = e'\alpha_{11}$	$a_2 = e''\alpha_{12}$	$a_3 = -e''\alpha_{22}$	$a_4 = e'\alpha_{21}$

les identités ($\mathfrak{I}$), ($\mathfrak{I}'$) fournissent, au moyen des formules auxiliaires ($\mathfrak{A}_1$), ($\mathfrak{A}_2$), ($\mathfrak{A}_3$), ($\mathfrak{A}'$), le théorème :

I. *Soient w et x deux arguments quelconques; soient $\mathfrak{F}$ une fonction quelconque, $e = \pm 1$ et $i = \sqrt{-1}$. Alors les fonctions thêta sont liées aux éléments d'un système orthogonal de la manière suivante :*

$$a_{11} + ia_{21} = \mathfrak{F}\frac{\vartheta_3(0)\vartheta_3(w+x)}{\vartheta_s(w)\vartheta_s(x)},$$

$$a_{12} + ia_{22} = -i\mathfrak{F}\frac{\vartheta(0)\vartheta(w+x)}{\vartheta_s(w)\vartheta_s(x)},$$

$$a_{13} + ia_{23} = -ei\mathfrak{F}\frac{\vartheta_2(0)\vartheta_2(w+x)}{\vartheta_s(w)\vartheta_s(x)};$$

$$a_{11} - ia_{21} = \mathfrak{F}^{-1}\frac{\vartheta_3(0)\vartheta_3(w-x)}{\vartheta_s(w)\vartheta_s(x)},$$

$$a_{12} - ia_{22} = (-1)^{s_2+1}\mathcal{E}i\mathfrak{F}^{-1}\frac{\vartheta(0)\vartheta(w-x)}{\vartheta_s(w)\vartheta_s(x)},$$

$$a_{13} - ia_{23} = -e\mathcal{E}i\mathfrak{F}^{-1}\frac{\vartheta_2(0)\vartheta_2(w-x)}{\vartheta_s(w)\vartheta_s(x)};$$

$$a_{3h} = \mathcal{E}_h\frac{\vartheta_{s_h}(w)\vartheta_{s_h}(x)}{\vartheta_s(w)\vartheta_s(x)}$$

$$(h = 1, 2, 3; \quad \mathcal{E}_1 = -e\mathcal{E}i, \quad \mathcal{E}_2 = -e\mathcal{E}, \quad \mathcal{E}_3 = -1),$$

$$p_h = -ia_{3h}m_{s_h};$$

$$v_1 + iv_2 = \varepsilon\mathfrak{F}\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(w+x)}{\vartheta_s(w)\vartheta_s(x)}(dw+dx),$$

$$v_1 - iv_2 = (-1)^{s+1}\varepsilon\mathfrak{F}^{-1}\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(w-x)}{\vartheta_s(w)\vartheta_s(x)}(dw-dx);$$

$$v_3 = -im_s,$$

où

$$m_j = \frac{\vartheta_j'(x)}{\vartheta_j(x)}dw + \frac{\vartheta_j'(w)}{\vartheta_j(w)}dx + d\log\mathfrak{F},$$

$$(j = s,\ s_1,\ s_2,\ s_3).$$

Dans ces expressions l'unité ε, et les indices s, s_1, s_2, s_3 sont définis par ce Tableau :

	ε.	s.	s_1.	s_2.	s_3.
1..........	+1	0	2	1	3
2..........	+1	1	3	0	2
3..........	−1	2	0	3	1
4..........	−1	3	1	2	0

Le théorème précédent comprend quatre systèmes de relations dont j'ai déjà donné le second qui correspond aux valeurs $\varepsilon = 1$, $s = 1$, $s_1 = 3$, $s_2 = 0$, $s_3 = 2$ antérieurement ([1]). On déduit de celui-ci le théorème analogue au théorème précédent, relatif aux fonctions sigma, si l'on introduit au lieu des fonctions thêta les fonctions sigma, et si l'on remplace $a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}; p_1, p_2, p_3$ par $a_{m2}, a_{m3}, a_{m1}; p_2, p_3, p_1$; substitution qui ne change pas les quantités v_1, v_2, v_3.

4. *Théorème relatif aux fonctions sigma.* — Les fonctions sigma de M. Weierstrass peuvent être définies au moyen des fonctions thêta ainsi

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_1'(0)} = \dfrac{\pi}{2\omega}e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta u^2}{\omega}}\sigma(u), \\[2ex] \dfrac{\vartheta_\nu(w)}{\vartheta_\nu(0)} = e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta u^2}{\omega}}\sigma_h(u), \end{cases}$$

([1]) Voir *Comptes rendus*, t. CVII, p. 859, 901, et *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIII, p. 95.

où aux indices $\nu = 2, 3, 0$ correspondent respectivement les indices $h = 1, 2, 3$ et où

$$\omega = \lambda K, \qquad w = \frac{u\pi}{2\omega}, \qquad \eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)},$$

λ étant une constante (voir n° **11**, formule 40).

Au moyen de ces définitions et en posant

$$c_h = \left[\frac{2\omega\,\vartheta_\nu(0)}{\pi\vartheta'_1(0)}\right]^2, \qquad \mathfrak{F} e^{-\eta\frac{uv}{\omega}} = \mathfrak{G}, \qquad x = \frac{v\pi}{2\omega},$$

on obtient

$$\frac{\vartheta_\nu(w)\,\vartheta_\nu(x)}{\vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)} = c_h \frac{\sigma_h(u)\,\sigma_h(v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)},$$

$$\mathfrak{F}^{\pm 1} \frac{\vartheta'_1(0)\,\vartheta_1(w \pm x)\,(dw \pm dx)}{\vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)} = \mathfrak{G}^{\pm 1} \frac{\sigma(u \pm v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)}(du \pm dv),$$

$$\mathfrak{F}^{\pm 1} \frac{\vartheta_\nu(0)\,\vartheta_\nu(w \pm x)}{\vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)} = \mathfrak{G}^{\pm 1} \frac{c_h\,\sigma_h(u \pm v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)},$$

$$\frac{\vartheta'_1(x)}{\vartheta_1(x)}\,dw + \frac{\vartheta'_1(w)}{\vartheta_1(w)}\,dx + d\log\mathfrak{F} = \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}\,du + \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\,dv + d\log\mathfrak{G},$$

$$\frac{\vartheta'_\nu(x)}{\vartheta_\nu(x)}\,dw + \frac{\vartheta'_\nu(w)}{\vartheta_\nu(w)}\,dx + d\log\mathfrak{F} = \frac{\sigma'_h(v)}{\sigma_h(v)}\,du + \frac{\sigma'_h(u)}{\sigma_h(u)}\,dv + d\log\mathfrak{G},$$

$$\begin{pmatrix} \nu = 2, 3, 0 \\ h = 1, 2, 3 \end{pmatrix}.$$

A l'aide de ces formules, on tire du théorème précédent, si l'on y pose

$$e = +1, \qquad \varepsilon = +1; \qquad s = 1, \qquad s_1 = 3, \qquad s_2 = 0, \qquad s_3 = 2$$

et si l'on introduit

$$ic_1 = \varepsilon_1, \qquad -c_2 = \varepsilon_2, \qquad ic_3 = \varepsilon_3,$$

le théorème suivant :

II. *Soient u et v deux arguments quelconques; soient $\mathfrak{g}$ une fonction quelconque et $i = \sqrt{-1}$. Alors les fonctions sigma sont liées aux éléments d'un système orthogonal de la manière suivante*

$$\begin{aligned}
a_{1h} \pm i a_{2h} &= -\mathfrak{g}^{\pm 1} \varepsilon_h \frac{\sigma_h(u \pm v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)},\\
a_{3h} &= \quad i\varepsilon_h \frac{\sigma_h(u)\,\sigma_h(v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)}, \qquad (h = 1, 2, 3),\\
p_h &= \quad \varepsilon_h \frac{\sigma_h(u)\,\sigma_h(v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)} \left[\frac{\sigma'_h(v)}{\sigma_h(v)}\,du + \frac{\sigma'_h(u)}{\sigma_h(u)}\,dv + d\log\mathfrak{g}\right],\\
v_1 \pm i v_2 &= \quad \mathfrak{g}^{\pm 1} \frac{\sigma(u \pm v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)}(du \pm dv),\\
v_3 &= -i\left[\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}\,du + \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\,dv + d\log\mathfrak{g}\right],
\end{aligned}$$

ε_h étant des constantes (¹).

Les théorèmes précédents fournissent toutes les propriétés des fonctions thêta et sigma au moyen des identités algébriques et différentielles qui existent entre les éléments a_{mn}, p_h, v_h, identités dont les plus simples suffisent déjà pour obtenir les relations fondamentales de la théorie des fonctions thêta, des fonctions sigma et des fonctions elliptiques.

5. *Identités entre les éléments d'un système orthogonal.* — Pour les coefficients a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ d'un système orthogonal dont le déterminant est $+1$, on a les relations

$$\left.\begin{aligned}
a_{m1}^2 \quad + a_{m2}^2 \quad + a_{m3}^2 \quad &= 1\\
a_{l1}a_{m1} + a_{l2}a_{m2} + a_{l3}a_{m3} &= 0
\end{aligned}\right\} \; (l \gtrless m;\; l, m = 1, 2, 3);$$

$$\begin{aligned}
a_{1h} &= a_{2k}a_{3l} - a_{3k}a_{2l}\\
a_{2h} &= a_{3k}a_{1l} - a_{1k}a_{3l}\\
a_{3h} &= a_{1k}a_{2l} - a_{2k}a_{1l}
\end{aligned}
\left(\begin{aligned}
h, k, l &= 1, 2, 3;\\
&= 2, 3, 1;\\
&= 3, 1, 2,
\end{aligned}\right)$$

dans lesquelles il est permis de changer l'ordre des indices inférieurs.

(¹) *Voir* n° 11, formules (33).

En différentiant ces relations, on tire, de la définition des quantités p_h, v_h, les identités

$$(3'_1)\qquad \begin{cases} da_{1h} = a_{1k}p_l - a_{1l}p_k = -a_{2h}v_3 + a_{3h}v_2, \\ da_{2h} = a_{2k}p_l - a_{2l}p_k = -a_{3h}v_1 + a_{1h}v_3, \\ da_{3h} = a_{3k}p_l - a_{3l}p_k = -a_{1h}v_2 + a_{2h}v_1. \end{cases}$$

Si les coefficients a_{mn} dépendent de deux variables, par exemple de w et de x, les quantités da_{mn}, p_h, v_h sont fonctions linéaires de dw et dx. Je désignerai, dans ce cas, les coefficients de dw et de dx dans les expressions de p_h et v_h respectivement par p_h^w, p_h^x et v_h^w, v_h^x. Alors on a

$$p_h = p_h^w\,dw + p_h^x\,dx,$$
$$v_h = v_h^w\,dw + v_h^x\,dx.$$

De plus, on a

$$da_{mn} = \frac{\partial a_{mn}}{\partial w}dw + \frac{\partial a_{mn}}{\partial x}dx.$$

Par conséquent, les identités $(3'_1)$ entraînent deux autres systèmes d'identités qui proviennent des identités $(3'_1)$, si l'on y remplace

$$da_{mn},\quad p_h,\quad v_h$$

respectivement par

$$\frac{\partial a_{mn}}{\partial w},\quad p_h^w,\quad v_h^w$$

et

$$\frac{\partial a_{mn}}{\partial x},\quad p_h^x,\quad v_h^x.$$

Si l'on forme, à l'aide de ces définitions, les différences

$$\frac{\partial p_h^w}{\partial x} - \frac{\partial p_h^x}{\partial w},\quad \frac{\partial v_h^w}{\partial x} - \frac{\partial v_h^x}{\partial w},$$

on obtient aisément, eu égard aux identités qui proviennent de $(3'_1)$, les identités

$$(\mathfrak{F}'_2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_h^w}{\partial x} - \dfrac{\partial p_h^x}{\partial w} = \quad p_k^w p_l^x - p_l^w p_k^x = \quad \mathfrak{P}_h, \\ \dfrac{\partial v_h^w}{\partial x} - \dfrac{\partial v_h^x}{\partial w} = - v_k^w v_l^x + v_l^w v_k^x = - \mathfrak{V}_h, \end{cases}$$

dont celles, relatives aux quantités p_h^w, p_h^x ont été données, pour la première fois, par M. Darboux ([1]). Les quantités $\mathfrak{P}_h$, $\mathfrak{V}_h$ sont liées entre elles par les mêmes identités que les quantités p_h, v_h; p_h^w, v_h^w; p_h^x, v_h^x, savoir

$$(\mathfrak{F}_1)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_h = a_{1h}\mathfrak{V}_1 + a_{2h}\mathfrak{V}_2 + a_{3h}\mathfrak{V}_3, \\ \mathfrak{V}_h = a_{h1}\mathfrak{P}_1 + a_{h2}\mathfrak{P}_2 + a_{h3}\mathfrak{P}_3, \end{cases}$$

où $\mathfrak{P}_h$ est écrit au lieu de $\mathfrak{P}_h$, p_h^w, p_h^x et $\mathfrak{V}_h$ au lieu de $\mathfrak{V}_h$, v_h^w, v_h^x.

Ceci établi, je vais exposer rapidement les principes de la théorie des fonctions thêta:

6. *Relations relatives aux fonctions thêta.* — D'après le théorème I, on a

$$p_h = - i a_{3h} m_{s_h},$$

et les expressions analogues, où h est remplacé par k et l; par conséquent, l'identité

$$da_{3h} = a_{3k}p_l - a_{3l}p_k$$

devient

$$da_{3h} = i a_{3k} a_{3l}(m_{s_k} - m_{s_l}) \qquad (h, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2)$$

et, en divisant par a_{3h}, on a aussi

$$d \log a_{3h} = \frac{i a_{3k} a_{3l}}{a_{3h}}(m_{s_k} - m_{s_l}).$$

([1]) *Voir* Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Paris, Gauthier-Villars; 1887, t. I, p. 49; Combescure, *Annales de l'École Normale*, 1re série, t. IV, p. 108; 3e série, t. V, p. 52.

Si l'on substitue dans cette formule les expressions des quantités a_{3h}, a_{3k}, a_{3l}, m_{s_k}, m_{s_l}, établies dans le théorème I, on obtient, en égalant dans les deux membres les coefficients de dw,

$$(a')\qquad \frac{\mathfrak{I}'_{s_h}(w)}{\mathfrak{I}_{s_h}(w)} - \frac{\mathfrak{I}'_s(w)}{\mathfrak{I}_s(w)} = e^{(h)}\frac{\mathfrak{I}_{s_k}(w)\,\mathfrak{I}_{s_k}(x)\,\mathfrak{I}_{s_l}(w)\,\mathfrak{I}_{s_l}(x)}{\mathfrak{I}_{s_h}(w)\,\mathfrak{I}_{s_h}(x)\,\mathfrak{I}_s(w)\,\mathfrak{I}_s(x)}\left[\frac{\mathfrak{I}'_{s_k}(x)}{\mathfrak{I}_{s_k}(x)} - \frac{\mathfrak{I}'_{s_l}(x)}{\mathfrak{I}_s(x)}\right],$$

où $e^{(1)} = -1$, $e^{(2)} = +1$, $e^{(3)} = +1$.

Si l'on pose $s = 1$, $w = 0$, on en déduit

$$(a)\qquad \frac{\mathfrak{I}'_{s_k}(x)}{\mathfrak{I}_{s_k}(x)} - \frac{\mathfrak{I}'_{s_l}(x)}{\mathfrak{I}_{s_l}(x)} = \mathfrak{S}_{s_h}\frac{\mathfrak{I}_{s_h}(x)\,\mathfrak{I}_1(x)}{\mathfrak{I}_{s_k}(x)\,\mathfrak{I}_{s_l}(x)},$$

les constantes $\mathfrak{S}_{s_h}$ étant définies par

$$\mathfrak{S}_{s_h} = -\,e^{(h)}\,\frac{\mathfrak{I}'_1(0)\,\mathfrak{I}_{s_h}(0)}{\mathfrak{I}_{s_k}(0)\,\mathfrak{I}_{s_l}(0)}.$$

Or on a, d'après le Tableau du théorème I, pour $s = 1$,

$$s_1 = 3,\qquad s_2 = 0,\qquad s_3 = 2;$$

par conséquent, l'équation (a) fournit

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{I}'_2(x)}{\mathfrak{I}_2(x)} - \frac{\mathfrak{I}'_3(x)}{\mathfrak{I}_3(x)} = \mathfrak{S}_0\,\frac{\mathfrak{I}(x)\,\mathfrak{I}_1(x)}{\mathfrak{I}_2(x)\,\mathfrak{I}_3(x)},\\ &\frac{\mathfrak{I}'_3(x)}{\mathfrak{I}_3(x)} - \frac{\mathfrak{I}'(x)}{\mathfrak{I}(x)} = \mathfrak{S}_2\,\frac{\mathfrak{I}_2(x)\,\mathfrak{I}_1(x)}{\mathfrak{I}(x)\,\mathfrak{I}_3(x)},\\ &\frac{\mathfrak{I}'(x)}{\mathfrak{I}(x)} - \frac{\mathfrak{I}'_2(x)}{\mathfrak{I}_2(x)} = \mathfrak{S}_3\,\frac{\mathfrak{I}_3(x)\,\mathfrak{I}_1(x)}{\mathfrak{I}(x)\,\mathfrak{I}_2(x)},\end{aligned}\right.$$

où

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{S}_0 = -\frac{\mathfrak{I}'_1(0)\,\mathfrak{I}(0)}{\mathfrak{I}_2(0)\,\mathfrak{I}_3(0)},\\ &\mathfrak{S}_2 = -\frac{\mathfrak{I}'_1(0)\,\mathfrak{I}_2(0)}{\mathfrak{I}(0)\,\mathfrak{I}_3(0)},\\ &\mathfrak{S}_3 = +\frac{\mathfrak{I}'_1(0)\,\mathfrak{I}_3(0)}{\mathfrak{I}(0)\,\mathfrak{I}_2(0)}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on porte encore l'expression (a) dans la formule (a'), en y posant, d'ailleurs, $s = 1$, $s_h = \iota$, $s_k = \nu$, $s_l = \tau (\iota, \nu, \tau = 0, 2, 3)$, on a

$$(d)\quad \frac{\vartheta_1'(w)}{\vartheta_1(w)} - \frac{\vartheta_\iota'(w)}{\vartheta_\iota(w)} = \frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_\iota(0)}{\vartheta_\nu(0)\,\vartheta_\tau(0)}\,\frac{\vartheta_\nu(w)\,\vartheta_\tau(w)}{\vartheta_\iota(w)\,\vartheta_1(w)}, \qquad (\iota, \nu, \tau = 0, 2, 3).$$

En ajoutant les formules (b), on obtient, d'une part,

$$(1')\qquad \mathfrak{S}_0\,\vartheta^2(x) + \mathfrak{S}_2\,\vartheta_2^2(x) + \mathfrak{S}_3\,\vartheta_3^2(x) = 0.$$

D'autre part, on déduit de l'identité

$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$$

la relation

$$(1)\quad \vartheta^2(w)\,\vartheta^2(x) - \vartheta_1^2(w)\,\vartheta_1^2(x) + \vartheta_2^2(w)\,\vartheta_2^2(x) - \vartheta_3^2(w)\,\vartheta_3^2(x) = 0;$$

d'où il suit, pour $w = 0$,

$$(1^*)\qquad \vartheta^2(0)\,\vartheta^2(x) + \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_2^2(x) - \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_3^2(x) = 0.$$

Si l'on compare cette formule avec la formule ($1'$), on trouve

$$\mathfrak{S}_0 = -\varepsilon.\vartheta^2(0), \qquad \mathfrak{S}_2 = -\varepsilon.\vartheta_2^2(0), \qquad \mathfrak{S}_3 = \varepsilon.\vartheta_3^2(0),$$

et, eu égard aux expressions (c), on a

$$\vartheta_1'(0) = \varepsilon\,\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0).$$

Pour prouver que le facteur ε est indépendant de la quantité q dont $\vartheta_1'(0)$ et $\vartheta(0)$, $\vartheta_2(0)$, $\vartheta_3(0)$ sont fonctions, je différentie deux fois par rapport à w la formule (d), ou plutôt la formule qui en découle, savoir

$$\vartheta_1'(w)\,\vartheta_\iota(w) - \vartheta_\iota'(w)\,\vartheta_1(w) = \frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_\iota(0)}{\vartheta_\nu(0)\,\vartheta_\tau(0)}\,\vartheta_\nu(w)\,\vartheta_\tau(w),$$

$$(\iota, \nu, \tau = 0, 2, 3);$$

puis je pose $w = 0$. Alors on trouve (¹)

$$(e) \qquad \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} - \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} - \frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)} = 0,$$

et comme on a, d'après la définition des fonctions thêta,

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(w, q)}{\partial w^2} = -4q \frac{\partial \vartheta_\alpha(w, q)}{\partial q} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3),$$

la formule (e) devient

$$\frac{\partial \log \dfrac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)}}{\partial q} = \frac{\partial \log \varepsilon}{\partial q} = 0.$$

(¹) Au sujet de cette formule importante on peut consulter : Kœnigsberger, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen*, t. I, p. 381. Leipzig, Teubner. — Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 257. Paris, Gauthier-Villars. — Frobenius, *Journ. de M. Kronecker*, t. XCVIII, p. 247. D'ailleurs, M. Hermite a bien voulu me communiquer, le 16 juillet 1890, la démonstration élégante que voici :

« En employant la notation de Jacobi, on a la formule élémentaire

$$\Theta(x)\,H'(x) - H(x)\,\Theta'(x) = k' H_1(x)\,\Theta_1(x),$$

et j'en tire, pour $x = 0$,

$$\Theta(0)\,H'(0) = k' H_1(0)\,\Theta_1(0).$$

» Ensuite je différentie la formule précédente, ce qui donne

$$\Theta(x)\,H''(x) - H(x)\,\Theta''(x) = k'[H_1(x)\,\Theta_1'(x) + \Theta_1(x)\,H_1'(x)],$$

je divise les deux membres par x, je fais de nouveau $x = 0$, et j'obtiens

$$\Theta(0)\,H'''(0) + H'(0)\,\Theta''(0) = k'[H_1(0)\,\Theta_1''(0) + \Theta_1(0)\,H_1''(0)].$$

» Cela étant, il suffit de diviser membre à membre avec l'égalité

$$\Theta(0)\,H'(0) = k' H_1(0)\,\Theta_1(0),$$

pour avoir la relation

$$\frac{H'''(0)}{H'(0)} - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{\Theta_1''(0)}{\Theta_1(0)} - \frac{H_1''(0)}{H_1(0)} = 0. \text{ »}$$

Donc ε est indépendant de q, et l'on peut en obtenir la valeur, si l'on pose $q = 0$.

Or on a, d'après les définitions des fonctions thêta, pour $q = 0$,

$$\vartheta'_1(0) : \vartheta_2(0) = 1, \qquad \vartheta(0) = 1, \qquad \vartheta_3(0) = 1;$$

donc

$$\varepsilon = 1$$

et enfin

$$(2) \qquad \vartheta'_1(0) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0).$$

A l'aide de cette relation importante, les formules (b) prennent la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\vartheta'_3(x)}{\vartheta_3(x)} - \dfrac{\vartheta'_2(x)}{\vartheta_2(x)} = \vartheta^2(0)\,\dfrac{\vartheta(x)\,\vartheta_1(x)}{\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x)}, \\[2mm] \dfrac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} - \dfrac{\vartheta'_3(x)}{\vartheta_3(x)} = \vartheta_2^2(0)\,\dfrac{\vartheta_2(x)\,\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)\,\vartheta_3(x)}, \\[2mm] \dfrac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} - \dfrac{\vartheta'_2(x)}{\vartheta_2(x)} = \vartheta_3^2(0)\,\dfrac{\vartheta_3(x)\,\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)\,\vartheta_2(x)}, \end{cases}$$

et la formule (d) devient, si l'on change encore w en x,

$$(4) \qquad \frac{\vartheta'_1(x)}{\vartheta_1(x)} - \frac{\vartheta'_\iota(x)}{\vartheta_\iota(x)} = \vartheta_\iota^2(0)\,\frac{\vartheta_\nu(x)\,\vartheta_\tau(x)}{\vartheta_\iota(x)\,\vartheta_1(x)}, \qquad (\iota, \nu, \tau = 0, 2, 3).$$

Ces formules établies, l'identité

$$\frac{\partial a_{3h}}{\partial x} = i a_{3k} a_{3l} (m^x_{sk} - m^x_{sl}) \qquad \begin{pmatrix} h, k, l = 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \end{pmatrix}$$

se change immédiatement dans les relations

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\,\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \dfrac{\vartheta^2(0)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x)}{\vartheta^2(x)}, \\[2mm] \dfrac{d}{dx}\,\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = -\dfrac{\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_3(x)}{\vartheta^2(x)}, \\[2mm] \dfrac{d}{dx}\,\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = -\dfrac{\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)}{\vartheta^2(x)}. \end{cases}$$

Enfin on tire de l'équation (1^*), pour $x = 0$,

$$\vartheta^4(0) + \vartheta_2^4(0) = \vartheta_3^4(0), \tag{6}$$

et si l'on prend, dans l'équation (1), au lieu de w, respectivement $w + \frac{1}{2}\pi$, $w + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} i \log q$, on obtient, pour $w = 0$,

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta^2(0)\vartheta_3^2(x) + \vartheta_2^2(0)\vartheta_1^2(x) &= \vartheta_3^2(0)\vartheta^2(x), \\ \vartheta^2(0)\vartheta_2^2(x) + \vartheta_3^2(0)\vartheta_1^2(x) &= \vartheta_2^2(0)\vartheta^2(x). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ces formules suffisent pour établir l'inversion des intégrales elliptiques de première espèce.

7. *Intégrales elliptiques de première espèce.* — Les formules (7) permettent de poser

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} &= \sqrt{k}\sin\beta, \\ \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} &= \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\beta, \\ \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} &= \frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\beta = \frac{1}{\sqrt{k'}}\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

où

$$\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \sqrt{k}, \qquad \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} = \sqrt{k'} \tag{8*}$$

et, à cause de la formule (6),

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

A l'aide des expressions (8), les formules (5) deviennent

$$\frac{d\beta}{dx} = \vartheta_3^2(0)\Delta\beta \tag{9}$$

ou

$$\vartheta_3^2(0)x = \int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}} = F(\beta) = b.$$

Comme à la valeur $\beta = \frac{\pi}{2}$ correspond la valeur $x = \frac{\pi}{2}$, on a

$$(10) \qquad \vartheta_3^2(0)\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}} = \mathrm{K};$$

d'où il suit

$$\vartheta_3^2(0) = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}, \qquad \vartheta_2^2(0) = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}k, \qquad \vartheta^2(0) = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}k';$$

$$x = \frac{\pi b}{2\mathrm{K}}.$$

Si l'on introduit, d'après Jacobi et Gudermann,

$$\beta = \mathrm{am}\, b; \qquad \sin\beta = \mathrm{sn}\, b, \qquad \cos\beta = \mathrm{cn}\, b, \qquad \Delta\beta = \mathrm{dn}\, b,$$

la formule (9) devient

$$\frac{d\,\mathrm{am}\, b}{db} = \mathrm{dn}\, b;$$

donc

$$(11) \quad \frac{d\,\mathrm{sn}\, b}{db} = \mathrm{cn}\, b\,\mathrm{dn}\, b, \quad \frac{d\,\mathrm{cn}\, b}{db} = -\,\mathrm{sn}\, b\,\mathrm{dn}\, b, \quad \frac{d\,\mathrm{dn}\, b}{db} = -\,k^2\,\mathrm{sn}\, b\,\mathrm{cn}\, b.$$

8. *Théorème relatif aux fonctions elliptiques.* — Les formules données dans le numéro précédent et les formules analogues pour $w = \frac{\pi a}{2\mathrm{K}}$ transforment le théorème I en un autre, relatif aux fonctions elliptiques. Conformément aux quatre cas du théorème I, on obtient aussi quatre systèmes de formules dont je n'établirai que celui qui correspond au premier cas du théorème I, c'est-à-dire aux valeurs

$$e = +1, \qquad \varepsilon = +1; \qquad s = 0, \qquad s_1 = 2, \qquad s_2 = 1, \qquad s_3 = 3.$$

Les trois autres systèmes qui correspondent aux cas 2, 3 et 4 du théorème I en proviennent si l'on y remplace les arguments a et b respectivement par

$$a + i\mathrm{K}', \quad a + \mathrm{K} + i\mathrm{K}', \quad a + \mathrm{K}; \quad b + i\mathrm{K}', \quad b + \mathrm{K} + i\mathrm{K}', \quad b + \mathrm{K},$$

où

$$(12)\qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\beta}}.$$

D'après cela, on déduit du théorème I, si l'on y substitue a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}; p_1, p_2, p_3 par a_{m2}, a_{m3}, a_{m1}; p_2, p_3, p_1, et si l'on pose

$$\begin{aligned} p_h &= p_h^a\, da + p_h^b\, db, \\ v_h &= v_h^a\, da + v_h^b\, db, \end{aligned}$$

le théorème :

III. *Soient a et b deux arguments quelconques, k, k' les modules, pour lesquels*

$$k^2 + k'^2 = 1$$

et $i = \sqrt{-1}$. *Alors les fonctions elliptiques sont liées aux éléments d'un système orthogonal de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}
\frac{v_1^a + i v_2^a}{a_{13} + i a_{23}} &= ik\,\mathrm{sn}(a+b), & \frac{v_1^a - i v_2^a}{a_{13} - i a_{23}} &= ik\,\mathrm{sn}(a-b), \\
\frac{a_{11} + i a_{21}}{a_{13} + i a_{23}} &= \frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}(a+b), & \frac{a_{11} - i a_{21}}{a_{13} - i a_{23}} &= -\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}(a-b), \\
\frac{a_{12} + i a_{22}}{a_{13} + i a_{23}} &= \frac{i}{k'}\,\mathrm{dn}(a+b); & \frac{a_{12} - i a_{22}}{a_{13} - i a_{23}} &= -\frac{i}{k'}\,\mathrm{dn}(a-b);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= -\frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b, \\
a_{32} &= -\frac{ik}{k'}\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b, \\
a_{33} &= -k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1^a - a_{31} v_3^a &= -i\frac{k^2}{k'}\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b = -i\frac{\partial a_{31}}{\partial b}, \\
p_2^a - a_{32} v_3^a &= \frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b = -i\frac{\partial a_{32}}{\partial b}, \\
p_3^a - a_{33} v_3^a &= ik\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b = -i\frac{\partial a_{33}}{\partial b}.
\end{aligned}$$

Dans ces expressions on peut changer l'indice supérieur a en b, si l'on change aussi l'argument a en b.

Pour montrer une seule application immédiate de ce fécond théorème qui fournit la théorie complète des fonctions elliptiques, je vais en déduire les théorèmes suivants.

9. *Théorèmes d'addition des fonctions elliptiques.* — Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de l'expression $\dfrac{v_1^a + iv_2^a}{a_{13} + ia_{23}}$ par $a_{13} - ia_{23}$, on obtient, eu égard aux identités (5_1) et $(5'_1)$ du n° **5**,

$$\frac{v_1^a + iv_2^a}{a_{13} + ia_{23}} = \frac{a_{13} v_1^a + a_{23} v_2^a - i\,(a_{23} v_1^a - a_{13} v_2^a)}{1 - a_{33}^2} = -i\,\frac{\dfrac{\partial a_{33}}{\partial b} + \dfrac{\partial a_{33}}{\partial a}}{1 - a_{33}^2}$$

ou, d'après le théorème III,

$$\operatorname{sn}(a + b) = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}.$$

D'une façon analogue, si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de l'expression $\dfrac{v_1^a + iv_2^a}{a_{13} + ia_{23}}$ par $v_1^a - iv_2^a$, on a

$$\frac{v_1^a + iv_2^a}{a_{13} + ia_{23}} = \frac{v_1^a v_1^a + v_2^a v_2^a}{-i\left(\dfrac{\partial a_{33}}{\partial b} - \dfrac{\partial a_{33}}{\partial a}\right)}.$$

Or, en élevant au carré les trois dernières formules établies dans le théorème III, on trouve

$$(p_1^a - a_{31} v_3^a)^2 + (p_2^a - a_{32} v_3^a)^2 + (p_3^a - a_{33} v_3^a)^2 = -k^2(\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b),$$

et comme on a, d'après les identités (5_1),

$$p_1^a p_1^a + p_2^a p_2^a + p_3^a p_3^a = v_1^a v_1^a + v_2^a v_2^a + v_3^a v_3^a,$$
$$a_{31} p_1^a + a_{32} p_2^a + a_{33} p_3^a = v_3^a,$$

il résulte

$$v_1^a v_1^a + v_2^a v_2^a = -k^2(\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b).$$

Par conséquent, on obtient

$$\operatorname{sn}(a+b) = \frac{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}.$$

En réunissant ces deux formules avec les deux autres que l'on obtient, si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de l'expression $\frac{v_1^a + iv_2^a}{a_{13} + ia_{23}}$ par $a_{11} - ia_{21}$ et par $a_{12} - ia_{22}$, on a enfin

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sn}(a+b) &= \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b} \\ &= \frac{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \\ &= \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b} \\ &= \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b}. \end{aligned} \right.$$

D'une manière tout à fait analogue, on déduit des expressions $\frac{a_{11} + ia_{21}}{a_{13} + ia_{23}}$, $\frac{a_{12} + ia_{22}}{a_{13} + ia_{23}}$, en multipliant leurs numérateurs et dénominateurs par $a_{11} - ia_{21}$, $a_{12} - ia_{22}$, $a_{13} - ia_{23}$, $v_1^a - v_2^a$, les relations suivantes :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{cn}(a+b) &= \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b} \\ &= \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \\ &= \frac{\operatorname{dn}^2 a \operatorname{dn}^2 b - k'^2}{k^2 (\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b)} \\ &= \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b}; \end{aligned} \right.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{dn}(a+b) &= \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b} \\ &= \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \\ &= \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b}{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b} \\ &= \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 a \operatorname{cn}^2 b + k'^2}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b}. \end{aligned} \right.$$

10. *Intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèce.* — D'après l'identité ($5'_1$), on a

$$\frac{\partial v_3^w}{\partial x} - \frac{\partial v_3^x}{\partial w} = -v_1^w v_2^x + v_2^w v_1^x = \frac{(v_1^w + iv_2^w)(v_1^x - iv_2^x) - (v_1^w - iv_2^w)(v_1^x + iv_2^x)}{2i}.$$

Or le théorème I fournit les expressions

$$v_3^w = -i\frac{\vartheta_s'(x)}{\vartheta_s(x)} - i\frac{\partial \log \mathfrak{F}}{\partial w}, \qquad v_3^x = -i\frac{\vartheta_s'(w)}{\vartheta_s(w)} - i\frac{\partial \log \mathfrak{F}}{\partial x}$$

$$(s = 0, 1, 2, 3),$$

$$v_1^w + iv_2^w = \quad v_1^x + iv_2^x \quad = e\mathfrak{F}\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(w+x)}{\vartheta_s(w)\vartheta_s(x)},$$

$$v_1^w - iv_2^w = -(v_1^x - iv_2^x) = (-1)^{s+1} e\mathfrak{F}^{-1}\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(w-x)}{\vartheta_s(w)\vartheta_s(x)};$$

par conséquent, on a

$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_s'(x)}{\vartheta_s(x)} - \frac{d}{dw}\frac{\vartheta_s'(w)}{\vartheta_s(w)} = (-1)^s\frac{\vartheta_1'^2(0)\vartheta_1(w+x)\vartheta_1(w-x)}{\vartheta_s^2(w)\vartheta_s^2(x)}$$

$$(s = 0, 1, 2, 3).$$

Comme on a aussi

$$\frac{d}{dw}\frac{\vartheta_s'(w)}{\vartheta_s(w)} = \frac{\vartheta_s''(w)}{\vartheta_s(w)} - \left[\frac{\vartheta_s'(w)}{\vartheta_s(w)}\right]^2,$$

on tire de la dernière formule, pour $s = 0$ et $w = 0$,

$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} - \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} = -\frac{\vartheta_1'^2(0)\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(0)\vartheta^2(x)}$$

ou, d'après les formules (2), (8), (8*),

$$\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{d}{dx}\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} = \vartheta_3^4(0)(1 - \Delta^2\beta).$$

En multipliant cette relation (*voir* n° **7**) par

$$(16) \qquad dx = \frac{d\beta}{\vartheta_3^2(0)\Delta\beta} = \frac{\pi}{2K}\frac{d\beta}{\Delta\beta}$$

et en intégrant, on obtient

$$(17) \qquad \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}x - \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} = \frac{2K}{\pi}[F(\beta) - E(\beta)],$$

où

$$E(\beta) = \int_0^\beta \Delta\beta\, d\beta. \tag{18}$$

Pour déduire le théorème d'addition de l'intégrale de deuxième espèce et pour établir en même temps l'inversion des intégrales elliptiques de troisième espèce, j'emploie les identités ($\mathfrak{J}'_4$).

On déduit de ces identités d'abord

$$d(a_{1h} \pm ia_{2h}) = \pm i(a_{1h} \pm ia_{2h})\, v_3 \mp ia_{3h}(v_1 \pm iv_2);$$

en divisant par $a_{1h} \pm ia_{2h}$, on obtient de plus

$$(\mathfrak{J}'_3) \qquad d\log(a_{1h} \pm ia_{2h}) = \pm iv_3 \mp ia_{3h}\frac{v_1 \pm iv_2}{a_{1h} \pm ia_{2h}}$$

et

$$d\log\frac{a_{1h} - ia_{2h}}{a_{1h} + ia_{2h}} = -2iv_3 + ia_{3h}\left(\frac{v_1 + iv_2}{a_{1h} + ia_{2h}} + \frac{v_1 - iv_2}{a_{1h} - ia_{2h}}\right);$$

d'où suit enfin, au moyen de l'identité ($\mathfrak{J}_1$),

$$(\mathfrak{J}'_4) \qquad \tfrac{1}{2}d\log\frac{a_{1h} - ia_{2h}}{a_{1h} + ia_{2h}} + iv_3 = ia_{3h}\frac{p_3 - a_{3h}v_3}{1 - a_{3h}^2}.$$

Si l'on applique [1] aux premiers membres des identités ($\mathfrak{J}'_3$), ($\mathfrak{J}'_4$) le théorème I et aux seconds membres de ces identités le théorème III,

---

[1] Pour faire cette application, on se souviendra que les quantités a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}; p_1, p_2, p_3 dans le théorème I correspondent aux quantités a_{m2}, a_{m3}, a_{m1}; p_2, p_3, p_1 dans le théorème III. Par conséquent, on prendra, dans les premiers membres des identités ($\mathfrak{J}'_3$), ($\mathfrak{J}'_4$), auxquels on applique le théorème I, l'indice $h = 2$, et dans les seconds membres, auxquels on applique le théorème III, l'indice $h = 3$.

J'ai introduit ce léger changement de la notation pour obtenir un accord absolu, d'une part, entre les formules du théorème I et les formules de mes recherches antérieures (*Comptes rendus*, t. CVII, p. 859, 901; *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIII) dont le théorème I forme la généralisation; et, d'autre part, entre les formules des théorèmes II et III. Dans les formules du théorème II, relatives aux fonctions σ_h, ce changement de la notation m'a paru nécessaire, afin d'obtenir les mêmes indices pour les coefficients du système orthogonal et pour les fonctions sigma.

on obtient, sans aucun calcul, les deux formules suivantes

$$(19)\qquad -\frac{\vartheta'(w+x)}{\vartheta(w+x)}+\frac{\vartheta'(w)}{\vartheta(w)}+\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}=\frac{2K}{\pi}k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{sn}(a+b),$$

$$(20)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\frac{\vartheta(x-w)}{\vartheta(x+w)}+\frac{\vartheta'(w)}{\vartheta(w)}=\frac{2K}{\pi}\,\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}.$$

On déduit des formules (17) et (19)

$$(21)\qquad \mathrm{E}(\operatorname{am}a)+\mathrm{E}(\operatorname{am}b)-\mathrm{E}[\operatorname{am}(a+b)]=k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{sn}(a+b),$$

et de la formule (20), par l'intégration,

$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x-w)}{\vartheta(x+w)}+\frac{\vartheta'(w)}{\vartheta(w)}x=k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\int_0^b\frac{\operatorname{sn}^2b\,db}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},$$

où

$$x=\frac{\pi b}{2K},\qquad w=\frac{\pi a}{2K}.$$

La première de ces formules représente le théorème d'addition des intégrales elliptiques de deuxième espèce, et la seconde formule établit l'inversion des intégrales elliptiques de troisième espèce. Pour donner à cette formule une autre forme, je change légèrement la notation, en écrivant au lieu de b la lettre $\mathfrak{u}$, et en posant

$$\vartheta\left(\frac{\pi\mathfrak{u}}{2K}\right)=\Theta(\mathfrak{u}),\qquad \vartheta\left(\frac{\pi a}{2K}\right)=\Theta(a),\qquad \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}=\mathrm{Z}(a).$$

Alors la dernière formule prend la forme

$$(22)\qquad \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(\mathfrak{u}-a)}{\Theta(\mathfrak{u}+a)}+\mathrm{Z}(a)\mathfrak{u}=k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\int_0^{\mathfrak{u}}\frac{\operatorname{sn}^2\mathfrak{u}\,d\mathfrak{u}}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2\mathfrak{u}}=\Pi(\mathfrak{u},a),$$

d'où résulte

$$(23)\qquad \Pi(\mathfrak{u},a)-\Pi(a,\mathfrak{u})=\mathfrak{u}\,\mathrm{Z}(a)-a\,\mathrm{Z}(\mathfrak{u}).$$

Si l'on pose dans la formule (22) $\mathfrak{u}$ successivement égal à $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2$, on obtient

$$(24)\qquad \Pi(\mathfrak{u}_1,a)+\Pi(\mathfrak{u}_2,a)-\Pi(\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2,a)=\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(\mathfrak{u}_1-a)\Theta(\mathfrak{u}_2-a)\Theta(\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2+a)}{\Theta(\mathfrak{u}_1+a)\Theta(\mathfrak{u}_2+a)\Theta(\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2-a)}.$$

Le second membre de cette relation représente la seule expression qui ne peut être transformée immédiatement au moyen des théorèmes précédents, comme contenant plus de deux arguments. Pour transformer ce second membre, je reprends les formules fondamentales ($\mathcal{A}$), établies dans le n° **2.** Les deux premières formules ($\mathcal{A}$) peuvent être résumées ainsi :

$$\vartheta(w)\vartheta(x)+e\,\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)=\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2,$$

où $e=\pm 1$ et

$$\mathfrak{L}_1=\vartheta_3(w+x,\,q^2)-e\,\vartheta_2(w+x,\,q^2),$$
$$\mathfrak{L}_2=\vartheta_3(w-x,\,q^2)+e\,\vartheta_2(w-x,\,q^2).$$

D'une façon analogue, on a

$$\begin{aligned}
\vartheta(y)\vartheta(z)\;\;+e\,\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)\;\;&=\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2,\\
\vartheta(w'')\vartheta(x'')+e\,\vartheta_1(w'')\vartheta_1(x'')&=\mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_2,\\
\vartheta(y'')\vartheta(z'')+e\,\vartheta_1(y'')\vartheta_1(z'')&=\mathfrak{L}_2\mathfrak{M}_1,
\end{aligned}$$

où les expressions $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ proviennent des expressions $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, si l'on y échange w, x en y, z, et où

$$\left\{\begin{aligned}
2w''&=w+x+y-z, &\quad 2y''&=\;\;w-x+y+z,\\
2x''&=w+x-y+z, &\quad 2z''&=-w+x+y+z.
\end{aligned}\right.$$

Comme $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2\,.\,\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2=\mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_2\,.\,\mathfrak{L}_2\mathfrak{M}_1$, le produit

$$[\vartheta(w)\vartheta(x)+e\vartheta_1(w)\vartheta_1(x)][\vartheta(y)\vartheta(z)+e\,\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)]$$

ne change pas si l'on y remplace w, x, y, z par w'', x'', y'', z'' [1]. Par

---

[1] On reconnaît immédiatement que cette proposition ne diffère que légèrement du théorème fondamental de Jacobi (*Œuvres complètes*, t. I, p. 506), communiqué dans une lettre à M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. **32**, p. 177; *Œuvres complètes*, t. II, p. 116) et devenu la base d'une théorie élémentaire des fonctions elliptiques (*Œuvres complètes*, t. I, p. 499). La démonstration, donnée au texte, met en évidence que *ce célèbre théorème se déduit d'un simple changement des facteurs d'un produit algébrique;* j'ajoute que l'on peut déduire, d'une façon analogue, aussi sa généralisation relative aux fonctions thêta de deux

conséquent, si l'on pose $w'' = 0$, d'où suit

$$x'' = w + x, \qquad y'' = w + y, \qquad z'' = x + y, \qquad z = w + x + y,$$

on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(0)\mathfrak{S}(w+x)\mathfrak{S}(w+y)\mathfrak{S}(x+y) = {} & \mathfrak{S}(w)\mathfrak{S}(x)\mathfrak{S}(y)\mathfrak{S}(w+x+y) \\ & + \mathfrak{S}_1(w)\mathfrak{S}_1(x)\mathfrak{S}_1(y)\mathfrak{S}_1(w+x+y)\end{aligned}$$

et, en remplaçant x et y par $-x$ et $-y$, on trouve par division

$$\frac{\mathfrak{S}(w-x)\mathfrak{S}(w-y)}{\mathfrak{S}(w+x)\mathfrak{S}(w+y)} = \frac{\mathfrak{S}(w)\mathfrak{S}(x)\mathfrak{S}(y)\mathfrak{S}(w-x-y) + \mathfrak{S}_1(w)\mathfrak{S}_1(x)\mathfrak{S}_1(y)\mathfrak{S}_1(w-x-y)}{\mathfrak{S}(w)\mathfrak{S}(x)\mathfrak{S}(y)\mathfrak{S}(w+x+y) + \mathfrak{S}_1(w)\mathfrak{S}_1(x)\mathfrak{S}_1(y)\mathfrak{S}_1(w+x+y)}.$$

En prenant dans cette formule

$$w = \frac{\pi a}{2K}, \qquad x = \frac{\pi u_1}{2K}, \qquad y = \frac{\pi u_2}{2K},$$

on en déduit

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Theta(u_1 - a)\Theta(u_2 - a)\Theta(u_1 + u_2 + a)}{\Theta(u_1 + a)\Theta(u_2 + a)\Theta(u_1 + u_2 - a)} \\ & \quad = \frac{1 - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn}(u_1 + u_2 - a)}{1 + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn}(u_1 + u_2 + a)} = \mathfrak{P}(u_1, u_2, a). \end{aligned} \right.$$

Donc le théorème d'addition des intégrales elliptiques de troisième espèce, relatif aux arguments u_1, u_2, est représenté par la formule

$$(26) \quad \Pi(u_1, a) + \Pi(u_2, a) - \Pi(u_1 + u_2, a) = \tfrac{1}{2}\log \mathfrak{P}(u_1, u_2, a).$$

D'une façon analogue, on obtient, à l'aide des formules (21), (22), (23) la relation

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Pi(u, a_1) + \Pi(u, a_2) - \Pi(u, a_1 + a_2) \\ & \quad = u k^2 \operatorname{sn} a_1 \operatorname{sn} a_2 \operatorname{sn}(a_1 + a_2) + \tfrac{1}{2}\log \mathfrak{P}(a_1, a_2, u), \end{aligned} \right.$$

---

arguments, dont M. Rosenhain a tiré la théorie des fonctions hyperelliptiques de première espèce; et même les théorèmes corrélatifs pour les fonctions thêta d'un nombre quelconque d'arguments (*voir* mes travaux : *Comptes rendus*, t. CIV, p. 1094, 1255; *Math. Ann.*, t. XXVIII, p. 493; t. XXX, p. 571).

qui représente le théorème d'addition des intégrales elliptiques de troisième espèce, relatif aux paramètres.

11. *Fonction* $\wp(u)$. *Relations entre les fonctions sigma* (1).

Après avoir établi les formules fondamentales, relatives aux fonctions thêta, il reste à examiner les fonctions sigma. Comme ces recherches sont tout à fait analogues aux précédentes, je me borne à déduire les relations les plus importantes, en introduisant la fonction $\wp(u)$ de M. Weierstrass.

D'après le théorème II, on a

$$v_3 = -i\left[\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}\,du + \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\,dv + d\log\mathfrak{g}\right],$$

d'où suit

$$d\log\mathfrak{g} = \left[iv_3^u - \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}\right]du + \left[iv_3^v - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\right]dv.$$

Comme le premier membre de cette relation est une différentielle exacte, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[iv_3^u - \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[iv_3^v - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\right].$$

Si l'on introduit, d'après M. Weierstrass, la fonction $\wp(u)$, définie par la formule

$$\wp(u) = -\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2} = -\frac{d}{du}\,\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)},$$

on tire de la dernière relation

$$i\left(\frac{\partial v_3^u}{\partial v} - \frac{\partial v_3^v}{\partial u}\right) = \wp(u) - \wp(v).$$

Or on a, d'après l'identité $(5'_2)$,

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial v_3^u}{\partial v} - \frac{\partial v_3^v}{\partial u}\right) &= -i(v_1^u v_2^v - v_2^u v_1^v) \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(v_1^u + iv_2^u)(v_1^v - iv_2^v) - (v_1^u - iv_2^u)(v_1^v + iv_2^v)\right] \end{aligned}$$

(1) *Voir* Schwarz, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*; Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, 1886.

et, d'après le théorème II,

$$v_1^u + iv_2^u = \quad v_1^v + iv_2^v \quad = \mathcal{G} \quad \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)\sigma(v)},$$

$$v_1^u - iv_2^u = -(v_1^v - iv_2^v) = \mathcal{G}^{-1} \frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u)\sigma(v)};$$

donc on a la relation fondamentale ([1])

$$(28) \qquad \wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}.$$

Si l'on pose maintenant

$$(29) \qquad \omega = \lambda K, \qquad \omega' = \lambda K' i,$$

λ étant une constante, on a (*voir* Jacobi, *Œuvr. compl.*, t. I, p. 525)

$$\frac{\pi\omega'}{2\omega} = \frac{\pi K' i}{2K} = -\tfrac{1}{2} i \log q.$$

A l'aide de cette formule et à l'aide des relations

$$\mathfrak{S}_1(w + \tfrac{1}{2}\pi) = \mathfrak{S}_2(w), \qquad \mathfrak{S}_1(w - \tfrac{1}{2} i \log q) = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-wi} \mathfrak{S}(w),$$

$$\mathfrak{S}_1(w + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2} i \log q) = q^{-\frac{1}{4}} e^{-wi} \mathfrak{S}_3(w),$$

on déduit des définitions $(\mathfrak{D})$ des fonctions sigma, établies dans le n° **4**, les définitions suivantes

$$(\mathfrak{D}_1) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_1(u) &= e^{-\eta u} \frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma(\omega)} = -e^{\eta u} \frac{\sigma(u-\omega)}{\sigma(\omega)}, \\ \sigma_2(u) &= e^{-\eta'' u} \frac{\sigma(u+\omega'')}{\sigma(\omega'')} = -e^{\eta'' u} \frac{\sigma(u-\omega'')}{\sigma(\omega'')}, \\ \sigma_3(u) &= e^{-\eta' u} \frac{\sigma(u+\omega')}{\sigma(\omega')} = -e^{\eta' u} \frac{\sigma(u-\omega')}{\sigma(\omega')}, \end{aligned} \right.$$

([1]) Si l'on emploie au lieu des fonctions sigma, les fonctions thêta, les identités dont j'ai fait usage fournissent les formules que M. Scheibner a données dans un très beau Mémoire (voir *Math. Ann.*, t. XXXIV, p. 502).

où

$$\omega'' = \omega + \omega', \qquad \eta'' = \eta + \eta', \qquad \eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}, \qquad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}.$$

Si l'on introduit de plus, d'après M. Weierstrass,

$$s = \wp(u), \qquad e_1 = \wp(\omega), \qquad e_2 = \wp(\omega + \omega'), \qquad e_3 = \wp(\omega'),$$

au moyen des définitions $(\mathfrak{D}_1)$, on déduit de la formule (28)

$$(30) \quad s - e_h = \frac{\sigma_h^2(u)}{\sigma^2(u)}, \qquad \sqrt{\wp(u) - e_h} = \frac{\sigma_h(u)}{\sigma(u)} \qquad (h = 1, 2, 3).$$

Ceci établi, je pose pour l'instant

$$\mathfrak{M}_h = \frac{\sigma_h'(v)}{\sigma_h(v)}\, du + \frac{\sigma_h'(u)}{\sigma_h(u)}\, dv + d \log \mathcal{G};$$

alors on a (*voir* n° **4**)

$$\begin{aligned} p_h &= -\, i a_{3h} \mathfrak{M}_h, \\ da_{3h} &= \quad i a_{3k} a_{3l} (\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_l), \\ d \log a_{3h} &= i\, \frac{a_{3k} a_{3l}}{a_{3h}} (\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_l), \end{aligned}$$

et, par conséquent, d'après le théorème II,

$$(\alpha') \quad \frac{\sigma_h'(u)}{\sigma_h(u)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = -\frac{\varepsilon_k \varepsilon_l}{\varepsilon_h} \frac{\sigma_k(u)\, \sigma_l(u)\, \sigma_k(v)\, \sigma_l(v)}{\sigma_h(u)\, \sigma(u)\, \sigma_h(v)\, \sigma(v)} \left[\frac{\sigma_k'(v)}{\sigma_k(v)} - \frac{\sigma_l'(v)}{\sigma_l(v)} \right].$$

Pour $u = 0$, on en tire

$$(\alpha) \qquad \frac{\sigma_k'(v)}{\sigma_k(v)} - \frac{\sigma_l'(v)}{\sigma_l(v)} = \frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_k \varepsilon_l} \frac{\sigma_h(v)\, \sigma(v)}{\sigma_k(v)\, \sigma_l(v)},$$

et, si l'on porte cette formule dans la relation (α'), on obtient

$$(31) \qquad \frac{\sigma_h'(u)}{\sigma_h(u)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = -\frac{\sigma_k(u)\, \sigma_l(u)}{\sigma_h(u)\, \sigma(u)}.$$

Si l'on remplace dans cette formule l'indice h par k et l et si l'on retranche les deux formules qui en proviennent, on a

$$\frac{\sigma'_k(u)}{\sigma_k(u)} - \frac{\sigma'_l(u)}{\sigma_l(u)} = -\frac{\sigma_h(u)}{\sigma(u)}\left[\frac{\sigma_l^2(u)-\sigma_k^2(u)}{\sigma_k(u)\sigma_l(u)}\right],$$

ou, d'après la formule (30),

$$(32)\qquad \frac{\sigma'_k(u)}{\sigma_k(u)} - \frac{\sigma'_l(u)}{\sigma_l(u)} = -(e_k - e_l)\frac{\sigma_h(u)\sigma(u)}{\sigma_k(u)\sigma_l(u)}.$$

En comparant cette formule avec la formule (α), on a

$$\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_k\varepsilon_l} = -(e_k - e_l),$$

d'où suit

$$(33)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_1-e_2}}, \\ \varepsilon_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_2-e_3}}, \\ \varepsilon_3 = \dfrac{1}{\sqrt{e_2-e_3}\sqrt{e_3-e_1}}, \end{cases}$$

les racines carrées prises avec le signe positif.

A l'aide de la formule (31), on obtient encore

$$(34)\qquad \frac{d}{du}\frac{\sigma_h(u)}{\sigma(u)} = -\frac{\sigma_k(u)\sigma_l(u)}{\sigma^2(u)},$$

$$(35)\qquad p''_h - a_{3h}\rho''_3 = -\frac{\varepsilon_h\sigma_k(u)\sigma_l(u)}{\sigma^2(u)}\frac{\sigma_h(v)}{\sigma(v)} = -i\frac{\partial a_{3h}}{\partial v}.$$

Eu égard aux formules (30), la formule (34) prend les formes

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds}{du} = -2\sqrt{(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}, \\ \wp'(u)^2 = 4[\wp(u)-e_1][\wp(u)-e_2][\wp(u)-e_3]. \end{cases}$$

D'après le théorème II, on a

$$\frac{a_{1h}+ia_{2h}}{v_1''+iv_2''}=-\varepsilon_h\frac{\sigma_h(u+v)}{\sigma(u+v)}=-\varepsilon_h\sqrt{p(u+v)-e_h},$$

$$\begin{aligned} v_1''v_1''+v_2''v_2'' &= (v_1''+iv_2'')(v_1''-iv_2'') \\ &= \frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}=-[p(u)-p(v)]. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'identité (*voir* n° **9**)

$$\frac{a_{1h}+ia_{2h}}{v_1''+iv_2''}=\frac{-i\left(\dfrac{\partial a_{3h}}{\partial v}-\dfrac{\partial a_{3h}}{\partial u}\right)}{v_1''v_1''+v_2''v_2''}$$

se transforme, eu égard d'ailleurs aux formules (30) et (35), en la suivante

$$\begin{aligned} &\sqrt{p(u+v)-e_h} \\ &= \frac{\sqrt{[p(u)-e_h][p(v)-e_k][p(v)-e_l]}-\sqrt{[p(v)-e_h][p(u)-e_k][p(u)-e_l]}}{p(u)-p(v)} \end{aligned}$$

qui représente, sous une forme irrationnelle, le théorème d'addition pour la fonction $p(u)$. En élevant cette formule au carré, on trouve, après quelques calculs simples,

$$p(u+v)=\frac{1}{4}\left[\frac{p'(u)-p'(v)}{p(u)-p(v)}\right]^2-p(u)-p(v)+(e_1+e_2+e_3).$$

Le premier membre de la formule (36)

$$\frac{ds}{du}=-2\sqrt{(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}$$

ne change pas si l'on ajoute à s une constante. Or on peut déterminer cette constante de façon que la forme $(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)$ soit une forme réduite, c'est-à-dire que $e_1+e_2+e_3$ soit égal à zéro. Par conséquent on peut supposer que

$$e_1+e_2+e_3=0.$$

Alors le théorème d'addition de la fonction $\wp(u)$ prend la forme plus simple

$$(37)\qquad \wp(u+v)+\wp(u)+\wp(v)=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right]^2,$$

et la formule (36) devient

$$(38)\qquad du=-\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}},$$

où

$$(39)\qquad \left\{\begin{array}{c} e_1+e_2+e_3=0, \\ e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2=-\frac{1}{2}(e_1^2+e_2^2+e_3^2)=-\frac{1}{4}g_2, \\ e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3. \end{array}\right.$$

D'après les définitions $(\mathfrak{O})$ (*voir* n° **4**), on a

$$(\mathfrak{O}_2)\qquad \frac{\sigma_h(u)}{\sigma(u)}=\frac{\pi}{2\omega}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_\nu(0)}\frac{\vartheta_\nu(w)}{\vartheta_1(w)},$$

où

$$\omega=\lambda K,\qquad w=\frac{u\pi}{2\omega}=\frac{1}{\lambda}\frac{\pi u}{2K},$$

et où aux indices $h=1, 2, 3$ correspondent respectivement les indices $\nu=2, 3, 0$. Par conséquent, si l'on prend $h=3, \nu=0$, $u=\omega$, $w=\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\frac{\sigma_3(\omega)}{\sigma(\omega)}=\frac{1}{\lambda}\frac{\pi}{2K}\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\vartheta(0)\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\vartheta_3^2(0)}\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)\vartheta_2(0)}$$

ou, d'après la formule (2) (n° **6**),

$$\frac{\sigma_3(\omega)}{\sigma(\omega)}=\frac{1}{\lambda}$$

et, d'après la formule (30),

$$\sqrt{e_1-e_3}=\frac{1}{\lambda};$$

donc la formule (29) devient

$$(40)\qquad \omega\sqrt{e_1-e_3}=\mathrm{K},\qquad \omega'\sqrt{e_1-e_3}=\mathrm{K}'i.$$

Au moyen de cette formule, la définition $(\mathfrak{D}_2)$ donne, pour $h=3$, $\nu=0$,

$$\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}=\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\mathfrak{S}_2(0)}{\mathfrak{S}_3(0)}\,\frac{\mathfrak{S}\left(\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}\sqrt{e_1-e_3}\right)}{\mathfrak{S}_1\left(\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}\sqrt{e_1-e_3}\right)}=\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\operatorname{sn}(u\sqrt{e_1-e_3})}$$

(*voir* n° **7**).

En prenant encore $h=1$, $\nu=2$; $h=2$, $\nu=3$, on déduit de la définition $(\mathfrak{D}_2)$, au moyen des formules, établies dans le n° **7**,

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned}\operatorname{sn}(u\sqrt{e_1-e_3},\ k)&=\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\mathrm{p}(u)-e_3}},\\ \operatorname{cn}(u\sqrt{e_1-e_3},\ k)&=\frac{\sqrt{\mathrm{p}(u)-e_1}}{\sqrt{\mathrm{p}(u)-e_3}},\\ \operatorname{dn}(u\sqrt{e_1-e_3},\ k)&=\frac{\sqrt{\mathrm{p}(u)-e_2}}{\sqrt{\mathrm{p}(u)-e_3}},\end{aligned}\right.$$

où j'ai ajouté, dans la notation des fonctions elliptiques, le module dont elles dépendent.

Au moyen de la définition $\operatorname{dn}^2 a=1-k^2\operatorname{sn}^2 a$, on déduit encore des formules (41)

$$(42)\qquad k=\frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}},\qquad k'=\frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}}.$$

Enfin comme $\operatorname{sn}(u\sqrt{e_1-e_3},\ k)$ s'annule pour $u=0$, il résulte de la première formule (41), que $\mathrm{p}(u)=s$ devient ∞ pour $u=0$; donc on tire de la formule (38)

$$(43)\qquad u=\int_s^\infty\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}.$$

L'expression différentielle

$$\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}$$

peut être transformée, au moyen de la substitution

$$s = \frac{\delta y - \beta}{\alpha - \gamma y}, \qquad y = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta},$$

α, β, γ, δ étant des constantes, en l'expression

$$\frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

où

$$\begin{aligned} f(y) &= \mathcal{A} y^4 + 4\mathcal{B} y^3 + 6\mathcal{C} y^2 + 4\mathcal{D} y + \mathcal{E} \\ &= \mathcal{A}(y-a)(y-b)(y-c)(y-d). \end{aligned}$$

Dans une lettre, datée du 6 septembre 1887, dont M. Hermite a bien voulu m'honorer, l'illustre géomètre a établi pour l'expression y plusieurs formes bien élégantes; on les trouve dans une Note publiée dans le tome V de ce Journal, page 73, formules (8), (9), (10).

12. *Fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Remarques finales.* — Dans les recherches précédentes, ni la fonction $\mathfrak{F}$ du théorème I, ni la fonction $\mathcal{G}$ du théorème II n'ont joué un rôle essentiel. Cependant pour l'examen de problèmes plus élevés, il est important que des fonctions quelconques entrent dans les formules des théorèmes cités. Pour en donner un exemple, je vais aborder rapidement les fonctions doublement périodiques de seconde espèce, découvertes par M. Hermite.

Dans son admirable Ouvrage : *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (Paris, Gauthier-Villars; 1885), M. Hermite, en examinant le problème de la rotation (voir *loc. cit.*, nos X,..., XX), a introduit (à partir du n° XXIII) les fonctions doublement périodiques de seconde espèce

$$\Phi_s = \frac{i\theta'_1(0)\,\theta_s(u+a)\,e^{\lambda u+\nu}}{\sigma\theta_{1-s}(a)\,\theta_0(u)} \qquad (s = 0, 1, 2, 3).$$

Dans cette expression λ et ν sont des constantes; σ est une racine quatrième de l'unité et les fonctions θ sont définies par les équations

$$\theta_s(u) = \vartheta_s(x), \qquad \theta_s(a) = \vartheta_s(w), \qquad x = \frac{2K}{\pi} u, \qquad w = \frac{2K}{\pi} a.$$

Si l'on prend $s = 1$, on a

$$\Phi_1 = \frac{i\theta'_1(0)\,\theta_1(u+a)\,e^{\lambda u+\nu}}{\theta_0(a)\,\theta_0(u)},$$

expression qui met en évidence que Φ_1 devient égal à la quantité $v_1^u + iv_2^u$ du théorème I, si l'on y pose $s = 0$, $e = 1$, $w = \text{const.}$, $dw = 0$, et

$$\mathfrak{I} = ie^{\lambda u+\nu}.$$

De plus on voit que, dans ce cas ([1]),

$$iv_3^u = \lambda + D_a \log \theta_0(a) = \varepsilon_1,$$

et que les quantités $a_{11} + ia_{21}$, $a_{12} + ia_{22}$, $a_{13} + ia_{23}$ deviennent, sauf des constantes, les fonctions Φ_3, Φ_0, Φ_2. Enfin, on voit que les coefficients a_{31}, a_{32}, a_{33} et, par conséquent, aussi les quantités p_1^u, p_2^u, p_3^u deviennent, sauf des constantes, égales aux quantités $U_1 = ik\,\mathrm{cn}\,u$, $U_2 = k\,\mathrm{sn}\,u$, $U_3 = i\,\mathrm{dn}\,u$, introduites par M. Hermite (voir *loc. cit.*, n° XXV).

D'une façon analogue, on obtient, en augmentant convenablement l'argument w ou a, la proposition plus générale :

Les fonctions doublement périodiques de seconde espèce Φ_s, Φ_{1-s}, Φ_{2+s}, Φ_{3-s} $(s = 0, 1, 2, 3)$, *où les indices inférieurs sont pris suivant le module* 4, *et les expressions* ε_s, U_1, U_2, U_3, *découvertes et introduites par M. Hermite dans sa théorie desdites fonctions, sont proportionnelles aux éléments d'un système orthogonal, savoir :* $v_1^u + iv_2^u$, $a_{12} + ia_{22}$, $a_{11} + ia_{21}$, $a_{13} + ia_{23}$; v_3^u; a_{31} *ou* p_1^u, a_{32} *ou* p_2^u, a_{33} *ou* p_3^u.

([1]) HERMITE, *loc. cit.*, n° XXIII.

La proposition précédente n'est pas liée seulement aux importants *résultats* de M. Hermite, mais encore plus étroitement aux ingénieuses *méthodes* de cet illustre géomètre.

En poursuivant la voie, ouverte par Jacobi pour la résolution du problème de la rotation d'un corps solide, M. Hermite a réussi à exprimer, sous une forme extrêmement élégante, les neuf cosinus a_{mn} des angles formés par les angles rectangulaires fixes et mobiles et les composantes de la vitesse de rotation $p, q, r; v, v', v''$ au moyen des fonctions thêta. Dans ces expressions entrent deux arguments, dont l'un reste constant et dont l'autre est une fonction linéaire du temps. En sachant par mes recherches, relatives aux fonctions thêta de deux arguments (*Journal de Borchardt*, t. 94; *Comptes rendus*, 1887), que les produits de ces fonctions forment les seize coefficients d'un système orthogonal, *quelles que soient les deux paires d'arguments qui y entrent,* j'ai été conduit à examiner la question, si les résultats de M. Hermite restent encore valables sous la condition que les deux arguments, dont les fonctions thêta dépendent, sont quelconques. Après avoir trouvé que c'est le cas, la méthode de M. Hermite, employée à un problème de Mécanique, pouvait être aussi appliquée à l'Analyse, c'est-à-dire à la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions hyperelliptiques de première espèce. On n'a besoin que de remplacer les quantités $p, q, r; v, v', v''$ par les quantités $p_1, p_2, p_3; v_1, v_2, v_3$ et de faire usage des identités qui existent entre $p_h, v_h (h = 1, 2, 3)$ et les différentielles $da_{mn} (m, n = 1, 2, 3)$.

C'est ainsi que j'ai étudié la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions hyperelliptiques de première espèce, et que j'ai obtenu les résultats dont je me suis permis de proposer, dans ce Mémoire, les premières conséquences.

Si l'on emploie, au lieu des fonctions thêta, les fonctions sigma et si l'on pose, dans les formules du théorème II, l'argument v égal à une constante, et

$$\mathfrak{g} = e^{-u\zeta(v)}, \qquad \zeta(v) = \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)},$$

les expressions $v_1'' + iv_2''$ et $a_{1h} + ia_{2h}$ se transforment dans les fonctions

$$\varphi = \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)\sigma(v)} e^{-u\zeta(v)},$$

$$\varphi_h = \frac{\sigma_h(u+v)}{\sigma(u)\sigma(v)} e^{-u\zeta(v)} \qquad (h = 1, 2, 3),$$

dont la fonction φ est employée, précisément sous cette forme, par M. Halphen, comme fonction doublement périodique de seconde espèce [1].

Or, pour les valeurs introduites de v et de $\mathcal{G}$, l'expression de v_3 s'annule; donc :

On obtient les propriétés algébriques et différentielles des fonctions φ et φ_h, dont la fonction φ est introduite comme fonction doublement périodique de seconde espèce par M. Halphen, si l'on pose, dans les identités du n° 5 et dans celles qui en proviennent, v_3 égal à zéro.

En terminant ce Mémoire, je me permets d'ajouter encore quelques remarques sur les différents points de vue sous lesquels les recherches précédentes peuvent être continuées.

D'abord on peut remplacer les fonctions thêta et sigma d'un seul argument par les fonctions correspondantes de deux arguments. Ainsi se déduit la théorie des fonctions hyperelliptiques de première espèce, d'une façon élémentaire et analogue à la méthode que j'ai exposée, pour les fonctions elliptiques, dans ce Mémoire [2].

De plus, on peut employer les éléments de deux systèmes orthogonaux pour en composer les éléments d'un troisième système orthogonal. En prenant pour les éléments des systèmes composants les expressions, formées par les différentes fonctions périodiques d'un ou de deux arguments, on obtient plusieurs systèmes composés. Les éléments de ces systèmes composants et composés sont liés entre eux par des relations algébriques et différentielles qui découlent, les unes et les autres, d'identités.

---

(1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 230.

(2) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXI, p. 225.

Les relations différentielles conduisent à des équations totales et à dérivées partielles, dont on connaît les intégrales, formées par des fonctions périodiques. Ces équations sont précisément celles qui se présentent en Géométrie et en Mécanique, et sont devenues, dans le cas des fonctions doublement périodiques, d'après les célèbres recherches de M. Fuchs et de M. Hermite, l'objet des excellents travaux de MM. Appell, Brioschi, Gyldén, Halphen, Mittag-Leffler et Picard. Pour cela, l'examen détaillé desdites relations différentielles, qui offre un vaste champ de recherches, me paraît assez important pour le poursuivre. J'y reviendrai dans une autre occasion.

Qu'il me soit permis, en publiant ce Mémoire, d'offrir mes remerciements, aussi sincères que respectueux, à M. Hermite, qui a bien voulu m'aider, dans mes recherches, de ses précieux conseils et m'encourager par son bienveillant intérêt, dont je suis profondément reconnaissant à l'illustre géomètre.