JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. POINCARÉ

Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 6 (1890), p. 313-365.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1890_4_6__313_0>

Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes;

PAR M. H. POINCARÉ.

DÉFINITION.

Nous dirons qu'un système de fonctions d'une variable u

$$(1) \qquad \varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

possède un *théorème d'addition* quand

$$\varphi_1(u+v), \quad \varphi_2(u+v), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u+v),$$

pourront s'exprimer en fonctions rationnelles de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

et

$$\varphi_1(v), \quad \varphi_2(v), \quad \ldots, \quad \varphi_n(v).$$

Soit maintenant m un nombre quelconque réel ou imaginaire, mais tel que

$$|m| > 1.$$

Nous dirons que le système

$$(1) \qquad \varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

admet un *théorème de multiplication*, si

$$\varphi_1(mu), \quad \varphi_2(mu), \quad \ldots, \quad \varphi_n(mu)$$

peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u).$$

Il est clair, d'après ces définitions, que si le système (1) possède un théorème d'addition, et si p est un entier quelconque,

$$\varphi_1(pu), \quad \varphi_2(pu), \quad \ldots, \quad \varphi_n(pu)$$

s'expriment rationnellement par rapport à

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u).$$

Tout système qui possède un théorème d'addition possédera donc également une infinité de théorèmes de multiplication.

Les mêmes définitions peuvent facilement s'étendre aux fonctions de plusieurs variables.

Par exemple, le système

$$\sin u, \quad \cos u$$

ou le système

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn} u,$$

possède un théorème d'addition et une infinité de théorèmes de multiplication.

Considérons maintenant un système complet de fonctions abéliennes quadruplement périodiques de deux variables

$$F_1(u, u'), \quad F_2(u, u'), \quad \ldots, \quad F_n(u, u');$$

ce système admettra un théorème d'addition, c'est-à-dire que les

$$F_i(u + v, u' + v'),$$

s'exprimeront rationnellement à l'aide des

$$F_i(u, u') \quad \text{et des} \quad F_i(v, v').$$

Si nous faisons $u' = v' = 0$, nous aurons un système de fonctions d'une seule variable

$$F_1(u, 0), \quad F_2(u, 0), \quad \ldots, \quad F_n(u, 0),$$

qui admettra un théorème d'addition et une infinité de théorèmes de multiplication; car

$$F_1(u+v, 0), \quad F_2(u+v, 0), \quad \ldots, \quad F_n(u+v, 0)$$

s'expriment rationnellement à l'aide des

$$F_i(u, 0) \quad \text{et des} \quad F_i(v, 0).$$

Il y a aussi des fonctions qui admettent un théorème de multiplication sans admettre un théorème d'addition.

Considérons en effet la fontion $\Theta(u)$, et soit

$$\varphi_1(u) = \Theta^2\left(u - \frac{\omega'}{2}\right), \qquad \varphi_2(u) = \Theta(u-\alpha)\,\Theta(u+\alpha-\omega'),$$

α étant une constante quelconque.

Soit ensuite p un entier quelconque, et envisageons les expressions suivantes

$$\varphi_1(pu), \quad \varphi_2(pu), \quad \varphi_1^q(u)\,\varphi_2^{p^2-q}(u),$$

q étant un autre entier plus petit que p^2.

Ces diverses expressions admettront la période ω et seront multipliées par un certain facteur exponentiel quand u se changera en $u+\omega'$.

Soit

$$\Theta\left(u + \frac{\omega'}{2}\right) = e^{au}\,\Theta\left(u - \frac{\omega'}{2}\right);$$

il vient

$$\varphi_1^q(u+\omega')\,\varphi_2^{p^2-q}(u+\omega') = e^{2p^2au}\,\varphi_1^q(u)\,\varphi_2^{p^2-q}(u).$$

Cherchons le facteur exponentiel relatif à

$$\varphi_1(pu) \quad \text{et à} \quad \varphi_2(pu).$$

Il vient

$$\varphi_1[p(u+\omega')] = \varphi_1(pu+p\omega') = e^{2p^2 au} e^{\frac{p(p-1)}{2}a\omega'} \varphi_1(pu).$$

Et de même

$$\varphi_2[p(u+p\omega')] = e^{2p^2 au} e^{\frac{p(p-1)}{2}a\omega'} \varphi_2(pu).$$

Il sort de là que

$$\varphi_1(pu) e^{-\frac{p(p-1)}{2}au} \quad \text{et} \quad \varphi_2(pu) e^{-\frac{p(p-1)}{2}au}$$

ont même multiplicateur que les fonctions

$$\varphi_1^q(u)\varphi_2^{p^2-q}(u)$$

et par conséquent s'expriment linéairement à l'aide de ces fonctions.

Donc $\varphi_1(pu)$ et $\varphi_2(pu)$ sont des fonctions linéaires des diverses quantités $e^{p(p-1)\frac{au}{2}}\varphi_1^q(u)\varphi_2^{p^2-q}(u)$. Ce sont donc des fonctions entières rationnelles et homogènes de

$$e^{\frac{au}{2}}, \quad \varphi_1(u) \quad \text{et} \quad \varphi_2(u).$$

D'autre part $e^{\frac{apu}{2}}$ est également une fonction entière de $e^{\frac{au}{2}}$. Donc le système

$$e^{\frac{au}{2}}, \quad \varphi_1(u), \quad \varphi_2(u)$$

admet une infinité de théorèmes de multiplication; je dis une infinité, car on peut donner à p telle valeur entière que l'on veut.

Je me propose de rechercher quelles sont les fonctions qui admettent un théorème de multiplication et qui ne présentent pas pour $u = 0$ de point singulier essentiel.

J'exclus ainsi de très nombreuses catégories de transcendantes, par exemple celle-ci. Soit la fonction $\varphi(u)$ qui se rattache aux fonctions Θ

$$\varphi(u) = \Sigma q^{m^2} u^{2m} \qquad (m \text{ variant de } -\infty \text{ à } +\infty),$$

où

$$|q| < 1.$$

Il vient

$$\varphi\left(\frac{u}{q}\right) = \frac{u^2}{q}\varphi(u),$$

ce qui montre que le système

$$u, \quad \varphi(u),$$

admet un théorème de multiplication. Mais le point $u = 0$ est pour $\varphi(u)$ un point singulier essentiel.

Considérons donc un système

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u),$$

admettant un théorème de multiplication et tel qu'aucune des fonctions du système n'ait un point singulier essentiel en $u = 0$.

Je puis toujours supposer que

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \ldots = \varphi_n(0) = 0.$$

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Si φ_i est fini, je pourrai toujours poser

$$\varphi'_i(u) = \varphi_i(u) - \varphi_i(0),$$

et si $\varphi_i(0)$ est infini, je poserai

$$\varphi'_i(u) = \frac{1}{\varphi_i(u)}.$$

Il est clair alors qu'on aura

$$\varphi'_i(0) = \varphi'_2(0) = \ldots = \varphi'_n(0) = 0,$$

et que le système $\varphi'_i(u)$ admettra comme le système $\varphi_i(u)$ un théorème de multiplication.

Je ferai une hypothèse de plus; je supposerai d'abord que le développement des fonctions $\varphi_i(u)$ suivant les puissances croissantes de u commence, pour l'une au moins de ces fonctions, par un terme en u.

Si de pareilles fonctions existent, elles sont nécessairement uniformes.

En effet, comme le point $u = 0$ n'est pas un point singulier essentiel, on peut trouver une quantité positive ρ, telle qu'à l'intérieur du cercle

$$|u| = \rho$$

les fonctions $\varphi_i(u)$ restent uniformes.

Mais les fonctions $\varphi_i(mu)$ s'expriment rationnellement à l'aide des fonctions $\varphi_i(u)$; si donc $|u| < \rho$, les fonctions $\varphi_i(mu)$ sont encore uniformes.

Donc les fonctions $\varphi_i(u)$ sont uniformes, pourvu que

$$|u| < |m|\rho.$$

On démontrerait de même successivement qu'elles sont uniformes, pourvu que

$$|u| < |m^2|\rho, \qquad |u| < |m^3|\rho, \qquad \ldots, \qquad |u| < |m^p|\rho,$$

c'est-à-dire pour toutes les valeurs de u.

Ce raisonnement peut servir à démontrer que les fonctions elliptiques et abéliennes sont uniformes. C'est même la seule démonstration rigoureuse qui ait été proposée jusqu'ici, à l'exception des démonstrations indirectes où l'on commence par définir la fonction Θ. La démonstration de Riemann dans sa théorie des fonctions abéliennes est une de ces démonstrations indirectes; la démonstration de Clebsch et Gordan (*Theorie der Abelschen Functionen*, 8[e] Partie) n'est pas rigoureuse. Quant aux démonstrations d'Abel et de Jacobi, elles sont en réalité fondées sur l'existence d'un théorème de multiplication.

Il peut se faire que le théorème de multiplication soit tel que les

$\varphi_i(mu)$ s'expriment en fonction non seulement rationnelles, mais encore *entières* des $\varphi_i(u)$.

Dans ce cas, les fonctions $\varphi_i(u)$ sont des transcendantes entières.

En effet, si les fonctions $\varphi_i(u)$ sont holomorphes à l'intérieur du cercle

$$|u| = \rho,$$

il en est de même, des fonctions $\varphi_i(mu)$, de sorte que les fonctions $\varphi_i(u)$ sont holomorphes à l'intérieur du cercle

$$|u| = |m|\rho.$$

Par un raisonnement tout pareil à celui qui précède, on démontrerait qu'elles sont holomorphes dans tout le plan.

FORME DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES.

Nous appellerons *équations fondamentales* les équations qui définissent le théorème de multiplication et qui peuvent s'écrire

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi_1(mu) = R_1[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \\ \varphi_2(mu) = R_2[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(mu) = R_n[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \end{cases}$$

$R_1, R_2, \ldots, R_n$ étant des fonctions rationnelles.

Je dis d'abord que l'on a

$$R_i(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

En effet, par hypothèse,

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \ldots = \varphi_n(0) = 0.$$

Si donc on fait dans les équations (2) $u = 0$, le premier membre s'annule et le second se réduit à $R_i(0, 0, \ldots, 0)$; donc la fonction R_i s'annule quand tous ses arguments s'annulent. C. Q. F. D.

Les fonctions rationnelles R_i doivent satisfaire encore à une autre condition.

Posons

$$\frac{d\varphi_i(u)}{du} = A_i, \qquad \frac{dR_i}{d[\varphi_k(u)]} = B_{ik},$$

pour $u = 0$.

Si, dans les équations (2), on substitue le développement des fonctions $\varphi_0(u)$ suivant les puissances croissantes de u, puis qu'on égale dans les deux membres les coefficients de u, il viendra

$$mA_i = B_{i,1}A_1 + B_{i,2} + \ldots + B_{i,n}A_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après une hypothèse que nous avons faite plus haut, tous les A_i ne sont pas nuls à la fois. Si donc nous posons

$$F(S) = \begin{vmatrix} B_{1,1} - S & B_{1,2} & \ldots & B_{1,n} \\ B_{2,1} & B_{2,2} - S & \ldots & B_{2,n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \ldots & B_{n,n} - S \end{vmatrix},$$

on devra avoir

$$F(m) = 0.$$

En d'autres termes, l'équation en S, $F(S) = 0$, a une racine égale à m.

Posons

$$\varphi'_i(u) = \alpha_{i,1}\varphi_1(u) + \alpha_{i,2}\varphi_2(u) + \ldots + \alpha_{i,n}\varphi_n(u), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les $\alpha_{i,k}$ étant des constantes.

On peut se servir de ce changement linéaire de variables pour ramener les fonctions R à une expression plus simple.

Voici comment nous nous servirons de cette faculté : je me contente d'indiquer ici le résultat et j'omets la démonstration, que le lecteur retrouvera sans peine, car elle est fondée sur les principes les plus simples de la théorie des substitutions linéaires.

Si l'équation en S a toutes ses racines distinctes, on pourra supposer que, après le changement de variables, on a

$$B_{i,k} = 0 \quad (i \gtrless k), \qquad B_{i,i} = S_i;$$

$S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont alors les diverses racines de l'équation en S, et l'on aura, par exemple,

$$S_1 = m.$$

Supposons maintenant que toutes les racines ne soient pas distinctes. On pourra encore supposer qu'après le changement de variables

$$B_{i,i} = S_i$$

et que les $B_{i,k}$ sont nuls si $i < k$ ou si, i étant plus grand que k, S_i est différent de S_k. Quant aux $B_{i,k}$, pour lesquels on a

$$i > k, \qquad S_i = S_k,$$

nous n'en pouvons rien dire.

Si, en particulier, l'équation en S a toutes ses racines égales à m, il vient

$$B_{i,k} = 0 \quad (i < k), \qquad B_{i,i} = m.$$

FORMATION DES SÉRIES FONDAMENTALES.

Cherchons à satisfaire aux équations (2) par des séries de la forme suivante

$$\varphi_i(u) = A_i^1 u + A_i^2 u^2 + A_i^3 u^3 + \ldots, \tag{3}$$

où les A_i^k sont des coefficients constants, et tout d'abord cherchons à y satisfaire formellement. Pour cela nous n'avons qu'à appliquer la méthode des coefficients indéterminés.

Substituons les séries (3) dans les équations (2) et égalons dans les deux membres les coefficients de u^p, il viendra

$$m^p A_i^p = B_{i,1} A_1^p + B_{i,2} A_2^p + \ldots + B_{i,n} A_n^p + C_i^p \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n);$$

les C_i^p représentent un ensemble de termes dépendant des

$$A_i^1, \quad A_i^2, \quad \ldots, \quad A_i^{p-1},$$

mais ne dépendant pas des A_i^p ni des A_i^q, où $q > p$.

On peut supposer qu'on ait déterminé par un calcul préalable les

$$A_i^1, \quad A_i^2, \quad \ldots, \quad \text{et les} \quad A_i^{p-1}.$$

On aura alors, pour calculer les A_i^p, le système des équations linéaires (4). Ce système pourra toujours être résolu, pourvu que son déterminant ne soit pas nul. Or ce déterminant est égal à $F(m^p)$.

Si aucun des déterminants $F(m^2)$, $F(m^3)$, ..., n'est nul, on pourra alors calculer de proche en proche les coefficients des séries (3), pourvu qu'on ait commencé par calculer les A_i^1; or les A_i^1 nous sont donnés par les équations

$$(4\ bis) \qquad m A_i^1 = B_{i,1} A_1^1 + \ldots + B_{i,n} A_n^1,$$

qui ne diffèrent pas de celles qui ont été envisagées dans le paragraphe précédent; or ce système (4 *bis*) peut toujours être résolu si $F(m)$ est nul.

Si donc on a

$$F(m) = 0, \qquad F(m^2) \gtrless 0, \qquad F(m^3) \gtrless 0, \qquad \ldots, \qquad F(m^p) \gtrless 0,$$

on pourra toujours trouver des séries de la forme (3), *que nous appellerons séries fondamentales et qui satisferont formellement aux équations* (2).

Il nous reste à chercher combien ces séries (3) contiennent de constantes arbitraires.

J'observe d'abord que, si $F(m^p)$ n'est pas nul, le système (4) ne comporte qu'une solution unique.

Pour savoir combien les séries fondamentales contiennent de constantes arbitraires, il nous suffit donc de savoir combien le système (4 *bis*) comporte de solutions linéairement indépendantes.

Je suppose que l'équation

$$F(S) = 0$$

admette q racines égales à m.

On aura alors

$$B_{1,1} = B_{2,2} = \ldots = B_{q,q} = m, \qquad B_{i,i} \gtrless m \qquad (\text{si } i > q).$$

D'autre part,

$$B_{i,k} = 0,$$

si $i < k$ ou bien encore si $i > q$, $k \leqq q$.

Dans ce cas les $n - q$ dernières équations (4 *bis*) ne contiennent que les $n - q$ variables

$$A'_{q+1}, \quad A'_{q+2}, \quad \ldots, \quad A'_{n},$$

et leur déterminant par rapport à ces $n - q$ variables est égal à

$$(B_{q+1,q+1} - m)(B_{q+2,q+2} - m)\ldots(B_{n,n} - m) \gtrless 0.$$

On tirera donc de ces équations

$$A'_{q+1} = A'_{q+2} = \ldots = A'_{n} = 0,$$

ce qui montre que les équations (4 *bis*) ne pourront en aucun cas comporter plus de q solutions linéairement indépendantes.

Les q premières équations (3 *bis*) ne contiennent que les $q - 1$ variables

$$A'_{1}, \quad A'_{2}, \quad \ldots, \quad A'_{q-1}.$$

J'ajouterai même que la première de ces équations se réduit à une identité; si nous la laissons de côté, il nous restera $q - 1$ équations et $q - 1$ variables, et leur déterminant sera égal à

$$\Delta = B_{2,1} B_{3,2} B_{4,3} \ldots B_{q,q-1}.$$

Si ce déterminant n'est pas nul, on aura

$$A_1^1 = A_2^1 = \ldots = A_{q-1}^1 = 0,$$

de sorte qu'il n'y aura plus qu'un coefficient arbitraire, à savoir A_q^1.

Supposons maintenant que ce déterminant soit nul; dans ce cas, il est aisé de voir que le système (4 *bis*) comporte au moins deux solutions linéairement indépendantes.

Appelons (5) le système d'équations linéaires formé par les

$$2^e, \quad 3^e, \quad 4^e, \quad \ldots, \quad q^e$$

équations (4 *bis*) et où les variables sont

$$A_1^1, \quad A_2^1, \quad \ldots, \quad A_{q-1}^1.$$

Considérons le déterminant Δ de ce système (5). Si Δ est nul, ainsi que ses mineurs des $h-2$ premiers ordres, le système (5) aura $h-1$ solutions linéairement indépendantes; et, comme A_q^1 reste arbitraire, le système (4 *bis*) en admettra h.

Donc les séries (3) contiendront des constantes arbitraires.

Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ces constantes. On voit que

$$A_1^1, \quad A_2^1, \quad \ldots, \quad A_n^1$$

seront des fonctions linéaires et homogènes des β_i.

Les A_i^p seront des polynômes entiers par rapport aux β. Supposons en effet que cela soit vrai des A_i^1, des A_i^2, ..., des A_i^{p-1}, cela sera vrai également des C_i^p et par conséquent aussi des A_i^p.

Si le système

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

admet un théorème de multiplication, il en sera de même évidemment du système

$$\varphi_1(\gamma u), \quad \gamma_2(\gamma u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(\gamma u),$$

où γ est une constante quelconque.

Si donc dans les séries (3) on remplace u par γu, ces séries ne cesseront pas de satisfaire aux équations (2); changer u en γu, cela revient à changer les valeurs des constantes β.

Or changer u en γu c'est changer A_i^1 en γA_i^1 et, par conséquent,

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_h$$

en

$$\gamma\beta_1, \quad \gamma\beta_2, \quad \ldots, \quad \gamma\beta_h.$$

Quand on change u en γu, A_i^p se change en $\gamma^p A_i^p$.

Donc, quand on change β_i en $\gamma\beta_i$, A_i^p se change en $\gamma^p A_i^p$.

Donc A_i^p est un polynôme entier *homogène et de degré* p par rapport aux β.

Donc les séries (3) sont ordonnées suivant les puissances croissantes de

$$\beta_1 u, \quad \beta_2 u, \quad \ldots \quad \text{et} \quad \beta_h u.$$

Si nous posons

$$\beta_i u = u_i,$$

nous aurons un système de n fonctions

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n$$

dépendant de h variables

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_h$$

et admettant un théorème de multiplication; car on aura

$$\begin{gathered}\varphi_i(mu_1, mu_2, \ldots, mu_h) \\ = R_i[\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_h), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_h), \ldots, \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_h)] \\ (i = 1, 2, \ldots, n).\end{gathered}$$

CAS PARTICULIERS.

Supposons, en particulier, que l'on ait

$$R_i = m\varphi_i(u) + \frac{MS^2}{1 - \alpha S};$$

M et α sont deux constantes et l'on a posé pour abréger

$$S(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u) + \ldots + \varphi_n(u).$$

J'observe d'abord que le déterminant des équations (4 *bis*) a tous ses éléments nuls, ce qui me permet de conclure que les séries (3) contiennent n constantes arbitraires; je puis donc me donner arbitrairement les n coefficients

$$A_1^1, \quad A_2^1, \quad \ldots, \quad A_n^1.$$

Je remarque ensuite que l'on a

$$\varphi_i(mu) - \varphi_k(mu) = m[\varphi_i(u) - \varphi_k(u)];$$

d'où

$$\varphi_i(u) - \varphi_k(u) = (A_i^1 - A_k^1)u.$$

Nous avons, d'autre part,

$$S(mu) = mS(u) + \frac{nMS^2(u)}{1 - \alpha S(u)}.$$

Si l'on suppose, en particulier,

$$M = \frac{1}{n} m\alpha,$$

il vient

$$S(mu) = \frac{mS(u)}{1 - \alpha S(u)}$$

ou

$$\frac{S(mu)}{m - 1 + \alpha S(mu)} = \frac{mS(u)}{m - 1 + \alpha S(u)};$$

d'où

$$\frac{S(u)}{m - 1 + \alpha S(u)} = \frac{\Sigma}{m - 1} u,$$

en posant, pour abréger,

$$\Sigma = A_1^1 + A_2^1 + \ldots + A_n^1.$$

Il vient donc finalement

$$S(u) = \frac{u\Sigma}{1 - u\dfrac{\alpha\Sigma}{m - 1}}.$$

Ainsi, dans le cas de $M = \frac{1}{n} m\alpha$, les fonctions $\varphi_i(u)$ existent et sont rationnelles en u.

Donc, dans ce cas particulier, les séries (3) *convergent.*

Je vais examiner plus particulièrement le cas où m et α sont réels positifs et où

$$A_1^1, \quad A_2^1, \quad \ldots, \quad A_n^1$$

sont réels positifs.

Je dis que dans ce cas tous les coefficients des séries (3) sont réels positifs.

En effet, supposons que cela soit vrai des

$$A_i^1, \quad A_i^2, \quad \ldots, \quad A_i^{p-1},$$

je dis que cela sera vrai des A_i^p.

En effet, les équations (4) s'écrivent

$$(m^p - m) A_i^p = C_i^p.$$

C_i^p est manifestement un polynôme entier à coefficients entiers positifs par rapport à m, à α, aux $A_i^1, A_i^2, \ldots, A_i^{p-1}$. Donc C_i^p est réel et positif.

D'autre part $m^p - m$ est réel positif.

Donc il en est de même de A_i^p. C. Q. F. D.

CONVERGENCE DES SÉRIES FONDAMENTALES.

Reprenons les équations fondamentales

$$(2) \qquad \varphi_i(mu) = R_i[\varphi_k(u)],$$

et les séries fondamentales

$$(3) \qquad \varphi_i(u) = \Sigma A_i^p u^p.$$

Je vais chercher à former d'autres équations fondamentales

$$(2') \qquad \varphi'_i(m'u) = R'_i[\varphi'_k(u)],$$

qui seront satisfaites formellement par les séries fondamentales

$$(3') \qquad \varphi'_i(u) = \Sigma A'^p_i u^p.$$

Je vais chercher à m'arranger de façon que les équations (2') soient de la forme particulière qui a été intégrée dans le paragraphe précédent et que chacun des coefficients A'^p_i soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le coefficient correspondant A^p_i.

La convergence des séries (3') et par conséquent celle des séries (3) sera ainsi établie.

J'observe d'abord que l'on peut toujours trouver deux nombres réels et positifs, M et α, tels que, si l'on considère le développement des deux fonctions

$$R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - B_{i,1}x_1 - B_{i,2}x_2 - \ldots - B_{i,n}x_n$$

et

$$\frac{M(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{1 - \alpha(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)},$$

suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tout terme du second développement soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le terme correspondant du premier.

Il importe d'observer que ces deux développements ne contiennent ni terme indépendant des x, ni termes du premier degré par rapport aux x_i.

Soient q et β deux nombres positifs que je me réserve de déterminer plus complètement dans la suite. Je prendrai $m' = q$.

Posons, pour abréger,

$$S = \varphi'_1(u) + \varphi'_2(u) + \ldots + \varphi'_n(u).$$

Nous prendrons

$$R'_i = q\,\varphi'_i(u) + \frac{\frac{1}{n} q\beta S^2}{1 - \beta S},$$

de sorte que les équations (2′) s'écriront

$$(2') \qquad \varphi'_i(qu) = q\varphi'_i(u) + \frac{\frac{1}{n}q\beta S^2}{1-\beta S}.$$

Pour achever de déterminer les séries (3′), il faut encore se donner les n coefficients

$$A'^1_1, \quad A'^1_2, \quad \ldots, \quad A'^1_n.$$

Nous prendrons

$$A'^1_1 = A'^1_2 = \ldots = A'^1_n.$$

De plus A'^1_1 devra être réel positif et plus grand en valeur absolue que $A^1_1, A^1_2, \ldots, A^1_n$.

Il résulte de là que l'on aura également

$$\varphi'_i(u) = \varphi'_k(u), \qquad A'^p_1 = A'^p_2 = \ldots = A'^p_n.$$

De plus toutes ces quantités A'^p_i seront réelles et positives. Elles satisferont à des équations analogues aux équations (4) et qui s'écriront

$$(4') \qquad (q^p - q)A'^p_i = C'^p_i,$$

C'^p_i sera un polynôme entier à coefficients réels et positifs par rapport aux quantités

$$A'^1_i, \quad A'^2_i, \quad \ldots, \quad A'^{p-1}_i,$$

et l'on aura d'ailleurs

$$C'^p_1 = C'^p_2 = \ldots = C'^p_n.$$

Je supposerai

$$(6) \qquad q > 1, \qquad \frac{1}{n}q\beta > M, \qquad \beta > \alpha.$$

Dans ce cas, si l'on envisage les deux fonctions

$$R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad R'_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

qu'on les développe suivant les puissances des x, chacun des termes de degré deux ou de degré supérieur à deux du développement de R'_i aura son coefficient plus grand en valeur absolue que le coefficient correspondant de R_i. (Je répète que ce que je dis là ne s'applique qu'aux termes de degré au moins égal à 2 et ne s'applique pas aux termes du premier degré.) On peut conclure de là que la quantité appelée plus haut C_i^p jouit de la propriété suivante.

Nous avons vu que $C_i'^p$ est un polynôme entier par rapport aux $A_i'^h (h \leqq p-1)$ et que C_i^p est de même un polynôme entier par rapport aux $A_i^h (h \leqq p-1)$.

Eh bien, chaque coefficient du polynôme $C_i'^p$ est plus grand en valeur absolue que le coefficient correspondant de C_i^p.

Cela posé, écrivons les équations (4)

$$(4) \qquad m^p A_i^p - \sum_{h=1}^{h=n} B_{i,h} A_h^p = C_i^p.$$

Le déterminant de ces équations est égal à $F(m^p)$; appelons

$$F_{i,k}(m^p)$$

les divers mineurs du premier ordre de ce déterminant.

On tirera des équations (4) les équations suivantes

$$F(m^p) A_i^p = F_{i,1}(m^p) C_1^p + F_{i,2}(m^p) C_2^p + \ldots + F_{i,n}(m^p) C_n^p.$$

Par hypothèse, $F(m^p)$ ne s'annule pour aucune valeur de p plus grande que 1. D'autre part,

$$\frac{F_{i,k}(m^p)}{F(m^p)}$$

considérée comme fonction de m^p est une fonction rationnelle dont le numérateur est un polynôme de degré $n-1$ et le dénominateur un polynôme de degré n. Donc, quand p tend vers l'infini, cette fonction rationnelle tend vers 0, et $\frac{m^p F_{i,k}}{F}$ tend vers une limite finie.

On peut donc trouver un nombre positif H, tel que

$$\left| \frac{m^p F_{i,k}(m^p)}{F(m^p)} \right| < H,$$

et cela pour toutes les valeurs de i, k et p, sauf pour $p = 1$.

On a alors

$$(7) \qquad |m|^p |A_i^p| < H[|C_1^p| + |C_2^p| + \ldots + |C_n^p|].$$

Je supposerai que l'on choisisse q de telle sorte que

$$(8) \qquad q^p - q < \frac{|m|^p}{nH}.$$

Il est toujours possible de choisir q et β de façon à satisfaire aux conditions (6) et (8).

Soit q_0 un nombre compris entre 1 et $|m|$.

Soit

$$p_0 = \frac{\log(nH)}{\log|m| - \log q_0}.$$

L'équation en q

$$q^{p_0} - q - \frac{|m|}{nH} = 0$$

admet une racine supérieure à 1. Comme elle n'a qu'une variation, elle n'en admet qu'une. Il est vrai que p_0 n'est pas en général un entier, mais Laguerre a montré que la règle de Descartes s'applique encore quand les exposants ne sont pas entiers.

D'ailleurs il est aisé de voir que, pour $q > 1$,

$$q^{p_0} - q$$

est constamment croissant.

Soit donc q_1 cette racine plus grande que 1.

Je dis que, si l'on fait

$$1 < q < q_0 < |m|, \qquad 1 < q < q_1,$$

l'inégalité (8) sera satisfaite tant pour les exposants p supérieurs à p_0 que pour les exposants p inférieurs à p_0.

En effet, pour $p > p_0$, on a

$$\frac{q^p - q}{|m|^p} < \frac{q^p}{|m|^p} < \left(\frac{q_0}{|m|}\right)^p < \left(\frac{q_0}{|m|}\right)^{p_0} = \frac{1}{nH},$$

et pour $p < p_0$, on a

$$q^p - q < q_1^p - q_1 < q_1^{p_0} - q_1 = \frac{|m|}{nH} < \frac{|m^p|}{nH}.$$

C. Q. F. D.

Une fois q déterminé, il reste, pour satisfaire aux inégalités (6), à faire

$$\beta > \frac{nM}{q}, \qquad \beta > \alpha.$$

Cela posé, je dis que

$$|A_i^p| < A_i'^p.$$

En effet, supposons que cela soit vrai des

$$A_i^1, \quad A_i^2, \quad \ldots, \quad A_i^{p-1},$$

je dis que celà sera vrai des A_i^p.

En effet, les coefficients du polynôme $C_i'^p$ étant plus grands que ceux du polynôme C_i^p, on aura

$$|C_i^p| < C_i'^p,$$

d'où

$$|C_1^p + C_2^p + \ldots + C_n^p| < C_1'^p + C_2'^p + \ldots + C_n'^p = nC_i'^p,$$

puisque

$$C_1'^p = C_2'^p = \ldots = C_n'^p.$$

L'inégalité (7) devient alors

$$|A_i^p| < \frac{nH}{|m|^p} C_i'^p.$$

D'autre part, l'équation (4') donne

$$A_i'^p = \frac{C_i'^p}{q^p - q}$$

ou, en tenant compte de (8),

(9) $$|A_i^p| < A_i'^p.$$ C. Q. F. D.

D'après le paragraphe précédent, les séries (3') convergent et, si l'on a égard à l'inégalité (9), on verra que les séries (3) convergent également. Elles définissent donc des transcendantes qui jouissent d'un théorème de multiplication et *qui par conséquent sont uniformes*.

Donc il existe des transcendantes uniformes qui admettent un théorème de multiplication quelconque, pourvu que $F(m)$ (déterminant des équations 4 *bis*) *soit nul et que* $F(m^p)$ *ne soit pas nul pour* $p > 1$.

Si le déterminant des équations (4 *bis*) est nul, ainsi que ses mineurs des $h-1$ premiers ordres, ces transcendantes contiendront h constantes arbitraires $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$.

Elles en contiendront donc n, si tous les éléments du déterminant sont nuls, c'est-à-dire si

$$B_{i,i} = m, \qquad B_{i,k} = 0 \qquad (i \gtrless k).$$

FONCTIONS ENTIÈRES.

Nous avons vu que, si les fonctions R_i se réduisent à des polynômes entiers, les fonctions $\varphi_i(u)$ sont des transcendantes entières.

Si, au contraire, les fonctions R_i ne sont pas des polynômes entiers, les fonctions $\varphi_i(u)$ sont méromorphes, mais non holomorphes dans tout le plan.

Mais, dans ce cas, on peut regarder chacune des fonctions $\varphi_i(u)$ comme le quotient de deux fonctions entières qui admettent un théorème de multiplication.

Supposons, en effet, que les fonctions R_i soient des fractions rationnelles et réduisons ces fractions au même dénominateur. Posons

$$R_1 = \frac{P_1}{P_{n+1}}, \qquad R_2 = \frac{P_2}{P_{n+1}}, \qquad \ldots, \qquad R_n = \frac{P_n}{P_{n+1}},$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$ sont des polynômes entiers par rapport à $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$; les n premiers s'annulent quand $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots,$

$\varphi_n(u)$ s'annulent, et il est permis de supposer que P_{n+1} se réduit à 1 pour

$$\varphi_1(u) = \varphi_2(u) = \ldots = \varphi_n(u) = 0.$$

Soit q le plus grand des degrés des polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$.

Dans nos polynômes remplaçons $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ par $\frac{z_1}{z_{n+1}}, \frac{z_2}{z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}}$ et multiplions-les ensuite par z_{n+1}^q; il viendra

$$z_{n+1}^q P_k\left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \frac{z_2}{z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}}\right) = Q_k(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}).$$

Q_k sera un polynôme homogène de degré q en $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ qui pourra contenir en facteur une puissance de z_{n+1} si le degré de P_k est inférieur à q.

Posons maintenant

$$\varphi_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{1 + \psi_{n+1}(u)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les équations (2) deviendront

$$(2) \qquad \frac{\psi_i(mu)}{1 + \psi_{n+1}(mu)} = \frac{Q_i[\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u), 1 + \psi_{n+1}(u)]}{Q_{n+1}[\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u), 1 + \psi_{n+1}(u)]}.$$

Nous pouvons les remplacer par les suivantes :

$$(10) \quad \begin{cases} \psi_i(mu) = Q_i[\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u), 1 + \psi_{n+1}(u)] \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \psi_{n+1}(mu) = Q_{n+1}[\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u), 1 + \psi_{n+1}(u)] - 1. \end{cases}$$

S'il existe des fonctions $\psi_i(u)$ qui admettent le théorème de multiplication exprimé par les équations (10), les fonctions

$$\varphi_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{1 + \psi_{n+1}(u)}$$

admettront le théorème de multiplication exprimé par les équations (2).

Or nous avons vu qu'il existe des fonctions uniformes qui admettent un théorème de multiplication quelconque, pourvu que certaines conditions très simples soient satisfaites.

Voyons si ces conditions sont remplies par les équations (10).

J'observe d'abord que

$$Q_1, \quad Q_2, \quad \ldots, \quad Q_n \quad \text{et} \quad Q_{n+1} - 1,$$

s'annulent pour

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = \psi_{n+1} = 0.$$

Développons alors les seconds membres des équations (10) suivant les puissances croissantes des ψ et examinons les termes du premier degré.

De même que nous avons appelé plus haut $B_{i,k}$ le coefficient de φ_k dans le développement de R_i, nous appellerons $B'_{i,k}$ le coefficient de ψ_k dans le développement de Q_i. On aura manifestement

$$\begin{aligned} B'_{ik} &= B_{i,k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \\ B'_{ik} &= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = n+1), \\ B'_{n+1,n+1} &= q. \end{aligned}$$

Nous avons posé plus haut

$$F(S) = \begin{vmatrix} B_{1,1} - S & B_{1,2} & \ldots & B_{1,n} \\ B_{2,1} & B_{2,2} - S & \ldots & B_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \ldots & B_{n,n} - S \end{vmatrix}.$$

Nous poserons de même,

$$F'(S) = \begin{vmatrix} B'_{11} - S & B'_{1,2} & \ldots & B'_{1,n+1} \\ B'_{2,1} & B'_{2,2} - S & \ldots & B'_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B'_{n+1,1} & \ldots & \ldots & B'_{n+1,n+1} - S \end{vmatrix}.$$

Les conditions qui doivent être remplies pour que le théorème de multiplication (10) soit possible sont les suivantes

$$(11) \qquad F'(m) = 0, \qquad F'(m^p) \gtrless 0 \qquad (p > 1).$$

Or on a

$$F'(S) = F(S)(q - S).$$

De plus, les conditions fondamentales étant supposées remplies pour les équations (2), on aura

$$F(m) = 0, \qquad F(m^p) \gtrless 0.$$

Les conditions (11) seront donc remplies pourvu que q ne soit pas égal à une puissance entière de m (la première puissance exceptée).

Les fonctions $\psi_i(u)$ existent donc; ce sont des fonctions entières, et l'on a

$$\varphi_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{1 + \psi_{n+1}(u)},$$

ce qui montre que les fonctions $\varphi_i(u)$ sont bien égales au quotient de deux transcendantes entières admettant un théorème de multiplication.

C'est ainsi que les fonctions elliptiques, par exemple, sont égales au quotient de deux fonctions Θ, qui admettent, comme nous l'avons vu, un théorème de multiplication.

Il n'y a de difficulté que si q est une puissance entière de m; mais nous pouvons prendre pour q soit le plus grand des degrés des polynômes P_k, soit tout nombre entier plus grand; nous pouvons donc toujours éviter que q soit une puissance entière de m.

THÉORÈMES CRÉMONIENS.

Un cas particulier digne d'intérêt est celui où le théorème de multiplication défini par les équations (2) est *crémonien*. Voici ce que j'entends par là :

Considérons les équations (2)

$$\varphi_i(mu) = R_i[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)].$$

Résolvons ce système d'équations par rapport à

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u),$$

il viendra

$$\varphi_i(u) = S_i[\varphi_1(mu), \varphi_2(mu), \ldots, \varphi_n(mu)].$$

Si les fonctions S_i sont rationnelles, la substitution

$$[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u); \varphi_1(mu), \varphi_2(mu), \ldots, \varphi_n(mu)]$$

est une substitution Cremona; je dirai alors que le théorème de multiplication est crémonien.

Plaçons-nous dans le cas où les quantités appelées plus haut $B_{i,k}$ ont les valeurs suivantes

$$B_{i,i} = m, \qquad B_{i,k} = 0 \qquad (i \gtrless k).$$

Dans ce cas les séries fondamentales (3) dépendent de n constantes arbitraires

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n.$$

Si le théorème défini par les équations (2) est crémonien et si de plus on a

$$B_{i,i} = m, \qquad B_{i,k} = 0 \qquad (i \gtrless k),$$

je dirai, pour abréger, que les fonctions

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u),$$

sont crémoniennes. Les fonctions crémoniennes méritent par leurs curieuses propriétés de retenir quelque temps notre attention.

Le cas le plus simple est évidemment celui où la substitution Cremona se réduit à une simple substitution linéaire, c'est-à-dire celui où les fonctions R_i se réduisent au quotient de deux polynômes du premier degré, le dénominateur étant le même pour toutes les fonctions R_i. Mais ce cas ne présente pas d'intérêt; car il est aisé de vérifier que les fonctions $\varphi_i(u)$ se réduisent alors à la forme

$$\frac{\beta_i u}{1-\alpha u},$$

les α et les β étant des coefficients constants.

Nous ne nous occuperons donc que des fonctions crémoniennes correspondant à des substitutions Cremona d'ordre au moins égal à 2. Ces fonctions sont caractérisées par ce fait que

$$\varphi_1(m^p u), \quad \varphi_2(m^p u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(m^p u)$$

sont des fonctions rationnelles de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u),$$

quand p est un entier quelconque *positif ou négatif*.

Je me poserai d'abord la question suivante :

Peut-on disposer des n constantes

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n$$

qui entrent dans nos séries fondamentales, de telle sorte que les fonctions

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

puissent prendre tel système de valeurs que l'on veut?

Soit, par exemple,

$$\varphi_1(u) = a_1, \qquad \varphi_2(u) = a_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(u) = a_n$$

ce système.

Considérons alors le système

$$\varphi_1\left(\frac{u}{m^p}\right), \quad \varphi_2\left(\frac{u}{m^p}\right), \quad \ldots, \quad \varphi_n\left(\frac{u}{m^p}\right).$$

Si nous appelons, pour abréger,

$$a_1 C, \quad a_2 C, \quad \ldots, \quad a_n C,$$

ce que devient le système

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n,$$

quand on lui applique la transformation Crémona envisagée; si nous appelons de même

$$a_1 C^p, \quad a_2 C^p, \quad \ldots, \quad a_n C^p,$$

ce que devient ce même système quand on lui applique p fois cette même transformation Cremona; si nous appelons

$$a_1 C^{-1}, \quad a_2 C^{-1}, \quad \ldots, \quad a_n C^{-1},$$

ce que devient ce système quand on lui applique la transformation Cremona renversée; si nous appelons

$$a_1 C^{-p}, \quad a_2 C^{-p}, \quad \ldots, \quad a_n C^{-p},$$

ce que devient ce système quand on lui applique p fois cette transformation renversée, il est clair que l'on aura

$$\begin{aligned}
\varphi_1\left(\frac{u}{m^p}\right) &= a_1 C^{-p}, \\
\varphi_2\left(\frac{u}{m^p}\right) &= a_2 C^{-p}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\varphi_n\left(\frac{u}{m^p}\right) &= a_n C^{-p}.
\end{aligned}$$

Si p est entier positif et qu'on le fasse croître au delà de toute limite, les premiers membres de ces égalités tendront vers o, car les fonctions $\varphi_i(u)$ s'annulent avec u; on aura donc

$$\lim a_1 C^{-p} = \lim a_2 C^{-p} = \ldots = \lim a_n C^{-p} = 0 \qquad (p = \infty).$$

Cette condition est donc nécessaire pour que l'on puisse disposer des β, de telle sorte que

$$\varphi_1(u) = a_1, \qquad \varphi_2(u) = a_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(u) = a_n.$$

Je dis que cette condition est suffisante.

En effet, nous avons vu que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions de $\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u$ qui peuvent se développer suivant les puissances croissantes de ces variables pourvu que leurs modules soient assez petits.

Posons donc

$$(12) \qquad \begin{cases} z_1 = \varphi_1(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ z_2 = \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n = \varphi_n(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \end{cases}$$

le déterminant fonctionnel des φ par rapport aux $B_i u$ ne s'annule pas pour $u = 0$. On peut donc tirer des équations (12)

$$(13) \qquad \begin{cases} \beta_1 u = \psi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \beta_2 u = \psi_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_n u = \psi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n), \end{cases}$$

les fonctions ψ pouvant se développer suivant les puissances des z_i pourvu que le module de ces quantités soit assez petit, c'est-à-dire pourvu que l'on ait

$$|z_1| < \rho, \qquad |z_2| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |z_n| < \rho.$$

Cela posé, des équations

$$(14) \qquad \varphi_i(u) = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

nous pouvons tirer

$$\varphi_i\left(\frac{u}{m^p}\right) = a_i C^{-p}.$$

Si les conditions énoncées plus haut sont satisfaites, c'est-à-dire si l'on a

$$\lim a_i C^{-p} = 0 \qquad (\text{pour } p = \infty),$$

on pourra prendre p assez grand pour que

$$|a_i C^{-p}| < \rho \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et alors on aura, en vertu des équations (13),

$$\beta_i u = m^p \psi_i(a_1 C^{-p}, a_2 C^{-p}, \ldots, a_n C^{-p});$$

on aura donc trouvé des valeurs de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ qui satisferont aux équations (14). C. Q. F. D.

Appelons point analytique un système de n quantités quelconques, par exemple le système $a_1, a_2, \ldots, a_n$; appelons domaine un ensemble quelconque de points analytiques.

La question que nous nous sommes posée est la suivante :

Quand on donne à $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ toutes les valeurs possibles, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ peuvent-ils prendre toutes les valeurs possibles, ou bien le point analytique $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ reste-t-il compris dans un certain domaine?

Il résulte évidemment de ce qui précède que, si l'on a

$$\lim a_i C^{-p} = 0,$$

quel que soit le point analytique $a_1, a_2, \ldots, a_n$; les fonctions $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ pourront prendre toutes les valeurs possibles.

Si, au contraire, les points analytiques qui jouissent de la propriété

$$\lim a_i C^{-p} = 0,$$

appartiennent à un certain domaine D, le point analytique $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ restera compris dans ce domaine D.

Tout dépend donc des propriétés de la substitution Cremona. Je ne crois pas que les substitutions Cremona aient été étudiées jusqu'ici d'une manière approfondie à ce point de vue spécial; d'autre part, les bornes de ce travail ne me permettent pas d'y insérer une étude aussi délicate et aussi complexe. Je laisserai donc sans solution la question suivante :

Comment peut-on reconnaître si une substitution Cremona, appliquée une infinité de fois à un point analytique, fait tendre ce point analytique vers un même point limite quel que soit le point analytique qui ait servi de point de départ?

Il est clair d'abord qu'un point limite ne peut être qu'un des points doubles de la substitution Cremona, c'est-à-dire un point analytique satisfaisant à la condition

$$a_1 C = a_1, \qquad a_2 C = a_2, \qquad \ldots, \qquad a_n C = a_n.$$

Soit $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0$ un point double quelconque.

Mais tous les points doubles ne sont pas des points limites. Formons l'équation suivante en S

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d(a_1 C)}{da_1} - S & \dfrac{d(a_2 C)}{da_1} & \cdots & \dfrac{d(a_n C)}{da_1} \\ \dfrac{d(a_1 C)}{da_2} & \dfrac{d(a_2 C)}{da_2} - S & \cdots & \dfrac{d(a_n C)}{da_2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{d(a_1 C)}{da_n} & \dfrac{d(a_2 C)}{da_n} & \cdots & \dfrac{d(a_n C)}{da_n} - S \end{vmatrix} = 0,$$

et faisons, dans le premier membre de cette équation,

$$a_1 = a_1^0, \qquad a_2 = a_2^0, \qquad \ldots, \qquad a_n = a_n^0,$$

nous aurons une équation algébrique de degré n en S.

Ou bien les modules des racines de cette équation seront tous plus grands que 1.

Dans ce cas, on aura

$$\lim a_i C^{-p} = a_i^0, \qquad \text{pour } p = \infty,$$

pourvu que $|a_i - a_i^0|$ soit suffisamment petit et le point analytique a_1^0, $a_2^0, \ldots, a_n^0$ sera un point limite de la substitution inverse C^{-1}.

Ou bien les modules des racines seront tous plus petit que 1, et l'on aura

$$\lim a_i C^p = a_i^0 \qquad (\text{pour } p = \infty),$$

pourvu que $|a_i - a_i^0|$ soit suffisamment petit et le point $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0$ sera un point limite de la substitution directe C.

Ou bien les modules des racines seront les uns plus grands et les autres plus petits que 1, et le point $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0$ ne sera pas un point limite, ni pour C, ni pour C^{-1}.

Il y a lieu, en outre, de considérer les points limites oscillants. J'appelle ainsi les points qui sont des points limites pour une puissance entière positive C^q de C sans être des points limites pour C.

Il est clair que, si une substitution C^{-1} possède plusieurs points limites ou plusieurs points limites oscillants, on ne pourra pas avoir

$$\lim a_i C^{-p} = 0 \qquad (p = \infty),$$

quel que soit le point analytique initial $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Il doit être facile de construire des substitutions Cremona qui admettent plusieurs points limites. Si l'on appelle $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ les fonctions crémoniennes correspondantes, le point analytique $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ restera compris dans un certain domaine D.

Il est à remarquer que ce domaine D reste le même quel que soit u, car il est défini par la condition

$$\lim a_i C^{-p} = 0,$$

où u n'intervient pas.

Je suis parvenu également à former des substitutions Cremona C^{-1} qui n'ont qu'un point limite 0, 0, ..., et qui sont telles que

$$\lim a_i C^{-p} = 0,$$

quel que soit le point analytique $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sauf pour des points ou des lignes exceptionnels. Les fonctions crémoniennes correspondantes sont donc telles que $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ peuvent prendre toutes les valeurs possibles. On trouvera ces exemples plus loin.

Dans le doute, je me bornerai à appeler D le domaine où le point analytique $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ reste compris sans exclure le cas où le domaine D comprendrait tous les points analytiques possibles, sauf quelques points exceptionnels.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CRÉMONIENNES.

Reprenons les équations

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} z_1 = \varphi_1(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ z_2 = \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n = \varphi_3(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u); \end{array}\right.$$

d'où nous avons tiré

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \beta_1 u = \psi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \beta_2 u = \psi_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_n u = \psi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n), \end{array}\right.$$

et proposons-nous d'étudier les fonctions ψ.

Nous avons vu d'abord que, si

$$|z_i| < \rho,$$

ces fonctions peuvent se développer suivant les puissances croissantes des z : ce sont donc des fonctions uniformes des z.

En second lieu, ces fonctions ψ, d'après leur définition, n'existent qu'à l'intérieur du domaine D.

Je dis qu'à l'intérieur de ce domaine tout entier, c'est-à-dire *partout où elles existent, elles sont uniformes.*

On a, en effet,

$$\beta_i u = \psi_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = m^p \psi_i(z_1 C^{-p}, z_2 C^{-p}, \ldots, z_n C^{-p}).$$

Si le point analytique $z_1, z_2, \ldots, z_n$ appartient au domaine D, on pourra prendre p assez grand pour que

$$|z_k C^{-p}| < \rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Alors $\beta_i u$ est une fonction uniforme de $z_1 C^{-p}, z_2 C^{-p}, \ldots, z_n C^{-p}$. Mais $z_1 C^{-p}, z_2 C^{-p}, \ldots, z_n C^{-p}$ sont des fonctions rationnelles de z_1, $z_2, \ldots, z_n$. Donc $\beta_i u$ est une fonction uniforme de $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Ainsi *les fonctions* ψ_i *sont uniformes.*

Cherchons quels sont les points où ces fonctions ψ_i deviennent indéterminées.

Si p est assez grand pour que

$$|z_k C^{-p}| < \rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$\beta_i u$ est une fonction uniforme et *déterminée* des $z_k C^{-p}$. Pour que $\beta_i u$ soit une fonction indéterminée des z_k, il faut donc que les $z_k C^{-p}$ soient des fonctions indéterminées des z_k, ce qui peut arriver :

1° Si les $z_k C^{-p}$ sont fonctions indéterminées des $z_k C^{-p+1}$;

2° Si les $z_k C^{-p+1}$ sont fonctions indéterminées des $z_k^k C^{-p+2}$;

....;

p° ou enfin si les $z_k C^{-1}$ sont fonctions indéterminées des z_k.

Or la substitution C étant une substitution Cremona, les $z_k C$ sont des fonctions rationnelles de $z_1, z_2, \ldots, z_n$; ces fonctions rationnelles ne peuvent devenir indéterminées que si leur numérateur et leur dénominateur s'annulent à la fois.

Or cela arrive en certains points qui sont connus sous le nom de *points fondamentaux* de la substitution C.

Si pour

$$z_1 = \alpha_1, \qquad z_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad z_n = \alpha_n,$$

le numérateur et le dénominateur de l'une au moins des n fonctions rationnelles

$$z_1 C, \quad z_2 C, \quad \ldots, \quad z_n C$$

s'annulent à la fois, le point analytique $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ est un point fondamental de la substitution C.

De même, si, pour

$$z_1 = \gamma_1, \qquad z_2 = \gamma_2, \qquad \ldots, \qquad z_n = \gamma_n,$$

le numérateur et le dénominateur de l'une au moins des n fonctions rationnelles

$$z_1 C^{-1}, \qquad z_2 C^{-1}, \qquad \ldots, \qquad z_n C^{-1},$$

s'annulent à la fois, le point analytique $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ est un point fondamental de C^{-1}.

Pour que les $z_k C^{-p+h}$ soient fonctions indéterminées des $z_k C^{-p+h+1}$, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$z_k C^{-p+h+1} = \gamma_k,$$

le point analytique $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ étant l'un des points fondamentaux de C^{-1}, ou bien

$$z_k = \gamma_k C^{p-h-1}.$$

Pour que les $z_k C^{-p}$ soient fonctions indéterminées des z_k, il faut donc que l'on ait

$$z_k = \gamma_k$$

ou

$$z_k = \gamma_k C,$$

ou

$$z_k = \gamma_k C^2, \quad \ldots$$

ou

$$z_k = \gamma_k C^{p-1}.$$

Enfin, pour que les fonctions ψ_i soient indéterminées, il faut que l'on ait ou bien

$$z_1 = \gamma_1, \qquad z_2 = \gamma_2, \qquad \ldots, \qquad z_n = \gamma_n,$$

ou bien

$$z_1 = \gamma_1 C^q, \qquad z_2 = \gamma_2 C^q, \qquad \ldots, \qquad z_n = \gamma_2 C^q,$$

q étant un entier positif.

En d'autres termes, les points d'indétermination des fonctions ψ_i sont les points fondamentaux $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ de C^{-1} et leurs transformés par les diverses puissances entières positives de C.

Je terminerai ce qui regarde les fonctions ψ en disant qu'elles ne peuvent avoir de point singulier essentiel à l'intérieur même du domaine D, mais seulement sur les limites de ce domaine. Dans le cas particulier que nous n'avons pas exclu, où le domaine D comprend tous les points analytiques possibles, sauf quelques points exceptionnels, ce sont ces points exceptionnels qui serviront de limite au domaine D et qui seront les points singuliers essentiels des fonctions ψ_i.

Cherchons maintenant quelle relation il y a entre

$$\varphi_1(u_0), \quad \varphi_2(u_0), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_0)$$

et

$$\varphi_1(u_1), \quad \varphi_2(u_1), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_1),$$

u_1 et u_0 étant deux valeurs quelconques de u.

Je dis que $\varphi_i(u_1)$ est une fonction uniforme de $\varphi_1(u_0), \varphi_2(u_0), \ldots, \varphi_n(u_0)$ tant que le point analytique $\varphi_1(u_0), \varphi_2(u_0), \ldots, \varphi_n(u_0)$ sera compris dans le domaine D.

En effet, d'après ce qui précède,

$$\beta_1 u_0, \quad \beta_2 u_0, \quad \ldots, \quad \beta_n u_0,$$

sont des fonctions uniformes de

$$\varphi_1(u_0), \quad \varphi_2(u_0), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_0).$$

D'autre part,

$$\beta_1 u_1, \quad \beta_2 u_1, \quad \ldots, \quad \beta_n u_1$$

sont fonctions uniformes de

$$\beta_1 u_0, \quad \beta_2 u_0, \quad \ldots, \quad \beta_n u_0 \quad \text{et} \quad \frac{u_1}{u_0}.$$

Enfin

$$\varphi_1(u_1), \quad \varphi_2(u_1), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_1)$$

sont fonctions uniformes de

$$\beta_1 u_1, \quad \beta_2 u_1, \quad \ldots, \quad \beta_n u_1.$$

Donc

$$\varphi_1(u_1), \quad \varphi_2(u_1), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_1)$$

sont fonctions uniformes de

$$\varphi_1(u_0), \quad \varphi_2(u_0), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_0), \quad \frac{u_1}{u_0}.$$

Appelons P_0 le point analytique

$$\varphi_1(u_0), \quad \varphi_2(u_0), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_0)$$

et P_1 le point analytique

$$\varphi_1(u_1), \quad \varphi_2(u_1), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_1).$$

Nous voyons d'abord que, si l'un des deux points P_0 et P_1 appartient au domaine D, il en est de même de l'autre; d'autre part, les coordonnées de P_1 sont fonctions uniformes de celles de P_0, et les coordonnées de P_0 fonctions uniformes de celles de P_1.

En d'autres termes, la correspondance entre P_0 et P_1 définit une transformation biuniforme du domaine D en lui-même.

Cette transformation biuniforme devient birationnelle quand $\frac{u_1}{u_0}$ est une puissance entière positive ou négative de m. Il n'en est pas de même en général si $\frac{u_1}{u_0}$ est quelconque; car les points d'indétermination des coordonnées de P_1 considérées comme fonctions des coordonnées de P_0 sont en général les mêmes que les points d'indétermination des fonctions ψ.

Tout me porte à croire que les transcendantes qui définissent les coordonnées de P_1 en fonctions des coordonnées de P_0 n'existent en général que dans le domaine D. Toutefois je n'ai pu le démontrer rigoureusement; il y a certainement au moins un cas d'exception, puisque, si $\frac{u_1}{u_0}$ est une puissance de m, les coordonnées de P_1 sont fonctions rationnelles de celles de P_0. Mais il est possible (et même probable) qu'il n'y en ait pas d'autre.

Cherchons maintenant à exprimer

$$\varphi'_1(u),\quad \varphi'_2(u),\quad \ldots,\quad \varphi'_n(u)$$

en fonctions de

$$\varphi_1(u),\quad \varphi_2(u),\quad \ldots,\quad \varphi_n(u)$$

et de u.

En premier lieu,

$$\beta_1 u,\quad \beta_2 u,\quad \ldots,\quad \beta_n u$$

sont fonctions uniformes de

$$\varphi_1(u),\quad \varphi_2(u),\quad \ldots,\quad \varphi_n(u).$$

D'ailleurs $\varphi'_1(u)$, $\varphi'_2(u)$, ..., $\varphi'_n(u)$ sont fonctions uniformes de

$$\beta_1,\quad \beta_2,\quad \ldots,\quad \beta_n \quad \text{et} \quad u.$$

Donc

$$\varphi'_1(u),\quad \varphi'_2(u),\quad \ldots,\quad \varphi'_n(u)$$

sont fonctions uniformes de

$$\varphi_1(u),\quad \varphi_2(u),\quad \ldots,\quad \varphi_n(u),\quad u.$$

D'autre part, si nous posons

$$\beta_1 u = u_1,\qquad \beta_2 u = u_2,\qquad \ldots,\qquad \beta_n u = u_n,$$

$\varphi_i(u)$ devient une fonction de n variables u_1, u_2, ..., u_n, et l'on a

$$\varphi_i(u) = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n);$$

d'où

$$\varphi'_i(u) = \beta_1 \frac{d\varphi_i}{du_1} + \beta_2 \frac{d\varphi_i}{du_2} + \ldots + \beta'_n \frac{d\varphi_i}{du_n};$$

d'où

$$u\varphi'_i(u) = u_1 \frac{d\varphi_i}{du_1} + u_2 \frac{d\varphi_i}{du_2} + \ldots + u_n \frac{d\varphi_i}{du_n},$$

ce qui montre que $u\varphi'_i(u)$ est une fonction de u_1, u_2, ..., u_n ou, ce qui revient au même, de $\beta_1 u$, $\beta_2 u$, ..., $\beta_n u$.

Mais

$$\beta_1 u, \quad \beta_2 u, \quad \ldots, \quad \beta_n u$$

sont fonctions de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u).$$

Donc $u\varphi'_i(u)$ est une fonction de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u).$$

Ainsi les fonctions $\varphi_i(u)$ satisfont à un système d'équations différentielles de la forme suivante

$$\begin{aligned}
u\varphi'_1(u) &= F_1[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \\
u\varphi'_2(u) &= F_2[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
u\varphi'_n(u) &= F_n[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)],
\end{aligned}$$

les fonctions F_i étant des transcendantes *uniformes dans le domaine* D.

Ces transcendantes uniformes admettront mêmes points d'indétermination que les fonctions ψ.

J'ai dit plus haut que les fonctions ψ n'existent que dans le domaine D. Cela demande quelques mots d'explication. Supposons, par exemple, que

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_n$$

existent dans le domaine δ défini par les inégalités

$$|z_1 - z_1^0| < \rho_1, \qquad |z_2 - z_2^0| < \rho_2, \qquad \ldots, \qquad |z_n - z_n^0| < \rho_n,$$

$z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ étant des constantes.

Les ψ_i devraient être développables à l'intérieur de ce domaine suivant les puissances des $z_k - z_k^0$.

Supposons que le domaine δ soit situé en partie à l'intérieur de D, en partie à l'extérieur de D.

C'est là ce qui devrait arriver si les fonctions ψ pouvaient être prolongées au delà du domaine D.

Reprenons les fonctions

$$\begin{array}{l} \varphi_1(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u) \end{array}$$

et substituons-y $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ à la place de $\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u$; nous verrons $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ devenir fonctions de $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Dans le domaine δ, nous savons que $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont fonctions holomorphes de $z_1, z_2, \ldots, z_n$; donc $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ restent finis dans ce domaine.

D'autre part, nous savons que, quelles que soient les quantités $\beta_1 u$, $\beta_2 u, \ldots, \beta_n u$, pourvu qu'elles soient finies, les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, φ_n sont méromorphes et le point analytique $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ reste dans le domaine D.

Donc, quand le point $z_1, z_2, \ldots, z_n$ restera dans le domaine δ, les quantités φ_i seront fonctions méromorphes des z, et le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, φ_n restera dans le domaine D.

Mais, d'après la définition des fonctions φ et ψ, on aura, dans la partie de δ qui appartient à D et par conséquent dans tout le domaine δ,

$$\varphi_1 = z_1, \qquad \varphi_2 = z_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = z_n.$$

Le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ne sortant pas de D, il doit en être de même du point $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Donc il est impossible qu'une partie de δ soit extérieure à D.

Donc les fonctions ψ n'existent pas en dehors de D. C. Q. F. D.

Les fonctions ψ sont donc uniformes partout où elles existent.

Nous avons donc des fonctions uniformes de n variables z_1, $z_2, \ldots, z_n$ qui sont multipliées par un facteur constant m quand ces variables subissent une substitution Cremona donnée.

Le rapport de deux fonctions ψ, par exemple $\frac{\psi_i}{\psi_k}$, demeure inaltéré par la substitution Cremona.

Tout me porte à croire que la fonction $\frac{\psi_i}{\psi_k}$ n'existe pas en dehors de D et est par conséquent uniforme partout où elle existe; je n'en ai pas toutefois de démonstration rigoureuse.

Toutes les fois qu'on pourra le démontrer, on saura construire une fonction uniforme qui n'est pas altérée par la substitution Cremona.

C'est ce qui arrivera en particulier toutes les fois que le domaine D comprendra tous les points analytiques possibles, sauf quelques points exceptionnels.

Je dis que toute fonction uniforme F des z, n'existant que dans le domaine D et inaltérée par la substitution Cremona, est une fonction rationnelle des rapports des quantités $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, si elle est méromorphe dans le domaine D.

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} &F(z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ &\quad = F[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \varphi_2(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \ldots, \varphi_n(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)]. \end{aligned}$$

Cette égalité montre que F est une fonction uniforme de ψ_1, $\psi_2, \ldots, \psi_n$.

Quand les z subissent la substitution Cremona,

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_n$$

se changent en

$$m\psi_1, \quad m\psi_2, \quad \ldots, \quad m\psi_n$$

et F ne change pas.

Si F est une fonction méromorphe des z, ce sera aussi une fonction méromorphe des ψ, et nous aurons, dans le voisinage du point

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0,$$

nous aurons, dis-je,

$$F = \frac{S_1}{S_2},$$

S_1 et S_2 étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes des ψ.

Le quotient $\frac{S_1}{S_2}$ ne doit pas changer quand on change

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_n$$

en

$$m\psi_1, \quad m\psi_2, \quad \ldots, \quad m\psi_n.$$

Et cela ne peut arriver que si les deux séries S_1 et S_2 se réduisent à des polynômes entiers homogènes de même degré en $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

C. Q. F. D.

EXEMPLES PARTICULIERS.

J'ai cherché à former des exemples pour lesquels le domaine D comprend tous les points analytiques possibles, sauf quelques points exceptionnels.

Les premiers exemples que j'ai obtenus m'ont été fournis par des substitutions Cremona qui peuvent être ramenées à la forme

$$\left(z_1, z_2, \ldots, z_n; \frac{\alpha_1 z_1 + \beta_1}{\gamma_1 z_1 + \delta_1}, \frac{\alpha_2 z_2 + \beta_2}{\gamma_2 z_2 + \delta_2}, \ldots, \frac{\alpha_n z_n + \beta_n}{\gamma_n z_n + \delta_n}\right),$$

les α, β, γ, δ étant des constantes, ou dont une puissance peut être ramenée à cette forme.

Les fonctions φ_i correspondantes sont rationnelles; ce cas ne présente donc aucun intérêt.

J'ai réussi ensuite à former un exemple un peu plus général.

Considérons deux variables seulement et, afin d'éviter les indices, représentons-les par x et y et non plus par z_1 et z_2.

Envisageons ensuite la substitution Cremona

$$\left(x, y; \frac{mx}{1 - \beta x}, \frac{ay + b}{cy + d}\right);$$

m est le nombre que nous avons toujours appelé ainsi; β est une constante; enfin a, b, c, d sont des polynômes entiers en x; je suppose que, pour $x = 0$, on ait

$$b = 0, \qquad a = m, \qquad d = 1, \qquad c = c_0.$$

Si je désigne par C cette substitution et que je pose, pour abréger,

$$x' = x\mathrm{C}, \qquad y' = y\mathrm{C},$$

nous aurons

$$x' = \frac{mx}{1 - \beta x}, \qquad y' = \frac{ay + b}{cy + d}.$$

Nous tirerons de là

$$x = \frac{x'}{m + \beta x'}, \qquad y = \frac{dy' - b}{-cy' + a}.$$

Or a, b, c, d sont fonctions entières de x et par conséquent fonctions rationnelles de x'. Donc x et y sont fonctions rationnelles de x' et y'.

Notre substitution est donc bien *birationnelle*.

Je dis que cette substitution admet quatre points doubles.

En effet, pour que l'on ait

$$x = x', \qquad y = y',$$

il faut d'abord que l'on ait

$$x = x'.$$

Or la substitution homographique

$$\left(x, \frac{mx}{1 - \beta x}\right)$$

admet deux points doubles, qui sont

$$x = 0, \qquad x = \frac{1 - m}{\beta}.$$

Si l'on fait $x = 0$, il vient

$$y' = \frac{my}{1 + c_0 y}$$

et la substitution homographique

$$\left(y, \frac{my}{1 + c_0 y}\right)$$

a deux points doubles qui sont

$$y = 0, \qquad y = \frac{m-1}{c_0}.$$

Si l'on fait $x = \frac{1-m}{\beta}$, les quatre polynômes a, b, c, d prennent certaines valeurs a_1, b_1, c_1, d_1, et la substitution homographique

$$\left(y, \frac{a_1 y + b_1}{c_1 y + d_1}\right)$$

admet deux points doubles, que j'appellerai

$$y = y_1, \qquad y = y_2.$$

Notre substitution Cremona a donc quatre points doubles

$$x = y = 0, \qquad x = 0, \qquad y = \frac{m-1}{c_0},$$

$$x = \frac{1-m}{\beta}, \qquad y = y_1, \qquad x = \frac{1-m}{\beta}, \qquad y = y_2.$$

Avant d'aller plus loin, examinons ce qui se passe dans le voisinage du point double

$$x = 0, \qquad y = \frac{m-1}{c_0}.$$

Posons, pour abréger,

$$\xi = \frac{x}{x - \frac{1-m}{\beta}}, \qquad y = \eta + \frac{m-1}{c_0}.$$

Soient ξ' et η' ce que deviennent ξ et η après qu'on leur a appliqué la substitution Cremona ; il vient

$$\xi' = m\xi, \qquad \eta' = f(\xi, \eta),$$

$f(\xi, \eta)$ étant une fonction rationnelle de ξ et de η, s'annulant avec ξ et η.

Existe-t-il deux fonctions uniformes $\theta_1(u)$ et $\theta_2(u)$ admettant le théorème de multiplication suivant

$$(15)\qquad \theta_1(mu) = m\theta_1(u), \qquad \theta_2(mu) = f[\theta_1(u), \theta_2(u)].$$

Pour le reconnaître, formons l'équation définie plus haut

$$F(S) = 0,$$

de telle façon que $F(m^p)$ soit le déterminant des équations (4).

Si l'on fait $\xi = 0$, il vient

$$f(\xi, \eta) = \frac{\eta}{m + c_0\eta}.$$

J'en conclus que

$$F(S) = (S - m)\left(S - \frac{1}{m}\right).$$

Donc $F(m) = 0$, $F(m^p) \gtrless 0$ si p est un entier positif plus grand que 1.

Il existe donc des fonctions uniformes $\theta_1(u)$ et $\theta_2(u)$ qui satisfont aux conditions (15). Ces fonctions, d'après les principes exposés plus haut, dépendront d'un seul paramètre arbitraire que j'appellerai β_1.

On a d'ailleurs

$$\theta_1(u) = \beta_1 u,$$

et je puis, sans restreindre la généralité, supposer $\beta_1 = 1$; d'où

$$\theta_1(u) = u.$$

Cela posé, si l'on a

$$\eta = \theta_2(\xi),$$

on aura aussi

$$\eta' = \theta_2(\xi')$$

et, plus généralement,

$$\eta C^p = \theta_2(\xi C^p),$$

en désignant par ξC^p et ηC^p ce que deviennent ξ et η quand ces quantités ont subi la substitution C^p et en supposant que p soit un entier quelconque, positif ou négatif.

Lorsque p croît indéfiniment, on a

$$\lim \xi C^{-p} = \lim m^{-p}\xi = 0 \qquad (\text{puisque} \mid m \mid > 1),$$

et, si $\eta = \theta_2(\xi)$, on a

$$\lim \eta C^{-p} = \lim \theta_2(\xi C^{-p}) = \theta_2(0) = 0.$$

Posons

$$\frac{m-1}{c_0} + \theta_2\left(\frac{x}{x - \frac{1-m}{\beta}}\right) = \theta(x).$$

Quand on aura

$$y = \theta(x),$$

on aura

$$\eta = \theta_2(\xi)$$

et, par conséquent,

$$y C^p = \theta(x C^p) \qquad (p \text{ entier positif ou négatif}).$$

On aura d'ailleurs, pour $p = \infty$,

$$\lim x C^{-p} = 0, \qquad \lim y C^{-p} = \frac{m-1}{c_0};$$

donc, si

$$y = \theta(x),$$

on n'a pas

$$\lim x C^{-p} = \lim y C^{-p} = 0.$$

Il en est encore de même si

$$x = \frac{1-m}{\beta};$$

car on a alors

$$x C^{-p} = \frac{1-m}{\beta}, \qquad \lim x C^{-p} = \frac{1-m}{\beta}.$$

Mais je dis que, dans tous les autres cas, c'est-à-dire toutes les fois qu'on n'a pas

$$y = \theta(x) \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{1-m}{\beta},$$

on a

$$\lim x\,C^{-p} = \lim y\,C^{-p} = 0.$$

En effet, le point $x = y = 0$ est un point limite de C^{-1} dans le sens que nous avons donné plus haut à ce mot (les racines de l'équation en S sont en effet toutes deux égales à m et $|m| > 1$). Si donc les modules de x et de y sont assez petits, $x\,C^{-p}$ et $y\,C^{-p}$ tendront vers 0 quand p croîtra au delà de toute limite.

On pourra donc trouver une quantité ρ telle que, si

$$|x| < \rho, \qquad |y| < \rho,$$

on ait

$$\lim x\,C^{-p} = \lim y\,C^{-p} = 0.$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$|x| < \rho, \qquad |y| > \rho.$$

J'observe que, si l'on regarde x comme donné, la substitution

$$\left(y, \frac{ay+b}{cy+d}\right) \tag{16}$$

sera une substitution homographique.

Soient donc

$$(x, y), \quad (x, y_1), \quad (x, y_2), \quad (x, y_3)$$

quatre points analytiques ayant même abscisse x.

Leurs transformés par C^{-1}

$$(x\,C^{-1}, y\,C^{-1}), \quad (x\,C^{-1}, y_1\,C^{-1}), \quad (x\,C^{-1}, y_2\,C^{-1}), \quad (x\,C^{-1}, y_3\,C^{-1})$$

auront même abscisse $x\,C^{-1}$ et il en sera de même de leurs $p^{\text{ièmes}}$ transformés

$$(x\,C^{-p}, y\,C^{-p}), \quad (x\,C^{-p}, y_1\,C^{-p}), \quad (x\,C^{-p}, y_2\,C^{-p}), \quad (x\,C^{-p}, y_3\,C^{-p}),$$

qui auront même abscisse $x\,C^{-p}$.

De plus, la substitution (16) étant homographique, on aura

$$\frac{y\,C^{-1}-y_1\,C^{-1}}{y\,C^{-1}-y_2\,C^{-1}}\,\frac{y_3\,C^{-1}-y_2\,C^{-1}}{y_3\,C^{-1}-y_1\,C^{-1}}=\frac{y-y_1}{y-y_2}\,\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}$$

et de même

$$(17)\qquad \frac{y\,C^{-p}-y_1\,C^{-p}}{y\,C^{-p}-y_2\,C^{-p}}\,\frac{y_3\,C^{-p}-y_2\,C^{-p}}{y_3\,C^{-p}-y_1\,C^{-p}}=\frac{y-y_1}{y-y_2}\,\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}.$$

Le second membre ne pourrait être égal à 1 que si $y_1=y_2$ ou si $y=y_3$.

Prenons

$$|y_1|<\rho,\qquad |y_2|<\rho,\qquad y_1 \gtrless y_2,\qquad y_3=\theta(x),$$

Si l'on n'a pas $y=\theta(x)$, le second membre de (17) sera égal à $M\gtrless 1$.

Si $p=\infty$, on a

$$\lim y_1\,C^{-p}=\lim y_2\,C^{-p}=0,\qquad \lim y_3\,C^{-p}\gtrless 0,$$

et l'équation (17) devient

$$\frac{\lim y\,C^{-p}}{\lim y\,C^{-p}}=M$$

ou, puisque $M\gtrless 1$,

$$\lim y\,C^{-p}=0.\qquad\text{C. Q. F. D.}$$

On a d'ailleurs

$$\lim x\,C^{-p}=0,$$

toutes les fois que x n'est pas égal à $\frac{1-m}{\beta}$.

Supposons enfin

$$|x|>\rho.$$

Si x n'est pas égal à $\frac{1-m}{\beta}$, on a

$$\lim x\,C^{-p}=0;$$

on peut donc prendre q assez grand pour que

$$|x\,C^{-q}| < \rho.$$

On a alors soit

$$|x\,C^{-q}| < \rho, \qquad |y\,C^{-q}| < \rho,$$

soit

$$|x\,C^{-q}| < \rho, \qquad |y\,C^{-q}| > \rho$$

et l'on retombe sur un des deux cas précédents.

Donc on a

$$\lim x\,C^{-p} = \lim y\,C^{-p} = 0,$$

à moins que $y = \theta(x)$ ou $x = \frac{1-m}{\beta}$. C. Q. F. D.

Donc le domaine D comprend tous les points analytiques possibles, sauf les lignes exceptionnelles $y = \theta(x)$ et $x = \frac{1-m}{\beta}$. Rappelons que la fonction $\theta(x)$ est uniforme.

Formons alors les fonctions

$$x = \varphi_1(u) = \varphi_1(\beta_1 u, \beta_2 u),$$
$$y = \varphi_2(u) = \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u),$$

qui admettent le théorème de multiplication suivant

$$(18) \qquad \varphi_1(mu) = \frac{m\,\varphi_1(u)}{1-\beta\,\varphi_1(u)}, \qquad \varphi_2(mu) = \frac{a[\varphi_1(u)]\,\varphi_2(u) + b[\varphi_1(u)]}{c[\varphi_1(u)]\,\varphi_2(u) + d[\varphi_1(u)]},$$

où j'ai désigné par la notation $a[\varphi_1(u)]$ le polynôme a où x a été remplacé par $\varphi_1(u)$.

La fonction $\varphi_1(u)$ est manifestement rationnelle; il ne saurait en être de même, en général, de la fonction $\varphi_2(u)$. En effet, la seconde des équations (18) peut s'écrire

$$\varphi_2(mu) = \frac{\lambda\,\varphi_2(u) + \mu}{\varpi\,\varphi_2(u) + \omega},$$

λ, μ, ϖ et ω étant des polynômes entiers en u. Ces polynômes peuvent être quelconques, de même que les polynômes a, b, c, d sont quelconques; la seule condition à laquelle ces polynômes soient assujettis, c'est que l'on ait pour $u = 0$,

$$\mu = 0, \qquad \lambda = m\omega.$$

Je puis donc prendre, par exemple,

$$\mu = 0, \qquad \varpi = 0, \qquad \omega = 1, \qquad \lambda = m\left(1 - \frac{u}{u_0}\right).$$

Il vient alors

$$\varphi_2(mu) = m\left(1 - \frac{u}{u_0}\right)\varphi_2(u);$$

d'où l'on tire aisément

$$(19) \quad \varphi_2(u) = \beta_2 u\left(1 - \frac{u}{mu_0}\right)\left(1 - \frac{u}{m^2 u_0}\right)\left(1 - \frac{u}{m^3 u_0}\right)\cdots \text{(ad inf.)}.$$

La fonction $\varphi_2(u)$ est donc transcendante et il me suffit évidemment d'avoir établi qu'elle est transcendante dans un cas particulier pour être certain qu'elle n'est pas rationnelle en général.

La parenté de la fonction $\varphi_2(u)$, définie par l'équation (19), avec les fonctions Θ elliptiques, est évidente. On a, en effet,

$$(20) \qquad \varphi_2(mu) = m\left(1 - \frac{u}{u_0}\right)\varphi_2(u),$$

d'où

$$\varphi_2(u) = m\left(1 - \frac{u}{mu_0}\right)\varphi_2\left(\frac{u}{m}\right);$$

d'où

$$\varphi_2\left(\frac{u}{m}\right) = \frac{\varphi_2(u)}{m}\,\frac{1}{1 - \dfrac{u}{mu_0}}$$

ou, en changeant u en $\dfrac{mu_0^2}{u}$,

$$(21) \qquad \varphi_2\left(\frac{u_0^2}{u}\right) = \frac{\varphi_2\left(\dfrac{mu_0^2}{u}\right)}{m}\,\frac{1}{1 - \dfrac{u_0}{u}}.$$

Si nous multiplions (20) par (21) et si nous posons

$$\tau(u) = \varphi_2(u)\,\varphi_2\left(\frac{mu_0^2}{u}\right),$$

il viendra

$$\tau(mu) = -\frac{u}{u_0}\,\tau(u).$$

Cette équation prouve que

$$\varphi_2(e^z)\,\varphi_2\left(\frac{mu_0^2}{e^z}\right)$$

est une fonction Θ elliptique dont les périodes sont $2i\pi$ et $\log m$.

Revenons au cas général où les polynômes λ, μ, ϖ et ω sont quelconques.

J'observe d'abord que nous pouvons, sans restreindre la généralité, simplifier beaucoup les équations (18). Je dis que l'on peut toujours supposer que β est nul, de sorte que la première des équations (18) se réduise à

$$\varphi_1(mu) = m\,\varphi_1(u).$$

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, on remplacerait la fonction $\varphi_1(u)$ par la fonction

$$\varphi_1^*(u) = \frac{\varphi_1(u)}{\varphi_1(u) - \frac{1-m}{\beta}},$$

et l'on aurait

$$\varphi_1^*(mu) = m\,\varphi_1^*(u).$$

Je supposerai donc désormais $\beta = 0$; il vient alors

$$\varphi_1(u) = \beta_1 u,$$

β_1 étant l'une des deux constantes définies plus haut qui entrent dans les séries (3).

Alors on obtiendra les polynômes λ, μ, ϖ et ω en remplaçant tout simplement x par $\beta_1 u$ dans les polynômes a, b, c, d.

Cela posé, nous savons que $\varphi_1(u_1)$ et $\varphi_2(u_1)$ sont fonctions uniformes de $\varphi_1(u_0)$ et de $\varphi_2(u_0)$.

Si nous supposons $\beta_1 = 1$, par exemple, il en résultera que $\varphi_2(u_1)$ est fonction uniforme de $\varphi_2(u_0)$; car $\varphi_1(u_0) = u_0$ est une donnée de la question.

De même, $\varphi_2(u_0)$ est une fonction uniforme de $\varphi_2(u_1)$.

Si donc on suppose que $\beta_1 = 1$, et si u_1 et u_0 sont deux constantes données, il y aura entre $\varphi_2(u_0)$ et $\varphi_2(u_1)$ une relation homographique.

Nos séries (3) dépendant des deux constantes β_1 et β_2, je puis écrire, comme je l'ai déjà fait bien des fois,

$$y = \varphi_2(u) = \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u).$$

Si nous faisons $\beta_1 = 1$; il vient

$$y = \varphi_2(u, \beta_2 u).$$

On voit que y est une fonction uniforme de β_2. D'autre part, nous avons

$$\beta_1 u = \psi_1(x, y),$$
$$\beta_2 u = \psi_2(x, y).$$

On a évidemment

$$\psi_1(x, y) = x,$$

car

$$\beta_1 u = \varphi_1(u) = x.$$

D'autre part, si l'on fait $\beta_1 = 1$, il vient

$$x = u$$

et

$$\beta_2 = \frac{1}{u}\psi_2(u, y),$$

ce qui montre que, quand $\beta_1 = 1$, et que u est regardé momentanément comme une constante, β_2 est fonction uniforme de y.

Si donc $\beta_1 = 1$ et si u est regardé comme une constante, il y a une relation homographique entre β_2 et y.

La fonction $\varphi_2(u)$ est donc de la forme suivante

$$\varphi_2(u) = \frac{\beta_2 u\, \sigma_1(\beta_1 u) + \tau_1(\beta_1 u)}{\beta_2 u\, \sigma_2(\beta_1 u) + \tau_2(\beta_1 u)},$$

σ_1, τ_1, σ_2 et τ_2 étant des fonctions uniformes de $\beta_1 u$ que nous pouvons toujours supposer entières.

Ces fonctions σ et τ jouissent des propriétés suivantes

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} m.\eta(u)\sigma_1(mu) &= a\sigma_1(u) + b\sigma_2(u), \\ \eta(u)\tau_1(mu) &= a\tau_1(u) + b\tau_2(u), \\ m.\eta(u)\sigma_2(mu) &= c\sigma_1(u) + b\sigma_2(u), \\ \eta(u)\tau_2(mu) &= c\tau_1(u) + d\tau_2(u). \end{aligned} \right.$$

Dans ces équations (22), nous désignons par $\eta(u)$ une fonction entière de u, et nous supposons qu'on a remplacé x par u dans les polynômes a, b, c, d.

Si l'on pose

$$ad - bc = \delta(u), \qquad \sigma_1(u)\tau_2(u) - \sigma_2(u)\tau_1(u) = D(u),$$

il viendra

$$(23) \qquad m\eta^2(u)D(mu) = \delta(u)D(u).$$

Cette équation (23) met en évidence le lien qui relie les fonctions σ et τ à la fonction φ_2 définie par l'équation (19) et par conséquent aux fonctions Θ elliptiques.

On en peut encore tirer une autre conclusion.

Si la fonction φ_2 est rationnelle, σ_1, τ_1, σ_2, τ_2, η, D et δ sont des polynômes, et l'équation (23) montre que le polynôme δ doit jouir de propriétés très particulières. Sans entrer dans le détail de la discussion, on voit que la fonction φ_2 ne pourra être rationnelle si le polynôme $\delta = ad - bc$ ne satisfait pas à certaines conditions et, en particulier, s'il n'est pas de degré pair.

La fonction

$$\frac{\psi_2(x, y)}{\psi_1(x, y)} = \frac{\psi_2(x, y)}{x}$$

est uniforme pour toutes les valeurs de x et de y et elle demeure inaltérée par notre substitution Cremona.

Elle admet comme lignes singulières essentielles

$$y = \theta(x)$$

et

$$x = \frac{1 - m}{\beta}$$

(ou $x = \infty$ si, comme nous l'avons supposé, $\beta = 0$). La substitution Cremona

$$\left(x, y, z; \frac{mx}{1 - \beta x}, \frac{ay + b}{cy + d}, \frac{Az + B}{Cz + D}\right)$$

(où a, b, c, d sont des polynômes entiers en x, et A, B, C, D des polynômes entiers en x et y) jouit de propriétés analogues.

Les fonctions dont il a été question dans ce Mémoire et qui demeurent inaltérées par une substitution Cremona et ses puissances, ne sont peut-être que des cas extrêmement particuliers d'une classe plus générale de fonctions uniformes qui demeureraient inaltérées par un *groupe* de substitutions Cremona et qui se présenteraient comme la généralisation la plus naturelle des fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes de M. Picard.