JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. DOLBNIA

**Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série*, tome 6 (1890), p. 293-311.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1890_4_6__293_0>

# *Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel;*

PAR M. J. DOLBNIA.

1. M. Günther nomme intégrales *pseudo-elliptiques* les intégrales qui, tout en présentant toutes les apparences extérieures des elliptiques, peuvent être exprimées par les fonctions algébriques et logarithmiques [1]. Nous nommerons *intégrales pseudo-elliptiques d'Abel* celles de la forme suivante

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,\partial x}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}};$$

dans le cas où ces dernières sont exprimables par des logarithmes. M. Tchebycheff a créé la théorie d'exprimabilité des intégrales pseudo-elliptiques d'Abel par des logarithmes [2]; les théorèmes de M. Tchebycheff ont été démontrés par feu M. Zolotareff dans un Mémoire inséré dans le tome XIX, 2e série, du *Journal de Mathématiques.* Malgré tout le mérite du travail de Zolotareff, on ne peut s'empêcher de remarquer que sa méthode de démonstration est très compliquée, ce qui s'explique par le fait que l'auteur s'est servi pour cette démonstration des fonctions elliptiques anciennes, à l'aide desquelles l'*inver-*

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. X, p. 88; 1882.

[2] *Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg,* t. III; 1861.

*sion* des intégrales elliptiques s'obtient avec une grande difficulté. Il est bien connu que la théorie nouvelle des fonctions elliptiques de Weierstrass a opéré un grand progrès dans l'Analyse. En se servant des nouvelles fonctions elliptiques, on peut atteindre la plus grande simplicité dans la question qui nous occupe.

Nous commencerons par l'inversion des intégrales elliptiques.

Étant donné le polynôme

$$X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4, \tag{1}$$

le problème nommé *inversion* consiste, comme on le sait, à exprimer la variable $x$ et $\sqrt{X}$ à l'aide des fonctions elliptiques d'un même argument. Chaque polynôme (1) se transforme en

$$X = a_0(\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4) = a_0\Psi,$$

à l'aide de la substitution

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \xi.$$

Nous avons encore

$$\alpha_2 = \frac{a_2 a_0 - a_1^2}{a_0^2},$$

$$\alpha_3 = \frac{a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{a_0^3}.$$

En extrayant la racine carrée $\sqrt{\Psi}$, nous trouverons que la partie entière de la racine sera

$$\xi^2 + 3\alpha_2,$$

donc

$$\Psi = (\xi^2 + 3\alpha_2)^2 + (4\alpha_3\xi + \alpha_4 - 9\alpha_2^2).$$

Posons

$$\sqrt{\Psi} = \xi^2 + 3\alpha_2 - \frac{2}{x_1}.$$

En chassant le radical et le dénominateur dans cette équation, nous obtiendrons les deux formes suivantes :

$$(4\alpha_3\xi + \alpha_4 - 9\alpha_2^2)x_1^2 + 4(\xi^2 + 3\alpha_2)x_1 - 4 = 0, \tag{a}$$

$$4x_1\xi^2 + 4\alpha_3 x_1^2\xi + (\alpha_4 - 9\alpha_2^2)x_1^2 + 12\alpha_2 x_1 - 4 = 0. \tag{b}$$

En résolvant ces équations relativement à $x_1$ et $\xi$, nous trouverons

$$\xi = \frac{-\alpha_3 x_1^2 \pm \sqrt{\alpha_3^2 x_1^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4) x_1^3 - 12\alpha_2 x_1^2 + 4x_1}}{2x_1},$$

$$x_1 = \frac{-(\xi^2 + 3\alpha_2) \pm \sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}}{2\alpha_3\xi + \frac{\alpha_4 - 9\alpha_2^2}{2}},$$

ou

$$x_1 = \frac{-(\xi^2 + 3\alpha_2) \pm \sqrt{\Psi}}{2\alpha_3 + \frac{\alpha_4 - 9\alpha_2^2}{2}},$$

$$\xi = \frac{-\alpha_3 x_1^2 \pm \sqrt{X_1}}{2x_1},$$

en posant

$$\alpha_3^2 x_1^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4) x_1^3 - 12\alpha_2 x_1^2 + 4x_1 = X_1.$$

D'après la propriété bien connue des équations doublement quadratiques, nous aurons

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Psi}} = \pm \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} \quad (^1).$$

Prenons

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Psi}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}.$$

Posons

$$x_1 = \frac{1}{z + \alpha_2},$$

alors

$$\sqrt{X_1} = \frac{1}{(z+\alpha_2)^2}\sqrt{4z^3 - (3\alpha_2 + \alpha_4)z - (\alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)};$$

$$dx_1 = -\frac{dz}{(z+\alpha_2)^2},$$

donc

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Psi}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{-dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

---

(1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 333; 1888.

où

$$g_2 = 3\alpha_2^2 + \alpha_4,$$
$$g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2.$$

En posant

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = u,$$

nous aurons

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}}du,$$
$$z = \wp(u, g_2, g_3),$$
$$-\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3} = \wp'(u, g_2, g_3).$$

Posons, avec M. Halphen (1),

$$\alpha_2 = -\wp(v, g_2, g_3),$$

alors

$$[\wp'(v, g_2, g_3)]^2 = -4\alpha_2^3 + 3\alpha_2^3 + \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2\alpha_4 + \alpha_2^3 + \alpha_3^2 = \alpha_3^2,$$

prenons

$$\alpha_3 = \wp'(v, g_2, g_3).$$

Alors

$$x_1 = \frac{1}{\wp u - \wp v},$$
$$\sqrt{X_1} = \frac{-\wp' u}{(\wp u - \wp v)^2},$$
$$\xi = \frac{-\wp' v}{2(\wp u - \wp v)} + \frac{\wp' u}{2(\wp u - \wp v)} = \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},$$

par conséquent,

$$\sqrt{\Psi} = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 - 3\wp v - 2\wp u + 2\wp v.$$

---

(1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 120.

Mais, d'après la formule d'addition, nous aurons

$$\frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 = p(u+v) + pu + pv,$$

par conséquent,

$$\sqrt{\Psi} = p(u+v) - pu,$$
$$\sqrt{X} = \sqrt{a_0}\,[\,p(u+v) - pu],$$
$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}.$$

En exprimant les invariants $g_2$ et $g_3$ par les coefficients de X, nous aurons

$$g_2 = \frac{1}{a_0^2}(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2),$$
$$g_3 = \frac{1}{a_0^3}(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_3^2 - a_1 a_4).$$

**2.** Comme base de l'argument elliptique, nous avons pris

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = \sqrt{a_0}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Posons

$$z = \frac{t}{a_0}, \qquad g_2 = \frac{h_2}{a_0^2}, \qquad g_3 = \frac{h_3}{a_0^3};$$

alors

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = -\sqrt{a_0}\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - h_2 t - h_3}},$$

par conséquent,

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - h_2 t - h_3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{X}};$$

d'où il découle que, pour le passage de l'argument

$$u = -\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

à l'argument

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

il faut changer $z$ en $a_0 z$, $g_2$ en $a_0^2 g_2$, $g_3$ en $a_0^3 g_3$.

Par cette raison, nous aurons

$$\wp\left(\frac{v}{\sqrt{a_0}}, a_0^2 g_2, a_0^3 g_3\right) = -a_0 \alpha_2,$$

$$\wp'\left(\frac{v}{\sqrt{a_0}}, a_0^2 g_2, a_0^3 g_3\right) = a_0^{\frac{3}{2}} \alpha_3.$$

Donc, en rapportant $\wp v$ à l'argument

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

nous devons changer les invariants

$$g_2, \ g_3$$

dans les invariants

$$a_0^2 g_2, \quad a_0^3 g_3,$$

et alors nous aurons

$$\wp(v) = -a_0 \alpha_2, \qquad \wp' v = a_0^{\frac{3}{2}} \alpha_3.$$

Cette remarque importante nous servira dans la suite.

**5.** Trouvons maintenant les conditions d'intégrabilité de différentielles

$$\frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4}}$$

par des logarithmes.

En remarquant que

$$x + \mathrm{H} = -\frac{a_1}{a_0} + \mathrm{H} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}$$

et

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} du$$

nous obtiendrons

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \int \left( \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv} + \mathrm{H} - \frac{a_1}{a_0} \right) du.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \zeta(u+v) - \zeta(u) - \zeta(v) \text{ (1)},$$

nous aurons

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a_0}} \int \left[ \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v + \mathrm{H} - \frac{a_1}{a_0} \right] du.$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a_0}} \log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} + \left( \mathrm{H} - \frac{a_1}{a_0} - \zeta v \right) u.$$

En posant

$$\mathrm{H} - \frac{a_1}{a_0} - \zeta v = \mathrm{J},$$

nous aurons

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a_0}} \log \left[ e^{\mathrm{J}u} \frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} \right]$$
$$= \frac{1}{m\sqrt{a_0}} \log e^{m\mathrm{J}u} \left[ \frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} \right]^m,$$

où $m$ est entier positif.

On sait que

$$e^{m\mathrm{J}u} \left[ \frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} \right]^m$$

---

(1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, etc., t. I, p. 138.

est exprimable rationnellement par $\wp(u)$ et $\wp'(u)$ si

$$(1) \qquad v = -\frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

$$(2) \qquad J = \frac{2\tilde{\eta}}{m} \quad (^1).$$

Le choix de H, par la nature du problème, dépend de notre volonté. Si $v = -\frac{2\tilde{\omega}}{m}$, nous prendrons

$$H = \frac{2\tilde{\eta}}{m} - \zeta\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) + \frac{a_1}{a_0},$$

alors

$$J = \frac{2\tilde{\eta}}{m};$$

mais avec cette valeur de J, l'intégrale

$$\int \frac{(x+H)\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}$$

s'exprime par les logarithmes.

Ainsi ayant

$$\alpha_2 = \frac{a_2 a_0 - a_1^2}{a_0^2} = -\wp\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right)$$

et supposant

$$H = \frac{2\tilde{\eta}}{m} - \zeta\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) + \frac{a_1}{a_0},$$

on peut exprimer

$$\int \frac{(x+H)\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}$$

par une fonction logarithmique des quantités

$$\wp u = z \qquad \text{et} \qquad \wp' u = -\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$$

et, par conséquent, par une fonction logarithmique de $x$.

---

(1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, etc., t. I, p. 224.

**4.** Soit $m$ un nombre impair; alors on peut satisfaire à la congruence

$$2^s \equiv 1 \pmod m$$

par $s$ entier et positif.

Posons

$$2^s - 1 = lm,$$

$l$ étant entier; alors

$$2^s v = -(lm + 1)\frac{2\tilde{\omega}}{m}$$

ou

$$2^s v = -2l\tilde{\omega} - \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

par conséquent,

$$\wp(2^s v) = \wp\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) = \wp(v).$$

D'où il suit qu'en doublant successivement l'argument $s$ fois, nous arriverons au résultat

$$\wp(2^s v) = -\alpha_2.$$

Maintenant posons $m$ pair; alors nous aurons

$$m = 2^i n,$$

où $n$ est impair. En doublant l'argument

$$v = -\frac{2\tilde{\omega}}{m}$$

successivement $i$ fois, nous trouverons

$$2^i v = -\frac{2\tilde{\omega}}{n} = v_1.$$

Posons

$$2^k - 1 = ln;$$

nous aurons

$$2^k v_1 = -(ln + 1)\frac{2\tilde{\omega}}{n},$$

$$\wp(2^{i+k} v) = \wp(v_1) = \wp(2^i v).$$

D'où il suit, qu'en doublant l'argument $v$ successivement $(i+k)$ fois, nous trouverons

$$\wp(2^{i+k}v) = \wp(2^i v).$$

Donc, si l'intégrale

$$\int \frac{(x+H)\,dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}$$

est exprimable par des logarithmes, nous trouverons nécessairement en doublant l'argument $v$, défini par l'équation,

$$\wp(v) = \frac{a_1^2 - a_0a_2}{a_0^2}$$

ou

$$\wp(2^s v) = \wp(v),$$

ou

$$\wp(2^{i+k}v) = \wp(2^i v).$$

Il est facile de prouver que le théorème inverse est aussi juste. En effet, de la condition

$$\wp(2^s v) = \wp(v)$$

nous tirons

$$2^s v = v \pm 2\tilde{\omega},$$

d'où

$$v = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{2^s - 1} = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{m}.$$

Également de la condition

$$\wp(2^{i+k}v) = \wp(2^i v)$$

nous tirons

$$2^{i+k}v = 2^i v \pm 2\tilde{\omega},$$

d'où

$$v = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{2^i(2^k - 1)} = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

mais dans le n° 3 nous avons démontré que, si

$$v = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

l'intégrale

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_1x+a_4}}$$

s'exprime par des logarithmes.

**5.** Dans le n° **2** nous avons transformé le polynôme

$$\mathrm{X} = a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4$$

en un nouveau polynôme

$$\mathrm{X}_1 = \alpha_3^2x_1^4+(9\alpha_2^2-\alpha_4)x_1^3-12\alpha_2x_1^2+4x_1,$$

et nous avons obtenu

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\frac{dx_1}{\sqrt{\mathrm{X}_1}}.$$

Faisons la même transformation avec le polynôme $\mathrm{X}_1$. Dans ce but nous posons

$$x_1 = \frac{\alpha_4-9\alpha_2^2}{\alpha_3^2}+\xi_1;$$

nous aurons

$$\mathrm{X}_1 = \alpha_3^2(\xi_1^4+6\beta_2\xi_1^2+4\beta_3\xi_1+\beta_4),$$

où les coefficients $\beta_2$, $\beta_3$, $\beta_4$ sont composés des coefficients du polynôme $\mathrm{X}_1$ comme $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ des coefficients du polynôme X; par conséquent,

$$\beta_2 = -\frac{2\alpha_2\alpha_3^2+\left(\dfrac{9\alpha_2^2-\alpha_4}{4}\right)^2}{\alpha_3^4} = -\frac{32\alpha_2\alpha_3^2+(9\alpha_2^2-\alpha_4)^2}{16\alpha_3^4}.$$

Calculons maintenant, à l'aide de la formule de duplication de l'argument, $p(2v)$. Nous avons

$$\begin{aligned} p(2v) &= -2pv+\frac{1}{4}\left(\frac{2p''v}{2p'v}\right)^2 \\ &= -2pv+\frac{1}{4}\left(\frac{12p^2v-g_2}{2p'v}\right)^2 = \frac{32\alpha_2\alpha_3^2+(9\alpha_2^2-\alpha_4)^2}{16\alpha_3^2}. \end{aligned}$$

Le calcul montre que

$$\wp(2v) = -\alpha_3^2 \beta_2.$$

Calculons maintenant $\wp'(2v)$ et $\beta_3$. Nous aurons

$$\wp'(2v) = -\wp' v + \frac{1}{4}\frac{\wp'' v}{\wp' v}\left[\frac{\wp''' v}{\wp' v} - \left(\frac{\wp'' v}{\wp' v}\right)^2\right].$$

De l'équation

$$\wp'^2(v) = 4\wp^3 v - g_2 \wp v - g_3$$

nous tirons

$$2\wp'' v = 12\wp^2 v - g_2,$$

$$\wp'''(v) = 12\wp v \,\wp' v,$$

par conséquent,

$$\frac{\wp'' v}{\wp' v} = \frac{12\alpha_2^2 - 3\alpha_2^2 - \alpha_4}{2\alpha_3} = \frac{9\alpha_2^2 - \alpha_4}{2\alpha_3},$$

$$\frac{\wp''' v}{\wp' v} = -12\alpha_2;$$

donc

$$\wp'(2v) = -\frac{32\alpha_3^4 + 48\alpha_2\alpha_3^2(9\alpha_2^2 - \alpha_4) + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)^3}{32\alpha_3^3},$$

nous trouverons encore

$$\beta_3 = \frac{32\alpha_3^4 + 48\alpha_2\alpha_3^2(9\alpha_2^2 - \alpha_4) + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)^3}{32\alpha_3^6},$$

d'où

$$\wp'(2v) = -\alpha_3^3 \beta_3.$$

L'expression ci-dessus s'accorde pleinement avec la remarque du n° **2.** En effet, nous avons

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3}\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}},$$

où

$$X_2 = \beta_3^2 x_2^4 + (9\beta_2^2 - \beta_4)x_2^3 - 12\beta_2 x_2^2 + 4x_2.$$

Si nous prenions comme base de l'argument

$$\int \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}},$$

en supposant

$$-\beta_2 = p(w),$$

nous aurions

$$p'(w) = \pm \beta_3.$$

Pour passer de l'argument

$$\int \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}$$

à l'argument

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}$$

avec les invariants $g_2$, $g_3$, il faut multiplier $p(w)$ par $\alpha_3^2$, $p'(w)$ par $(\alpha_3^2)^{\frac{3}{2}} = \alpha_3^3$; par conséquent, nous obtiendrons les résultats

$$p(2v) = -\alpha_3^2\beta_2,$$
$$p'(2v) = \pm \alpha_3^3\beta_3.$$

Le calcul a montré que

$$p(2v) = -\alpha_3^2\beta_2, \qquad p'(2v) = -\alpha_3^3\beta_3.$$

En répétant, avec le polynôme $X_2$, la même transformation, nous aurons, évidemment,

$$p(4v) = -\alpha_3^2\beta_3^2\gamma_2,$$
$$p'(4v) = \quad \alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3,$$

où les coefficients $\gamma$ sont composés des coefficients du polynôme $X_2$, comme les coefficients $\beta$ sont composés des coefficients du polynôme $X_1$. Plus loin nous aurons évidemment

$$p(8v) = -\alpha_3^2\beta_3^2\gamma_3^2\delta_2,$$
$$p'(8v) = -\alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3^3\delta_3,$$
$$p(16v) = -\alpha_3^2\beta_3^2\gamma_3^2\delta_3^2\varepsilon_2,$$
$$p'(16v) = \quad \alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3^3\delta_3^3\varepsilon_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

d'où il suit que les séries

$$\begin{array}{llllll} \alpha_2, & \alpha_3^2\beta_2, & \alpha_3^2\beta_3^2\gamma_2, & \alpha_3^2\beta_3^2\gamma_3^2\delta_2, & \alpha_3^2\beta_3^2\gamma_3^2\delta_3^2\varepsilon_2, & \ldots; \\ \alpha_3, & \alpha_3^3\beta_3, & \alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3, & -\alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3^3\delta_3, & \alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3^3\delta_3^3\varepsilon_3, & \ldots \end{array}$$

doivent être périodiques.

Donc, étant donnée l'intégrale

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}},$$

où H est indéterminé, et devant résoudre la question d'exprimabilité de l'intégrale par des logarithmes, on peut le faire de deux manières :

1° En recherchant le polynôme

$$\Psi = \xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4,$$

nous obtiendrons

$$-\alpha_2 = \wp(v), \qquad \alpha_3 = \wp' v,$$

$$g_2 = 3\alpha_2^2 + \alpha_4, \qquad g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2.$$

Au moyen des formules de duplication de l'argument, nous calculerons successivement

$$\begin{array}{llll} \wp(2v), & \wp(4v), & \wp(8v), & \ldots. \\ \wp'(2v), & \wp'(4v), & \wp'(8v), & \ldots. \end{array}$$

Si ces séries sont périodiques, on peut choisir H de telle manière que l'intégrale s'exprime par des logarithmes.

2° En composant la série des polynômes

$$\mathrm{X}, \quad \mathrm{X}_1, \quad \mathrm{X}_2, \quad \ldots,$$

nous calculons les séries des quantités

$$\begin{array}{llll} \alpha_2, & \alpha_3^2\beta_2, & \alpha_3^2\beta_3^2\gamma_2, & \ldots, \\ \alpha_3, & \alpha_3^3\beta_3, & \alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3, & \ldots. \end{array}$$

Si ces séries sont périodiques, l'intégrale s'exprime par des logarithmes. Dans ce cas il est indifférent que la période commence au terme $pv$ ou à un autre terme quelconque.

**6.** Dans le n° 1, en faisant l'inversion de l'intégrale elliptique, nous avons trouvé qu'en prenant

$$-\alpha_2 = p(v, g_2, g_3)$$

nous avons

$$\alpha_3 = p'(v, g_2, g_3).$$

Mais, dans le n° 5, nous avons vu que

$$2p''v = 9\alpha_2^2 - \alpha_4 = 9p^2v - \alpha_4,$$

donc

$$\alpha_4 = 9p^2v - 2p''v.$$

D'après la transformation, nous avons changé le polynôme

$$X_1 = \alpha_3^2 x_1^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)x_1^3 - 12\alpha_2 x_1^2 + 4x_1$$

en le polynôme

$$X_2 = \beta_3^2 x_2^4 + (9\beta_2^2 - \beta_4)x_2^3 - 12\alpha_2 x_2^2 + 4x_2.$$

Par cette transformation nous avons eu

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3}\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}.$$

Si nous prenons pour base de l'argument elliptique

$$\int \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}},$$

en posant

$$-\beta_2 = p(v_1),$$

nous aurons

$$\beta_3 = p'(v_1),$$
$$\beta_4 = 9p^2(v_1) - 2p''(v_2).$$

Si nous passons à l'argument

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}},$$

c'est-à-dire aux invariants $g_2$, $g_3$, $v_1$ se transforme en $2v$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\beta_4$ se transformeront en $\alpha_3^2\beta_2$, $\alpha_3^3\beta_3$, $\alpha_3^4\beta_4$.

D'où il découle qu'après les transformations nous aurons encore une série périodique

$$\alpha_4, \quad \alpha_3^4\beta_4, \quad \alpha_2^4\beta_3^4\gamma_4, \quad \alpha_3^4\beta_3^4\gamma_3^4\delta_4, \quad \ldots.$$

**7.** Supposons que nous ayons

$$\alpha_3^2\beta_3^2\gamma_3^2\ldots\pi_3\rho_2 = \alpha_2,$$
$$\alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3^3\ldots\pi_3^3\rho_3 = \alpha_3,$$
$$\alpha_3^4\beta_3^4\gamma_3^4\ldots\pi_3^4\rho_4 = \alpha_4.$$

Grâce à la série des transformations, nous trouverons

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3}\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = \frac{1}{\alpha_3\beta_3}\frac{dx_3}{\sqrt{X_3}} = \cdots = \frac{1}{\alpha_3\beta_3\gamma_3\ldots\pi_3}\frac{dx_{n+1}}{\sqrt{X_{n+1}}},$$
$$\frac{dx_{n+1}}{\sqrt{X_{n+1}}} = \frac{d\xi_n}{\sqrt{\Psi_n}},$$

où

$$\Psi_n = \xi_n^4 + 6\rho_2\xi_n^2 + 4\rho_3\xi_n + \rho_4.$$

Supposons

$$\xi_n = \frac{\eta}{\alpha_3\beta_3\gamma_3\ldots\pi_3},$$

alors

$$\Psi_n = \frac{1}{\alpha_3^4\beta_3^4\gamma_3^4\ldots\pi_3^4}(\eta^4 + 6\alpha_3^2\beta_3^2\ldots\pi_3\rho_2\eta^2$$
$$+ 4\alpha_3^3\beta_3^3\ldots\pi_3^3\rho_3\eta + \alpha_3^4\beta_3^4\ldots\pi_3^4\rho_4)$$

ou

$$\sqrt{\Psi_n} = \frac{1}{\alpha_3^2\beta_3^2\ldots\pi_3^2}\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_2\eta^2 + 4\alpha_3\eta + \alpha_4},$$

d'où

$$\frac{d\xi_n}{\sqrt{\Psi_n}} = \pm\alpha_3\beta_3\gamma_3\ldots\pi_3\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_2\eta^2 + 4\alpha_3\eta + \alpha_4}};$$

par conséquent,

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_2\eta^2 + 4\alpha_3\eta + \alpha_4}}.$$

En posant

$$\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_2\eta^2 + 4\alpha_3\eta + \alpha_4} = \eta^2 + 3\alpha_2 - \frac{2}{y},$$

nous aurons

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

où

$$Y = \alpha_3^2 y^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)y^3 - 12\alpha_2 y^2 + 4y,$$

c'est-à-dire que les polynômes $X_1$ et Y se distingueront seulement par des variables. Donc, si l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)\,dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}}$$

peut s'exprimer par des logarithmes, par une série de transformations, nous devons obtenir

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3}\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = \frac{1}{\alpha_3\beta_3}\frac{dx_3}{\sqrt{X_3}} = \cdots = \frac{1}{\alpha_3\beta_3\ldots\pi_3}\frac{dx_{n+1}}{\sqrt{X_{n+1}}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

où le polynôme final possède les mêmes coefficients que le polynôme primitif.

De l'équation d'Euler

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

nous tirons

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \int \frac{dy}{\sqrt{Y}} + C.$$

En passant aux intégrales définies, nous pouvons prendre pour limites inférieures une même quantité. En effet, les variables $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_{n+1}$, $y$ sont liées entre elles par $(n+1)$ équations doublement quadratiques auxquelles nous pouvons toujours adjoindre l'égalité

$$x_1 = y.$$

Alors nous aurons

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int_a^y \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Par conséquent, il est toujours possible de faire

$$C = 0,$$

alors

$$x_1 = y.$$

D'après les formules du n° 1, nous avons

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \xi = -\frac{a_1}{a_0} + \left(\frac{-\alpha_3 x_1}{2} - \frac{1}{2x_1}\sqrt{X_1}\right),$$

par conséquent,

$$\frac{(x+H)\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\left(\frac{2a_0 H - 2a_1 - a_0\alpha_3 x_1}{2a_0} - \frac{1}{2x_1}\sqrt{X_1}\right)\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}};$$

d'où il suit que nous avons, en général,

$$\int \frac{(x+H)\,dx}{\sqrt{X}} = -\frac{1}{2\sqrt{a_0}}\log x_1 + \int \frac{(aH + b + cx_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}},$$

où $a$, $b$, $c$ sont des constantes déterminées.

Il est clair que nous obtiendrons la série des équations

$$\int \frac{(aH + b + cx_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \mathfrak{p}_1 \log x_1 + \int \frac{(a_1 H + b_1 + c_1 x_2)\,dx_2}{\sqrt{X_2}},$$

$$\int \frac{(a_1 H + b_1 + c_1 x_2)\,dx_2}{\sqrt{X_2}} = \mathfrak{p}_2 \log x_2 + \int \frac{(a_2 H + b_2 + c_2 x_3)\,dx_3}{\sqrt{X_3}},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ,

$$\begin{aligned}\int \frac{(a_{n-1} H + b_{n-1} + c_{n-1} x_n)\,dx_n}{\sqrt{X_n}} &= \mathfrak{p}_n \log x_n + \int \frac{(a_n H + b_n + c_n y)\,dy}{\sqrt{Y}} \\ &= \mathfrak{p}_n \log x_n + \int \frac{(a_n H + b_n + c_n x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} \\ &= \mathfrak{p}_n \log x_n + \frac{c_n}{c}\int \frac{\frac{a_n c}{c_n} H + \frac{b_n c}{c_n} + c x_1}{\sqrt{X_1}}\,dx_1.\end{aligned}$$

En posant

$$aH + b + cx_1 = \frac{a_n c}{c_n} H + \frac{b_n c}{c_n} + cx_1,$$

nous trouverons l'indéterminée H et nous obtiendrons des équations, en nombre suffisant, pour évaluer l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)\,\partial x}{\sqrt{X}}.$$

Nous ne nous arrêterons pas à examiner le cas où dans les séries du n° 5 la période ne commence pas dès le premier terme, car ce cas est clair par lui-même.

Il faut examiner encore un cas, où

$$v = -\frac{2\tilde{\omega}}{2^k}.$$

Dans ce cas, en doublant l'argument $(k-1)$ fois, nous aurons

$$2^{k-1} v = -\tilde{\omega},$$

et comme

$$\wp'(\tilde{\omega}) = 0$$

dans la série des nombres

$$\alpha_3, \quad -\alpha_3^3 \beta_3, \quad \alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3, \quad \ldots,$$

il s'en trouvera un égal à zéro.

Donc, si dans la série des polynômes

$$\begin{aligned} \Psi &= \xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4, \\ \Psi_1 &= \xi_1^4 + 6\beta_2 \xi_1^2 + 4\beta_3 \xi_1 + \beta_4, \end{aligned}$$

le dernier est de la forme

$$\Psi_n = \xi_n^4 + 6\rho_3 \xi_n^2 + \rho_4,$$

l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)\,\partial x}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 + a_4}}$$

s'exprime par des logarithmes.