JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HALPHEN

Sur les formes différentielles associées

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 6 (1890), p. 211-230.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1890_4_6__211_0>

Sur les formes différentielles associées;

PAR M. G. HALPHEN.

Voici d'abord une formule qui sera très utile.

Soit y une fonction d'une variable indépendante, par rapport à laquelle on prend les dérivées, dénotées par des accents. On a successivement

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 2yy' &= (y^2)', \\ 2yy'' &= (y^2)'' - 2y'^2, \\ 2yy''' &= (y^2)''' - 3(y'^2)', \\ 2yy^{\text{IV}} &= (y^2)^{\text{IV}} - 4(y''^2)'' + 2y''^2. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules apparaissent les mêmes coefficients numériques que dans les suivantes :

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha &= (2\cos\alpha), \\ 2\cos 2\alpha &= (2\cos\alpha)^2 - 2, \\ 2\cos 3\alpha &= (2\cos\alpha)^3 - 3(2\cos\alpha), \\ 2\cos 4\alpha &= (2\cos\alpha)^4 - 4(2\cos 2\alpha)^2 + 2. \end{aligned}$$

D'une manière générale, on a, comme on sait,

$$\begin{aligned} 2\cos n\alpha = (2\cos\alpha)^n - \frac{n}{1}(2\cos\alpha)^{n-2} \\ + \frac{n(n-3)}{1.2}(2\cos\alpha)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2\cos\alpha)^{n-6}\ldots \end{aligned}$$

On aura de même

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} 2yy^{(n)} = (y^2)^{(n)} &- \frac{n}{1}(y'^2)^{(n-2)} \\ &+ \frac{n(n-3)}{1.2}(y''^2)^{(n-4)} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(y'''^2)^{(n-6)}\ldots. \end{aligned} \right.$$

La démonstration, sur laquelle je ne crois pas utile d'insister, résulte immédiatement des deux formules comparées

$$2\cos(n+1)\alpha = (2\cos\alpha)\,2\cos n\alpha - 2\cos(n-1)\alpha,$$
$$2yy^{(n+1)} = (2yy^{(n)})' - 2y'y^{(n)}.$$

Dans cette dernière, le second terme du second membre s'exprime au moyen de la formule (2), où l'on change y en y' et n en $(n-1)$.

Par le changement de y en y' ou y'', y''', ... la formule (2) permet, comme on voit, d'exprimer tout produit de deux figures y, y', y'', ... par les carrés et les dérivées de ces carrés.

Une expression U, contenant une ou plusieurs indéterminées comme y, fonction, laissée arbitraire, de la variable indépendante, est dite *dérivée exacte* s'il existe une autre expression V, contenant les mêmes indéterminées, et dont la dérivée V′ reproduise exactement U. Ainsi par les formules (1) on voit que yy', yy''' sont des dérivées exactes, tandis que yy'', yy^{IV} n'en sont pas. Et généralement, dans la formule (2), on voit que $yy^{(n)}$ est, ou non, une dérivée exacte, suivant que n est impair ou pair.

Dans ce qui va suivre, nous emploierons le signe $\equiv$ pour exprimer une égalité dans laquelle on néglige des dérivées exactes. Par exemple, d'après la formule (2), où l'on suppose n pair, on déduit en retenant seulement le dernier terme, dont le coefficient est égal à 2,

$$(3)\qquad yy^{(2m)} \equiv (-1)^m (y^{(m)})^2;$$

tandis que, si n est impair, on conclut

$$(3\ bis)\qquad yy^{(2m+1)} \equiv 0.$$

Soit a une autre fonction quelconque de la même variable indépendante.

Prenons l'identité, base de l'intégration par parties,

$$\begin{aligned} & ay^{(m)} + (-1)^{m-1} y a^{(m)} \\ & \quad = [ay^{(m-1)} - a'y^{(m-2)} + a''y^{(m-3)} - \ldots + (-1)^{m-1} a^{(m-1)} y]' \end{aligned}$$

ou, suivant nos conventions,

$$ay^{(m)} \equiv (-1)^m a^{(m)} y. \tag{4}$$

Multiplions les deux membres de la formule (2) par a, puis, au second membre, remplaçons chaque terme par son équivalent d'après la formule (4) où l'on change successivement y et m en y^2 et n, en y'^2 et $(n-2)$ en y''^2 et $(n-4)$, et ainsi de suite. Il en résulte la formule suivante qui est d'une grande utilité :

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & (-1)^n 2ayy^{(n)} \equiv a^{(n)} y^2 - \frac{n}{1} a^{(n-2)} y'^2 + \frac{n(n-3)}{1.2} a^{(n-4)} y''^2 \\ & \qquad - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} a^{(n-6)} y'''^2 + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Par le changement de y en $y', y'', \ldots$ cette formule permet de réduire tout produit de deux figures $y, y', y'', \ldots$ aux seuls carrés y^2, $y'^2, y''^2, \ldots$, en négligeant une dérivée exacte.

Nous aurons à considérer des formes quadratiques, c'est-à-dire des polynômes homogènes et du second degré, par rapport à $y, y', y'', \ldots$, avec des coefficients, qui seront censés dépendre, d'une manière quelconque, de la variable indépendante. Appelons-les, pour abréger, *formes quadratiques différentielles;* on aura soin de ne pas les confondre avec les formes quadratiques ordinaires, que nous aurons aussi à envisager, avec d'autres indéterminées, et dans lesquelles les coefficients sont toujours supposés constants ou numériques.

Nous aurons aussi à envisager des *formes linéaires différentielles,* polynômes homogènes et du premier degré en $y, y', y'', \ldots$, avec des coefficients dépendant de la variable.

Dans l'un et l'autre cas, l'*ordre* de la forme sera toujours le plus grand indice de dérivation avec lequel figure, dans cette forme, l'*indéterminée* y. Ainsi,

$$U = ay'' + 2a'y' + a''y,$$
$$V = 2ayy''' - 2by'y'' + 3a'yy'' - b'y'^2 + 3a''yy' + a'''y^2$$

sont des formes différentielles, la première linéaire et du second ordre, la seconde quadratique et du troisième ordre. Ces formes sont toutes deux des dérivées exactes, ce qui s'écrira ainsi

$$\acute{U} = 0, \qquad \acute{V} = 0.$$

On a, en effet,

$$U = (ay)'',$$
$$V = [2ayy'' - (a+b)y'^2 + a'yy' + a''y^2]'.$$

Les formes quadratiques différentielles, qui sont des dérivées exactes, sont précisément celles que nous aurons à envisager, et le but pour lequel j'ai établi la formule (5), c'est de discerner facilement ces formes. Voici comment :

Par la formule (5) on peut immédiatement *réduire la forme à une somme de carrés,* en négligeant une dérivée exacte, et écrire ainsi, pour une forme W quelconque,

$$(6) \qquad W = A(y^{(p)})^2 + B(y^{(q)})^2 + \ldots + Ly^2.$$

Pour que W soit une dérivée exacte, il *faut* que tous ces carrés manquent; ainsi la réduction au moyen de la formule (5) fait nécessairement apparaître le caractère de dérivée exacte, s'il existe. En effet, si W est une dérivée exacte, on aura identiquement

$$(7) \qquad T' = A(y^{(p)})^2 + B(y^{(q)})^2 + \ldots + Ly^2,$$

et T sera aussi une forme quadratique différentielle. Mais, si n est l'ordre de cette dernière, les termes qui, dans T, contiennent $y^{(n)}$, donnent, par la différentiation, les termes de l'ordre le plus élevé μ^{n+1} dans T'; ceux-ci ne peuvent se réduire avec d'autres et sont du premier degré par rapport à $y^{(n+1)}$. Donc, dans la dérivée T', les termes de l'ordre le plus élevé ne peuvent être des carrés. Donc, dans le second membre (6), aucun des indices p, q, ... ne peut être le plus grand. Donc tous ces termes doivent manquer.

En résumé, *pour qu'une forme quadratique différentielle* W *soit une dérivée exacte, il faut et il suffit que sa réduction par la formule* (5) *aboutisse à* $W \equiv 0$.

On remarquera, en passant, que la réduction d'une forme W en carrés, telle que (6), peut se faire d'une seule manière; sans quoi une somme de carrés, non identiquement nulle, serait une dérivée exacte.

Prenons pour exemple la forme V considérée précédemment; voici le calcul :

$$\begin{aligned}
2ayy''' &\equiv - a'''y^2 + 3a'y'^2,\\
2by'y'' &\equiv - b'y'^2,\\
3a'yy'' &\equiv + \tfrac{3}{2}a'''y^2 - 3a'y'^2,\\
b'y'^2 &\equiv + b'y'^2,\\
3a''yy' &\equiv - \tfrac{3}{2}a'''y^2,\\
a'''y^2 &\equiv + a'''y^2,\\
V &\equiv 0.
\end{aligned}$$

Considérons deux formes *linéaires* différentielles G_0, G_1; leur produit est quadratique. Si ce produit est une dérivée exacte, les deux formes G_0, G_1 seront dites *associées*.

Soient

$$\begin{aligned}
G_0 &= ay^{(n)} + by^{(n-1)} + \ldots,\\
G_1 &= a_1y^{(p)} + b_1y^{(p-1)} + \ldots
\end{aligned}$$

deux formes associées. Si leurs ordres p, n étaient égaux entre eux, le produit G_0G_1, réduit en carrés, contiendrait, pour premier carré $aa_1(y^{(p)})^2$, et ne serait pas une dérivée exacte. Les ordres sont donc inégaux. Soit $p < n$. Si la différence $(n-p)$ était paire, on aurait, d'après (5),

$$\begin{aligned}
2aa_1y^{(p)}y^{(n)} \equiv (aa_1)^{(n-p)}(y^{(p)})^2 - \frac{n-p}{1}(aa_1)^{(n-p-2)}(y^{(p+1)})^2 + \ldots\\
+ (-1)^{\frac{n-p}{2}} 2aa_1(y^{(p+n)})^2.
\end{aligned}$$

Le dernier terme de cette formule a l'ordre le plus élevé, parmi tous ceux que fournira la réduction; il est seul et ne peut disparaître. Donc l'hypothèse que n et p soient de même parité est incompatible avec la propriété d'association. Donc, *dans deux formes associées, les ordres sont de parités opposées.*

Je vais, à ce sujet, résoudre un premier problème : *Trouver toutes les formes associées à la forme la plus simple*, $G_1 = y$. Elles sont d'ordre impair, comme on vient de le reconnaître, puisque G_1 est d'ordre zéro.

Je dis d'abord que la forme suivante

$$F = (ay)^{(2n+1)} + ay^{(2n+1)} \tag{8}$$

est une associée de G_1. Si, en effet, dans la relation (4), on suppose $m = 2n+1$, et qu'on mette ay au lieu de a, on a (en mettant les termes au second membre)

$$y(ay)^{(2n+1)} + ayy^{(2n+1)} \equiv 0,$$

c'est-à-dire

$$G_1 F \equiv 0.$$

Soit maintenant G_0 une forme quelconque, d'ordre $(2n+1)$, associée à G_1; prenons son premier terme $2ay^{(2n+1)}$, composons la forme F avec le même coefficient a. La différence $(G_0 - F)$ est également associée à G_1; mais elle est d'ordre inférieur à $(2n+1)$, car F a, comme G_0, $2ay^{(2n+1)}$ pour premier terme. Donc $(G_0 - F)$ est une forme d'ordre au plus égal à $(2n-1)$. En poursuivant, on voit que l'expression générale de G_0 se compose de la somme de plusieurs formes particulières, telles que F, d'ordres décroissants, et de coefficients a, b, ..., quelconques

$$\left\{\begin{aligned} G_0 = {} & (ay)^{(2n+1)} + ay^{(2n+1)} \\ & + (by)^{(2n-1)} + by^{(2n-1)} + \ldots + (ly)' + ly'. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Par exemple, en supposant $n = 1$, $a = \frac{1}{2}$, on trouve la forme

$$G = y''' + 2by' + b'y,$$

ayant cette propriété que yG est une dérivée exacte

$$yG = (yy'' - \tfrac{1}{2}y'^2 + by^2)'.$$

Voici un second problème analogue : *Trouver les associées de la forme* $G_1 = y'$. En mettant à part, dans la forme cherchée, le terme où y n'est pas dérivé, on peut écrire cette forme $f(y') + cy$. Mais la réduction du produit $y'f(y')$, d'après la formule (5), ne saurait amener le carré y^2, tandis que le produit cyy' amène, au contraire, le terme $-\frac{1}{2}c'y^2$. Pour que la forme soit associée de y', il faut donc que c' soit nul, donc c constant. Cela étant, cyy' est une dérivée exacte, et il faudra que $y'f(y')$ le soit aussi. Donc les formes cherchées (d'ordre $2n$) sont contenues dans la formule suivante, *où le dernier coefficient c est une constante*,

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} G_0 = {} & (ay')^{2n-1} + ay^{(2n)} + (by')^{2n-3} \\ & + by^{(2n-2)} + \ldots + (ly')' + ly'' + cy. \end{aligned}\right.$$

Par exemple,

$$G = y^{\text{IV}} + 2by'' + b'y' + cy,$$
$$y'G = (y'y''' - \tfrac{1}{2}y''^2 + by'^2 + \tfrac{1}{2}cy^2)'.$$

Le problème général sur les formes associées consiste à trouver *toutes les formes* G_0, *associées à une forme donnée* G_1. Je vais faire voir d'abord que ce problème se réduit à la recherche des formes dont l'ordre est moindre que celui de G_1.

Supposons G_0 d'ordre supérieur à celui de G_1, et soit $(2n+1)$ la différence des ordres, qui est nécessairement impaire.

En mettant dans l'expression (9) G_1 au lieu de y, composons la forme

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} H = {} & (aG_1)^{(2n+1)} + aG_1^{(2n+1)} \\ & + (bG_1)^{(2n-1)} + bG_1^{(2n-1)} + \ldots + (lG_1)' + lG_1'. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière H est associée à G_1, et du même ordre que la forme cherchée G_0.

Par un choix convenable de a, on abaissera l'ordre $(G_0 - H)$, en faisant disparaître le terme de l'ordre le plus élevé. Mais $(G_0 - H)$ étant associée à G_1, son ordre surpasse celui de G_1 d'un nombre impair d'unités, $(2n-1)$ au plus. Par le choix de b on pourra donc réduire cette différence au-dessous de $(2n-1)$, puis, par le choix du coefficient suivant, au-dessous de $(2n-3)$, ..., enfin par le choix de l, $(G_0 - H)$ sera réduit à un ordre moindre que celui de G_0.

Donc *une forme quelconque* G_0 *associée à* G_1 *a pour expression* $H + G_2$, H *étant l'expression* (11) *et* G_2 *une forme associée à* G_1, *mais d'ordre inférieur à celui de* G_1.

La recherche directe de G_2, étant donnée G_1, constitue un problème de Calcul intégral sur lequel nous reviendrons. Mais actuellement je vais le résoudre indirectement en *construisant de la manière la plus générale deux formes associées.*

Pour ce but, employons un symbole distinctif qui représente la combinaison (9). Écrivons

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} F(a, y) = {} & (ay)^{(2n+1)} + ay^{(2n+1)} \\ & + (by)^{(2n-1)} + by^{(2n-1)} + \ldots + (ly)' + ly', \end{aligned}\right.$$

en sous-entendant les coefficients b, ..., l, qui sont toujours quelconques et seront changés arbitrairement en même temps que a, sous-entendant aussi l'*ordre* $(2n+1)$, qui pourra changer aussi en même temps. Je vais employer une suite de pareils symboles $F(a_0, y)$, $F(a_1, y)$, ..., et il est entendu que l'ordre de *chacun* d'eux, $2n_0 + 1$, $2n_1 + 1$, ..., est quelconque, ainsi que les coefficients analogues à b, ..., l. Seul le *premier* coefficient a est rappelé par la notation.

Soient G_0, G_1 deux formes associées, la première de l'ordre le plus élevé. Nous avons démontré la relation

$$G_0 = F(a_0, G_1) + G_2,$$

où G_2 est associée à G_1, mais d'ordre inférieur. On a donc de même

$$G_1 = F(a_1, G_2) + G_3,$$
$$G_2 = F(a_2, G_3) + G_4$$

et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à une forme d'ordre zéro.

La suite se termine donc de la manière suivante :

$$\begin{aligned} G_{r-2} &= F(a_{r-2}, G_{r-1}) + G_r, \\ G_{r-1} &= F(a_{r-1}, G_r), \\ G_r &= cy. \end{aligned}$$

Le dernier coefficient c, comme les précédents, est une fonction arbitraire de la variable indépendante.

Par ce moyen, le problème est résolu. Examinons un peu la solution. Le symbole $F(a, y)$, qui est d'ordre $(2n+1)$, contient seulement $(n+1)$ coefficients arbitraires, moins, par conséquent, de coefficients qu'il y a d'unités dans son ordre, sauf au cas $n = 0$. D'autre part, G_0 a pour ordre la somme des ordres des symboles F employés. En comptant le dernier coefficient c, on voit que le nombre des fonctions arbitraires contribuant à composer les coefficients de G_0 ne surpasse pas d'une unité l'ordre de G_0, comme cela doit arriver pour une forme linéaire arbitraire; sauf cependant le cas où tous les symboles F sont du premier ordre.

Nous devons donc considérer comme cas général celui où tous les symboles F sont de premier ordre

$$F(a, y) = (ay)' + ay' = 2ay' + a'y.$$

Quand il en est ainsi, la forme G_0 peut être envisagée comme arbitraire. Une forme G_0, construite avec des symboles F d'ordre supérieur à l'unité, a des propriétés particulières, dont nous reconnaîtrons quelques-unes. Mais on peut la construire aussi avec des symboles F d'ordre égal à l'unité.

Le mode de formation de G_0 par des symboles du premier ordre est le plus général, non seulement à cause du nombre des fonctions arbitraires qu'il entraîne, mais comme comprenant, en outre, à titre de cas particulier, l'autre mode. C'est ce que je vais prouver.

Supposons, dans l'échelle des formes G, que quelques-unes des dernières $G_r, G_{r-1}, \ldots, G_{k+1}, G_k$ soient composées avec des symboles arbitraires, et les trois suivantes avec des symboles à coefficients infiniment grands ou infiniment petits, de cette manière :

$$G_{k-1} = \frac{1}{\varepsilon}(\alpha G_k)' + \frac{1}{\varepsilon}\alpha G'_k + G_{k+1},$$

$$G_{k-2} = \varepsilon^2[(a G_{k-1})^{(2n+1)} + a G_{k-1}^{(2n+1)} + \ldots + (l G_{k-1})' + l G'_{k-1}] + G_k,$$

$$G_{k-3} = -\frac{1}{\varepsilon}[(\alpha G_{k-2})' + \alpha G'_{k-2}] + G_{k-1}.$$

Nous supposons ε indépendant de la variable et infiniment petit. En employant la notation (12) et posant, pour abréger,

$$(\alpha G_k)' + \alpha G'_k = z,$$

nous avons pour limite de G_{k-3}

$$(13) \qquad G_{k-3} = -[\alpha F(a, z)]' - \alpha F'(a, z) + G_{k+1}.$$

La différence limite $G_{k-3} - G_{k+1}$, comme on le voit ici, est linéaire par rapport à G_k et ses dérivées, et de l'ordre $(2n+3)$. Je dis que c'est une forme associée à G_k. On a, en effet,

$$-[\alpha F(a, z)]' G_k \equiv F(a, z)\,\alpha G'_k,$$
$$-\alpha F'(a, z) \quad G_k \equiv F(a, z)\,(\alpha G_k)';$$

d'où, en ajoutant membre à membre et d'après (13),

$$G_k(G_{k-3} - G_{k+1}) \equiv F(a, z)[\alpha G'_k + (\alpha G_k)'] = z\,F(a, z) \equiv 0.$$

On a donc

$$G_{k-3} = F(a_1, G_k) + G_{k+1},$$

avec $a_1 = -4a^2\alpha$, et

$$F(a_1, G) = (a_1, G_k)^{2n+3} + a_1 G_k^{2n+3} + (b_1 G_k)^{2n+1} + b_1 G_k^{2n+1} + \ldots.$$

Les coefficients $b_1, \ldots$ de cette forme sont liés d'une manière assez compliquée aux précédents, et nous n'avons pas à approfondir ces liaisons. Il suffit d'observer que les coefficients de cette forme d'ordre

$2n+3$ sont composés avec une fonction arbitraire α en plus des coefficients de la forme $F(a, z)$ d'ordre $2n+1$; elle peut donc être envisagée comme arbitraire relativement à son ordre. Donc une échelle contenant une forme d'ordre $2n+3$ peut être considérée comme la limite d'une échelle où cette forme est remplacée par trois autres, d'ordres respectivement égaux à 1, $2n+1$, 1. En répétant ce procédé, on voit qu'une échelle quelconque peut être considérée comme la limite d'une échelle où toutes les formes sont du premier ordre seulement.

Cette remarque est utile pour mettre en lumière les propriétés de l'échelle à l'égard des changements de variables. Soit

$$F(a, z) = (az)' + az'.$$

Nous avons

$$zF(a, z) = (az^2)'.$$

Changeons z en ρz, ρ étant une fonction quelconque de la variable; nous aurons de suite

$$(14) \qquad \rho z F(a, \rho z) = z F(a\rho^2, z).$$

Prenons maintenant l'échelle des fonctions G, en supposant tous les F du premier ordre.

Soit, en mettant la variable y en évidence,

$$G_0(y), \quad G_1(y), \quad \ldots, \quad G_r(y),$$

la suite de ces fonctions.

Soit, d'autre part,

$$g_0(y), \quad g_1(y), \quad \ldots, \quad g_r(y)$$

la suite analogue construite en remplaçant les coefficients c, a_{r-1}, a_{r-2}, a_{r-3}, ... par c, $a_{r-1}\rho^2$, $a_{r-2}\frac{1}{\rho^2}$, $a_{r-3}\rho^2$, ... Nous aurons successivement

$$G_r(\rho y) = c\rho y = \rho g_r(y);$$

puis, d'après (14),

$$G_{r-1}(\rho y) = F(a_{r-1}, \rho g_r) = \frac{1}{\rho} F(a_{r-1}\rho^2, g_r) = \frac{1}{\rho} g_{r-1}(y);$$

puis, toujours d'après (14), où l'on change ρ en son inverse,

$$\begin{aligned} G_{r-2}(\rho y) &= F\left(a_{r-2}, \frac{1}{\rho} g_{r-1}\right) + G_r(\rho y) \\ &= \rho F\left(\frac{a_{r-2}}{\rho^2}, g_{r-1}\right) + \rho g_r = \rho g_{r-2}(y); \end{aligned}$$

et ainsi de suite. En résumé, si d'une part on construit la forme $G_0(y)$ avec les coefficients c, a_{r-1}, a_{r-2}, ..., a_0 et l'indéterminée y; d'autre part, la forme $g_0(y)$ avec les coefficients c, $a_{r-1}\rho^2$, $\frac{a_{r-2}}{\rho^2}$, $a_{r-3}\rho^2$, ..., on a

$$G_0(\rho y) = \begin{cases} \rho g_0(y), & \text{si } r \text{ est pair,} \\ \frac{1}{\rho} g_0(y), & \text{si } r \text{ est impair.} \end{cases}$$

Si l'on pose

$$G_0(y) = \mathfrak{F}(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, c, y),$$

cela s'exprime par l'équation

$$\mathfrak{F}(a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}, c, \rho y) = \begin{cases} \rho \mathfrak{F}\left(\frac{a_0}{\rho^2}, a_1\rho^2, \ldots, a_{r-1}\rho^2, c, y\right) & (r \text{ pair}), \\ \frac{1}{\rho} \mathfrak{F}\left(a_0\rho^2, \frac{a_1}{\rho^2}, \ldots, a_{r-1}\rho^2, c, y\right) & (r \text{ impair}). \end{cases}$$

Supposons $G_0(y)$ développé ainsi

$$G_0(y) = \alpha(y^{(r)} + \alpha_1 y^{(r-1)} + \ldots + \alpha_r y);$$

α sera égal à $2^{r-1} a_0 a_1 \ldots a_{r-1} c$.

Soit de même

$$g_0(y) = \beta(y^{(r)} + \beta_1 y^{(r-1)} + \ldots + \beta_r y);$$

on aura

$$\beta = \alpha, \qquad \text{si } r \text{ est pair},$$

$$\beta = \alpha\rho^2, \qquad \text{si } r \text{ est impair}.$$

Soit maintenant

$$G_0(\rho y) = \alpha\rho(y^{(r)} + A_1 y^{(r-1)} + \ldots + A_r y);$$

on aura, dans l'un et l'autre cas,

$$\alpha\rho(y^{(r)} + A_1 y^{(r-1)} + \ldots) = \alpha\rho(y^{(r)} + \beta_1 y^{(r-1)} + \ldots),$$

d'où

$$A_1 = \beta_1, \ \ldots, \ A_r = \beta_r.$$

Soit donc

$$\alpha_i = f_i(a_{r-1}, a_{r-2}, \ldots)$$

l'expression de α_i au moyen des coefficients a; on aura, en même temps,

$$A_i = \beta_i = f_i\left(a_{r-1}\rho^2, a_{r-2}, \frac{1}{\rho^2}, \cdots\right).$$

Si inversement on exprime les a au moyen des coefficients α, de telle sorte qu'on ait

$$a_{r-s} = \varphi_{r-s}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),$$

on aura aussi

$$a_{r-s} = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2}\varphi_{r-s}(A_1, A_2, \ldots, A_r) & (s \text{ impair}). \\ \rho^2 \varphi_{r-s}(A_1, A_2, \ldots, A_r) & (s \text{ pair}). \end{cases}$$

Ainsi, les a s'expriment, au facteur ρ^2 ou $\frac{1}{\rho^2}$ près, de la même manière au moyen des α ou des A. C'est une propriété d'*invariance* relative au changement de y en ρy. Nous allons en reconnaître une autre relative au changement de la variable indépendante.

Soit, en mettant en évidence la variable indépendante,

$$F(a, z) = F_x(a, z) = \frac{d}{dx}(az) + a\frac{dz}{dx}.$$

Prenons une nouvelle variable X, telle que l'on ait

$$\frac{dx}{dX} = \mu;$$

on aura

$$(15)\qquad F_X(a, z) = \mu F_x(a, z).$$

Composons, d'une part, la suite $G_r, G_{r-1}, \ldots, G_0$ avec les coefficients $c, a_{r-1}, a_{r-2}, \ldots$ et la variable X, et, d'autre part, la suite $\gamma_r, \gamma_{r-1}, \ldots, \gamma_0$ avec les coefficients $c, a_{r-1}, a_{r-2}\mu^2, a_{r-3}, a_{r-4}\mu^2, \ldots$ et la variable x. On aura d'abord

$$G_r = \gamma_r;$$

puis

$$G_{r-1} = F_X(a_{r-1}, G_r) = \mu F_x(a_{r-1}, \gamma_r) = \mu\gamma_{r-1},$$
$$G_{r-2} = F_X(a_{r-2}, G_{r-1}) + G_r = \mu F_x(a_{r-2}, \mu\gamma_{r-1}) + \gamma_r.$$

Mais, d'après (14), où l'on remplace ρ par μ, ceci peut s'écrire

$$G_{r-2} = F_x(a_{r-2}\mu^2, \gamma_{r-1}) + \gamma_r = \gamma_{r-2}.$$

On aura ensuite

$$G_{r-3} = F_X(a_{r-3}, G_{r-2}) + G_{r-1} = \mu F_x(a_{r-3}, \gamma_{r-2}) + \mu\gamma_{r-1} = \mu\gamma_{r-3},$$

et ainsi de suite, en sorte que l'on a

$$G_{r-2k} = \gamma_{r-2k},$$
$$G_{r-2k-1} = \mu\gamma_{r-2k-1},$$

et, par conséquent,

$$G_0 = \begin{cases} \gamma_0, & \text{si } r \text{ est pair,} \\ \mu\gamma_0, & \text{si } r \text{ est impair;} \end{cases}$$

ou en employant l'algorithme $\mathfrak{F}$ où nous mettons la variable en évidence

$$\mathfrak{F}_X(a_0, a_1, \ldots, c, y) = \begin{cases} \mathfrak{F}_x(a_0\mu^2, a_1, a_2\mu^2, \ldots, a_{r-1}, c, y) & (r \text{ pair}), \\ \mu\mathfrak{F}_x(a_0, a_1\mu^2, \ldots, a_{r-1}, c, y) & (r \text{ impair}). \end{cases}$$

Par ces changements de variables, on peut réduire simultanément deux formes associées. Prenons le cas où la différence de leurs ordres est quelconque. Soit donc

$$G_1 = P\left(\frac{d^m Y}{dX^m} + P_1 \frac{d^{m-1} Y}{dX^{m-1}} + \ldots\right)$$

et

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{d^{2n+1}(aG_1)}{dX^{2n+1}} + a\frac{d^{2n+1} G_1}{dX^{2n+1}} + \ldots \\ &= 2aP\left(\frac{d^{m+2n+1} Y}{dX^{m+2n+1}} + Q_1 \frac{d^{m+2n} Y}{dX^{m+2n}} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Le coefficient Q_1 aura pour valeur

$$Q_1 = P_1 + (2n+1)\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{dX} + \frac{1}{2a}\frac{da}{dX}\right). \tag{16}$$

En posant

$$Y = \rho y, \qquad \frac{dx}{dX} = \mu,$$

G_1 sera transformé en

$$P\rho\mu^m\left(\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots\right) = g_1,$$

le coefficient p_1 ayant la valeur suivante :

$$p_1 = \frac{1}{\mu}\left[P_1 + \frac{m}{\rho}\frac{d\rho}{dX} + \frac{m(m-1)}{2\mu}\frac{d\mu}{dX}\right].$$

Quant à G_0, il est changé en

$$2aP\rho\mu^{m+2n+1}\left(\frac{d^{m+2n+1} y}{dx^{m+2n+1}} + q_1 \frac{d^{m+2n} y}{dx^{m+2n}} + \ldots\right),$$

expression que nous représenterons par μg_0.

Puisque $G_0 G_1$ est une dérivée exacte par rapport à X, telle que $\frac{d\Phi}{dX}$, $g_0 g_1 = \frac{d\Phi}{\mu dX} = \frac{d\Phi}{dx}$ sera dérivée exacte par rapport à x, et g_0, g_1 seront deux formes associées.

La transformée g_1 manquera de second terme si l'on pose

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dX}+\frac{m-1}{2\mu}\frac{d\mu}{dX}=-\frac{1}{m}P_1;$$

d'où

$$\rho\mu^{\frac{m-1}{2}}=e^{-\frac{1}{m}\int P_1 dX},$$

Achevons de déterminer ρ et μ par cette seconde égalité

$$P\rho\mu^m=\frac{1}{2aP\rho\mu^{m+2n}},$$

dont nous désignerons les deux membres par p. Il viendra

$$\begin{aligned}
g_1 &= p\left(\frac{d^m y}{dx^m}+\ldots\right),\\
g_0 &= \frac{1}{p}\left(\frac{d^{m+2n+1}y}{dx^{m+2n+1}}+\ldots\right)\\
&= \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(\frac{1}{2p^2}g_1\right)+\frac{1}{2p^2}\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}+\ldots.
\end{aligned}$$

Le coefficient q_1 du second terme de g_0 sera donné par la formule (16), où l'on remplace X, Y, P, P_1, a, par x, y, p, o, $\frac{1}{2p^2}$; d'où

$$q_1=(2n+1)\left(\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}+\frac{2p^2}{2}\frac{d\frac{1}{2p^2}}{dx}\right)=0.$$

Ainsi les deux formes g_0, g_1 manqueront toutes deux du second terme, et les coefficients des premiers termes seront réciproques.

Il est maintenant loisible de prendre, au lieu de g_1 et g_0, les deux formes $Y_1=\frac{1}{p}g_1$ et $Y_0=pg_0$; on obtiendra ainsi les deux formes réduites

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{d^m y}{dx^m}+p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\ldots,\\
\gamma_0 &= \frac{d^{m+2n+1}y}{dx^{m+2n+1}}+q_2\frac{d^{m+2n-1}y}{dx^{m+2n-1}}+\ldots.
\end{aligned}$$

Exemple. — Si l'une des formes associées est du premier ordre, on peut la supposer réduite à y', et son associée réduite à la forme

$$y^{2n}+(by')^{2n-3}+\ldots.$$

Si la forme G est d'ordre zéro, on peut la réduire à y sans changer la variable indépendante. Donc, quelle que soit la variable x, on peut ramener G_0 à

$$G_0=y^{2n+1}+(by)^{2n-1}+by^{2n-1}+\ldots+(ly)'+ly'.$$

Voici une des propriétés les plus curieuses des suites composées comme il vient d'être dit.

Dans la relation (4) supposons m impair; on aura, en mettant η au lieu de a,

$$\eta y^{2n+1}+y\eta^{2n+1}\equiv 0.$$

Remplaçons y par ay, nous aurons

$$(\eta ay)^{2n+1}+ay\eta^{2n+1}\equiv 0.$$

Échangeons η et y et inversons les deux termes ainsi

$$\eta ay^{(2n+1)}+y(a\eta)^{2n+1}\equiv 0$$

et ajoutons membre à membre. Voici le résultat

$$\eta[(ay)^{2n+1}+ay^{(2n+1)}]\equiv -y[(a\eta)^{(2n+1)}+a\eta^{(2n+1)}].$$

Par conséquent, le symbole général (12) a la propriété

$$\eta F(a,y)\equiv -yF(a,\eta). \tag{17}$$

Ceci posé, prenons simultanément les deux suites

$$\begin{array}{ll}
G_r\ \ =cy, & \Gamma_r\ \ =c\eta,\\
G_{r-1}=F(a_{r-1},G_r), & \Gamma_{r-1}=F(a_0,\Gamma_r),\\
G_{r-2}=F(a_{r-2},G_{r-1})+G_r, & \Gamma_{r-2}=F(a_1,\Gamma_{r-1})+\Gamma_r,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
G_0\ \ =F(a_0,G_1)+G_2, & \Gamma_0\ \ =F(a_{r-1},\Gamma_1)+\Gamma_2,
\end{array}$$

où l'ordre des opérations est renversé, les symboles F étant d'ailleurs d'ordre quelconque.

Considérons maintenant le produit

$$G_k \Gamma_{r-k}.$$

Nous aurons

$$G_k = F(a_k, G_{k+1}) + G_{k+2}.$$

Par suite, d'après (17),

$$G_k \Gamma_{r-k} = G_{k+2} \Gamma_{r-k} + \Gamma_{r-k} F(a_k, G_{k+1}) \equiv G_{k+2} \Gamma_{r-k} - G_{k+1} F(a_k, \Gamma_{r-k}).$$

Mais, d'après la loi de formation des Γ, on a

$$F(a_k, \Gamma_{r-k}) = \Gamma_{r-k-1} - \Gamma_{r-k+1}.$$

Donc

$$G_k \Gamma_{r-k} - G_{k+1} \Gamma_{r-k+1} \equiv -(G_{k+1}, \Gamma_{r-k-1} - G_{k-2} \Gamma_{r-k}).$$

Ainsi, posant

$$\varphi_k = G_k \Gamma_{r-k} - G_{k+1} \Gamma_{r-k+1},$$

on a

$$\varphi_k \equiv - \varphi_{k+1};$$

d'où, généralement,

$$\varphi_h \equiv (-1)^{h-k} \varphi_h.$$

Soit $k = 0$, alors Γ_{r+1} étant nul, on a

$$\varphi_0 = G_0 \Gamma_r = c\eta G_0.$$

Soit semblablement $h = r$, on a

$$\varphi_h = G_r \Gamma_0 = cy \Gamma_0.$$

Par conséquent

$$c\eta G_0 \equiv (-1)^r cy \Gamma_0.$$

Faisons

$$cG_0 = G(y), \qquad c\Gamma_0 = \Gamma(\eta),$$

cette relation s'écrit

$$(18) \qquad \eta G(y) + (-1)^{r-1} y \Gamma(\eta) \equiv 0.$$

Dans cette formule, r est l'ordre des deux formes G, Γ, si tous les symboles F sont du premier ordre. Dans le cas général, r diffère de cet ordre d'un nombre pair, en sorte que la relation (18) a lieu toujours, en y désignant par r l'ordre commun aux deux formes $G(y)$ et $\Gamma(\eta)$.

Étant donné $G(y)$, il n'existe qu'une forme $\Gamma(\eta)$ donnant lieu à la relation (18); car, s'il en existait une seconde, $\Gamma(\eta) + \Psi(\eta)$, on en conclurait que $y\Psi(\eta)$ est une différentielle exacte, y et η restant arbitraires, ce qui est impossible, puisque ce produit ne contient pas la dérivée de y.

On pourrait donc déduire $\Gamma(\eta)$ de $G(y)$ par tout autre moyen, sans changer le résultat.

Or soit

$$G(y) = g_0 y^{(m)} + g_1 y^{(m-1)} + \ldots.$$

On a

$$\eta g_{m-p} y^{(p)} \equiv (-1)^p y (g_{m-p}\eta)^{(p)},$$

et par conséquent

$$(19) \qquad \Gamma(\eta) = (g_0\eta)^{(m)} - (g_1\eta)^{(m-1)} + (g_2\eta)^{(m-2)} - \ldots,$$

et l'on reconnaît la forme $\Gamma(\eta)$, adjointe de $G(y)$, telle que Lagrange l'a découverte.

Ainsi, ayant une suite $G_r, G_{r-1}, \ldots, G_0$, si l'on pose $G(y) = cG_0$; si, d'autre part, avec les mêmes opérations faites dans un ordre inverse, on construit une suite $\Gamma_r, \Gamma_{r-1}, \ldots, \Gamma_0$; si l'on pose enfin $\Gamma(\eta) = c\Gamma_0$, les deux formes $G(y)$ et $\Gamma(\eta)$ seront adjointes.

Par ce moyen, on reconnaît qu'il y a des formes identiques à leurs adjointes. Pour les composer, il suffit de supposer la suite des symboles

F symétrique par rapport à son milieu. Si l'ordre r est impair, en supposant $\eta = y$, on aura

$$2y\,G(y) \equiv 0.$$

Donc les formes d'ordre impair qui sont leurs propres adjointes sont associées à y. Dans le cas où r est pair, on ne voit pas de propriété immédiate.