JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. CASPARY

Extrait d'une lettre à M. Hermite

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 5 (1889), p. 73-79.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1889_4_5__73_0>

Extrait d'une Lettre à M. Hermite;

Par M. F. CASPARY.

Berlin, le 18 novembre 1887.

En combinant les nouveaux résultats que vous avez eu la bonté de me communiquer le 6 septembre avec vos anciens, expliqués dans le tome 52 du *Journal de Crelle*, j'ai trouvé qu'il y a une liaison intime et intéressante entre vos recherches et celles de M. Weierstrass. Voici mes remarques :

1. Soit

$$\begin{aligned} f(y) &= \mathcal{A}y^4 + 4\mathcal{B}y^3 + 6\mathcal{C}y^2 + 4\mathcal{D}y + \mathcal{E} \\ &= \mathcal{A}(y-a)(y-b)(y-c)(y-d) \end{aligned}$$

une forme du quatrième degré. En substituant

$$y = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta} \tag{1}$$

et en posant

$$\alpha = a\gamma, \qquad -\frac{1}{4}\mathcal{A} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2(a-b)(a-c)(a-d)}, \tag{2}$$

$$\frac{b\delta - \beta}{(a-b)\gamma} = e_1, \qquad \frac{c\delta - \beta}{(a-c)\gamma} = e_2, \qquad \frac{d\delta - \beta}{(a-d)\gamma} = e_3, \tag{3}$$

l'expression différentielle $\dfrac{dy}{\sqrt{f(y)}}$ se transforme immédiatement dans l'expression $\frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}$. Si l'on soumet les quantités e_1, e_2, e_3 à la condition

$$(4)\qquad e_1+e_2+e_3=0,$$

et si l'on pose

$$(5)\qquad e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2=-\tfrac{1}{4}g_2,\qquad e_1e_2e_3=\tfrac{1}{4}g_3,$$

cette expression différentielle prend la forme $\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}$, qui est exactement celle que vous avez découverte (*Journal de Crelle*, t. 52, p. 8) et que M. Weierstrass a introduite comme forme normale. L'intégrale de cette expression est représentée par la fonction $s=\wp(u)$, dont la découverte est due à cet illustre géomètre.

D'après les formules (3) et (4), on a immédiatement

$$\beta=m\gamma\left(\frac{b}{a-b}+\frac{c}{a-c}+\frac{d}{a-d}\right),$$
$$\delta=m\gamma\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-d}\right),$$

et la seconde formule (2) fournit pour le facteur m la valeur

$$m=-\frac{\mathfrak{A}}{12}(a-b)(a-c)(a-d).$$

Donc

$$(6)\qquad y=\frac{a\,\wp(u)-\frac{\mathfrak{A}}{12}(a-b)(a-c)(a-d)\left(\frac{b}{a-b}+\frac{c}{a-c}+\frac{d}{a-d}\right)}{\wp(u)-\frac{\mathfrak{A}}{12}(a-b)(a-c)(a-d)\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-d}\right)}.$$

2. On peut donner à la substitution (1) la forme

$$y=\frac{\alpha(s-e_3)+\beta+\alpha e_3}{\gamma(s-e_3)+\delta+\gamma e_3}.$$

Comme les formules (3) fournissent les valeurs suivantes

$$\beta + \alpha e_3 = d(\delta + \gamma e_3), \qquad \delta + \gamma e_3 = \frac{\gamma(a-b)(e_1-e_3)}{b-d},$$

on a

$$(7) \qquad y = \frac{a(b-d) + d(a-b)\dfrac{e_1-e_3}{s-e_3}}{(b-d)+(a-b)\dfrac{e_1-e_3}{s-e_3}}.$$

D'après les formules (3), on trouve

$$e_1 - e_3 = \frac{\mathfrak{b}}{4}(a-c)(d-b), \qquad e_2 - e_3 = \frac{\mathfrak{b}}{4}(a-b)(d-c)$$

et conséquemment

$$(e_2-e_3):(e_1-e_3) = (a-b)(c-d):(a-c)(b-d).$$

En posant

$$dl(e_2-e_3):(e_1-e_3) = k^2, \qquad \sqrt{e_1-e_3}\,u = \xi,$$

la formule (7) se transforme, à cause de l'identité

$$s - e_3 dl = \frac{e_1-e_3}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u, k)},$$

dans la relation suivante

$$(8) \qquad y = \frac{a(b-d)+d(a-b)\operatorname{sn}^2\xi}{b-d+(a-b)\operatorname{sn}^2\xi},$$

qui est exactement la vôtre. En changeant e_3 en e_1 et e_2, on trouve

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{a(b-d)\operatorname{cn}^2\xi + b(a-d)\operatorname{sn}^2\xi}{(b-d)\operatorname{cn}^2\xi + (a-d)\operatorname{sn}^2\xi} \\ &= \frac{a(a-c)(b-d)\operatorname{dn}^2\xi + c(a-b)(a-d)\operatorname{sn}^2\xi}{(a-c)(b-d)\operatorname{dn}^2\xi + (a-b)(a-d)\operatorname{sn}\xi}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on désigne par p et q deux quantités arbitraires, de la formule (8) résulte

$$py+q=\frac{(a-b)(pd+q)\,\mathrm{sn}^2\xi+(b-d)(pa+q)}{(a-b)\,\mathrm{sn}^2\xi+b-d}.$$

En comparant cette formule avec la suivante

$$\mathrm{sn}(\xi+\omega)\,\mathrm{sn}(\xi-\omega)=\frac{\mathrm{sn}^2\xi-\mathrm{sn}^2\omega}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\xi\,\mathrm{sn}^2\omega},$$

on a, pour la détermination des quantités p et q, les relations

$$\begin{aligned}(a-b)(pd+q)&=b-d,\\ pa+q&=-\,\mathrm{sn}^2\omega,\\ (a-b):(b-d)&=-\,k^2\,\mathrm{sn}^2\omega,\end{aligned}$$

d'où résultent

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}^2\omega&=(c-a):(c-d),\\ pd+q&=-(b-d):(b-a),\\ pa+q&=-(c-a):(c-d).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}p&=(a-b-c+d):(a-b)(c-d),\\ q&=(bc-ad):(a-b)(c-d)\end{aligned}$$

et

$$(10)\qquad y=\frac{ad-bc}{a-b-c+d}+\frac{(a-b)(c-d)}{a-b-c+d}\,\mathrm{sn}(\xi+\omega)\,\mathrm{sn}(\xi-\omega),$$

ce qui est votre deuxième relation.

5. On tire immédiatement des formules (3) les relations

$$(11)\qquad e_2-e_3=-\frac{\mathfrak{b}}{4}\,\mathrm{A},\qquad e_3-e_1=-\frac{\mathfrak{b}}{4}\,\mathrm{B},\qquad e_1-e_2=-\frac{\mathfrak{b}}{4}\,\Gamma,$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= (a-b)(c-d), \\ \mathrm{B} &= (a-c)(d-b), \\ \Gamma &= (b-c)(a-d). \end{aligned}$$

A cause de la relation (4) résultent des formules (11) les suivantes

$$(12) \qquad e_1 = \frac{\mathcal{A}}{12}(\mathrm{B}-\Gamma), \qquad e_2 = \frac{\mathcal{A}}{12}(\Gamma-\mathrm{A}), \qquad e_3 = \frac{\mathcal{A}}{12}(\mathrm{A}-\mathrm{B}),$$

et par conséquent les expressions (5) se transforment ainsi

$$(13) \qquad \begin{cases} g_2 = \dfrac{\mathcal{A}^2}{24}(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2), \\ g_3 = \dfrac{\mathcal{A}^3}{16.27}(\mathrm{B}-\Gamma)(\Gamma-\mathrm{A})(\mathrm{A}-\mathrm{B}). \end{cases}$$

Si l'on pose de plus

$$(14) \qquad (e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2 = \mathcal{G},$$

on a

$$\mathcal{G} = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) = \frac{\mathcal{A}^6}{4^6}\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\Gamma^2.$$

En désignant par $\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}_3$ les deux invariants de la forme homogène

$$f(y_1, y_2) = \mathcal{A}y_1^4 + 4\mathcal{B}y_1^3y_2 + 6\mathcal{C}y_1^2y_2^2 + 4\mathcal{D}y_1y_2^3 + \mathcal{E}y_2^4,$$

et en supposant que cette forme, par la substitution

$$y_1 = \alpha s_1 + \beta s_2, \qquad y_2 = \gamma s_1 + \delta s_2,$$

se transforme dans la forme homogène

$$h(4s_1^3s_2 - g_2s_1s_2^3 - g_3s_2^4),$$

on a

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^4\mathcal{G}_2 = h^2g_2, \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma)^6\mathcal{G}_3 = h^3g_3.$$

D'autre part, on trouve

$$\frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{\sqrt{f(y_1 y_2)}} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\sqrt{h}} \frac{s_2 ds_1 - s_1 ds_2}{\sqrt{4 s_1^3 s_2 - g_2 s_1 s_2^3 - g_3 s_2^4}},$$

et l'on aura les relations introduites au commencement de cette Note, si l'on pose

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \sqrt{h}, \qquad y_1 : y_2 = y; \qquad s_1 : s_2 = s.$$

Donc $\mathcal{G}_2 = g_2$ et $\mathcal{G}_3 = g_3$. En posant de plus $\mathcal{G} = \frac{1}{16}\Delta$, on tire des formules (13) et (14) le résultat suivant

$$(15)\quad \frac{\mathcal{G}_2^3}{(A^2 + B^2 + \Gamma^2)^3} = \frac{27}{2} \frac{\mathcal{G}_3^2}{(B - \Gamma)^2 (\Gamma - A)^2 (A - B)^2} = \frac{1}{54} \frac{\Delta}{A^2 B^2 \Gamma^2} = \frac{\mathcal{G}^6}{2^{43}},$$

qui se transforme si l'on introduit $A : B = -\rho$, $\Gamma : B = \rho - 1$, dans l'équation

$$(16)\quad \frac{\mathcal{G}_2^3}{4(\rho^2 - \rho + 1)^3} = \frac{27\,\mathcal{G}_3^2}{(2 - \rho)^2 (2\rho - 1)^2 (1 + \rho)^2} = \frac{\Delta}{27 \rho^2 (1 - \rho)^2} = \frac{16}{27}(e_3 - e_1).$$

En posant $\rho + \frac{1}{\rho} = v + 1$, on a

$$\begin{aligned} \rho^2 + 1 &= \rho(v + 1), \\ \rho^2 - \rho + 1 &= \rho v, \\ \rho^2 - 2\rho + 1 &= \rho(v - 1), \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et à cause de ces identités la formule (16) se transforme dans la suivante

$$(17)\qquad \frac{\mathcal{G}_2^3}{4v^3} = \frac{27\,\mathcal{G}_3^2}{4v^3 - 27v + 27} = \frac{\Delta}{27(v - 1)},$$

qui prend aussi la forme

$$(18)\qquad 4\Delta v^3 - 27\mathcal{G}_2^3 v + 27\mathcal{G}_2^3 = 0.$$

Les formules (15) à (18) représentent pour $\rho = k^2$ les différentes formes de l'équation du douzième degré que vous avez bien voulu me communiquer. En Géométrie les six valeurs de ρ représentent les six rapports anharmoniques auxquels donnent lieu quatre points situés sur une ligne droite (Chasles, Möbius). Il y a encore quelques relations sur lesquelles je suis tombé en étudiant vos résultats excellents; cependant, pour ne pas abuser de votre indulgence, je termine.