JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. GOMES TEIXEIRA

Sur le développement des fonctions implicites

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 5 (1889), p. 67-71.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1889_4_5__67_0>

Sur le développement des fonctions implicites;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,

Professeur à l'École Polytechnique de Porto, ancien professeur à l'Université de Coïmbre.

Dans une Note *Sur le développement des fonctions implicites*, publiée dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3ᵉ série, t. VII, 1881, nous avons présenté une formule pour développer en série ordonnée, suivant les puissances croissantes de x, une fonction u définie par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} u = f(z), \\ z = t + x\varphi_1(z) + x^2\varphi_2(z) + \ldots + x^k\varphi_k(z), \end{cases}$$

à savoir

$$(2)\qquad \begin{cases} u = f(t) + xf'(t)\varphi_1(t) + \ldots \\ \qquad + x^n \sum \dfrac{d^{b-1}\{f'(t)[\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi_2(t)]^\beta\ldots[\varphi_k(t)]^\lambda\}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!\,dt^{b-1}} + \ldots, \end{cases}$$

où la somme $\sum$ se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + k\lambda = n,$$

et où

$$b = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

De cette question se sont ensuite occupés M. E. Cesaro dans les

Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. IV, 1885, et M. David dans le *Journal de l'École Polytechnique*, LVIIe Cahier; 1887.

Nous revenons aujourd'hui sur ce sujet pour déterminer quelle valeur de u doit être considérée comme représentée par la série (2), et pour étudier les conditions de convergence de cette série.

Théorème. — *Soient*

$f(z)$, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_k(z)$ *des fonctions holomorphes dans l'intérieur d'un contour* K;

t *un point intérieur à ce contour;*

α *une quantité positive assez petite pour que la condition* ($|A|$ représentant le module de A)

$$(3)\qquad \left|\frac{\alpha\varphi_1(z)}{z-t}\right|+\left|\frac{\alpha^2\varphi_2(z)}{z-t}\right|+\ldots+\left|\frac{\alpha^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|<1$$

soit satisfaite le long du contour K. *A chaque valeur de x, qui satisfait à la condition $|x|<\alpha$, correspond une valeur unique z_1 de z existant à l'intérieur du contour* K, *et $f(z_1)$ est susceptible d'être développée en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x au moyen de la formule* (2).

En effet, de la condition (3) et de la condition $|x|<\alpha$ on tire

$$\left|\frac{x\varphi_1(z)}{z-t}\right|+\left|\frac{x^2\varphi_2(z)}{z-t}\right|+\ldots+\left|\frac{x^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|<1,$$

et, par conséquent,

$$\left|\frac{x\varphi_1(z)+x^2\varphi_2(z)+\ldots+x^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|<1.$$

Donc, on peut appliquer la série de Lagrange aux équations

$$u=f(z),$$
$$z=t+x\,\mathrm{F}(z),$$

où

$$\mathrm{F}(z)=\varphi_1(z)+x\varphi_2(z)+\ldots+x^{k-1}\varphi_k(z);$$

ce qui donne (¹)

$$(4)\qquad \begin{cases} f(z_1)=f(t)+x\,F(t)f'(t)+\ldots \\ \qquad +\dfrac{x^m}{m!}\dfrac{d^{m-1}\{[F(t)]^m f'(t)\}}{dt^{m-1}}+R_m, \end{cases}$$

où

$$R_m=\int_K \frac{x^{m+1}[F(z)]^{m+1}f(z)[1-x\varphi_1'(z)-\ldots-x^k\varphi_k'(z)]\,dz}{(z-t)^{m+2}\left[1-\dfrac{x\,F(z)}{z-t}\right]}.$$

On sait que, pour les valeurs de x considérées, la série (4) est convergente; nous allons faire voir qu'elle est *uniformément* convergente.

L'expression de R_m donne

$$|R_m|<\int_K\left|\frac{f(z)}{z-t}\right|\left|\frac{x\,F(z)}{z-t}\right|^{m+1}\frac{\{1+|x\varphi_1'(z)|+\ldots+|x^k\varphi_k'(z)|\}\,ds}{\left|1-\dfrac{x\,F(z)}{z-t}\right|},$$

mais

$$\left|\frac{x\,F(z)}{z-t}\right|<\left|\frac{x\varphi_1(z)}{z-t}\right|+\left|\frac{x^2\varphi_2(z)}{z-t}\right|+\ldots+\left|\frac{x^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|$$
$$<\left|\frac{\alpha\varphi_1(z)}{z-t}\right|+\left|\frac{\alpha^2\varphi_2(z)}{z-t}\right|+\ldots+\left|\frac{\alpha^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|$$

et

$$\left|1-\frac{x\,F(z)}{z-t}\right|>1-\left|\frac{x\,F(z)}{z-t}\right|$$
$$>1-\left\{\left|\frac{x\varphi_1(z)}{z-t}\right|+\left|\frac{x^2\varphi_2(z)}{z-t}\right|+\ldots+\left|\frac{x^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|\right\}$$
$$>1-\left\{\left|\frac{\alpha\varphi_1(z)}{z-t}\right|+\left|\frac{\alpha^2\varphi_2(z)}{z-t}\right|+\ldots+\left|\frac{\alpha^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|\right\};$$

donc

$$|R_m|<\int_K\left|\frac{f(z)}{z-t}\right|$$
$$\times\left\{\left|\frac{\alpha\varphi_1(z)}{z-t}\right|+\ldots+\left|\frac{\alpha^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|\right\}^{m+1}\frac{\{1+|\alpha\varphi_1'(z)|+\ldots+|\alpha^k\varphi_k'(z)|\}\,ds}{1-\left\{\left|\dfrac{\alpha\varphi_1(z)}{z-t}\right|+\ldots+\left|\dfrac{\alpha^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|\right\}}.$$

(¹) M. C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 308.

Soient maintenant

M le maximum de $\left|\frac{f(z)}{z-t}\right|$;

M_1 le maximum de

$$1+|\alpha\varphi'_1(z)|+\ldots+|\alpha^k\varphi'_k(z)|;$$

M_2 le maximum de

$$\left|\frac{\alpha\varphi_1(z)}{z-t}\right|+\ldots+\left|\frac{\alpha^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|$$

le long du contour K. Nous avons

$$|R_m|<\int_K\frac{MM_1M_2^{m+1}}{1-M_2}\,ds,$$

et, par conséquent, s représentant la longueur du contour K,

$$|R_m|<\frac{MM_1M_2^{m+1}s}{1-M_2}$$

pour toutes les valeurs de x, dont le module est inférieur à α.

Comme $M_2<1$, on voit donc que l'on peut, quelque petite que soit la quantité ε, déterminer m de manière que l'on ait $|R_m|<\varepsilon$ pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition $|x|<\alpha$.

Donc la série considérée est *uniformément convergente* dans le cercle de rayon α.

Cela posé, si dans la série (4) on pose

$$F(t)=\varphi_1(t)+x\varphi_2(t)+\ldots+x^{k-1}\varphi_k(t),$$

on voit facilement qu'on peut développer chaque terme suivant les puissances de x, et qu'on obtient des polynômes respectivement des degrés 0, k, $2k$, ...

Donc, en vertu d'un théorème bien connu de la théorie des séries [1],

---

[1] M. Weierstrass, *Monatsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1880; *Bulletin des Sciences mathématiques*, p. 160; 1881.

la fonction $f(z_1)$ est susceptible d'être développée en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x, et convergente dans le cercle de rayon α.

Le théorème énoncé est donc démontré.

La méthode précédente donne même la série trouvée dans mon article antérieur.

En effet, le terme général de la série (4) est

$$\frac{x^b}{b!}\frac{d^{b-1}\{[\varphi_1(t)+\ldots+x^{k-1}\varphi_k(t)]^b f'(t)\}}{dt^{b-1}}$$

ou

$$\frac{x^b}{b!}\frac{db^{b-1}\sum\frac{b![\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi_2(t)]^\beta\ldots[\varphi_k(t)]^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}x^{\beta+2\gamma+\ldots+(k-1)\lambda}}{dt^{b-1}},$$

où la somme $\sum$ se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=b$$

ou

$$\sum\frac{d^{b-1}\{[\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi_2(t)]^\beta\ldots[\varphi_k(t)]^\lambda f'(t)\}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,dt^{b-1}}x^{\alpha+2\beta+\ldots+k\lambda}.$$

Donc le coefficient du terme du degré n dans le développement de $f(z_1)$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x sera

$$\sum\frac{d^{b-1}\{[\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi_2(t)]^\beta\ldots[\varphi_k(t)]^\lambda f'(t)\}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,dt^{b-1}},$$

où la somme $\sum$ se rapporte à toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+k\lambda=n$$

et où

$$b=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda.$$