# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



G.-H. HALPHEN


**Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques et, en particulier, sur la multiplication par $\sqrt{-23}$**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série*, tome 5 (1889), p. 5-52.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1889_4_5__5_0>

# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES.


---

## *Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques et, en particulier, sur la multiplication par $\sqrt{-23}$;*


**PAR M. G.-H. HALPHEN.**


---

### PRÉAMBULE.

Une des belles découvertes d'Abel, tout juste indiquée dans ses Œuvres, la *multiplication complexe des fonctions elliptiques*, a été, avec éclat, tirée de l'oubli par M. Kronecker et par M. Hermite. Dès le premier travail publié sur ce sujet par M. Kronecker (*Monatsberichte*, 1857), on voit apparaître, entre cette théorie et celle des *formes* arithmétiques, des liens si étroits que l'admirable création de Gauss semble imaginée tout exprès. Cette liaison ne se montre pas moins dans le Mémoire composé par M. Hermite à la même époque (*Comptes rendus* de 1859). La multiplication complexe n'y est pas le but : c'est le moyen que M. Hermite emploie pour trouver, dans les transformations du septième et du onzième ordre, la *réduite* de Gallois. C'est dans ce Mémoire cependant, si riche en résultats nouveaux, qu'on voit, après les exemples élémentaires, la première collection de fonctions à multiplication complexe, calculées numériquement avec une élégance extrême. A la même époque, le R. P. Joubert (*Comptes rendus* de 1860) et M. Kronecker (*Monatsberichte* de 1862), dont les travaux, sur ce sujet, n'ont cessé de se poursuivre, ont donné aussi beaucoup d'autres exemples. Enfin, dans ces deux dernières années, la multiplication complexe a été l'objet de Mémoires importants, dus à M. Stuart (*Quarterly Journal*, XX), M. Sylow (ce Journal, 1887), M. Weber (*Acta mathematica*), M. Pyck (*Math. Annalen*) et enfin M. Greenhill (*Proc. of London Math. Soc.*, 1888). Je n'ai point à analyser ici ces Mémoires pleins d'intérêt au point de vue, soit de la théorie générale, soit des résultats numériques. Sous ce dernier point de vue, le Mémoire de M. Greenhill, tout récent, résume et dépasse les travaux antérieurs.

Pour la recherche effective des fonctions à multiplication complexe, sauf en quelques cas, comme la multiplication par $\sqrt{-7}$ ou par $\sqrt{-15}$ (Hermite, *Équations modulaires*, p. 55), on a employé, jusqu'à présent, des moyens détournés, quoique d'un grand intérêt : tantôt on utilise les équations modulaires déjà connues, tantôt on calcule, à l'aide des séries de Jacobi, les coefficients d'une équation résolvante. Ce dernier moyen, extrêmement curieux cependant, est bien étranger à l'Algèbre et surtout exige des opérations bien laborieuses. Le premier moyen conduit, en général, à des équations qu'il faut décomposer en plusieurs autres [1] ou bien qui ne donnent pas aisément, sous leur forme définitive, toutes les inconnues.

D'ailleurs, quoique l'on veuille penser de ces critiques, il était intéressant de chercher des moyens directs. Je me propose, dans le Mé-

---

(1) La cause de cette décomposition sera expliquée ici parmi les *Principes généraux*. Il y a plusieurs exemples, dignes de remarque, où cette décomposition est évitée par l'emploi d'équations modulaires irrationnelles; on le verra dans le Mémoire de M. Greenhill. Mais c'est là un accident heureux, qui se produit seulement en des cas dont le nombre est très limité. Pour obtenir une équation sans facteurs étrangers, M. Kronecker a indiqué une méthode générale, fondée sur l'emploi simultané de l'équation modulaire et de l'*équation au multiplicateur*.

moire actuel, de montrer, sur un exemple, l'emploi d'un tel moyen, si direct et si simple, en théorie du moins, qu'il suffira, pour me suivre jusqu'au bout, de posséder les premiers éléments des fonctions elliptiques. Afin de faciliter cette tâche, j'ai placé au début un exposé rapide des principes généraux de la multiplication complexe, ressemblant beaucoup à celui qu'a déjà fait M. Sylow.

L'exemple choisi est celui de la multiplication par $\sqrt{-23}$. Il existe six fonctions admettant cette multiplication. Pour le nombre 23, comme pour tous ceux qui sont de la forme $8n-1$, ce qu'on a obtenu, jusqu'à présent, ne suffit point. Dans son beau travail de 1860, le R. P. Joubert, parmi beaucoup d'autres résultats, a donné explicitement deux équations, du troisième degré, dont chaque racine est égale, pour l'une des six fonctions, au produit du module par son complémentaire. Il resterait à trouver effectivement les modules qui doivent contenir seulement une seule irrationnelle, outre $\sqrt{-23}$. Cette circonstance indique suffisamment que l'on n'a pas choisi l'inconnue la mieux appropriée. La même observation s'applique à l'équation, d'ailleurs très élégante, donnée pour le même objet par M. Greenhill. On pourrait d'abord être surpris de me voir exiger le module lui-même, quand on sait fort bien que le produit du module et de son complément définit explicitement les invariants. Il est vrai que le résultat obtenu par le R. P. Joubert suffit à définir ces invariants; mais il ne suffit point pour faire connaître, sans nouvelle irrationnelle, la formule même de multiplication.

Au point de vue des résultats, c'est donc un complément que j'apporte à ce qui était acquis. Mais c'est surtout par la méthode employée que ce travail, sans prétention, mérite peut-être un instant d'attention.

## Principes généraux.

Rappelons tout d'abord les principes.

Soit $\varepsilon$ une constante qu'on désignera sous le nom de *multiplicateur*.

Soit $u$ un argument variable, soit encore $v$ le produit de $u$ par le multiplicateur,

$$v = \varepsilon u.$$

On sait que, si $\varepsilon$ est un nombre entier, $\wp v$ est une fonction rationnelle de $\wp u$. Le même fait peut-il se présenter pour d'autres valeurs de $\varepsilon$?

Soient $2\omega$ et $2\omega'$ les périodes. Comme $\wp u$ ne change point quand on ajoute ces périodes à l'argument $u$ et que tout autre changement de l'argument, sauf le changement du signe, altère la fonction $\wp$, comme aussi $\wp v$ doit avoir une seule valeur pour chaque valeur de $\wp u$, il faut que les produits de $\varepsilon$ par $2\omega$ et $2\omega'$ soient eux-mêmes des périodes, qu'on ait donc

$$(1) \qquad \varepsilon\omega = p\omega + q\omega', \qquad \varepsilon\omega' = r\omega + s\omega',$$

$p$, $q$, $r$, $s$ étant des nombres entiers. De là se conclut

$$(2) \qquad (p\omega + q\omega')\omega' = (r\omega + s\omega')\omega.$$

Mettons de côté le cas où l'on supposerait

$$q = 0, \qquad r = 0, \qquad p = s = \varepsilon,$$

qui est celui de la multiplication ordinaire, $\varepsilon$ étant alors un nombre entier. Pour tout autre cas, la relation (2) n'est pas identique. Elle exprime une condition entre les périodes : *pour qu'il existe une multiplication, autre que la multiplication ordinaire, il faut et il suffit que le rapport des périodes soit racine d'une équation du second degré à coefficients entiers.* C'est une condition nécessaire, on vient de le voir; suffisante aussi : pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, $\varepsilon$ étant choisi conformément aux égalités (1), concordantes d'après la relation (2) supposée, $\wp v$ n'a effectivement qu'une seule valeur quand $\wp u$ est donné.

Il s'agit de trouver l'expression de $\wp v$, en fonction de $\wp u$. Cherchons donc les pôles de cette fonction, considérée comme dépendant de $u$.

Des égalités (1) et (2), on peut tirer

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{s\omega - q\omega'}{N}, \qquad \frac{\omega'}{\varepsilon} = \frac{p\omega' - r\omega}{N}, \\ &\qquad\qquad N = ps - qr. \end{aligned} \right.$$

En conséquence, les valeurs de $u = \frac{v}{\varepsilon}$, qui rendent $v$ égal à une période, sont des N$^{\text{ièmes}}$ parties de période. Mais il faut préciser davantage.

On doit admettre que les quatre nombres $p$, $q$, $r$, $s$ n'aient aucun diviseur commun. Effectivement, de ce cas particulier, on s'élève au cas général en multipliant $\varepsilon$ par un nombre entier, c'est-à-dire en faisant suivre la multiplication par $\varepsilon$ d'une multiplication ordinaire. Cette dernière ferait disparaître la simplicité qu'on va reconnaître dans la nature des pôles de $pv$; la simplicité tient essentiellement à cette hypothèse permise et nécessaire : $p$, $q$, $r$, $s$ *n'ont aucun diviseur commun.*

Soient $\nu$ le plus grand commun diviseur de $s$ et de $q$; $\mu$ celui de $p$ et de $r$. Ces diviseurs appartiennent aussi à N. On aura

$$q = \nu q_1, \qquad s = \nu s_1; \qquad p = \mu p_1, \qquad r = \mu r_1,$$
$$p_1 s_1 - q_1 r_1 = n, \qquad N = n\mu\nu.$$

Sont premiers entre eux les nombres $q_1$ et $s_1$, de même $p_1$ et $r_1$, et aussi $\mu$ et $\nu$, suivant l'hypothèse qu'on vient de faire sur l'ensemble des quatre nombres $p$, $q$, $r$, $s$.

Comme $q_1$ et $s_1$ sont premiers entre eux, on peut trouver deux entiers $\alpha$ et $\beta$ par la condition

$$(4) \qquad s_1\beta - q_1\alpha = 1.$$

Posant alors

$$s_1\omega - q_1\omega' = \omega_1, \qquad \alpha\omega - \beta\omega' = \omega'_1,$$

on en conclura

$$\omega = \beta\omega_1 - q_1\omega'_1, \qquad \omega' = \alpha\omega_1 - s_1\omega'_1,$$
$$p_1\omega' - r_1\omega = (p_1\alpha - r_1\beta)\omega_1 - (p_1 s_1 - q_1 r_1)\omega'_1,$$

égalité que nous écrirons sous la forme

$$p_1\omega' - r_1\omega = h\omega_1 - n\omega'_1,$$

en posant

$$(5) \qquad h = p_1\alpha - r_1\beta.$$

Remarquons immédiatement que $h$ et $n$ sont premiers entre eux. On a, en effet,

$$hs_1 = p_1 s_1 \alpha - r_1 s_1 \beta = p_1 s_1 \alpha - r_1(1 + q_1\alpha) = n\alpha - r_1,$$
$$hq_1 = p_1 q_1 \alpha - r_1 q_1 \beta = p_1(s_1\beta - 1) - r_1 q_1 \beta = n\beta - p_1.$$

Tout diviseur commun à $h$ et $n$ diviserait donc $r_1$ et $p_1$, qui sont premiers entre eux.

Puisque $h$ et $n$ sont effectivement premiers entre eux, on peut choisir un entier $\lambda$, de telle sorte que $h + \lambda n$ soit premier avec un nombre donné quelconque, par exemple $\nu$. Mais, par l'égalité (4), $\alpha$ et $\beta$ sont déterminés seulement à un multiple près, respectivement de $s_1$ et de $q_1$. L'égalité (5) détermine donc $h$ à un multiple près de

$$n = p_1 s_1 - r_1 q_1;$$

on peut alors choisir ce multiple de telle sorte que $h$ soit premier avec $\nu$. Admettons qu'il en soit ainsi.

Les deux nombres $h$ et $\mu$ étant premiers avec $\nu$, on peut déterminer des entiers $\gamma$ et $\delta$ par la condition

$$\nu\delta - h\mu\gamma = 1.$$

Ceci fait, on a

$$h\omega_1 - n\omega'_1 + n\nu\delta\omega'_1 = h(\omega_1 + n\mu\gamma\omega_1)$$

et, si l'on pose

$$\omega_1 + n\mu\gamma\omega'_1 = \tilde{\omega},$$

les expressions (3) de $\frac{\omega}{\varepsilon}$ et de $\frac{\omega'}{\varepsilon}$ prennent les formes ci-après

$$\frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{s_1\omega - q_1\omega'}{n\mu} = \frac{\omega_1}{n\mu} = \frac{\tilde{\omega}}{n\mu} - \gamma\omega_1,$$
$$\frac{\omega'}{\varepsilon} = \frac{p_1\omega' - r_1\omega}{n\nu} = \frac{h\omega_1 - n\omega'_1}{n\nu} = \frac{h\tilde{\omega}}{n\nu} - \delta\omega'_1.$$

Par conséquent, en négligeant les multiples de la période $2\omega'_1$,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{2\omega}{\varepsilon} &\equiv \frac{2\bar\omega}{n\mu} = \frac{2\nu\bar\omega}{N},\\ \frac{2\omega'}{\varepsilon} &\equiv \frac{2h\bar\omega}{n\nu} = \frac{2\mu h\bar\omega}{N}.\end{aligned}\right.$$

Ainsi $\frac{2\omega}{\varepsilon}$ et $\frac{2\omega'}{\varepsilon}$, à des périodes près, sont des multiples d'une seule et même quanté $\frac{2\bar\omega}{N}$. Avec des entiers quelconques $\alpha'$ et $\beta'$, en posant

$$\nu\alpha' + \mu h\beta' = m,$$

on aura, de même,

$$(7)\qquad \frac{2\alpha'\omega + 2\beta'\omega'}{\varepsilon} = \frac{2m\bar\omega}{N},$$

c'est-à-dire un multiple de $\frac{2\bar\omega}{N}$. Comme, d'ailleurs, $\nu$ et $\mu h$ sont premiers entre eux, $m$ peut être un entier quelconque. En conséquence, *les valeurs de $u$ qui rendent $v$ égal à une période sont représentées par tous les multiples d'une seule et même quantité $\frac{2\bar\omega}{N}$, qui est la* $N^{\text{ième}}$ *partie d'une période.*

Il est très important de se rappeler l'hypothèse : $p$, $q$, $r$, $s$ sans diviseur commun. Dans le cas opposé, en effet, la proposition serait en défaut. Au cas de la multiplication ordinaire, par un entier M, les valeurs de $u$, qui rendent $\frac{u}{M}$ égal à une période, sont constituées par l'ensemble de *toutes* les $M^{\text{ièmes}}$ parties de période, et ces dernières ne sont pas les multiples d'une seule et même quantité. Si donc on multiplie $\varepsilon$ par un entier M, la proposition précédente disparaît à l'égard du produit $M\varepsilon$. Elle constitue ainsi une propriété caractéristique de la multiplication singulière, réduite à ses éléments esentiels.

Connaissant les pôles de $\wp v$, fonction de $u$, il est aisé de trouver l'expression de $\wp v$, décomposée en éléments simples. Soit effectivement

$$u = \frac{2m\bar\omega}{N} + u';$$

d'après l'égalité (7), il vient

$$v = \varepsilon u = 2\alpha'\omega + 2\beta'\omega' + \varepsilon u' \equiv \varepsilon u'.$$

D'autre part, $pv$ développé suivant les puissances ascendantes de $v$ fournit, à la partie fractionnaire, le seul terme $\frac{1}{v^2}$. Suivant les puissances ascendantes de $u'$, on a donc le seul terme $\frac{1}{\varepsilon^2 u'^2}$. De là vient, dans la formule de décomposition, le seul terme

$$\frac{1}{\varepsilon^2} p\left(u - \frac{2m\tilde{\omega}}{N}\right).$$

Si l'on observe ensuite que $pv$ est une fonction paire de $u$, on trouve immédiatement le terme constant, qui restait à déterminer dans la formule de décomposition, et l'on a enfin

$$(8) \qquad \varepsilon^2 pv = pu + \sum_{m=1}^{m=N-1} \left[p\left(u - \frac{2m\tilde{\omega}}{N}\right) - p\frac{2m\tilde{\omega}}{N}\right].$$

Le rapport des périodes est supposé racine d'une équation du second degré, à coefficients entiers; soit

$$(9) \qquad a\omega'^2 + 2b\omega\omega' + c\omega^2 = 0$$

cette équation, où $a$, $b$, $c$ sont des nombres entiers, n'ayant aucun diviseur commun. Le premier membre constitue ce qu'on nomme, dans la théorie de Gauss, une *forme primitive;* la qualification de *primitive* exprime que $a$, $b$, $c$ n'ont point de diviseur commun.

Dans l'*ordre primitif* (c'est-à-dire dans l'ensemble des formes primitives), on distingue l'*ordre proprement primitif* et l'*ordre improprement primitif.* Le premier est celui où $a$ et $c$ ne sont pas, tous deux, pairs; le second est, au contraire, celui où $a$ et $c$ sont pairs. Cette distinction, née de l'Arithmétique, est encore fondamentale ici, comme on va le voir immédiatement.

Le rapport des périodes est essentiellement imaginaire. Ainsi l'équation (9) a ses racines imaginaires; en d'autres termes, le nombre D, qui est son déterminant changé de signe,

$$D = ac - b^2 > 0, \tag{10}$$

est essentiellement positif. La forme $(a, b, c)$, c'est ainsi qu'on représente abréviativement le premier membre (9), est donc une *forme définie*, nom que l'on donne aux formes dont le signe est invariable quand la variable est réelle. On pourra admettre que $a$ et $c$, dont le signe est le même pour tous deux, sont positifs. La forme $(a, b, c)$ est, en résumé, une *forme primitive* et *positive*.

Enfin, pour fixer les idées, nous définirons le rapport $\omega' : \omega$ comme étant égal à la racine dans laquelle la partie imaginaire est positive, c'est-à-dire que le coefficient de $i$ est supposé positif. Par conséquent,

$$\frac{a\omega' + b\omega}{\omega} = -\frac{c\omega + b\omega'}{\omega'} = i\sqrt{D}, \tag{11}$$

et $\sqrt{D}$ est pris *positivement*.

L'équation (9) peut être mise, de diverses manières, sous la forme (2). Il y a donc diverses multiplications singulières pour la même fonction elliptique : parmi ces multiplications, il faut en choisir une, la plus simple, suffisante pour caractériser la singularité.

Par comparaison avec l'égalité (2), on posera

$$\left\{\begin{array}{lll} q = ka, & -r = kc, & p = kb + k', \\ & s = -kb + k', & p - s = 2kb. \end{array}\right. \tag{12}$$

Les trois nombres $a$, $b$, $c$ n'ont point de diviseur commun; il en va donc de même des trois nombres $a$, $2b$, $c$ dans le cas de l'ordre primitif. Alors $k$ est nécessairement un nombre entier, et $k'$ aussi par conséquent. Au contraire, pour l'ordre improprement primitif, $a$, $2b$ et $c$ ont le diviseur 2. On peut donc prendre, pour $k$, la moitié d'un nombre entier; comme, d'ailleurs, $b$ est impair (sans quoi $a$, $b$, $c$ auraient le facteur 2), $2k'$ sera aussi un nombre entier, de même parité que $2k$.

Nous avons maintenant, suivant (12) et (10),

$$(13) \qquad N = ps - qr = k'^2 + k^2 D.$$

Le minimum de N, pour l'ordre proprement primitif, est donc $N = D$, répondant à $k' = 0$, $k = \pm 1$. Pour l'ordre improprement primitif, c'est $N = \frac{1}{4}(D + 1)$, répondant à $\pm k' = \pm k = \frac{1}{2}$.

L'expression (1) du multiplicateur $\varepsilon$, suivant (11), devient

$$(14) \qquad \varepsilon = \frac{p\omega + q\omega'}{\omega} = \frac{k(a\omega' + b\omega)}{\omega} + k' = k' + ik\sqrt{D}.$$

Ce multiplicateur est toujours imaginaire, et c'est là l'origine de la locution : *multiplication complexe.*

Adoptons naturellement, comme la plus simple, la multiplication où N est minimum; fixons, d'ailleurs arbitrairement, les signes de $k$ et de $k'$, et concluons ainsi :

*Dans l'ordre proprement primitif* (c'est-à-dire l'un des deux nombres $a$ et $c$ étant impair), *le multiplicateur le plus simple* $\varepsilon$ *et le degré* N *sont*

$$(15) \qquad \varepsilon = i\sqrt{D}, \qquad N = D;$$

*dans l'ordre improprement primitif* (c'est-à-dire si $a$ et $c$ sont pairs, tous deux), *le multiplicateur le plus simple* $\varepsilon$ *et le degré* N *sont*

$$(16) \qquad \varepsilon = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{D}), \qquad N = \tfrac{1}{4}(D + 1).$$

Pour un même déterminant D, multiple de 4 moins 1, le degré le plus petit correspond à l'ordre improprement primitif, qui offre, par conséquent, des calculs directs beaucoup plus simples. Comme on le verra par l'exemple que nous allons calculer, on peut ensuite, par des opérations indirectes, passer à l'ordre proprement primitif.

## Diverses méthodes de recherche.

Jusqu'à présent, les fonctions elliptiques à multiplication complexe, ou *fonctions singulières,* ont été caractérisées par la condition (9), relative aux périodes. Le problème véritable est de *trouver leurs modules,* suivant l'ancien langage, ou leurs *invariants,* suivant le langage actuel. Pour résoudre ce problème, la voie naturelle est de faire disparaître les variables $u$, $v$ de l'égalité (8), de façon à obtenir une relation entre des constantes, exprimables en fonction des invariants. On peut obtenir une infinité de telles relations.

Développons les deux membres (8) suivant les puissances ascendantes de $u$, égalons terme à terme les coefficients et nous aurons les relations dont il s'agit. Pour ce but, on invoquera le développement

$$pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \ldots.$$

Se souvenant que l'on a $v = \varepsilon u$, on conclut

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{20}(\varepsilon^4 - 1)g_2 = \frac{1}{2}\sum p''\frac{2m\bar\omega}{N}, \\ \frac{1}{28}(\varepsilon^6 - 1)g_3 = \frac{1}{2.3.4}\sum p^{\text{IV}}\frac{2m\bar\omega}{N}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Il suffit, bien entendu, de prendre la première de ces équations. En exprimant que les arguments des diverses fonctions $p''$, dans le second membre, sont les multiples d'un même argument, que ce dernier est la $N^{\text{ième}}$ partie d'une période, on obtiendra, entre les invariants, une équation algébrique, propre à résoudre le problème.

On peut procéder autrement : prendre les deux équations, exprimer les fonctions $p''$ et $p^{\text{IV}}$ au moyen de la seule fonction $p$, suivant les formules

$$p'' = 6p^2 - \tfrac{1}{2}g_2,$$
$$p^{\text{IV}} = 12(10p^3 - \tfrac{3}{2}g_2 p - g_3),$$

employer la multiplication ordinaire pour réduire ces fonctions $p$ au seul argument $\frac{2\bar\omega}{N}$ et, sans avoir à exprimer que cet argument est une $N^{\text{ième}}$ partie de période, éliminer cette unique quantité $p\frac{2\bar\omega}{N}$ entre les deux équations.

Il y a d'autres moyens encore. Dans le cas, notamment, où N est un nombre pair, en mettant, au lieu de $u$, dans l'égalité (8), une des trois demi-périodes, on obtient une relation fort utile, comme je ferai dans l'exemple que je me propose de traiter ici.

Voici le fait qui attire d'abord l'attention. Dans l'égalité (8) et celles qui s'en déduisent, les seules données qui apparaissent sont $\varepsilon$ et N, c'est-à-dire, conformément aux expressions (15) ou (16), le déterminant D et la distinction entre les deux ordres, proprement ou improprement primitifs. Aucun autre élément de l'équation (9), c'est-à-dire de la forme $(a, b, c)$ ne laisse de trace dans le calcul. Par conséquent, la totalité des formes, de déterminant D, donne en tout deux équations, bien distinctes entre elles, l'une pour l'ordre proprement primitif, l'autre pour l'ordre improprement primitif (quand D est multiple de 4, moins un).

Pour un déterminant donné, il y a une infinité de formes $(a, b, c)$. Il n'y a cependant qu'un nombre limité de fonctions singulières, répondant à ces formes, puisque ces fonctions sont définies par une équation algébrique. Une infinité de formes répondent donc à une même fonction. Ceci tient simplement à ce que les périodes $2\omega$, $2\omega'$ ne sont pas entièrement déterminées. On peut, en effet, au moyen d'une substitution linéaire, de déterminant *unité*, changer ces périodes en d'autres, qui leur soient équivalentes.

Soient $2\varpi'$ et $2\varpi$ deux autres périodes :

$$\varpi' = \alpha\omega' + \beta\omega, \qquad \varpi = \gamma\omega' + \delta\omega. \tag{18}$$

Pour que le couple $(2\varpi', 2\varpi)$ puisse remplacer le couple $(2\omega', 2\omega)$, il faut que toute période s'exprime par une fonction linéaire de $2\varpi'$ et $2\varpi$, à coefficients entiers; ceci exige $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. De plus, pour préciser le rapport $\omega' : \omega$, nous avons été conduits à fixer le signe de la partie imaginaire dans ce rapport. Pour que ce signe se conserve dans $\varpi' : \varpi$, il faut que l'on ait $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, comme on le reconnaît par un calcul classique.

La substitution (18) fait apparaître $\varpi' : \varpi$ comme racine d'une nouvelle équation, analogue à l'équation (9). Le premier membre de cette nouvelle équation n'est autre que le premier membre de la précédente (9), transformé par une substitution linéaire, à coefficients entiers, de déterminant égal à $+1$.

Dans la théorie de Gauss, toutes les formes $(a, b, c)$, déduites d'une seule et même forme par de telles substitutions, forment une *classe* et elles sont dites *équivalentes*. Cette équivalence trouve ici son application naturelle : toutes ces formes correspondent à une seule et même fonction elliptique. Le nombre total des fonctions singulières qui correspondent à un même déterminant D est donc aussi celui des classes de formes primitives (proprement ou improprement), à déterminant $-$ D. Si la théorie des nombres ne nous le faisait déjà connaître, nous apprendrions donc par les fonctions elliptiques que ces classes sont en nombre limité.

En restant dans les généralités, j'ai encore un mot à dire sur la méthode de calcul que j'ai indiquée tout à l'heure, pour la comparer avec la méthode classique, la méthode d'invention première, celle d'Abel, pour laquelle on emploie les *équations modulaires*.

Envisageons des fonctions elliptiques quelconques, ayant $2\omega$ et $2\omega'$ pour périodes; puis d'autres fonctions elliptiques, ayant les périodes $2\Omega$, $2\Omega'$, liées aux précédentes par les relations

$$(19) \qquad \varepsilon\Omega = p\omega + q\omega', \qquad \varepsilon\Omega' = r\omega + s\omega',$$

analogues aux relations (1); $p$, $q$, $r$, $s$ sont encore des nombres entiers sans diviseur commun, mais $\varepsilon$ est une quantité tout à fait arbitraire. Les éléments de la théorie de la *transformation*, par les raisonnements mêmes que nous avons employés, montrent que $\wp(\varepsilon u)$ est fonction rationnelle de $\mathrm{P}u$ (nous désignons ici par P la seconde fonction elliptique, aux périodes $2\Omega$, $2\Omega'$). Cette fonction rationnelle s'exprime, en éléments simples, sous la forme

$$\varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \mathrm{P}u + \sum_{m=1}^{m=\mathrm{N}-1} \left[\mathrm{P}\left(u - \frac{2m\bar{\Omega}}{\mathrm{N}}\right) - \mathrm{P}\frac{2m\bar{\Omega}}{\mathrm{N}}\right],$$

analogue à l'égalité (8).

Par le même moyen qui nous a fourni les relations (17), en employant des majuscules pour les invariants de P, on obtient

$$\frac{1}{20}(\varepsilon^4 g_2 - G_2) = \frac{1}{2}\sum P''\frac{2m\tilde{\Omega}}{N},$$

$$\frac{1}{28}(\varepsilon^6 g_3 - G_3) = \frac{1}{2.3.4}\sum P^{\text{iv}}\frac{2m\tilde{\Omega}}{N}.$$

En considérant les seconds membres comme des fonctions connues de $G_2$ et $G_3$, éliminant $\varepsilon$, on obtient une relation entre les invariants absolus $g_2^3 : g_3^2$ et $G_2^3 : G_3^2$ (qui remplacent les modules dans les notations modernes). Cette relation (mise sous forme entière relativement à $G_2$ et $G_3$, dont les seconds nombres sont des fonctions algébriques irrationnelles) constitue l'*équation modulaire* relative aux transformations d'ordre N.

Dans cette équation modulaire, supposons $G_2 = g_2$, $G_3 = g_3$. Nous retrouvons alors, au lieu des relations (19), les relations initiales (1), et l'équation ainsi obtenue, qui contient alors un seul module, ou plutôt un seul invariant absolu, caractérise des fonctions elliptiques singulières. Mais $\varepsilon$ a disparu; la seule donnée qui subsiste est N. La disparition de $\varepsilon$ nous avertit que les multiplications ne sont pas nécessairement réduites à leurs formes les plus simples (15) ou (16). Entre le déterminant D inconnu et le nombre donné N existe seulement la relation (13). On trouvera donc ainsi, à la fois, toutes les multiplications complexes qui répondent aux déterminants D, de la forme

$$D = \frac{N - k^2}{k'^2},$$

$2k$ et $2k'$ étant des entiers quelconques, qui rendent D entier et positif. L'équation obtenue de la sorte est donc décomposable en plusieurs équations distinctes.

Au point de vue théorique, cette méthode présente divers avantages. Tout d'abord elle a été la source de belles découvertes arithmétiques, comme on peut le voir dans les travaux de M. Kronecker. De plus, les équations modulaires ayant été très étudiées, on trouve par là plusieurs propriétés générales de la multiplication complexe. Mais, quand il s'agit de calculer effectivement des invariants singuliers, correspondant à un déterminant donné, cette méthode ne peut être approuvée. Une bonne méthode doit fournir directement, sans facteurs étrangers, l'équation désirée. Elle ne doit point exiger le calcul préalable des équations modulaires. Celle que j'ai indiquée plus haut satisfait à ces conditions : par la conservation du multiplicateur $\varepsilon$ dans le calcul, elle doit donner, pour chaque cas, une équation répondant uniquement à la question ([1]). On ne peut pas dissimuler cependant que le calcul effectif offre des difficultés : pour qu'il ne soit pas trop laborieux, on doit assurément user d'artifice, employer, par exemple, des relations surabondantes, comme je vais le faire dans le cas particulier dont j'aborde maintenant le calcul.

### MULTIPLICATION PAR $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-23})$. — RECHERCHE DE LA RÉSOLVANTE.

Je me propose de trouver les fonctions elliptiques singulières répondant à l'ordre improprement primitif, pour le déterminant 23. Je prends, à cet effet, l'une des formes correspondantes, la forme (2, 1, 12), supposant ainsi, entre les périodes, la relation

$$(20)\qquad \begin{cases} \omega'^2 + \omega\omega' + 6\omega^2 = 0, \\ \dfrac{2\omega'+\omega}{\omega} = i\sqrt{23}. \end{cases}$$

Dans la fonction elliptique correspondante, les invariants sont réels et le discriminant négatif. La demi-période réelle est $\omega$, la demi-période purement imaginaire est $2\omega'+\omega$. Ainsi, suivant les notations usitées dans le cas des invariants réels avec discriminant négatif, on devra poser

$$\omega_2 = \omega, \qquad \omega'_2 = 2\omega'+\omega;$$

---

([1]) D'après un des plus beaux théorèmes de M. Kronecker, cette équation doit se décomposer en autant d'équations partielles qu'il y a de *genres* différents, entre lesquels se répartissent les classes de formes ayant le déterminant donné et appartenant à l'ordre considéré. Le déterminant que j'ai en vue est un nombre premier; il n'y a donc qu'un genre dans chaque ordre; partant, point de décomposition.

de là, pour les demi-périodes imaginaires conjuguées, les expressions

$$\omega_1 = \tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega'_2) = -\omega', \qquad \omega_3 = \tfrac{1}{2}(\omega_2 + \omega'_2) = \omega + \omega'.$$

Les *racines* $e_\alpha$, c'est-à-dire les valeurs de $pu$ quand $u$ est une demi-période, sont donc composées ainsi : l'une réelle $e_2$, correspondant à $\omega_2$ aussi bien qu'à $\omega'_2$; les deux autres sont imaginaires conjuguées : dans $e_1$, qui correspond à $\omega_1$, la partie imaginaire est positive.

Je conserverai explicitement les demi-périodes $\omega$, $\omega'$, avec la notation $\omega''$ pour leur somme, mettant, de plus, $e$, $e'$, $e''$ pour les trois racines correspondantes ([1]). La somme de ces dernières est nulle. On a donc simultanément

$$(21) \qquad \frac{e'}{e} = -\frac{1}{2} + t, \qquad \frac{e''}{e} = -\frac{1}{2} - t.$$

La lettre $t$ désigne l'inconnue qu'on est naturellement conduit à choisir. Nous savons dès maintenant que $\frac{t}{i}$ doit être réel et positif.

D'après les égalités (12) appliquées au cas actuel, en y prenant

$$k = k' = \tfrac{1}{2},$$

des relations (1) et (2) on tire les suivantes :

$$(22) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon\omega = \omega + \omega', & \varepsilon\omega' = -6\omega, \\ \dfrac{\omega}{\varepsilon} = -\dfrac{\omega'}{6}, & \dfrac{\omega'}{\varepsilon} = \dfrac{\omega'}{6} + \omega, \\ \multicolumn{2}{c}{\varepsilon = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{23}).} \end{array} \right.$$

([1]) L'obligation de considérer, à la fois, les diverses fonctions elliptiques contraint à restreindre la variété habituelle des notations : je réserve l'emploi des indices pour caractériser les autres fonctions, qui interviendront plus loin.

La demi-période $\varpi$ coïncide avec $\omega'$ et la formule (8) devient

$$(23)\quad \left\{ \varepsilon^2 \wp v = \left| \begin{array}{l} \wp u + \wp\left(u - \frac{\omega'}{3}\right) + \wp\left(u + \frac{\omega'}{3}\right) \\ \quad + \wp\left(u - \frac{2\omega'}{3}\right) + \wp\left(u + \frac{2\omega'}{3}\right) + \wp(u - \omega') \\ \quad - 2\wp\frac{\omega'}{3} - 2\wp\frac{2\omega'}{3} - e'. \end{array} \right. \right.$$

Posons, pour abréger ([1]),

$$(24)\qquad a = \wp\frac{2\omega'}{3}, \qquad b = \wp\frac{\omega'}{3},$$

remplaçons $\wp''$ par $6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2$, et déduisons de la première formule générale (17) cette équation

$$(25)\qquad \tfrac{1}{20}(\varepsilon^4 + 24)g_2 = 6a^2 + 6b^2 + 3e'^2.$$

Je prends, de plus, l'équation qu'on obtient en supposant, dans la relation (23), $u = \omega$, ce qui donne, suivant (22),

$$v = \varepsilon\omega = \omega + \omega';$$

par conséquent,

$$\varepsilon^2 e'' = e + e'' - e' + 2\wp\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) + 2\wp\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) - 2a - 2b.$$

Nous poserons

$$A = \tfrac{1}{4}(\varepsilon^2 e'' + e' - e - e'') = \tfrac{1}{4}(\varepsilon^2 e'' + 2e'),$$

en sorte que la dernière équation s'écrit ainsi

$$(26)\qquad 2A + a + b = \wp\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) + \wp\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right).$$

---

([1]) L'emploi des lettres $a$ et $b$ ne peut entraîner aucune confusion avec la notation générale $(a, b, c)$ des formes quadratiques, sur laquelle nous n'aurons plus à revenir.

Par le théorème d'addition des demi-périodes, on a, suivant les notations (24),

$$\mathfrak{p}\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) = e + \frac{(e-e')(e-e'')}{b-e},$$

$$\mathfrak{p}\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) = e + \frac{(e-e')(e-e'')}{a-e},$$

$$(27) \quad \mathfrak{p}\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) + \mathfrak{p}\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) = 2e + \frac{(e-e')(e-e'')(a+b-2e)}{(a-e)(b-e)}.$$

Le second membre (26) étant maintenant exprimé au moyen de $a$ et $b$, il ne faut plus qu'une relation entre $a$ et $b$ pour éliminer ces quantités des équations (25) et (26). Cette relation est immédiatement fournie par les expressions (24) de $a$ et $b$

$$a = \mathfrak{p}\frac{2\omega'}{3} = \mathfrak{p}\left(\omega' - \frac{\omega'}{3}\right), \qquad b = \mathfrak{p}\frac{\omega'}{3}.$$

On en conclut, par le théorème d'addition des demi-périodes,

$$(28) \qquad (a-e')(b-e') = (e'-e)(e'-e''),$$

ce qui est la relation demandée. Je m'en sers immédiatement pour modifier le second membre (27) par le calcul suivant

$$(a-e)(b-e) - (a-e')(b-e') = (e'-e)(a+b-e-e').$$

Ajoutant, membre à membre, avec (28), on conclut

$$(a-e)(b-e) = (e'-e)(a+b-e-e'') = (e'-e)(a+b+e').$$

La relation (27) devient donc

$$\mathfrak{p}\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) + \mathfrak{p}\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) = 2e + \frac{(e''-e)(a+b-2e)}{a+b+e'},$$

ce qui donne, pour l'équation (26), celle-ci

$$(29) \quad (2A - 2e + a + b)(a+b+e') + (e-e'')(a+b-2e) = 0.$$

L'élimination de $a$ et $b$ entre ces trois équations (25), (28) et (29) est évidemment très facile. On peut cependant la simplifier encore par une nouvelle transformation du second membre (26), conformément au calcul suivant :

$$\wp\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) = \wp\left(\omega - \omega' + \frac{2\omega'}{3}\right) = e'' + \frac{(e''-e)(e''-e')}{a-e''},$$

$$\wp\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) = e + \frac{(e-e')(e-e'')}{a-e},$$

$$b = \wp\left(\omega' - \frac{2\omega'}{3}\right) = e' + \frac{(e'-e)(e'-e'')}{a-e'}.$$

Soit $f(a) = (a-e)(a-e')(a-e'')$. La somme des trois fractions, dans ces seconds membres, est $\dfrac{f'^2(a)}{f(a)} - \varphi(a)$, où $\varphi(a)$ désigne la *partie entière* de $\dfrac{f'^2(a)}{f(a)}$. Soit, pour un instant, $u$ l'argument $\frac{2}{3}\omega'$, on a

$$f(a) = \tfrac{1}{4}\wp'^2 u, \qquad f'(a) = \tfrac{1}{2}\wp''(u).$$

Pour un argument $u$ quelconque, on a toujours

$$\frac{f'^2(a)}{f(a)} = \left(\frac{\wp'' u}{\wp' u}\right)^2 = 4(2\wp u + \wp 2u).$$

Pour $u = \frac{2}{3}\omega'$, $\wp u$ et $\wp 2u$ sont des quantités égales, $a$. Ainsi

$$\frac{f'^2(a)}{f(a)} = 12a.$$

Quant à $\varphi(a)$, partie entière de $\dfrac{f'^2(a)}{f(a)}$ où $a$ est supposé quelconque, c'est $9a$. La somme des trois fractions est donc égale à $3a$. Au lieu de l'égalité (27), on peut donc encore écrire celle-ci

$$(29\,a) \qquad \wp\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) + \wp\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) + b = 3a,$$

moyennant laquelle l'équation (26) fournit cette autre

$$(30) \qquad \mathrm{A} = a - b,$$

que j'adjoins au système (25), (27) et (29).

Avec la notation A, j'emploie encore B et C, ainsi

$$(31)\quad \begin{cases} A = \frac{1}{4}(\varepsilon^2 e'' + 2e'), \\ B = \frac{1}{6}\left(\frac{\varepsilon^4 + 24}{20} g_2 - 3e'^2\right), \\ C = (e' - e)(e' - e'') = 3e'^2 - \frac{1}{4} g_2 = 2e'^2 + ee''. \end{cases}$$

Les équations (25) et (27) sont les suivantes :

$$a^2 + b^2 = B, \qquad (a - e')(b - e') = C.$$

Avec l'équation (30), on en tire

$$(31a)\quad \begin{cases} 2e'(a + b) = 2e'^2 + B - 2C - A^2 = B - A^2 - 2e'^2 - 2ee', \\ (a + b)^2 = 2B - A^2. \end{cases}$$

L'élimination de $(a + b)$ entre ces deux dernières conduirait à une équation du quatrième degré par rapport à l'inconnue $t$. Cette équation contiendrait un facteur étranger, tandis qu'en substituant $(a + b)$ et son carré dans (29), on obtient une équation du troisième degré

$$(32)\quad A(B - A^2 - 2ee'') + e'(3B - 2A^2 + 2ee'' - 2e'^2) = 0.$$

C'est l'équation que je voulais obtenir. On y devra substituer, pour A et B, leurs expressions (31), en se souvenant qu'on a

$$-\tfrac{1}{4} g_2 = ee' + e'e'' + e''e = e'e'' - e^2.$$

Elle devient, de la sorte, homogène et du troisième degré, en $e$, $e'$, $e''$. Par le moyen des notations (21), on aura une équation du troisième degré en $t$.

Le développement de cette équation exige encore des calculs assez longs. Il convient donc d'avoir un guide et un contrôle par la connaissance préventive de quelques traits essentiels.

### Remarques sur la résolvante.

La présence de $\varepsilon$ dans A et B entraîne, pour les coefficients de l'équation, la forme complexe $\alpha + i\beta\sqrt{23}$, $\alpha$ et $\beta$ étant des nombres entiers. Or nous connaissons l'existence d'une racine $t$, purement imaginaire. Il est donc naturel de prévoir, pour l'équation, la forme

$$(33) \qquad i\sqrt{23}(\alpha t^3 + \beta t) + \gamma t^2 + \delta = 0,$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ seront des nombres entiers. Je donnerai, dans un instant, la preuve véritable de cette propriété. Ce qui importe le plus, c'est de savoir à quelles fonctions elliptiques singulières se rapportent les autres racines $t$.

D'après les éléments de la théorie des formes, il y a, outre $(2, 1, 12)$, deux autres formes réduites, dans l'ordre improprement primitif, de déterminant $-23$. Ce sont les formes $(4, 1, 6)$ et $(4, -1, 6)$. Envisageons d'abord la première, que nous distinguerons en affectant de l'indice 1 les éléments correspondants. Il s'agit donc des fonctions elliptiques pour lesquelles on a

$$(34) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\dfrac{4\omega'_1 + \omega_1}{\omega_1} = i\sqrt{23},} \\ \varepsilon\omega_1 = \omega_1 + 2\omega'_1, & \varepsilon\omega_1 = -3\omega_1, \\ \dfrac{\omega_1}{\varepsilon} = -\dfrac{1}{3}\omega'_1, & \dfrac{\omega'_1}{\varepsilon} = \dfrac{\omega'_1 + 3\omega_1}{6}. \end{array} \right.$$

L'argument $\tilde{\omega}$ de la formule (8) est ici $\omega'_1 + 3\omega_1$.

On formera, comme précédemment, l'équation supplémentaire, en prenant $u = \omega_1$, ce qui donne aussi $v = \omega_1$. Les lettres $a$ et $b$ auront les significations suivantes :

$$a_1 = p_1 \frac{2\omega'_1}{3}, \qquad b_1 = p_1\left(\frac{\omega'_1}{3} + \omega_1\right).$$

Moyennant ces conventions, on voit immédiatement qu'on obtient les mêmes équations que précédemment, sauf remplacement de $e$, $e'$, $e''$ par $e'_1$, $e''_1$, $e_1$.

Notre équation du troisième degré a donc une racine $t_1$ définie par les égalités

$$(35) \qquad \frac{e''_1}{e'_1} = -\frac{1}{2} + t_1, \qquad \frac{e_1}{e'_1} = -\frac{1}{2} - t_1.$$

Cette racine est complexe et nous verrons même, ultérieurement, que l'on peut assigner, d'avance, son expression en fonction de la racine précédente $t$.

Semblablement, la forme $(4, -1, 6)$ donne lieu à des fonctions elliptiques caractérisées par les relations

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\dfrac{4\omega'_2 - \omega_2}{\omega_2} = i\sqrt{23},} \\ \varepsilon\omega_2 = 2\omega'_2, & \varepsilon\omega'_2 = -3\omega_2 + \omega'_2, \\ \dfrac{\omega_2}{\varepsilon} = \dfrac{\omega_2 - 2\omega'_2}{6}, & \dfrac{\omega'_2}{\varepsilon} = \dfrac{1}{2}\omega_2. \end{array}\right.$$

L'argument $\varpi$ est $\omega_2 - 2\omega'_2$. On obtient l'équation complémentaire en prenant $u = \omega'_2$, ce qui donne $v = \omega''_2$. Les lettres $a$ et $b$ ont les significations suivantes :

$$a_2 = p_2\left(\frac{2\omega_2 - 4\omega'_2}{3}\right), \qquad b_2 = p_2\left(\frac{\omega_2 - 2\omega'_2}{3}\right),$$

et l'on retrouve les équations primitives, sauf remplacement de $e, e', e''$ par $e'_2, e_2, e''_2$. Notre équation, du troisième degré, a donc la racine $t_2$, définie par les égalités

$$(37)\qquad \frac{e_2}{e'_2} = -\frac{1}{2} + t_2, \qquad \frac{e''_2}{e'_2} = -\frac{1}{2} - t_2.$$

En comparant les fonctions d'indice 2 et celles d'indice 1, on voit que les rapports des périodes, au signe près, ce qui est indifférent, y sont imaginaires conjugués. Les invariants absolus sont donc aussi des imaginaires conjuguées et il est manifeste que les deux rapports $e_1 : e'_1$ et $e_2 : e'_2$ sont dans ce cas. Ainsi $t_1$ et $-t_2$ sont des imaginaires conjuguées. Nous rappelant ce qui a été dit précédemment sur la première racine $t$, nous pouvons conclure que les trois quantités $\frac{t}{i}$, fournies par les trois racines $t$, sont l'une réelle et positive, les deux autres imaginaires conjuguées. Par là est pleinement justifiée la forme (33), prévue pour l'équation.

Voici encore un autre moyen de trouver ce même résultat. Comme on l'a vu par l'égalité (14), une même fonction elliptique admet à la fois les deux multiplicateurs $\varepsilon$ et $1-\varepsilon$ et, pour tous deux, le nombre N n'a qu'une seule valeur. On peut donc former l'équation tout aussi bien en se servant du second multiplicateur et l'on reconnaîtra qu'il y a simplement échange entre $e'$ et $e''$. Par le changement de $\varepsilon$ en $1-\varepsilon$, c'est-à-dire par le changement du signe de $i\sqrt{23}$, la racine $t$ se change en $-t$; il en est de même pour les autres racines. Cette circonstance exige la forme (33) de l'équation cherchée.

Pour une même fonction singulière, les deux multiplicateurs conjugués, $\varepsilon$ et $-\varepsilon$ dans le cas de l'ordre proprement primitif, $\varepsilon$ et $-(1-\varepsilon)$ dans l'autre cas, coexistent toujours. Ce fait général, conséquence de l'égalité (14), explique, de nouveau, pourquoi deux *formes opposées*, comme (4, 1, 6) et (4, −1, 6) donnent lieu à des invariants conjugués, avec cette conséquence, bien connue, que les invariants réels proviennent des *formes ambiguës*, comme (2, 1, 12), c'est-à-dire des formes proprement équivalentes à leurs opposées.

Une dernière observation avant de calculer notre équation. Si l'on ne savait déjà, par la théorie des formes, que l'ordre improprement primitif contient, en tout, trois classes pour le déterminant −23, le degré 3 de l'équation nous le ferait connaître. Il est évident, en effet, que, s'il existait d'autres classes, le même calcul s'y appliquerait, entraînant seulement quelque permutation dans les accents de $e$, $e'$, $e''$. Ces classes fourniraient donc nécessairement des racines de la même équation.

## Développement de la résolvante.

Dans le développement de l'équation (32), j'utiliserai la forme démontrée (33), non pour abréger le calcul, mais seulement pour le contrôler. Soit U le premier membre

$$U = A(B - A^2 - 2ee'') + e'(3B - 2A^2 + 2ee'' - 2e'^2),$$

où l'on prendra

$$e = 1, \qquad e' = -\tfrac{1}{2} + t, \qquad e'' = -\tfrac{1}{2} - t, \qquad g_2 = 4t^2 + 3.$$

Soit aussi V le premier membre, sous la forme désirée (33)

$$V = i\sqrt{23}(\alpha t^3 + \beta t) + \gamma t^2 + \delta.$$

On doit s'attendre à ce que U diffère de V par un facteur complexe $\mu + i\nu\sqrt{23}$, et chercher à mettre ce facteur en évidence.

Au lieu de développer complètement U, il est préférable de calculer séparément U pour des valeurs particulières de $t$.

1° $\quad t = \frac{1}{2}, \qquad e' = 0, \qquad e'' = -1, \qquad g_2 = 4.$

En se servant de la relation

$$\varepsilon^4 + 11\varepsilon^2 + 36 = 0,$$

on a

$$B = -\tfrac{1}{30}(11\varepsilon^2 + 12), \qquad A = -\tfrac{1}{4}\varepsilon^2.$$

$$\begin{aligned}
2^3.3.5AB &= 11\varepsilon^4 + 12\varepsilon^2 &&= -109\,\varepsilon^2 - 2^2.3^2.11,\\
2^6A^3 &= -\varepsilon^6 &&= -5.17\varepsilon^2 - 2^2.3^2.11,\\
2^2ee''A &= \quad \varepsilon^2 &&= + \quad \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Désignant par $U_1$ la valeur de U correspondante, on trouve ainsi

$$2^6.3.5U_1 = 7.11(2^2.3^2 - \varepsilon^2), \qquad t = \tfrac{1}{2}.$$

2° $\quad t = -\frac{1}{2}, \qquad e' = -1, \qquad e'' = 0, \qquad g_2 = 4, \qquad A = -\frac{1}{2}.$

Le calcul est extrêmement simple. Désignant par $U'_1$ la valeur de U, je trouve

$$2^3.3.5U'_1 = 7.11(9 + 2\varepsilon^2), \qquad t = -\tfrac{1}{2}.$$

J'en conclus

$$\begin{aligned}
\frac{2^6.3.5}{7.11}(U'_1 + U_1) &= 3(36 + 5\varepsilon^2) = \tfrac{3}{2}(17 + 5i\sqrt{23}),\\
\frac{2^6.3.5}{7.11}(U'_1 - U_1) &= 36 + 17\varepsilon^2 \quad = \tfrac{1}{2}i\sqrt{23}(17 + 5i\sqrt{23}).
\end{aligned}$$

En posant

$$(38)\qquad 2^{10}.3.5\,U = (17 + 5i\sqrt{23})\,V,$$

j'ai, de la sorte, $V_1$ et $V'_1$ désignant les valeurs de V pour $t = \frac{1}{2}$ et $t = -\frac{1}{2}$,

$$(39)\qquad \begin{cases} V'_1 + V_1 = 2^3.3.7.11, \\ V'_1 - V_1 = 2^3.7.11\,i\sqrt{23}. \end{cases}$$

3° *Calcul du terme en $t^3$.* — Pour ce calcul, on doit prendre

$$e' = t, \qquad e'' = -t, \qquad g_2 = 4t^2.$$

Voici le calcul :

$$\begin{aligned} 2^2 A &= (2 - \varepsilon^2)t, \qquad 2.3.5\,B = -(27 + 11\varepsilon^2)t^2, \\ 2^2(A + 3e') &= (14 - \varepsilon^2)t, \\ 2^2(A + 2e') &= (10 - \varepsilon^2)t, \\ 2^4 A^2 &= -(32 + 15\varepsilon^2)t^2, \\ 2^2.3.5\,B(A + 3e') &= -(3^2.43 + 2^2.31\varepsilon^2)t^3, \\ -2^6 A^2(A + 2e') &= (2^2.5.43 + 283\varepsilon^2)t^3, \\ 2^6.3.5\,U &= 7.19(36 + 17\varepsilon^2)t^3 = \frac{7.19}{2}\,i\sqrt{23}(17 + 5i\sqrt{23})\,t^3. \end{aligned}$$

Suivant la notation (38), voici donc le terme en $t^3$ dans V :

$$V = 2^3.7.19\,i\sqrt{23}\,t^3 + \ldots.$$

4° *Calcul du terme indépendant de t.* — On doit prendre

$$e' = e'' = -\tfrac{1}{2}, \qquad g_2 = 3,$$

$$2^3 A = -2 - \varepsilon^2, \qquad 2^3.5\,B = -17 - 11\varepsilon^2.$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
2^3(A+3e') &= -14-\varepsilon^2,\\
2^3(A+2e') &= -10-\varepsilon^2,\\
2^6A^2 \quad &= -32-7\varepsilon^2,\\
2^5.5\,B(A+3e') &= -79+5^2\varepsilon^2,\\
2^9A^2(A+2e') &= 2^2.17+5^2\varepsilon^2,\\
2^4ee''A &= 2 \quad +\varepsilon^2,\\
2^9.5U = -9(36+5\varepsilon^2) &= -\tfrac{9}{2}(17+5i\sqrt{23}).
\end{aligned}$$

Le dernier terme de V est ainsi $-3^3$.

Le premier et le dernier terme ont bien la forme prévue; de plus, suivant (39), les deux valeurs $V_1$ et $V'_1$ qui correspondent à $t=\pm\frac{1}{2}$ sont conjuguées. En conséquence, V a la forme

$$V = 7i\sqrt{23}(2^3.19t^3-2\beta t)+2^2\gamma t^2-3^3$$

et les égalités (39) donnent

$$\beta = 3^2.7, \qquad \gamma = 3.317.$$

L'équation cherchée est donc enfin

$$(40)\quad V(t)=0=7i\sqrt{23}(2^3.19\,t^3-2.3^2.7\,t)+3(2^2.317\,t^2-3^2).$$

### Les trois multiplications par $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-23})$.

Pour résoudre l'équation (40), le changement d'inconnue, qui s'offre d'abord, est indiqué par l'égalité

$$(41)\qquad \tfrac{2}{3}\sqrt{23}\,t = iz,$$

par où l'équation devient

$$(42)\qquad 7.19z^3-317z^2+7^2.23z-23=0.$$

Pour la réduire à trois termes, on posera

$$(43) \qquad \frac{3}{z} = 2^5 x + 7^2,$$

ce qui mène à l'équation finale

$$(44) \qquad 23x^3 - 3.53x - 7.23 = 0.$$

Comme on le verra plus loin, il y a des raisons de savoir d'avance que la racine carrée du discriminant de l'équation doit contenir $i\sqrt{23}$ comme seule irrationnalité. Il en est bien ainsi; car, R étant le discriminant, on a, pour l'équation (44),

$$R = 2^2.\left(\frac{3.53}{23}\right)^3 - 3^3.7^2,$$

$$7^2.23^3 - 2^2.53^3 = 675 = 3^3.5^2,$$

$$R = -\frac{3^6.5^2}{23^3}, \qquad \sqrt{R} = \frac{3^3.5}{23.i\sqrt{23}}.$$

Soient

$$(45) \quad g = \sqrt[3]{\frac{7}{2}\,23\sqrt{23} + \frac{5}{2}\,3\sqrt{3}}, \qquad h = \sqrt[3]{\frac{7}{2}\,23\sqrt{23} - \frac{5}{2}\,3\sqrt{3}},$$

racines cubiques prises dans le sens arithmétique et pour lesquelles on a

$$gh = 53.$$

La racine réelle de (44) est

$$x = \frac{1}{\sqrt{23}}(g + h).$$

Les deux autres $x_1$ et $x_2$ s'en déduisent comme on sait : pour la première, on remplace $g$ et $h$ par $\theta g$ et $\theta^2 h$; pour l'autre, par $\theta^2 g$ et $\theta h$, et $\theta$ est une des racines cubiques imaginaires de l'unité. Afin que les indices 1 et 2 correspondent à ceux qui ont été adoptés plus haut, pour $t$, il y aura lieu de préciser $\theta$. Je le ferai plus loin, et, dans les formules ci-après, je suppose, par avance, le résultat.

En posant donc

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} 7^2\sqrt{23} + 2^5\,(g + h) &= c, \\ 7^2\sqrt{23} + 2^5(\theta g + \theta^2 h) &= c_1, \\ 7^2\sqrt{23} + 2^5(\theta^2 g + \theta h) &= c_2, \end{aligned}\right\} \quad \theta = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

on pourra exprimer, par une même formule, chaque racine $t$ en fonction de la quantité correspondante $c$. Les quantités $e$, $e'$, $e''$, dont l'une est arbitraire et dont la somme est nulle, sont déterminées par la condition

$$\frac{e' - e''}{2e} = t = \frac{9i}{2c}.$$

En vertu de l'homogénéité, le choix arbitraire de $e$ est indifférent. Je prendrai donc

$$(47)\qquad e = 2c, \qquad e' = 9i - c, \qquad e'' = -9i - c,$$

pour le cas de l'égalité (20), ou, en d'autres termes, pour la forme (2, 1, 12); puis, en permutant les accents comme il a été expliqué et comme le rappellent les égalités (35) et (37), on aura

$$(48)\qquad e'_1 = 2c_1, \qquad e''_1 = 9i - c_1, \qquad e_1 = -9i - c_1,$$

dans le cas de l'égalité (34), correspondant à la forme (4, 1, 6); puis enfin

$$(49)\qquad e''_2 = 2c_2, \qquad e_2 = 9i - c_2, \qquad e'_2 = -9i - c_2,$$

pour le cas de l'égalité (36), correspondant à la forme (4, − 1, 6).

Ces permutations des accents se rapportent seulement à la désignation arbitrairement uniforme, des périodes dans les trois cas. Elle disparaît dans l'expression des invariants, que voici :

$$g_2 = 2^2.3(c^2 - 3^3), \qquad g_3 = 2^3 c(c^2 + 3^4),$$
$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = -2^6.3^8(c^2 + 3^2)^2;$$
$$\frac{g_2^3}{3^3(c^2 - 3^3)^3} = \frac{g_3^2}{c^2(c^2 + 3^4)^2} = \frac{-\Delta}{3^8(c^2 + 3^2)^2} = 2^6.$$

Je vais, dès maintenant, fixer le signe de la partie imaginaire dans $\theta$. On verra, plus loin, un moyen purement algébrique pour cet objet. Quant à présent, je vais employer les séries $\mathfrak{S}$, formées uniformément avec la quantité $q = e^{\frac{i\pi\omega'}{\omega}}$. En posant donc

$$Q = e^{-\frac{1}{4}\pi\sqrt{23}},$$

j'aurai, pour chacun des trois cas (20, 34, 36),

$$q = e^{-\frac{i\pi}{2}}Q^2, \qquad q_1 = e^{-\frac{i\pi}{4}}Q, \qquad q_2 = e^{+\frac{i\pi}{4}}Q.$$

Prenons la formule (où les fonctions $\mathfrak{S}$ ont l'argument zéro)

$$\frac{e''-e'}{e-e''} = \left(\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_0}\right)^4 = 2^4 q\left(\frac{1+q^2+q^6+\ldots}{1-2q+2q^4+\ldots}\right)^4,$$

pour l'un ou l'autre des deux derniers cas. Comme $Q$ est inférieur à $e^{-\pi} = 0{,}04\ldots$, les signes de la partie réelle et de la partie imaginaire sont définis par le terme $2^4 q$ du second membre :

$$\frac{e_1''-e_1'}{e_1-e_1''} = 2^4 e^{-\frac{i\pi}{4}}Q+\ldots = 2^3\sqrt{2}(1-i)Q+\ldots.$$

Il n'y a aucune utilité à considérer l'égalité analogue avec les indices 2; elle fournirait, de part et d'autre, les quantités conjuguées des précédentes.

Suivant les expressions (48), il vient, en supposant $c_1 = \alpha + i\beta$,

$$8\sqrt{2}(1-i)Q+\ldots = \frac{3c_1-9i}{18i} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\beta-\frac{1}{6}i\alpha,$$

d'où résulte que $\beta$ est positif. Mais, d'après (46), on a

$$i\beta = 2^4(\theta-\theta^2)(g-h).$$

Comme $(g-h)$ est positif (45), il faut effectivement choisir $\theta$ ainsi que je l'ai fait plus haut.

## Transformations du troisième ordre.

Nous possédons, dès à présent, la pleine connaissance de tous les éléments pour les trois fonctions elliptiques singulières; car les six quantités $a$, $b$, $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$ sont explicitement fournies par les équations (30) et (31 $a$). Nous pouvons en déduire six autres, jouant le rôle analogue à l'égard du multiplicateur conjugué. Comme on le voit par les équations générales (3) et (12), où l'on prendra $k=-\frac{1}{2}$, $k'=\frac{1}{2}$, ces quantités sont les suivantes

$$b'=p\,\frac{\omega+\omega'}{3},\qquad b'_1=p_1\frac{\omega_1+2\omega'_1}{3},\qquad b'_1=p_2\left(\frac{\omega'_2}{3}+\omega_2\right),$$

et les $a$ ont les arguments doubles. Les formules ci-dessus montrent suffisamment que le changement du signe de $i$ change $a$ et $b$ en $a'$ et $b'$, $a_1$ et $b_1$ en $a'_2$ et $b'_2$, $a_2$ et $b_2$ en $a'_1$ et $b'_1$.

Les six quantités $b$, $b'$, $b_1$, $b'_1$, $b_2$, $b'_2$ servent de base à des transformations du sixième ordre, deux pour chaque fonction elliptique, et ces transformations changent la fonction en elle-même.

Les quantités $a$, $a'$, ... peuvent servir de base à des transformations du troisième ordre. Ces dernières échangent les fonctions les unes dans les autres, comme je vais le montrer.

Désignant par $\rho$ un facteur inconnu, posons

$$\rho\omega'=3\omega_2,\qquad \rho\omega=-\omega'_2.$$

Les relations (11)

$$\frac{2\omega'+\omega}{\omega}=-\frac{12\omega+\omega'}{\omega'}=i\sqrt{23}$$

se changent en les suivantes

$$-\frac{6\omega_2-\omega'_2}{\omega'_2}=\frac{4\omega'_2-\omega_2}{\omega_2}=i\sqrt{23};$$

d'où l'on voit que le facteur $\rho$ peut être choisi effectivement de manière à attribuer la même signification que précédemment aux lettres $\omega_2$ et $\omega'_2$. J'ai ici une transformation de troisième ordre, qui se figure par la relation

$$\rho^2 \wp_2(\rho u) = \wp u + \wp\left(u - \frac{2\omega'}{3}\right) + \wp\left(u + \frac{2\omega'}{3}\right) - 2\wp\frac{2\omega'}{3}.$$

En prenant successivement $u = \omega', \omega, \omega''$, j'obtiens

$$\begin{aligned}
\rho^2 e_2 &= e' + 2(b - a),\\
\rho^2 e'_2 &= e + 2\wp\left(\omega - \frac{2\omega'}{3}\right) - 2a,\\
\rho^2 e''_2 &= e'' + 2\wp\left(\omega - \frac{\omega'}{3}\right) - 2a,
\end{aligned}$$

et l'on remarquera, en passant, que, par addition de ces trois égalités, se prouve, derechef, la relation ($29a$). De là, suivant les égalités (30) et (31), je conclus

$$\begin{aligned}
\rho^2 e_2 &= e' - 2\mathrm{A} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 e'',\\
\rho^2 e'_2 &= 3e - 2a + 2\frac{(e-e')(e-e'')}{a-e},\\
\rho^2 e''_2 &= e'' + 2e - 2a + 2\frac{(e-e')(e-e'')}{b-e},\\
\rho^2(e'_2 - e''_2) &= e - e'' + 2\frac{(e-e')(e-e'')(b-a)}{(a-e)(b-e)},
\end{aligned}$$

et cette dernière, comme on l'a vu plus haut, se change ainsi :

$$\rho^2(e'_2 - e''_2) = e - e'' + 2\frac{(e-e'')\mathrm{A}}{a+b+e'} = (e-e'')\frac{a+b+e'+2\mathrm{A}}{a+b+e'}.$$

Remettant, pour A, son expression (31), j'ai enfin

$$\frac{e_2}{e'_2 - e''_2} = -\frac{e''(a+b+2e'+\frac{1}{2}\varepsilon^2 e'')}{2(e-e'')(a+b+e')}.$$

C'est là une formule qui donne la quantité $c_2$ en fonction rationnelle de $c$, avec adjonction de $\varepsilon$, bien entendu. Disons, pour abréger, que nous avons ainsi trouvé $c_2 = \varphi(c)$.

Par un calcul tout pareil, en posant successivement

$$\rho_1 \omega'_1 = 3\omega, \qquad \rho_1 \omega_1 = -\omega' - \omega,$$
$$\rho_2 \omega'_2 = \omega'_1 + 2\omega_1, \qquad \rho_2 \omega_2 = -\omega'_1 + \omega_1,$$

on trouve aussi $c = \varphi(c_1)$, $c_1 = \varphi(c_2)$. En changeant le signe de $i$, on aurait les analogues

$$c_1 = \psi(c), \qquad c = \psi(c_2), \qquad c_2 = \psi(c_1).$$

Ces formules traduisent le caractère *abélien*, qui appartient, comme on le sait, à toutes les équations dont dépendent les fonctions elliptiques à multiplication complexe. Elles donnent la raison *a priori* de ce fait que le discriminant de l'équation est un carré, sauf le facteur $-23$.

## Transformations du second ordre.

Je vais maintenant examiner, pour une quelconque des trois fonctions singulières, les trois transformations du second ordre : de ces transformations, il y en a deux qui échangent les fonctions précédentes, tandis que l'autre transformation conduit à une fonction nouvelle, *correspondant à l'ordre proprement primitif*. Les six transformations, qui échangent les fonctions précédentes, sont naturellement inverses, deux à deux. Elles se distinguent, dans les formules ci-après, par l'emploi de la lettre $\sigma$ pour les coefficients de proportionnalité, et cette lettre, avec ou sans accent, pourvue d'un même indice, se rapporte aux deux transformations inverses. Pour les trois autres transformations, le coefficient de proportionnalité est dénoté par la lettre $\tau$, et les éléments des nouvelles fonctions sont indiqués par des majuscules.

Voici les formules :

$$
(50)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\sigma_2\omega = \omega_1, & \sigma_2\omega' = 2\omega'_1, \\
\sigma'_1\omega = \omega_2, & \sigma'_1\omega' = 2\omega'_2 - \omega_2, \\
\tau\omega \;= 2\Omega, & \tau\omega' = \Omega' - \Omega; \\[1ex]
\sigma\omega_1 = \omega_2 - \omega'_2, & \sigma\omega'_1 = \omega_2 + \omega'_2, \\
\sigma'_2\omega_1 = 2\omega, & \sigma'_2\omega'_1 = \omega', \\
\tau_1\omega_1 = \Omega'_1, & \tau_1\omega'_1 = 2\Omega_1; \\[1ex]
\sigma_1\omega_2 = 2\omega, & \sigma_1\omega'_2 = \omega' + \omega, \\
\sigma'\omega_2 = \omega_1 + \omega'_1, & \sigma'\omega'_2 = -\omega_1 + \omega'_1, \\
\tau_2\omega_2 = -\Omega'_2, & \tau_2\omega'_2 = 2\Omega_2; \\[1ex]
\multicolumn{2}{c}{\sigma\sigma' = \sigma_1\sigma'_1 = \sigma_2\sigma'_2 = 2.}
\end{array}
\right.
$$

Les trois nouvelles fonctions correspondent aux trois formes réduites (1, 0, 24) et (3, $\pm$ 1, 8) :

$$
\begin{gathered}
\Omega'^2 + 23\Omega^2 = 0, \\
3\Omega'^2_1 - 2\Omega_1\Omega'_1 + 8\Omega_1^2 = 0, \\
3\Omega'^2_2 + 2\Omega_2\Omega'_2 + 8\Omega_2^2 = 0.
\end{gathered}
$$

Je considère la première de ces transformations. Elle est traduite par l'égalité

$$\sigma_2^2 p_1(\sigma_2 u) = p u + p(u - \omega') - p\omega',$$

d'où l'on déduit, en prenant successivement, pour $u$, les valeurs $\omega$, $\frac{1}{2}\omega'$, $\frac{1}{2}\omega' + \omega$,

$$
\begin{aligned}
\sigma_2^2 e_1 &= e + e'' - e' = -2e', \\
\sigma_2^2 e'_1 &= e' \pm 2\sqrt{(e'-e)(e'-e'')}, \\
\sigma_2^2 e''_1 &= e' \mp 2\sqrt{(e'-e)(e'-e'')},
\end{aligned}
$$

ce qui mène à la relation bien connue

$$(51)\qquad \pm 2\frac{\sqrt{(e'-e)(e'-e'')}}{e'} = \frac{e''_1 - e'_1}{e_1}.$$

La seconde transformation donne, de même,

$$\pm 2\frac{\sqrt{(e''-e')(e''-e)}}{e''} = \frac{e''_2 - e'_2}{e_2}.$$

Introduisant les racines $t$, $t_1$, $t_2$, d'après (21), (35) et (37), on a ainsi

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{4\sqrt{t(2t-3)}}{1-2t} + \frac{3-2t_1}{1+2t_1} = 0, \\ &\frac{4\sqrt{t(2t+3)}}{1+2t} + \frac{3+2t_2}{1-3t_2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les quatre autres transformations analogues conduisent à des formules que l'on déduit aussi de ces dernières par la permutation circulaire des indices.

J'ai annoncé un moyen, purement algébrique, de distinguer celle des deux racines cubiques de l'unité qu'il faut désigner, dans les formules ci-dessus, par $\theta$. Le voici. Tout d'abord, substituant, à la place de $x$, dans le premier membre (44), successivement les deux nombres 3 et $\frac{49}{16}$, on trouve, pour résultats, $-17$ et $+\frac{3^2.5^2.7^2.11}{2^{12}}$. La racine réelle $x$ est ainsi connue, à moins de $\frac{1}{16}$ près, et l'on voit que $c$ est compris entre $145\sqrt{23}$ et $147\sqrt{23}$.

Prenons l'égalité (51) qui donne

$$\frac{c_1-3i}{c_1+9i} = \mp 2\frac{\sqrt{-6i(c-3i)}}{c-9i}.$$

Vu la grandeur de $c$, les quantités $c-3i$ et $c-9i$ peuvent ici être remplacées, pour fixer les signes, par $c$ lui-même; et l'on a sensiblement

$$(53) \qquad \frac{c_1-3i}{c_1+9i} = \mp 2\sqrt{\frac{3}{c}}(1-i).$$

Si l'on pose $c_1 = \alpha + i\beta$, on a (46)

$$\alpha = 7^2\sqrt{23} - 2^4(g+h) = \sqrt{23}(7^2 - 2^4 x),$$

quantité positive, $x$ étant inférieur à $\frac{49}{16}$. Par conséquent, dans

$$\frac{c_1 - 3i}{c_1 + 9i} = \frac{\alpha + i(\beta - 3)}{\alpha + i(\beta + 9)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 27 + 6\beta - 12i\alpha}{\alpha^2 + (\beta + 9)^2},$$

la partie imaginaire est négative, d'où l'on voit déjà qu'il faut prendre le signe *plus* devant le second membre (53). On doit donc avoir

$$\alpha^2 + \beta^2 - 27 + 6\beta > 0.$$

Or, en remplaçant $t$ par $\frac{9}{2}\frac{i}{c}$ dans l'équation (40), on trouve

$$c c_1 c_2 = 3^3 . 7 . 19\sqrt{23}.$$

D'après la grandeur de $c$, il en résulte $c_1 c_2 < 3^3$, c'est-à-dire

$$\alpha^2 + \beta^2 - 27 < 0.$$

En conséquence, $\beta$ est positif. C'est à quoi j'étais parvenu précédemment, pour en déduire la détermination précise de $\theta$.

Ainsi qu'on l'a vu par les transformations du troisième ordre, $t_1$ et $t_2$ s'expriment rationnellement en fonction de $t$, sauf adjonction de $\varepsilon$. Les deux quantités $\sqrt{\frac{2t \pm 3}{t}}$ peuvent donc être exprimées de la même manière; c'est ce que je vais chercher à faire. Soient

$$s = \sqrt{\frac{2t - 3}{t}}, \qquad s_1 = \sqrt{\frac{2t_1 - 3}{t_1}}, \qquad s_2 = \sqrt{\frac{2t_2 - 3}{t_2}},$$

ces racines carrées étant prises avec les signes que leur attribuent la première égalité (52) et ses analogues. Recourant à l'équation (40), dont $t$, $t_1$, $t_2$ sont les racines, j'ai

$$(54) \qquad (s s_1 s_2)^2 = 8\frac{V(\frac{3}{2})}{V(0)}.$$

D'ailleurs, par l'égalité (52),

$$s = \frac{(\frac{3}{2} - t_1)(\frac{1}{2} - t_1)}{2t(-\frac{1}{2} - t_1)}$$

et, ses analogues multipliées membre à membre, j'ai aussi

$$ss_1 s_2 = -\frac{1}{8}\frac{V(\frac{3}{2})V(\frac{1}{2})}{V(o)V(-\frac{1}{2})};$$

par conséquent,

$$ss_1 s_2 = -2^6\frac{V(-\frac{1}{2})}{V(\frac{1}{2})}.$$

Les équations (39) nous offrent, calculées déjà sous la dénomination de $V_1$ et $V'_1$, les quantités $V(\pm\frac{1}{2})$, savoir

$$V(\pm\tfrac{1}{2}) = 2^2.7.11(3 \mp i\sqrt{23}).$$

Il en résulte

$$ss_1 s_2 = -2^6\frac{3+i\sqrt{23}}{3-i\sqrt{23}} = -2(3+i\sqrt{23})^2 = 2^2(7-3i\sqrt{23}).$$

Une vérification s'offre naturellement par le calcul direct de $V(\frac{3}{2})$ qui, d'après (54), donne

$$(ss_1 s_2)^2 = -2^5(79+3.7i\sqrt{23}) = 2^4(7-3i\sqrt{23})^2.$$

De la même égalité (52) je tire encore le résultat suivant

$$(55)\qquad \frac{1}{4}\sum\frac{1-2t}{st} = \sum\left(1-\frac{4}{3-2t_1}\right) = 3-2\frac{V'(\frac{3}{2})}{V(\frac{3}{2})},$$

où $V'$ désigne la dérivée de V, et où le signe sommatoire s'applique aux trois racines. Par un calcul direct, on a

$$V'(\tfrac{3}{2}) = 2^2.3^2(317+5^2.7i\sqrt{23}),$$

quantité qui doit être divisée par $V(\frac{3}{2})$. Le calcul précédent a donné $V(\frac{3}{2})$ sous la forme

$$V(\tfrac{3}{2}) = -\frac{3^3}{2}(3+i\sqrt{23})^4 = -\frac{2^{19}.3^3}{(3-i\sqrt{23})^4}.$$

La division s'effectue donc de la manière la plus simple, en multipliant successivement par $3 - i\sqrt{23}$ :

$$\begin{aligned}
(317 + 5^2.7i\sqrt{23})(3 - i\sqrt{23}) &= \phantom{-}2^4(311 + 13i\sqrt{23}),\\
(311 + 13i\sqrt{23})(3 - i\sqrt{23}) &= \phantom{-}2^4(7.11 - 17i\sqrt{23}),\\
(7.11 - 17i\sqrt{23})(3 - i\sqrt{23}) &= -2^5(5 + 2^2i\sqrt{23}),\\
(5 + 2^2i\sqrt{23})(3 - i\sqrt{23}) &= 107 + 7i\sqrt{23}.
\end{aligned}$$

$$\frac{V'(\frac{3}{2})}{V(\frac{3}{2})} = \frac{1}{2^4.3}(107 + 7i\sqrt{23}),$$

$$3 - 2\frac{V'(\frac{3}{2})}{V(\frac{3}{2})} = -\frac{7}{2^3.3}(5 + i\sqrt{23}).$$

D'après l'expression de $s$, on a, d'autre part,

$$\frac{1-2t}{st} = -\frac{s^2+4}{3s}.$$

J'ai donc ce résultat, que j'avais en vue d'obtenir,

$$\sum\left(s + \frac{4}{s}\right) = \frac{7}{2}(5 + i\sqrt{23}).$$

Soit maintenant

$$(56)\qquad s^3 - Ns^2 + Ms - 2^2(7 - 3i\sqrt{23}) = 0$$

l'équation dont $s$, $s_1$, $s_2$ sont les racines. La précédente relation donne

$$(57)\qquad N + \frac{M}{7 - 3i\sqrt{23}} = \frac{7}{2}(5 + i\sqrt{23}).$$

Ce sont ces deux coefficients M et N dont la détermination fournira l'expression, que je cherche, de $s$ en fonction rationnelle de $t$. On peut tirer encore de l'égalité (52) deux autres équations du premier degré entre M et N par le moyen suivant. Elle donne immédiatement

$$4\sum\frac{st}{1-2t} = 3 + 2\frac{V'(-\frac{1}{2})}{V(-\frac{1}{2})}.$$

D'ailleurs,

$$\sum \frac{st}{1-2t} = -3\sum \frac{s}{s^2+4} = -\frac{3}{2}\sum\left(\frac{1}{s+2i} + \frac{1}{s-2i}\right).$$

En désignant par $F(s)$ le premier membre (56), on a, de la sorte,

$$\frac{F'(2i)}{F(2i)} + \frac{F'(-2i)}{F(-2i)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,\frac{V'(-\frac{1}{2})}{V(-\frac{1}{2})}.$$

Pour revenir de l'équation (56) à l'équation en $t$, il faut chasser l'irrationnelle $s$. On a donc identiquement

$$(58) \qquad F(s)F(-s) = \frac{\lambda}{t^3}V(t),$$

où $\lambda$ est un facteur constant, $s$ et $t$ étant deux variables liées par la relation

$$s^2 = \frac{2t-3}{t}.$$

En différentiant, je conclus

$$\frac{(2-s^2)^2}{6s}\left[\frac{F'(s)}{F(s)} - \frac{F'(-s)}{F(-s)}\right] = \frac{V'(t)}{V(t)} - \frac{3}{t},$$

puis, en prenant $s = 2i$,

$$\frac{F'(2i)}{F(2i)} - \frac{F'(-2i)}{F(-2i)} = \frac{i}{3}\,\frac{V'(\frac{1}{2})}{V(\frac{1}{2})} - 2i.$$

La connaissance des deux quantités $\frac{F'(\pm 2i)}{F(\pm 2i)}$ procure les deux équations du premier degré dont j'ai parlé. Me contentant d'avoir indiqué ce moyen, je vais en employer un autre, encore fondé sur la relation (58). Substituant dans $V(t)$ l'expression $t = \frac{3}{2-s^2}$, on a l'équation

$$s^6 - 2.3s^4 - 2^3.157s^2 + 2^5.79 - 2.7i\sqrt{23}(7s^4 - 2^2.7s^2 - 2^4.3) = 0,$$

dont le premier membre doit reproduire

$$-F(s)F(-s) = s^2(s^2+M)^2 - \left[Ns^2 + 2^2(7 - 3i\sqrt{23})\right]^2.$$

De là deux équations

$$(59)\qquad 2M - N^2 = -2(3 + 7^2 i\sqrt{23}),$$

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} M^2 - 2^3(7 - 3i\sqrt{23})N &= -2^3(157 - 7^2 i\sqrt{23}) \\ &= -2^2(7 - 3i\sqrt{23})(5.7 + i\sqrt{23}). \end{aligned}\right.$$

Entre cette dernière et l'équation (57) éliminant N, j'obtiens

$$M^2 + 8M = 2^3.3i\sqrt{23}(7 - 3i\sqrt{23}),$$

équation du second degré donnant les deux racines

$$M = -4 \pm 2(3.7 + i\sqrt{23}).$$

Une seule convient, que l'on distingue immédiatement comme devant, par l'équation (59), fournir, pour $N^2$, un carré parfait. On trouve ainsi

$$M = 2(19 + i\sqrt{23}), \qquad N = 17 + 3i\sqrt{23},$$

$$F(s) = s^3 - 17s^2 + 2.19s - 2^2.7 - i\sqrt{23}(3s^2 - 2s - 2^2.3$$

tel est le premier membre de l'équation cherchée.

Si, de même, on pose

$$\sqrt{\frac{2t+3}{t}} = s', \qquad \sqrt{\frac{2t_1+3}{t_1}} = s'_1, \qquad \sqrt{\frac{2t_2+3}{t_2}} = s'_2,$$

ces quantités sont les racines de l'équation $\Phi(s') = 0$, dont le premier membre est conjugué du précédent,

$$\Phi(s') = s'^3 - 17s'^2 + 2.19s' - 2^2.7 + i\sqrt{23}(3s'^2 - 2s' - 2^2.3).$$

Par là sont exprimés, comme on le voulait, $s$ et $s'$ en fonction de $t$. On a, en effet,

$$(61) \qquad s = \frac{Ns^2 + 2^2(7 - 3i\sqrt{23})}{s^2 + M},$$

égalité où l'on mettra, au second membre, $\frac{2t-3}{t}$ à la place de $s^2$. Pour $s'$, on prendra la relation analogue où l'on mettra $\frac{2t+3}{t}$ à la place de $s'^2$.

C'est en vue d'effectuer complètement les trois dernières transformations du second ordre que j'ai calculé F et $\Phi$. J'arrive à ces transformations.

### Les trois fonctions de l'ordre proprement primitif.

Aux périodes $2\Omega$, $2\Omega'$, définies par les relations (50),

$$7\omega = 2\Omega, \qquad 7\omega' = \Omega' - \Omega,$$

correspond une nouvelle fonction $Pu$, dont je dénote les éléments par des lettres majuscules. La transformation conduit, par le même calcul que plus haut, à la relation suivante, analogue de l'égalité (51),

$$\pm 2\frac{\sqrt{(e-e')(e-e'')}}{e} = \frac{E-E'}{E''}.$$

Le premier membre est, en valeur absolue, égal à

$$\sqrt{(3-2t)(3+2t)},$$

quantité réelle, puisque $t$ est purement imaginaire. D'après la nature de la fonction P, dont les invariants doivent être réels et le discriminant positif, les trois quantités E, E″, E′ doivent être réelles, rangées ainsi en ordre décroissant; de plus, le rapport $\Omega' : i\Omega$ étant supérieur à l'unité, E″ est négatif, et l'on aura

$$(62) \qquad \frac{E-E'}{E''} = \sqrt{9-4t^2} = itss';$$

le signe est ainsi choisi, parce que $s$ et $s'$ sont des quantités conjuguées, comme il résulte du calcul précédent, et que $it$ est réel et négatif.

Ayant obtenu $s$ et $s'$ en fonction rationnelle de $t$, nous avons donc, sous la même forme, les éléments nouveaux. Mais il faut réduire leur expression à la forme la plus simple, et, pour ce but, je vais exprimer $tss'$ par une fraction du premier degré. Soit

$$tss' = \frac{H}{G}$$

la fraction cherchée. Ayant mis la relation (61) et son analogue sous la forme

$$s = \frac{S}{T}, \qquad s' = \frac{S'}{T'},$$

on conclura que l'égalité

$$\frac{tSS'}{TT'} - \frac{H}{G} = 0$$

a lieu en vertu de l'équation $V = 0$. Le premier membre est donc divisible par V, et doit avoir la forme $\frac{KV}{TT'G}$. De là,

$$\frac{tSS'G - KV}{TT'} = H, \tag{63}$$

ce qui doit être une identité. Il s'agit donc de trouver les deux polynômes du premier degré G et K par la condition que le numérateur soit seulement du troisième degré au lieu du quatrième, qu'il soit en outre divisible par TT'. Le quotient, du premier degré, sera le binôme H.

En substituant dans l'égalité (61), on a d'abord

$$\begin{aligned}
S &= t[Ns^2 + 2^2(7 - 3i\sqrt{23})] = 2.31t - 3.17 - 3(2t+3)i\sqrt{23},\\
T &= t(s^2 + M) = 2^3.5t - 3 + 2it\sqrt{23},\\
S' &= 2.31t + 3.17 - 3(2t-3)i\sqrt{23},\\
T' &= 2^3.5t + 3 - 2it\sqrt{23},\\
V &= (2t-3)T^2 - tS^2 = -(2t+3)T'^2 + tS'^2.
\end{aligned}$$

Pour $T = 0$, on a ainsi

$$V = -tS^2;$$

on doit donc avoir

$$(64) \qquad S'G + KS \equiv 0 \qquad (\text{div. } T)$$

et, semblablement,

$$(65) \qquad SG - KS' \equiv 0 \qquad (\text{div. } T').$$

Au moyen des égalités

$$T + T' = 2^4.5t,$$
$$(2^2.5 - i\sqrt{23})\,T - (2^2.5 + i\sqrt{23})\,T' = -2^5.3.5,$$

on peut exprimer S et S', sous forme linéaire et homogène, en T et T'; on trouve ainsi

$$\begin{aligned} S &= \quad (11 + i\sqrt{23})\,T - 2(3 + i\sqrt{23})T', \\ S' &= -2(\,3 - i\sqrt{23})\,T + (11 - i\sqrt{23})T'. \end{aligned}$$

Par là, les deux conditions (64) et (65) deviennent

$$\begin{aligned} &(11 - i\sqrt{23})\,G - 2(3 + i\sqrt{23})\,K \equiv 0 \qquad (\text{div. } T), \\ &(11 + i\sqrt{23})\,G + 2(3 - i\sqrt{23})\,K \equiv 0 \qquad (\text{div. } T'). \end{aligned}$$

Si donc on pose

$$G = \gamma T + \gamma' T', \qquad K = kT + k'T',$$

on obtient les conditions

$$\begin{aligned} &(11 - i\sqrt{23})\,\gamma' - 2(3 + i\sqrt{23})k' = 0, \\ &(11 + i\sqrt{23})\,\gamma + 2(3 - i\sqrt{23})k = 0. \end{aligned}$$

En exprimant enfin que le terme du quatrième degré disparaît dans le numérateur (63), on trouve la dernière équation

$$\begin{aligned}&2^3.73[(20+i\sqrt{23})\gamma+(20-i\sqrt{23})\gamma']\\&\quad=7.19i\sqrt{23}[(20+i\sqrt{23})k+(20-i\sqrt{23})k'].\end{aligned}$$

Les équations précédentes fournissent

$$2^5k'=(5-7i\sqrt{23})\gamma',\qquad 2^5k=-(5+7i\sqrt{23})\gamma.$$

Substituant dans la dernière et prenant arbitrairement un coefficient de proportionnalité, je trouve

$$\begin{aligned}&\gamma=\tfrac{1}{2}(3.11+5i\sqrt{23}),\qquad &&\gamma'=\tfrac{1}{2}(-3.11+5i\sqrt{23}),\\&k=2(5-2i\sqrt{23}),&&k'=2(5+2i\sqrt{23}),\end{aligned}$$

d'où résulte

$$\begin{aligned}G&=-3.^211+2.7.19it\sqrt{23},\\K&=2^3(2.73t+3i\sqrt{23}).\end{aligned}$$

Il reste à trouver H. A cet effet, je prends $t=\frac{3}{2}$, ce qui donne

$$V=-tS^2,$$

et, par conséquent,

$$TT'H=\tfrac{3}{2}S(S'G+SK).$$

Pour $t=\frac{3}{2}$, nous avons

$$\begin{aligned}&S=2.3(7-3i\sqrt{23}),\qquad S'=2^4.3^2,\\&K=2^3.3(73+i\sqrt{23}),\\&G=3(-3.11+7.19i\sqrt{23}),\\&S'G+SK=2^4.3^2(481+11.17i\sqrt{23}).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$T = 3(19 + i\sqrt{23}) = \tfrac{3}{2}(5 - i\sqrt{23})(3 + i\sqrt{23}),$$
$$T' = 3(21 - i\sqrt{23}) = \tfrac{3}{4}(5 - 3i\sqrt{23})(3 + i\sqrt{23}),$$
$$TT' = -\frac{3^2}{2}(11 + 5i\sqrt{23})(3 + i\sqrt{23})^2,$$
$$\tfrac{3}{2}S = 3^2(7 - 3i\sqrt{23}) = -\frac{3^2}{2}(3 + i\sqrt{23})^2.$$

Il vient donc

$$(11 + 5i\sqrt{23})H = 2^4.3^2(481 + 11.17i\sqrt{23})$$

ou finalement

$$H = 2^3.3^2(7.11 - i\sqrt{23}), \qquad \left(t = \frac{3}{2}\right).$$

Le changement du signe de $t$ et de $\sqrt{23}$ laisse inaltérés V et G, change K en $-$ K, échange T et $-$ T', ainsi que S et $-$ S'; ce changement a donc, pour effet, de reproduire H, changé de signe. On a donc aussi

$$H = -2^3.3^2(7.11 + i\sqrt{23}), \qquad \left(t = -\frac{3}{2}\right).$$

Par conséquent, pour $t$ quelconque,

$$H = 2^3.3(2.7.11t - 3i\sqrt{23}).$$

Comme vérification de ce calcul, prenons $t = 0$, ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} -KV &= 2^3.3^4 i\sqrt{23}, \\ TT'H &= 2^3.3^4 i\sqrt{23}, \end{aligned}\right\} \quad t = 0.$$

J'ai donc la formule cherchée, savoir

$$tss' = \frac{H}{G} = -\frac{2^3.3(2.7.11t - 3i\sqrt{23})}{3^2.11 - 2.7.19it\sqrt{23}}.$$

Mettant $t = \frac{9i}{2c}$, on la change en la suivante :

$$(64)\qquad tss' = \frac{2^3(c\sqrt{23} - 3.7.11)i}{11c + 7.19\sqrt{23}}.$$

Remplaçant enfin $c$ par son expression (46), j'en déduis, suivant (62),

$$(65)\qquad \frac{E - E'}{-8E''} = \frac{4 + (g+h)\sqrt{23}}{21\sqrt{23} + 11(g+h)}.$$

Prenant arbitrairement un coefficient de proportion, je poserai donc

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned} E &= 21\sqrt{23} + 32 + (8\sqrt{23} + 11)(g+h),\\ E' &= 21\sqrt{23} - 32 - (8\sqrt{23} - 11)(g+h),\\ E'' &= -42\sqrt{23} - 22(g+h).\end{aligned}\right.$$

Pour les deux autres fonctions $P_1$ et $P_2$, les formules seront analogues, $g+h$ étant remplacé par $\theta g + \theta^2 h$ ou $\theta^2 g + \theta h$. Par les égalités (50), il est manifeste que, dans ces formules, $E''$ est remplacé par $E''_1$ ou $E''_2$. Mais il reste à savoir dans quel ordre $E$ et $E'$ sont remplacés par $E_1$ et $E'_1$ ou $E_2$ et $E'_2$. Pour ce but, supposant, dans le second membre (65), $g+h$ remplacé par $\theta g + \theta^2 h$, multiplions les deux termes par le conjugué du dénominateur, ce qui donne

$$[4 + (\theta g + \theta^2 h)\sqrt{23}][21\sqrt{23} + 11(\theta^2 g + \theta h)].$$

La partie imaginaire de ce produit est

$$(21.23 - 4.11)(g-h)\frac{i\sqrt{3}}{2};$$

le coefficient de $i$ est positif. L'échange de $E - E'$ en $\pm(E_1 - E'_1)$ doit donc être fait de manière que dans

$$\mp \frac{E_1 - E''_1}{E'_1}$$

la partie imaginaire soit positive. En employant les séries $\mathfrak{S}$, on trouve, pour la partie principale,

$$\frac{E_1 - E''_1}{E'_1} = -\tfrac{3}{16}e^{-\frac{i\pi}{3}}e^{\frac{\pi\sqrt{23}}{3}}, \qquad \left(\frac{\Omega'_1}{\Omega_1} = \frac{1+i\sqrt{23}}{3}\right);$$

les autres termes sont sans influence sur le signe de la partie imaginaire : c'est le signe *plus*. C'est donc $E''_1$ qui remplace $E$. Quant à la fonction $P_2$, ses éléments sont conjugués des précédents. Ainsi, en passant aux fonctions $P_1$ ou $P_2$, on doit, dans les formules (66), remplacer $g + h$ par $\theta g + \theta^2 h$ ou par $\theta^2 g + \theta h$ et, en même temps, $E, E', E''$ par $E''_1, E_1, E'_1$ ou par $E''_2, E_2, E'_2$.

Ainsi est pleinement achevée la solution du problème proposé.

## Comparaison avec les résultats antérieurs.

Soit posé

$$(67) \qquad y = \frac{(e-e')(e-e'')}{(e'-e'')^2} = \frac{9-4t^2}{16t^2}.$$

Prenons $V(t)V(-t)$, puis remplaçons $t^2$ par son expression en $y$, savoir

$$t^2 = \frac{9}{4}\,\frac{1}{1+4y}.$$

Nous obtenons ainsi, pour $y$, l'équation

$$(4y+1)(y-79)^2 + 7^2.23(7y-3)^2 = 0,$$

qui, étant développée, se réduit à

$$\left(\frac{y}{16}\right)^3 + 853\left(\frac{y}{16}\right)^2 - 22\left(\frac{y}{16}\right) + 1 = 0.$$

C'est l'équation donnée, par le R. P. Joubert, dans les *Comptes rendus* de 1860 (1er semestre, p. 912). Sa résolution suffit, bien entendu, pour définir explicitement les fonctions cherchées, puisque l'invariant absolu est rationnel en $t^2$. D'une manière générale, pour toute fonction elliptique, on a

$$(68)\qquad \begin{cases} \rho^2 g_2 = 2^2.3(1+y)(1+4y), \\ \rho^3 g_3 = 2^2(y-2)(1+4y)^2, \\ \rho^6 \Delta = 2^4.3^6 y^2(1+4y)^3, \end{cases}$$

en désignant par $\rho$ un coefficient d'homogénéité, dont l'expression est

$$\rho = \frac{3\sqrt{1+4y}}{e'-e''} = \frac{9e}{(e'-e'')^2}.$$

Ce coefficient $\rho$ peut être pris *ad libitum;* aussi les invariants sont-ils définis par la seule quantité $y$, ou par $t^2$. Mais, pour avoir les quantités $e$, $e'$, $e''$, sans nouvelle irrationnelle, il faut connaître $t$.

Semblablement, à l'égard des trois fonctions répondant à l'ordre proprement primitif, la connaissance de $y$ suffit aussi pour définir les invariants. Effectivement, en prenant la transformation du second ordre qui fait passer de $p$ à P, ainsi que la transformation inverse, on a les deux relations

$$\pm 2\frac{\sqrt{(e-e')(e-e'')}}{e} = \frac{E-E'}{E''}, \qquad \pm 2\frac{\sqrt{(E''-E)(E''-E')}}{E''} = \frac{e'-e''}{e},$$

et, en posant encore

$$Y = \frac{(E''-E)(E''-E')}{(E-E')^2},$$

on en déduit la relation, bien connue,

$$16yY = 1.$$

Prenant maintenant les formules (68), y mettant des lettres majuscules, au lieu de $g_2$, $g_3$, $y$, ..., puis remplaçant Y par $\frac{1}{16y}$ et $y$ par son expression en fonction de $c^2$, on trouve

$$\lambda^2 G_2 = 3(4c^2 + 27),$$
$$\lambda^3 G_3 = c(8c^2 + 81),$$
$$\lambda^6 \Delta = 3^6(c^2 + 9);$$

le coefficient $\lambda$ a l'expression suivante :

$$\lambda = \frac{81 E''}{4c(E'' - E)(E'' - E')}.$$