JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

T.-J. STIELTJES

Sur le développement de l'expression $\left| R^2 - 2Rr\left[\cos u \cos u' \cos(x-x') + \sin u \sin u' \cos(y-y')\right] + r^2 \right|^{-1}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 5 (1889), p. 55-65.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1889_4_5__55_0>

Sur le développement de l'expression

$$\{R^2 - 2Rr[\cos u \cos u' \cos(x - x') + \sin u \sin u' \cos(y - y')] + r^2\}^{-1};$$

PAR M. T.-J. STIELTJES.

---

1. La théorie du potentiel a été étendue à un nombre quelconque de variables par Green. Dans le cas de quatre variables il faut considérer l'expression

$$(1) \qquad T = \frac{1}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2}$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_4^2} = 0.$$

Posons

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = r \cos u \cos x, & y_1 = R \cos u' \cos x', \\ x_2 = r \cos u \sin x, & y_2 = R \cos u' \sin x', \\ x_3 = r \sin u \cos y, & y_3 = R \sin u' \cos y', \\ x_4 = r \sin u \sin y, & y_4 = R \sin u' \sin y', \end{cases}$$

on aura

$$(4) \qquad T = \frac{1}{R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2}.$$

où

$$(5)\qquad \cos\varphi = \cos u \cos u' \cos(x - x') + \sin u \sin u' \cos(y - y').$$

En développant T suivant les puissances croissantes de r, il vient

$$(6)\qquad T = \sum_0^\infty V_n \frac{r^n}{R^{n+2}}.$$

Ici $V_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ est un polynôme du degré n en $\cos\varphi$, dont on trouve l'expression en écrivant d'abord

$$T = \frac{1}{R^2 - r(2R\cos\varphi - r)} = \sum_0^\infty \frac{r^n(2R\cos\varphi - r)^n}{R^{2n+2}},$$

et en cherchant ensuite le coefficient de r^n,

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} V_n &= \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} \\ &= (2\cos\varphi)^n - \frac{n-1}{1}(2\cos\varphi)^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}(2\cos\varphi)^{n-4} - \ldots . \end{aligned}\right.$$

En introduisant ici au lieu de $\cos\varphi$ sa valeur (5), V_n deviendra un polynôme du degré n en $\cos(x - x')$ et $\cos(y - y')$ qu'on pourra développer suivant les cosinus des multiples de $x - x'$ et $y - y'$. C'est ce développement que nous nous proposons d'obtenir.

2. Cherchons d'abord la transformée de l'équation différentielle (2) après l'introduction des nouvelles variables r, u, x, y.

Les relations (3) donnent facilement

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = dr^2 + r^2 du^2 + r^2\cos^2 u\, dx^2 + r^2 \sin^2 u\, dy^2$$

et de là on conclut, d'après un théorème bien connu de Jacobi,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \sin u \cos u \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(r \sin u \cos u \frac{\partial T}{\partial u}\right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial x}\left(r \operatorname{tang} u \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(r \cot u \frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} & r^2\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+3r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}\\ & \quad +2\cot 2u\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{1}{\cos^2 u}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{1}{\sin^2 u}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0.\end{aligned}\right.$$

En introduisant maintenant au lieu de T le développement (6), on obtient pour V_n la relation

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial^2 V_n}{\partial u^2}+2\cot 2u\frac{\partial V_n}{\partial u}\\ & \quad +\frac{1}{\cos^2 u}\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}+\frac{1}{\sin^2 u}\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}+n(n+2)V_n=0.\end{aligned}\right.$$

C'est cette équation différentielle linéaire qui permet d'obtenir facilement le développement cherché de V_n suivant les cosinus des multiples de $x-x'$ et de $y-y'$.

3. On reconnaît sans peine, par l'inspection des formules (5) et (7), que ce développement se compose d'une série de termes

$$C\cos i(x-x')\cos k(y-y'),$$

où i, k sont des entiers tels que $n-i-k$ est pair et non négatif. Ensuite on voit que le coefficient C est divisible par

$$(\cos u\cos u')^i(\sin u\sin u')^k$$

et que le quotient est un polynôme en $\sin^2 u$ et $\sin^2 u'$.

Nous posons

$$(10)\qquad V_n=\sum_i{}'\sum_k{}' 4R_{i,k}^n\cos i(x-x')\cos k(y-y'),$$

avec cette convention que, lorsque l'un des indices i, k est égal à zéro, il faudra remplacer le coefficient 4 par 2, et, lorsque $i=k=0$ (ce qui n'arrive que lorsque n est pair), il faudra remplacer 4 par 1.

En introduisant le développement (10) dans l'équation différentielle (9), on obtient pour $R^n_{i,k}$ l'équation différentielle

$$(11)\quad \frac{d^2R^n_{i,k}}{du^2}+2\cot 2u\,\frac{dR^n_{i,k}}{du}+\left[n(n+2)-\frac{i^2}{\cos^2 u}-\frac{k^2}{\sin^2 u}\right]R^n_{i,k}=0.$$

En posant maintenant

$$R^n_{i,k}=\cos^i u\sin^k u\,S^n_{i,k},$$

$S^n_{i,k}$ sera un polynôme entier en

$$t=\sin^2 u$$

et l'équation (11) nous donne

$$(12)\quad t(1-t)\frac{d^2S^n_{i,k}}{dt^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)t]\frac{dS^n_{i,k}}{dt}-\alpha\beta S^n_{i,k}=0,$$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}\alpha&=\frac{i+k-n}{2},\\ \beta&=\frac{i+k+n+2}{2},\\ \gamma&=k+1.\end{aligned}\right.$$

On en conclut

$$S^n_{i,k}=C\mathfrak{F}(\alpha,\beta,\gamma,\sin^2 u);$$

α en effet est un nombre entier négatif, en sorte que la série hypergéométrique se réduit à un polynôme.

D'après cela, on doit avoir

$$R^n_{i,k}=C\cos^i u\sin^k u\,\mathfrak{F}(\alpha,\beta,\gamma,\sin^2 u),$$

C étant indépendant de u. Mais il est clair que le coefficient $R^n_{i,k}$ est symétrique en u et u'; donc

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}R^n_{i,k}=\;&c^n_{i,k}(\cos u\cos u')^i(\sin u\sin u')^k\\ &\times\mathfrak{F}(\alpha,\beta,\gamma,\sin^2 u)\,\mathfrak{F}(\alpha,\beta,\gamma,\sin^2 u'),\end{aligned}\right.$$

$c^n_{i,k}$ étant un coefficient numérique qu'il reste à déterminer.

4. Pour cela, posons $u = u'$; on aura

$$\cos\varphi = (1-t)\cos(x-x') + t\cos(y-y'),$$
$$R_{i,k}^n = c_{i,k}^n (1-t)^i t^k \mathfrak{F}^2(\alpha, \beta, \gamma, t),$$

et, à cause de $i + k - 2\alpha = n$, le coefficient de t^n dans $R_{i,k}^n$ est

$$(-1)^i c_{i,k}^n \left[\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta-\alpha-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma-\alpha-1)}\right]^2.$$

Mais, d'autre part, d'après la formule (7), le coefficient de t^n dans V_n est

$$2^n[\cos(y-y') - \cos(x-x')]^n.$$

En posant donc pour simplifier $x' = \pi$, $y' = 0$, on doit avoir

$$(15)\quad \begin{cases} 2^n(\cos x + \cos y)^n \\ \quad = \sum_i{}' \sum_k{}' 4 c_{i,k}^n \left[\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta-\alpha-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma-\alpha-1)}\right]^2 \cos ix \cos ky. \end{cases}$$

Mais le développement de

$$2^n(\cos x + \cos y)^n$$

se trouve directement sans difficulté, et le résultat est

$$(16)\quad \begin{cases} 2^n(\cos x + \cos y)^n \\ = \sum_i{}' \sum_k{}' 4 \dfrac{\Pi(n)\Pi(n)}{\Pi\left(\frac{n-i-k}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+i+k}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-i+k}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+i-k}{2}\right)} \cos ix \cos ky. \end{cases}$$

La comparaison de ces formules (15) et (16) donne la valeur cherchée de $c_{i,k}^n$

$$(17)\qquad c_{i,k}^n = \frac{\Pi\left(\frac{n-i+k}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+i+k}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-i-k}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+i-k}{2}\right)\Pi(k)\Pi(k)}.$$

5. Voici maintenant comment on obtient le développement (16).

On a d'abord

$$2^n(\cos x + \cos y)^n = \sum_r (n)_r (2\cos x)^{n-r}(2\cos y)^r,$$

en posant

$$(n)_r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1.2\dots r} = \frac{\Pi(n)}{\Pi(r)\,\Pi(n-r)},$$

et comme on a, d'autre part,

$$(2\cos x)^n = \sum_r{}' 2(n)_{\frac{n-r}{2}} \cos r\varphi,$$

il vient

$$2^n(\cos x + \cos y)^n = \sum_r \sum_i{}' \sum_k{}' 4(n)_r(n-r)_{\frac{n-r-i}{2}}(r)_{\frac{r-k}{2}} \cos ix \cos ky,$$

et, en écrivant

$$2^n(\cos x + \cos y)^n = \sum_i{}' \sum_k{}' 4e^n_{i,k} \cos ix \cos ky,$$

on aura

$$e^n_{i,k} = \sum_r (n)_r(n-r)_{\frac{n-r-i}{2}}(r)_{\frac{r-k}{2}},$$

où

$$r = k,\quad k+2,\quad k+4,\quad \dots,\quad n-i.$$

Soit $\frac{n-i-k}{2} = m$, $\frac{r-k}{2} = s$; l'expression précédente devient

$$e^n_{i,k} = \sum_0^m (n)_{k+2s}(n-k-2s)_{m-s}(k+2s)_s.$$

Mais on voit facilement que

$$\begin{aligned}(n)_{k+2s}(n-k-2s)_{m-s}(k+2s)_s &= (n)_m(m)_s(n-m)_{k+s}\\ &= (n)_m(m)_s(n-m)_{n-m-k-s},\end{aligned}$$

donc

$$e^n_{i,k} = (n)_m\,|(m)_0(n-m)_{n-m-k} + (m)_1(n-m)_{n-m-k-1} + \dots|$$

où

$$c''_{i,k} = (n)_m (n)_{n-m-k},$$

ce qui fournit le développement (16).

On voit que $c''_{i,k}$ est le produit de deux coefficients binomiaux, il en est de même de

$$c''_{i,k} = (n-m)_k (n-m-i)_k.$$

6. Voici donc le résultat de cette analyse :

$$\{R^2 - 2Rr[\cos u \cos u' \cos(x - x') + \sin u \sin u' \cos(y - y')] + r^2\}^{-1}$$
$$= \sum_0^\infty V_n \frac{r^n}{R^{n+2}},$$
$$V_n = \sum_i{}' \sum_k{}' 4 c''_{i,k} (\cos u \cos u')^i (\sin u \sin u')^k$$
$$\times \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u)\, \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u') \cos i(x - x') \cos k(y - y'),$$
$$\alpha = \frac{i+k-n}{2},$$
$$\beta = \frac{i+k+n+2}{2},$$
$$\gamma = k+1,$$
$$c''_{i,k} = \frac{\Pi\left(\frac{n-i+k}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+i+k}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-i-k}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+i-k}{2}\right)\Pi(k)\,\Pi(k)}.$$

M. Tisserand a obtenu d'abord, dans le tome LXXXIX des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* ce résultat, qu'en posant dans l'expression $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$,

$$\cos\varphi = \cos^2 u \cos x + \sin^2 u \cos y$$

et en développant suivant les cosinus des multiples de x et de y, le coefficient de $\cos ix \cos ky$ est égal à

$$4 c''_{i,k} \cos^{2i} u \sin^{2k} u\, \mathfrak{F}^2(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u).$$

Mais la découverte de ce beau résultat a été extrêmement laborieuse, comme on peut le voir par l'analyse compliquée par laquelle M. Tisserand a démontré son résultat.

En réfléchissant sur cette belle formule, nous avons observé d'abord qu'en posant

$$\cos\varphi = \cos u \cos u' \cos x + \sin u \sin u' \cos y,$$

les coefficients devenaient des produits de fonctions analogues en u et u', et nous avons trouvé ensuite dans l'extension de la théorie du potentiel au cas de quatre variables l'origine vraie de cette formule.

Nous observons qu'un point essentiel de notre analyse consiste dans ce changement de variables

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos u \cos x, \\ x_2 &= r \cos u \sin x, \\ x_3 &= r \sin u \cos y, \\ x_4 &= r \sin u \sin y. \end{aligned}$$

Green, Jacobi et d'autres géomètres qui se sont occupés de cette extension de la théorie du potentiel ont introduit d'une autre manière des variables analogues aux coordonnées polaires, en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos\theta_1, \\ x_2 &= r \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\ x_3 &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3, \\ x_4 &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3. \end{aligned}$$

7. Il est clair que notre analyse est parfaitement analogue à celle de Laplace concernant la fonction

$$X_n(\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos\varphi).$$

Il serait facile de poursuivre cette analogie et d'arriver, par exemple, au développement

$$\mathfrak{F}(u, x, y) = \sum_0^\infty Z^{(n)}, \tag{18}$$

où

$$(19)\quad Z^{(n)}=\frac{n+1}{2\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u_1\cos u_1\,du_1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{F}(u_1,x_1,y_1)\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}\,dx_1\,dy_1,$$

$$\cos\varphi=\cos u\cos u_1\cos(x-x_1)+\sin u\sin u_1\cos(y-y_1),$$

$\mathfrak{F}(u,x,y)$ étant une fonction arbitraire continue, donnée pour les valeurs

$$0<u<\frac{\pi}{2},$$
$$0<x<2\pi,$$
$$0<y<2\pi,$$

et telle que

$$\mathfrak{F}(0,x,y) \text{ est indépendant de } y,$$
$$\mathfrak{F}\left(\frac{\pi}{2},x,y\right) \text{ est indépendant de } x,$$
$$\mathfrak{F}(u,0,y)=\mathfrak{F}(u,2\pi,y),$$
$$\mathfrak{F}(u,x,0)=\mathfrak{F}(u,x,2\pi).$$

Mais, au lieu d'insister sur ce sujet, nous croyons être plus utile en appelant l'attention sur quelques autres formules.

8. Soit

$$V_n=\cos n\varphi,\qquad \cos\varphi=x.$$

V_n est un polynôme du degré n en x, et

$$(20)\qquad (1-x^2)\frac{d^2V_n}{dx^2}-x\frac{dV_n}{dx}+n^2V_n=0.$$

En posant

$$x=\cos^2u+\sin^2u\cos\psi,$$

on trouve

$$\frac{\partial V_n}{\partial u}=2\sin u\cos u(\cos\psi-1)\frac{dV_n}{dx},$$
$$\frac{\partial V_n}{\partial\psi}=-\sin^2u\sin\psi\frac{dV_n}{dx},$$
$$\frac{\partial^2V_n}{\partial u^2}=4\sin^2u\cos^2u(\cos\psi-1)^2\frac{d^2V_n}{dx^2}+2\cos2u(\cos\psi-1)\frac{dV_n}{dx},$$
$$\frac{\partial^2V_n}{\partial\psi^2}=\sin^4u\sin^2\psi\frac{d^2V_n}{du^2}-\sin^2u\cos\psi\frac{dV_n}{dx}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression

$$\alpha \frac{\partial^2 V_n}{du^2} + \beta \frac{d^2 V_n}{\partial \psi^2}$$

et en déterminant α et β par la condition que le coefficient de $\frac{d^2 V_n}{dx^2}$ soit égal à $1 - x^2$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \frac{\partial^2 V_n}{\partial u^2} &+ \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 V_n}{\partial \psi^2} \\ &= (1 - x^2) \frac{d^2 V_n}{dx^2} - \frac{1}{2} (\cos 2u + \cos\psi - \cos 2u \cos\psi) \frac{dV_n}{dx}\end{aligned}$$

et ensuite

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 V_n}{\partial \psi^2} + \frac{1}{4 \sin u \cos u} \frac{\partial V_n}{\partial x} = (1 - x^2) \frac{dV_n}{dx} - x \frac{dV}{dx};$$

donc, d'après (20),

$$(21) \qquad \frac{1}{4} \frac{\partial^2 V_n}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 V_n}{\partial \psi^2} + \frac{1}{2 \sin 2u} \frac{\partial V_n}{\partial u} + n^2 V_n = 0.$$

Mais il est clair qu'on peut développer V_n suivant les cosinus des multiples de ψ et en posant

$$(22) \qquad V_n = \sum_i{}' 2 R_i^n \cos i\psi, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

On trouve, en portant ce développement dans l'équation (21),

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 R_i^n}{\partial u^2} + \frac{1}{2 \sin 2u} \frac{\partial R_i^n}{\partial u} + \left(n^2 - \frac{i^2}{\sin^2 u}\right) R_i^n = 0$$

ou, en posant $R_i^n = (\sin u)^{2i} S_i^n$, $\sin^2 u = t$,

$$(23) \quad t(1 - t) \frac{d^2 S_i^n}{dt^2} + (2i + 1)(1 - t) \frac{dS_i^n}{dt} + (n^2 - i^2) S_i^n = 0;$$

d'où l'on conclut

$$S_i^n = C\mathfrak{F}(i-n, i+n, 2i+1, t)$$

et

$$R_i^n = C(\sin u)^{2i}\mathfrak{F}(i-n, i+n, 2i+1, \sin^2 u).$$

La détermination de la constante numérique C s'effectue encore sans difficulté en comparant les coefficients de t^n dans la formule (22). On obtient ainsi le résultat

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\varphi = \cos^2 u + \sin^2 u\cos\psi,\\ &\cos n\varphi = n\sum_i{}' 2\frac{\Pi(n+i-1)}{\Pi(n-i)\,\Pi(2i)}\sin^{2i}u\\ &\qquad\times\mathfrak{F}(i-n, i+n, 2i+1, \sin^2 u)\cos i\psi. \end{aligned}\right.$$

9. On doit à Hansen un résultat analogue qu'il sera bon de rappeler ici

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &X_n(\cos^2 u\cos x + \sin^2 u\cos y)\\ &\quad = \sum_i{}'\sum_k{}' 4c_{i,k}^n\cos^{2i}u\sin^{2k}u\\ &\quad\times\mathfrak{F}(i+k-n, i+k+n+1, 2k+1, \sin^2 u)\cos ix\cos ky. \end{aligned}\right.$$

L'analyse de Hansen est très compliquée, mais M. Tisserand a fait voir (*Comptes rendus*, t. XCVII, p. 815) qu'on peut obtenir cette formule d'une manière analogue à celle qui vient de nous donner le résultat (24).

Mais, quoiqu'on parvienne ainsi d'une manière élégante à établir ces formules (24), (25), il nous semble pourtant que la véritable origine analytique de ces formules et des expressions

$$\cos^2 u + \sin^2 u\cos\psi,$$
$$\cos^2 u\cos x + \sin^2 u\cos y$$

reste à trouver. Est-il possible d'arriver à ces résultats par une théorie analogue à celle du potentiel? C'est là une question que nous avons cru utile de poser au moins.