JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

T.-J. STIELTJES

Sur le développement de $\log \Gamma(a)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 5 (1889), p. 425-444.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1889_4_5__425_0>

Sur le développement de $\log\Gamma(a)$;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

Le but principal de ce travail est de donner une nouvelle déduction de la formule (formule de Stirling)

$$\begin{aligned}\log\Gamma(a) = (a-\tfrac{1}{2})\log a - a + \tfrac{1}{2}\log(2\pi)\\ + \frac{B_1}{1.2a} - \frac{B_2}{3.4a^3} + \frac{B_3}{5.6a^5} - \ldots\end{aligned}$$

et de faire ressortir que le second membre représente asymptotiquement la valeur de $\log\Gamma(a)$ (dans un sens que nous préciserons plus loin), même dans le cas où la valeur de a est imaginaire, la partie réelle de a étant négative.

Les intégrales définies que l'on a jusqu'ici introduites dans cette théorie présentent toutes cette particularité qu'elles ne sont valables qu'en supposant la partie réelle de a positive et ne conviennent donc pas à notre but.

1. Il n'entre pas dans nos intentions de reprendre toute la théorie de la fonction Γ; mais, pour mieux caractériser notre point de vue, il semble convenable de donner une déduction rapide de toutes les formules dont nous aurons besoin.

Nous adopterons comme définition cette formule

$$(1)\qquad \Gamma(a) = \lim \frac{1.2\ldots(n-1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}\,n^a \qquad (n=\infty);$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \tag{2}$$

et

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(n) = 1.2.3\ldots(n-1).$$

Par conséquent, la formule (1) peut s'écrire

$$\Gamma(a) = \lim \frac{\Gamma(n)\Gamma(a)}{\Gamma(a+n)} n^a \qquad (n = \infty),$$

donc

$$\lim \frac{\Gamma(n+a)}{n^a \Gamma(n)} = 1 \qquad (n = \infty). \tag{3}$$

Une autre propriété qui découle immédiatement de la définition adoptée est celle-ci

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}. \tag{4}$$

Des formules (2) et (4) on déduit encore

$$\Gamma(a)\Gamma(-a) = \frac{-\pi}{a\sin(\pi a)},$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+a)\Gamma(\tfrac{1}{2}-a) = \frac{\pi}{\cos(\pi a)}.$$

Remplaçons ici a par ui, u étant réel; on en conclura

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{mod}\Gamma(ui) &= \sqrt{\frac{2\pi}{u(e^{\pi u} - e^{-\pi u})}}, \\ \operatorname{mod}\Gamma(\tfrac{1}{2}+ui) &= \sqrt{\frac{2\pi}{e^{\pi u} + e^{-\pi u}}}. \end{aligned} \right.$$

2. Nous avons à considérer maintenant la fonction $\log\Gamma(a)$. C'est là une fonction qui n'est pas uniforme comme l'était $\Gamma(a)$. Mais il suffira de considérer une branche particulière de $\log\Gamma(a)$, et, pour la préciser, nous supposerons d'abord que $\log\Gamma(a)$ est réel lorsque a est réel et positif. Ensuite nous limiterons la marche de la variable par la condition qu'elle ne traversera jamais la partie négative de l'axe des abscisses : nous avons ainsi une coupure de o à $-\infty$. De cette façon, $\log\Gamma(a)$ a une valeur unique et bien déterminée dans tout le plan, à l'exception des points de la coupure.

Pour ces points particuliers, $\log\Gamma(a)$ a deux valeurs selon que l'on arrive à un tel point par un chemin tracé dans la moitié supérieure ou inférieure du plan. L'axe des abscisses divise le plan en deux parties : nous désignons ici par moitié supérieure du plan cette partie où se trouve le point $+i$. La notation

$$\log\overset{+}{\Gamma}(a), \quad \log\overset{-}{\Gamma}(a)$$

servira à distinguer les deux valeurs de $\log\Gamma(a)$ aux bords de la coupure. Il est clair que la fonction $\log\Gamma(a)$, telle que nous venons de la définir, prend des valeurs conjuguées pour deux valeurs de a qui sont conjuguées. Par conséquent, la différence

$$\log\overset{+}{\Gamma}(a) - \log\overset{-}{\Gamma}(a)$$

sera purement imaginaire. Il est facile d'obtenir cette différence. En supposant

$$a = -n + \xi \qquad (0 < \xi < 1),$$

n étant entier et positif, la définition de $\Gamma(a)$ permet de conclure immédiatement

$$(6) \qquad \log\overset{+}{\Gamma}(a) - \log\overset{-}{\Gamma}(a) = -2\pi i \times n.$$

3. Considérons de même la fonction $\log a$ en limitant la marche de la variable comme dans le cas de $\log\Gamma(a)$: on a

$$\log\overset{+}{a} - \log\overset{-}{a} = +2\pi i,$$

donc

$$(7) \qquad (a - \tfrac{1}{2})\log\overset{+}{a} - (a - \tfrac{1}{2})\log\overset{-}{a} = -2\pi i[n + \tfrac{1}{2} - \xi].$$

Posons

$$\log \Gamma(a) - (a - \tfrac{1}{2}) \log a = f(a),$$

on aura

$$f(\overset{+}{a}) - f(\overset{-}{a}) = 2\pi i [\tfrac{1}{2} - \xi]. \tag{8}$$

On voit que cette différence est indépendante de n et se reproduit ainsi périodiquement le long de la coupure.

Définissons maintenant une fonction d'une variable réelle x ainsi

$$\left\{ \begin{aligned} P(x) &= \tfrac{1}{2} - x \qquad (0 < x < 1), \\ P(x+1) &= P(x), \end{aligned} \right. \tag{9}$$

et posons

$$J(a) = \int_0^\infty \frac{P(x)}{x+a}\, dx. \tag{10}$$

Nous définissons ainsi une fonction qui existe dans tout le plan, mais qui admet comme coupure la partie négative de l'axe des abscisses.

La différence des valeurs de $J(a)$ aux deux bords de la coupure s'obtient immédiatement à l'aide de la formule de M. Hermite (*Journal de Borchardt*, t. 91, p. 65)

$$J(\overset{+}{a}) - J(\overset{-}{a}) = 2\pi i [\tfrac{1}{2} - \xi]. \tag{11}$$

L'inspection des formules (8) et (11) conduit à considérer la différence $f(a) - J(a)$; posons donc

$$\varphi(a) = \log \Gamma(a) - (a - \tfrac{1}{2}) \log a - J(a); \tag{12}$$

on aura

$$\varphi(\overset{+}{a}) - \varphi(\overset{-}{a}) = 0,$$

c'est-à-dire que la fonction $\varphi(a)$ est uniforme dans le vrai sens du mot, sans limiter la marche de la variable. Il est facile à voir aussi que $\varphi(a)$ reste toujours finie et est, par conséquent, holomorphe dans tout le plan.

Mais il n'est pas nécessaire d'insister sur ce point, car nous allons voir qu'on obtient facilement l'expression explicite de cette fonction $\varphi(a)$.

4. Pour cela, il est nécessaire d'étudier d'abord la fonction $J(a)$. Si l'on écrit

$$J(a)=\int_0^1\frac{P(x)}{x+a}dx+\int_1^2\frac{P(x)}{x+a}dx+\int_2^3\frac{P(x)}{x+a}dx+\ldots,$$

on a, d'après la définition de $P(x)$,

$$J(a)=\sum_0^\infty\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-x}{x+a+n}dx, \tag{13}$$

c'est-à-dire

$$J(a)=\sum_0^\infty\left[(a+n+\tfrac{1}{2})\log\left(\frac{a+n+1}{a+n}\right)-1\right], \tag{14}$$

et il est clair qu'on a

$$J(a)-J(a+1)=(a+\tfrac{1}{2})\log\left(\frac{a+1}{a}\right)-1, \tag{15}$$

L'équation (14) peut donc s'écrire

$$J(a)=\sum_0^\infty[J(a+n)-J(a+n+1)],$$

donc

$$\lim J(a+n)=0 \qquad (n=\infty). \tag{16}$$

5. Les formules (15) et (16) nous permettent de reconnaître sans difficulté la nature de la fonction $\varphi(a)$. En effet, nous calculons d'abord

$$\begin{aligned}&\varphi(a+1)-\varphi(a)\\&\quad=\log a-(a+\tfrac{1}{2})\log(a+1)+(a-\tfrac{1}{2})\log a-J(a+1)+J(a),\end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après (15),

$$\varphi(a+1)-\varphi(a)=-1.$$

Donc, si nous posons

$$\varphi(a) = -a + \psi(a),$$

c'est-à-dire

$$(17) \qquad \psi(a) = \log\Gamma(a) - (a - \tfrac{1}{2})\log a + a - J(a),$$

la fonction $\psi(a)$ admettra la période 1

$$\psi(a+1) = \psi(a).$$

Soit n un entier positif, on aura

$$\begin{aligned} &\psi(a+n) - \psi(n) \\ &\quad = \log\Gamma(a+n) - \log\Gamma(n) - (a+n-\tfrac{1}{2})\log(a+n) \\ &\qquad + (n-\tfrac{1}{2})\log n + a - J(a+n) + J(n). \end{aligned}$$

Faisons croître indéfiniment l'entier n, à cause de la périodicité de la fonction ψ, le premier membre ne varie pas et reste égal à

$$\psi(a) - \psi(0).$$

Pour avoir la limite du second membre, il suffit de remarquer que, d'après (3),

$$\lim[\log\Gamma(a+n) - \log\Gamma(n) - a\log n] = 0 \qquad (n = \infty)$$

et, d'après (16),

$$\lim J(a+n) = \lim J(n) = 0 \qquad (n = \infty).$$

On obtient ainsi

$$\psi(a) - \psi(0) = 0.$$

La fonction ψ se réduit donc à une constante que nous désignerons par C, et nous obtenons ainsi

$$(18) \qquad \log\Gamma(a) = (a - \tfrac{1}{2})\log a - a + C + J(a).$$

6. Il nous reste à obtenir la valeur de la constante C.

Remarquons d'abord que la valeur de C est évidemment réelle. Cela étant, remplaçons, dans la formule (18), a par ui, u étant réel et positif, et faisons croître indéfiniment u. C étant réel, on pourra négliger la partie purement imaginaire, et l'on aura

$$C = \text{lim. partie réelle de } [\log\Gamma(ui) - (ui - \tfrac{1}{2})\log(ui) - J(ui)].$$

Or nous verrons bientôt que

$$\lim J(ui) = 0, \tag{19}$$

et, d'autre part, on a

$$\text{p. r.}(ui - \tfrac{1}{2})\log(ui) = \text{p. r.}(ui - \tfrac{1}{2})\left(\log u + \frac{\pi}{2}i\right) = -\tfrac{1}{2}\log u - \frac{\pi u}{2}$$

et, d'après la formule (5),

$$\text{p. r.} \log\Gamma(ui) = \tfrac{1}{2}\log(2\pi) - \tfrac{1}{2}\log u - \tfrac{1}{2}\log(e^{\pi u} - e^{-\pi u});$$

donc

$$C = \lim \tfrac{1}{2}\log(2\pi) - \tfrac{1}{2}\log(1 - e^{-2\pi u}) = \tfrac{1}{2}\log(2\pi)$$

et, définitivement,

$$\log\Gamma(a) = (a - \tfrac{1}{2})\log a - a + \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + J(a). \tag{20}$$

C'est la formule que nous voulions obtenir et qui servira de point de départ à notre déduction du développement de $\log\Gamma(a)$. Elle ne se distingue de la formule qu'on emploie ordinairement dans ce but que par la forme sous laquelle s'est présentée la fonction $J(a)$.

En effet, la formule (10)

$$J(a) = \int_0^\infty \frac{P(x)}{x+a}\,dx$$

est valable dans tout le plan et admet seulement comme coupure la partie négative de l'axe des abscisses, tandis que les formules de Binet

$$J(a) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-ax}}{x}\,dx, \tag{21}$$

$$J(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\,dx}{a^2+x^2}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi x}}\right) \tag{22}$$

supposent essentiellement que la partie réelle de a soit positive.

Cette formule (10) est due à M. Bourguet qui l'a obtenue sous une forme légèrement différente dans un travail inédit, mais dont nous avons eu connaissance.

M. Bourguet obtient, en effet, une formule qui, après un changement de variable, peut s'écrire

$$\mathrm{J}(a)=\sum_1^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x+a}\,\frac{\sin 2n\pi x}{n\pi},$$

et, comme on a, pour toute valeur réelle de x,

$$(23)\qquad \mathrm{P}(x)=\sum_1^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n\pi},$$

la relation avec la formule (10) est évidente.

7. La formule (16) montre que $\mathrm{J}(a)$ tend vers zéro lorsque a croît indéfiniment d'une certaine manière.

Il est important de généraliser ce résultat. Pour cela, reprenons la formule (13)

$$\mathrm{J}(a)=\sum_0^{\infty}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-x}{a+n+x}\,dx,$$

et remarquons que

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-x}{a+n+x}\,dx&=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}-x}{a+n+x}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\frac{1}{2}-x}{a+n+x}\,dx\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}-x}{a+n+x}\,dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}-x}{a+n+1-x}\,dx;\end{aligned}$$

donc

$$(24)\qquad \mathrm{J}(a)=\sum_0^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{a+n+x}-\frac{1}{a+n+1-x}\right)dx$$

ou

$$(25)\qquad \mathrm{J}(a)=\sum_0^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2\left(\frac{1}{2}-x\right)^2dx}{(a+n+x)(a+n+1-x)}.$$

Supposons d'abord a réel et positif, $J(a)$ l'est aussi, et, à cause de

$$(a+n+x)(a+n+1-x)=(a+n)(a+n+1)+x(1-x),$$

on aura

$$J(a)<\sum_0^\infty\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2(\frac{1}{2}-x)^2\,dx}{(a+n)(a+n+1)}=\frac{1}{12}\sum_0^\infty\frac{1}{(a+n)(a+n+1)},$$

$$J(a)<\frac{1}{12a}.$$

Prenons maintenant, dans la formule (25),

$$a=Re^{i\theta},$$

R étant positif, et l'argument θ compris entre les limites $\pm\pi$. Il viendra évidemment

$$\operatorname{mod} J(Re^{i\theta})<\sum_0^\infty\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2(\frac{1}{2}-x)^2\,dx}{\operatorname{mod}(Re^{i\theta}+n+x)(Re^{i\theta}+n+1-x)}.$$

Nous remarquons ici que $n+x$ et $n+1-x$ sont réels et positifs. Or, b étant réel et positif, on a

$$\operatorname{mod}(Re^{i\theta}+b)=\sqrt{(R+b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta+(R-b)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta},$$
$$\operatorname{mod}(Re^{i\theta}+b)>(R+b)\cos\tfrac{1}{2}\theta,$$

donc

$$\operatorname{mod} J(Re^{i\theta})<\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}\sum_0^\infty\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2(\frac{1}{2}-x)^2\,dx}{(R+n+x)(R+n+1-x)},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{mod} J(Re^{i\theta})<\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}J(R)$$

et, à plus forte raison,

$$(26)\qquad \operatorname{mod} J(Re^{i\theta})<\frac{1}{12R\cos^2\frac{1}{2}\theta}.$$

On voit par là que, lorsque a croît indéfiniment, $J(a)$ tend, en général, vers zéro. Il ne pourrait y avoir exception que dans le cas où l'argument θ tendrait en même temps vers la limite $+\pi$ ou vers $-\pi$. La formule (19) que nous avons admise provisoirement est aussi une conséquence immédiate de la limitation que nous venons d'obtenir.

8. Considérons maintenant le développement de $J(a)$ suivant les puissances descendantes de a. Si, dans la formule (10), nous remplaçons $P(x)$ par son développement en série trigonométrique (23), on aura

$$J(a) = \int_0^\infty \left(\sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{2\pi} \right) \frac{dx}{x+a},$$

et, en intégrant par parties $2k-1$ ou $2k$ fois, on obtient

$$(27)\quad J(a) = \frac{B_1}{1.2a} - \frac{B_2}{3.4a^3} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k-1)(2k)a^{2k-1}} + J_k(a),$$

le terme complémentaire $J_k(a)$ se présentant sous l'une des deux formes suivantes :

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} J_k(a) &= (-1)^k.1.2\ldots(2k-1) \int_0^\infty \left[\sum_1^\infty \frac{\cos 2n\pi x}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}} \right] \frac{dx}{(x+a)^{2k}}, \\ J_k(a) &= (-1)^k.1.2\ldots(2k) \int_0^\infty \left[\sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{2^{2k}(n\pi)^{2k+1}} \right] \frac{dx}{(x+a)^{2k+1}}. \end{aligned} \right.$$

Les nombres de Bernoulli s'introduisent dans la formule (27), par suite de la relation

$$1.2\ldots(2k) \sum_1^\infty \frac{1}{n^{2k}} = 2^{2k-1}\pi^{2k}B_k.$$

Posons

$$P_k(x) = (-1)^k.1.2\ldots(2k) \sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{2^{2k}(n\pi)^{2k+1}},$$

on a évidemment

$$P_k(x+1) = P_k(x),$$

et la seconde des formules (28) peut s'écrire

$$(29) \qquad J_k(a) = \int_0^\infty \frac{P_k(x)}{(x+a)^{2k+1}}\,dx$$

ou encore

$$(30) \qquad J_k(a) = \int_0^1 P_k(x) \sum_0^\infty \frac{1}{(a+n+x)^{2k+1}}\,dx.$$

Si l'on remarque que

$$P_k(1-x) = -P_k(x),$$

on déduit facilement de (30) cette formule

$$(31) \quad J_k(a) = \int_0^{\frac{1}{2}} P_k(x) \sum_0^\infty \left[\frac{1}{(a+n+x)^{2k+1}} - \frac{1}{(a+n+1-x)^{2k+1}}\right] dx.$$

Ces diverses formules présentent la plus grande analogie avec les formules (10), (13), (24). Il faut remarquer, en effet, que, dans l'intervalle $0 < x < 1$, $P_k(x)$ est un polynôme du degré $2k+1$ en x dont l'expression est bien connue.

Il est clair aussi que

$$J_k(a) - J_k(a+1) = \int_0^1 \frac{P_k(x)}{(a+x)^{2k+1}}\,dx;$$

la valeur explicite de cette différence se déduit des formules (27) et (15).

9. Nous allons chercher maintenant une limite supérieure pour le module de $J_k(Re^{i\theta})$. La première des formules (28) conduit facilement au but : il suffit de remarquer que

$$1.2\ldots(2k-1)\sum_1^\infty \frac{\cos 2n\pi x}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}} \leq \frac{1.2\ldots(2k-1)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \sum_1^\infty \frac{1}{n^{2k}} = \frac{B_k}{2k}$$

et

$$\operatorname{mod}(x + Re^{i\theta}) > (x+R)\cos\tfrac{1}{2}\theta$$

pour obtenir immédiatement

$$(32) \qquad \operatorname{mod} J_k(Re^{i\theta}) < \frac{B_k}{(2k-1)2kR^{2k-1}}(\text{séc}\tfrac{1}{2}\theta)^{2k}.$$

Pour obtenir une autre limitation, nous déduisons de la seconde des formules (28) par une intégration par parties

$$(33) \quad J_k(a) = (-1)^k.1.2\ldots(2k+1)\int_0^\infty \sum_1^\infty \frac{1-\cos 2n\pi x}{2^{2k+1}(n\pi)^{2k+2}}\,\frac{dx}{(x+a)^{2k+2}};$$

d'où l'on conclut

$$\operatorname{mod} J_k(Re^{i\theta}) < \frac{1.2\ldots(2k+1)}{(\cos\frac{1}{2}\theta)^{2k+2}}\int_0^\infty \sum_1^\infty \frac{1-\cos 2n\pi x}{2^{2k+1}(n\pi)^{2k+2}}\,\frac{dx}{(x+R)^{2k+2}},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{mod} J_k(Re^{i\theta}) < \frac{1}{(\cos\frac{1}{2}\theta)^{2k+2}} \operatorname{mod} J_k(R).$$

Mais, lorsque a est réel et positif $= R$, la formule (33) montre que $J_k(R)$ a le signe de $(-1)^k$, et, à cause de

$$J_k(R) - J_{k+1}(R) = \frac{(-1)^k B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)}\,\frac{1}{R^{2k+1}},$$

$J_k(R)$ et $J_{k+1}(R)$ ayant signe contraire, il est clair que

$$\operatorname{mod} J_k(R) < \frac{B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)}\,\frac{1}{R^{2k+1}},$$

donc

$$(34) \qquad \operatorname{mod} J_k(Re^{i\theta}) < \frac{B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)}\,\frac{(\text{séc}\frac{1}{2}\theta)^{2k+2}}{R^{2k+1}}.$$

Pour $k=0$, on retrouve la limitation (26).

On voit que, R croissant indéfiniment tandis que l'argument θ reste constant, on a

$$\lim R^\alpha J_k(Re^{i\theta}) = 0,$$

tant que le nombre fixe α est inférieur à $2k+1$.

10. Soit $f(z)$ une fonction uniforme dans cette partie du plan où la partie réelle de z est $\geqq 0$. Supposons de plus que $f(z)$ n'ait ni pôles ni points singuliers essentiels dans ce domaine. Alors on aura, la partie réelle de a étant positive,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{a-z}\,dz, \tag{35}$$

l'intégrale étant prise sur un contour C se composant de la partie de l'axe imaginaire de $-\mathrm{R}i$ à $+\mathrm{R}i$ et du demi-cercle obtenu en faisant varier θ de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$ dans l'expression $z = \mathrm{R}e^{i\theta}$. On doit supposer ici que le rayon R soit assez grand pour que le point a soit compris à l'intérieur de C. Le point $-a$ étant évidemment en dehors de C, on a

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{a+z}\,dz \tag{36}$$

et, par suite,

$$f(a) = \frac{1}{\pi i}\int_{(C)} \frac{af(z)}{a^2-z^2}\,dz. \tag{37}$$

Supposons qu'on ait

$$\lim \int \operatorname{mod}\frac{f(z)}{z^2}\,dz = \lim \frac{1}{\mathrm{R}^2}\int \operatorname{mod} f(z)\,dz = 0, \qquad \mathrm{R} = \infty; \tag{38}$$

l'intégrale étant prise sur le demi-cercle de rayon R, la formule (37) donnera, en faisant croître indéfiniment R,

$$f(a) = \frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{af(z)}{a^2-z^2}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{af(ui)}{a^2+u^2}\,du,$$

la variable u parcourant les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$.

Dans le cas où la fonction $f(z)$ prend des valeurs conjuguées pour des valeurs conjuguées de la variable, cette formule se simplifie encore, et, en posant

$$f(ui) = \mathcal{A} + \mathcal{B}i, \tag{39}$$

on aura

$$f(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\mathfrak{A}}{a^2+u^2}\,du. \tag{40}$$

Les formules (35) et (36) donnent encore, par soustraction,

$$f(a) = \frac{1}{\pi i}\int_{(C)} \frac{z f(z)}{a^2-z^2}\,dz,$$

d'où l'on déduira par un raisonnement semblable

$$f(a) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\mathfrak{B}}{a^2+u^2}\,du; \tag{41}$$

mais ici il faudra remplacer la condition (38) par celle-ci,

$$\lim \int \operatorname{mod} \frac{f(z)}{z}\,dz = \lim \frac{1}{R}\int \operatorname{mod} f(z)\,dz = 0, \qquad R = \infty. \tag{42}$$

l'intégrale étant prise encore sur le demi-cercle de rayon R.

Les formules (40) et (41) montrent comment on peut calculer (sous certaines conditions) la valeur de

$$f(a) \quad \text{partie réelle de} \quad a > 0,$$

en connaissant seulement soit la partie réelle, soit la partie purement imaginaire de $f(ui)$. Elles présentent une certaine analogie avec la formule qui permet de calculer la valeur d'une fonction u de deux variables réelles satisfaisant à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

en tout point à l'intérieur d'un cercle, si l'on connaît la valeur de u sur le contour du cercle.

La fonction $f(z) = \log z$ satisfait à la condition (38) : toutefois elle devient infinie pour $z = 0$; mais, l'intégrale qui figure dans la formule (40) conservant un sens, il est facile de voir que cette formule reste applicable dans ce cas. Il en sera de même de la fonction $J(z)$, qui satisfait évidemment à la condition (38) d'après la limitation (26), la circonstance que, pour $z=0$, $J(z)$ devient infini comme $\log z$ n'empêchant pas la formule (40) de rester applicable. A l'aide des formules (20) et (5), on trouve, dans ce cas,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi u}}\right),$$

donc

$$J(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\,du}{a^2+u^2}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi u}}\right).$$

C'est la formule de Binet, que nous avons rappelée plus haut (22).

11. Pour montrer une autre application de la formule (40), nous considérons la fonction

$$\Gamma(z+b)\Gamma(z+1-b),$$

b étant une quantité réelle, et nous remarquons que le module de cette fonction pour $z=iu$ (u étant réel) s'exprime par les fonctions élémentaires. En effet, ce module est égal à

$$\sqrt{\Gamma(b+iu)\Gamma(b-iu)\Gamma(1-b+iu)\Gamma(1-b-iu)};$$

mais

$$\Gamma(b+iu)\Gamma(1-b-iu) = \frac{\pi}{\sin\pi(b+iu)},$$

$$\Gamma(b-iu)\Gamma(1-b+iu) = \frac{\pi}{\sin\pi(b-iu)},$$

d'où l'on conclut la valeur du module

$$\frac{2\pi}{\sqrt{e^{2\pi u}+e^{-2\pi u}-2\cos 2b\pi}}.$$

Cela étant, on s'assure facilement que l'on peut prendre dans la formule (40)

$$f(z) = \frac{1}{2}\log\frac{\Gamma(z+b)\Gamma(z+1-b)}{\Gamma(z)\Gamma(z)} - \frac{1}{2}\log z,$$

mais il est clair qu'il faudra supposer

$$0 \leqq b \leqq 1$$

pour que la fonction $f(z)$ reste finie tant que la partie réelle de z est positive. En effet, en introduisant la fonction $J(z)$, on voit que $f(z)$ tend vers zéro lorsque z croît indéfiniment (la partie réelle de z restant toujours $\geqq 0$), en sorte que la condition (38) se trouve satisfaite. Un calcul facile donne d'ailleurs

$$\mathcal{A} = -\tfrac{1}{4}\log\frac{e^{2\pi u}+e^{-2\pi u}-2\cos 2b\pi}{(e^{\pi u}-e^{-\pi u})^2},$$

donc

$$(43)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}\log\dfrac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(a)\Gamma(a)} \\ \quad = \tfrac{1}{2}\log a - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{a\,du}{a^2+u^2}\log\left[\frac{e^{2\pi u}+e^{-2\pi u}-2\cos 2b\pi}{(e^{\pi u}-e^{-\pi u})^2}\right] \end{cases}$$

$$(0 \leqq b \leqq 1).$$

12. Il est clair que la fonction

$$\log\frac{e^{2\pi u}+e^{-2\pi u}-2\cos 2b\pi}{(e^{\pi u}-e^{-\pi u})^2}$$

reste toujours positive; en écrivant donc

$$\frac{a}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} - \frac{u^2}{a^3} + \frac{u^4}{a^5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{u^{2k-2}}{a^{2k-1}} + (-1)^k\frac{u^{2k}}{a^{2k-1}(a^2+u^2)}$$

et supposant a réel et positif, on obtiendra pour l'intégrale qui figure au second membre de (43) un développement suivant les puissances descendantes de a, qui jouira exactement des mêmes propriétés que la série de Stirling.

Nous écrivons ce développement ainsi

$$(44)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}\log\dfrac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(a)\Gamma(a)} = \tfrac{1}{2}\log a + \dfrac{\varphi_1(b)}{a} + \dfrac{\varphi_3(b)}{3a^3} + \ldots \\ \qquad + \dfrac{\varphi_{2k-1}(b)}{(2k-1)a^{2k-1}} + R_k, \end{cases}$$

en posant

$$(45)\quad \frac{\varphi_{2n+1}(b)}{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi}\int_0^\infty u^{2n}\log\left[\frac{e^{2\pi u}+e^{-2\pi u}-2\cos 2b\pi}{(e^{\pi u}-e^{-\pi u})^2}\right]du.$$

La fonction $\varphi_{2n+1}(b)$ n'est autre chose que le polynôme de Bernoulli, qu'on peut définir, soit par le développement

$$\frac{e^{bx}-1}{e^x-1} = b + \varphi_1(b)x + \varphi_2(b)\frac{x^2}{1.2} + \ldots + \varphi_k(b)\frac{x^k}{1.2\ldots k} + \ldots,$$

soit par la condition que, pour b entier et positif,

$$\varphi_k(b) = 1^k + 2^k + \ldots + (b-1)^k.$$

La formule (45) montre clairement que $\varphi_{2n+1}(b)$ a constamment le signe de $(-1)^{n+1}$ dans l'intervalle $(0, 1)$, et est croissante dans l'intervalle $(0, \frac{1}{2})$, tandis que

$$\varphi_{2n+1}(1-b) = \varphi_{2n+1}(b).$$

C'est à M. Hermite qu'est due l'idée de faire dépendre les propriétés des polynômes de Bernoulli de leurs expressions par des intégrales définies. La formule qu'il a obtenue dans le tome 79 du *Journal de Borchardt*

$$\varphi_{2n+1}(b) = (-1)^{n+1}4\sin^2 b\pi\int_0^\infty\left(\frac{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\right)\frac{u^{2n+1}\,du}{e^{2\pi u}+e^{-2\pi u}-2\cos 2b\pi}$$

se déduit de (45) par une intégration par parties.

Nous remarquons encore que la série infinie

$$\frac{\varphi_1(b)}{a} + \frac{\varphi_3(b)}{3a^3} + \frac{\varphi_5(b)}{5a^5} + \ldots$$

est divergente. C'est là une conséquence de ce fait, facile à démontrer, qu'en posant

$$c_n = \int_0^\infty u^n f(u)\,du,$$

$f(u)$ étant une fonction qui reste toujours positive, on a

$$\frac{c_2}{c_1} < \frac{c_3}{c_2} < \ldots < \frac{c_{n+1}}{c_n} < \ldots,$$

$$\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = +\infty.$$

13. Considérons maintenant la fonction

$$\frac{\Gamma(z+b)}{\Gamma(z+1-b)},$$

b étant une quantité réelle; nous remarquons que l'on obtient facilement (à un multiple de π près) l'argument de cette fonction dans le cas où $z = ui$. En effet, soit

$$\frac{\Gamma(b+iu)}{\Gamma(1-b+iu)} = re^{\alpha i}, \qquad \frac{\Gamma(b-iu)}{\Gamma(1-b-iu)} = re^{-\alpha i},$$

donc

$$\frac{\Gamma(b+iu)\Gamma(1-b-iu)}{\Gamma(b-iu)\Gamma(1-b+iu)} = e^{2\alpha i},$$

c'est-à-dire

$$e^{2\alpha i} = \frac{\sin\pi(b-iu)}{\sin\pi(b+iu)}.$$

On voit que α est égal à l'argument de

$$\sin\pi(b-iu) = \sin b\pi\left(\frac{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}{2}\right) - i\cos b\pi\left(\frac{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}{2}\right).$$

Supposons $0 < b < 1$, en sorte que $\sin b\pi$ est positif, on aura

$$\alpha = k\pi - \operatorname{arctang}\left\{\frac{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}\cot b\pi\right\},$$

l'arc tang étant pris entre $\pm\frac{\pi}{2}$; l'entier k est nul si l'on veut que α s'annule en même temps que u.

Cela étant, posons

$$f(z) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\Gamma(z+b)}{\Gamma(z+1-b)} - (b-\tfrac{1}{2})\log z$$

dans la formule (41). On voit facilement que sur le demi-cercle de rayon R le module de $f(z)$ devient très petit et s'annule pour $R=\infty$: donc la condition (42) se trouve satisfaite. Un calcul facile donne ensuite

$$2\mathfrak{b} = (\tfrac{1}{2} - b)\pi - \operatorname{arctang}\left(\frac{e^{\pi u} - e^{-\pi u}}{e^{\pi u} + e^{-\pi u}}\cot b\pi\right),$$

ou,

$$\mathfrak{b} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctang}\left[\frac{e^{-2\pi u}\sin(2b\pi)}{1 - e^{-2\pi u}\cos(2b\pi)}\right],$$

si l'on remarque que

$$(\tfrac{1}{2} - b)\pi = \operatorname{arctang}(\cot b\pi),$$

et, par conséquent,

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\log\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1-b)} &= (b-\tfrac{1}{2})\log a \\ &\quad - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\,du}{a^2+u^2}\operatorname{arctang}\left[\frac{e^{-2\pi u}\sin(2b\pi)}{1-e^{-2\pi u}\cos(2b\pi)}\right] \\ &\qquad (0 \leqq b \leqq 1). \end{aligned}\right.$$

L'arc tang qui figure dans cette formule ayant un signe constant, qui est celui de $\sin(2b\pi)$, on voit que l'on peut déduire encore de cette formule un développement en série qui jouira des mêmes propriétés que la série de Stirling

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\log\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1-b)} &= (b-\tfrac{1}{2})\log a \\ &\quad - \frac{\varphi_2(b)}{2a^2} - \frac{\varphi_4(b)}{4a^4} - \ldots - \frac{\varphi_{2k}(b)}{2ka^{2k}} - R_k, \end{aligned}\right.$$

où

$$(48)\quad \frac{\varphi_{2n}(b)}{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\int_0^\infty u^{2n-1}\operatorname{arctang}\left[\frac{e^{-2\pi u}\sin(2b\pi)}{1-e^{-2\pi u}\cos(2b\pi)}\right]du.$$

Ici $\varphi_{2n}(b)$ est le polynôme de Bernoulli, tel que nous l'avons défini précédemment. On voit que

$$\varphi_{2n}(1-b) = -\varphi_{2n}(b),$$

et que dans l'intervalle $(0, \frac{1}{2})$, $\varphi_{2n}(b)$ a le signe de $(-1)^{n-1}$.

14. On peut se convaincre facilement que les fonctions φ qui figurent dans les formules (44), (45), (47) et (48) sont les polynômes de Bernoulli. En effet, la somme de (44) et (47) donne

$$(49) \qquad \log\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} = b\log a + \frac{\varphi_1(b)}{a} - \frac{\varphi_2(b)}{2a^2} + \frac{\varphi_3(b)}{3a^3} - \cdots$$

Or supposons b entier et positif; on a

$$\log\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} = \log a(a+1)\ldots(a+b-1) = b\log a + \sum_1^{b-1}\log\left(1+\frac{n}{a}\right)$$

ou

$$\log\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} = b\log a + \sum_1^{b-1}\left\{\frac{n}{a} - \frac{n^2}{2a^2} + \frac{n^3}{3a^3} - \cdots\right\},$$

et l'on a précisément

$$\sum_1^{b-1} n^k = \varphi_k(b).$$

On voit aussi, par ce raisonnement, que, lorsque b est entier et positif, le développement (49) est convergent sous la condition

$$\operatorname{mod} a > b-1.$$

De même, si b est entier et négatif, on verra que ce développement est convergent sous la condition

$$\operatorname{mod} a > -b.$$

Mais, pour toute autre valeur de b, la série (49) est toujours divergente.