JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. APPELL

Sur les invariants de quelques équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 5 (1889), p. 361-423.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1889_4_5__361_0>

Sur les invariants de quelques équations différentielles;

PAR M. P. APPELL.

Il peut arriver qu'une équation différentielle d'une certaine forme conserve la même forme pour des changements de fonction et de variable contenant des fonctions indéterminées. Il est alors de la plus grande importance de former les fonctions des coefficients de l'équation et de leurs dérivées qui restent inaltérées dans ces changements, c'est-à-dire les invariants de l'équation différentielle. La théorie des invariants des équations différentielles linéaires, commencée par MM. Laguerre (1) et Brioschi (2), a reçu son complet développement dans le Chapitre III du Mémoire de M. Halphen : *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* (3). M. Roger Liouville (4) a étudié à différents points de vue les invariants de l'équation

$$\frac{dy}{dx} + a_0 y^3 + 3a_1 y^2 + 3a_2 y + a_3 = 0.$$

(1) *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 116 et 224.

(2) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, p. 105.

(3) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XXVIII, n° 1.

(4) *Comptes rendus*, 6 septembre 1886, 12 septembre 1887; *American Journal of Mathematics*, t. X, p. 283.

Enfin, dans une Note récente, M. Painlevé [1] annonce un travail sur les invariants d'une certaine classe d'équations différentielles algébriques.

En ce qui concerne l'idée générale d'invariant et le fait de l'existence des invariants, on pourra consulter l'Ouvrage de M. Sophus Lie, *Theorie der Transformations Gruppen*, une Lettre de M. Halphen à M. Sylvester [2] et une Note de M. Goursat [3].

Nous nous proposons, dans le présent travail, l'étude des invariants et des cas d'intégrabilité :

1° Des équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p} \qquad (p < n),$$

qui conservent la même forme quand on choisit une nouvelle fonction inconnue η et une nouvelle variable indépendante ξ liées à y et x par les relations

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x);$$

2° Des équations différentielles algébriques et homogènes par rapport à la fonction inconnue y et à ses dérivées, équations qui conservent la même forme quand on fait

$$y = \eta u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

Parmi les équations de la première catégorie nous étudierons spécialement le cas simple $n = 3$, $p = 0$, déjà considéré par M. Roger Liouville; et, parmi celles de la deuxième, nous traiterons presque exclusivement les équations homogènes du second ordre et du second degré. Quelques-uns des résultats contenus dans ce Mémoire se trouvent indiqués dans deux Notes que nous avons eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences dans les séances des 20 juin et 4 juillet 1887.

---

(1) *Comptes rendus*, 5 novembre 1888.
(2) *American Journal of Mathematics*, t. IX, p. 137.
(3) *Comptes rendus*, 3 décembre 1888.

I.

1. Imaginons une équation différentielle du premier ordre algébrique en y et $\frac{dy}{dx}$, et ne contenant $\frac{dy}{dx}$ qu'au premier degré. Cette équation, résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, sera de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_p y^p},$$

les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p$ étant des fonctions de la variable indépendante x.

On peut toujours supposer que le degré du numérateur *surpasse* celui du dénominateur; en effet, si l'on avait

$$n \leq p,$$

on ferait un changement de fonction de la forme

$$y = \frac{1}{z} + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction de x, telle que le polynôme

$$a_0 + a_1 \varphi + a_2 \varphi^2 + \ldots + a_n \varphi^n$$

ne soit pas identiquement nul; l'équation différentielle prendrait alors la forme

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^{2+p-n}(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n)}{e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \ldots + e_p z^p}$$

avec $c_n \gtrless 0$. Cette dernière équation est de nouveau de la forme supposée, mais le degré du numérateur par rapport à la fonction z surpasse d'au moins *deux unités* celui du dénominateur; la différence entre le degré du numérateur et celui du dénominateur pourrait être supérieure à 2, si les coefficients $e_p, e_{p-1}, e_{p-2}, \ldots, e_{p-q}$ $(q < p)$ étaient tous nuls.

En revenant à l'équation

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_p y^p},$$

nous pouvons donc toujours supposer, en vertu de la transformation précédente,

$$p < n - 1.$$

D'après cela, l'équation (1) possède l'importante propriété de conserver la même forme, n et p restant les mêmes, quand on prend une nouvelle variable indépendante ξ, et une nouvelle fonction inconnue η liées à x et y par les relations

$$(2)\qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x), \qquad y = \eta u(x) + v(x),$$

$\mu(x)$, $u(x)$, $v(x)$ étant des fonctions indéterminées de x. Soit

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \eta + \alpha_2 \eta^2 + \ldots + \alpha_n \eta^n}{\beta_0 + \beta_1 \eta + \beta_2 \eta^2 + \ldots + \beta_p \eta^p}$$

la nouvelle équation. En adoptant la définition de M. Halphen [1], on appellera *invariant absolu* de l'équation (1) *une fonction des coefficients a_i, b_k et de leurs dérivées par rapport à x, telle que la même fonction composée avec les coefficients α_i, β_k et leurs dérivées par rapport à ξ lui soit toujours égale quelles que soient les fonctions $\mu(x)$, $u(x)$ et $v(x)$.* Un tel invariant étant désigné par

$$\psi\left(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots, \frac{da_0}{dx}, \frac{db_0}{dx}, \ldots\right),$$

on aura identiquement

$$\psi\left(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots, \frac{da_0}{dx}, \frac{db_0}{dx}, \ldots\right)$$
$$= \psi\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots, \frac{d\alpha_0}{d\xi}, \frac{d\beta_0}{d\xi}, \ldots\right),$$

---

[1] *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables*, Chap. III.

si l'on remplace $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots$ par leurs expressions en a_0, $a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots, \mu(x)$, $u(x)$ et $v(x)$.

On appellera *invariant relatif* ou simplement *invariant* une fonction des coefficients a_i, b_k et de leurs dérivées par rapport à x, telle que la même fonction formée avec les coefficients α_i, β_k, et leurs dérivées par rapport à ξ, lui soit égale *à un facteur près*, ce facteur dépendant uniquement des fonctions $\mu(x)$, $u(x)$ et $v(x)$. Pour un tel invariant on aura donc identiquement

$$\begin{aligned}\psi\left(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots, \frac{da_0}{dx}, \frac{db_0}{dx}, \ldots\right)\\ = \Lambda\psi\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots, \frac{d\alpha_0}{d\xi}, \frac{d\beta_0}{d\xi}, \ldots\right),\end{aligned}$$

le facteur Λ dépendant uniquement des fonctions $\mu(x)$, $u(x)$ et $v(x)$.

Enfin il existe des fonctions des coefficients a_i, b_k et de leurs dérivées par rapport à x qui ne sont pas des invariants, mais qui ne changent pas ou se reproduisent multipliées par un facteur tel que Λ lorsqu'on fait *seulement un changement de fonction* $[\mu(x) = 1]$, ou *seulement un changement de variable* $[u(x) = 1, v(x) = 0]$; nous les appellerons, comme le fait Laguerre pour les équations linéaires, des *semi-invariants* pour le changement de variable ou le changement de fonction.

Remarque. — Si le degré n du numérateur surpasse de deux unités le degré p du dénominateur

$$p = n - 2,$$

l'équation différentielle est de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_{n-2} y^{n-2}},$$

a_n et b_{n-2} étant tous deux différents de zéro. Alors l'équation conserve la même forme si l'on prend une nouvelle variable indépendante ξ et une nouvelle fonction η liées à x et y par les relations

$$\frac{dx}{d\xi} = \mu(x), \qquad y = \frac{\eta u(x) + v(x)}{\eta w(x) + 1},$$

$\mu(x)$, $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ étant des fonctions arbitraires de x, telles que le déterminant $u - \mu w$ soit différent de zéro. Nous avons donc, pour ces équations particulières, des substitutions contenant *quatre* fonctions arbitraires u, v, w, μ au lieu de trois et ne changeant pas la forme de l'équation : de là résultent, pour ce cas particulier $p = n - 2$, des circonstances spéciales que nous examinerons dans un autre travail.

2. Parmi les équations de la forme précédente

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p} \qquad (p < n - 1),$$

les plus simples sont, pour $n = 1$ l'équation linéaire, pour $n = 2$ l'équation de Riccati, et pour $n = 3$ l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3}{b_0 + b_1 y},$$

que l'on peut toujours ramener à une autre de même forme ne contenant pas y au dénominateur; en effet, si b_1 n'est pas nul, il suffit de poser

$$b_0 + b_1 y = \frac{1}{y_1}$$

pour que la nouvelle équation en y_1 prenne la forme

$$\frac{dy_1}{dx} = c_0 + 3c_1 y_1 + 3c_2 y_1^2 + c_3 y_1^3.$$

Donc, si on laisse de côté l'équation linéaire et l'équation de Riccati, l'équation la plus simple de l'espèce considérée peut toujours se ramener à la forme

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3,$$

déjà étudiée par M. Roger Liouville [1]. Remarquons que, si l'on fait

[1] *Comptes rendus*, 6 septembre 1886.

le changement particulier de fonction et de variable

$$y = \lambda\eta, \qquad x = \lambda\xi,$$

où λ est une constante, l'équation deviendra

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \gamma_0 + 3\gamma_1\eta + 3\gamma_2\eta^2 + \gamma_3\eta^3,$$

où

$$\gamma_0 = c_0, \qquad \gamma_1 = \lambda c_1, \qquad \gamma_2 = \lambda^2 c_2, \qquad \gamma_3 = \lambda^3 c_3;$$

c'est ce qui nous conduit à attribuer au coefficient c_i le poids i. On a de plus

$$\frac{d\gamma_i}{d\xi} = \lambda^{i+1}\frac{dc_i}{dx}, \qquad \frac{d^2\gamma_i}{d\xi^2} = \lambda^{i+2}\frac{d^2c_i}{dx^2}, \qquad \ldots,$$

ce qui conduit à attribuer à la dérivée $\frac{d^kc_i}{dx^k}$ le poids $(i + k)$.

Le seul changement de variable

$$x = \mu\xi \qquad (\mu \text{ constant})$$

transforme l'équation différentielle en une autre dont les coefficients sont

$$\gamma_0 = \mu c_0, \qquad \gamma_1 = \mu c_1, \qquad \gamma_2 = \mu c_2, \qquad \gamma_3 = \mu c_3,$$

et l'on a

$$\frac{d\gamma_i}{d\xi} = \mu^2\frac{dc_i}{dx}, \qquad \frac{d^2\gamma_i}{d\xi^2} = \mu^3\frac{d^2c_i}{dx^2}, \qquad \ldots;$$

on est ainsi amené à attribuer le *degré* 1 aux coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 et le degré $(1 + k)$ à leurs dérivées d'ordre k.

Forme canonique. — Il est possible, par des quadratures, de ramener l'équation (3) à une forme canonique ne contenant plus qu'un invariant absolu. Pour opérer cette réduction, faisons le changement de fonction

$$y = \mathrm{Y}\mathrm{U}(x) + \mathrm{V}(x),$$

et déterminons les fonctions U et V de façon que la nouvelle équation différentielle ne contienne ni terme en Y ni terme en Y^2.

Nous aurons

$$V(x) = -\frac{c_2}{c_3}, \qquad U(x) = e^{3\int \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3} dx},$$

et l'équation prendra la forme

$$\frac{dY}{dx} = c_3 U^2 Y^3 + \frac{s_3}{U c_3^2},$$

où s_3 désigne la fonction de degré 3 et de poids 6

$$(4) \qquad s_3 = c_0 c_3^2 - 3 c_1 c_2 c_3 + 2 c_2^3 + c_3 \frac{dc_2}{dx} - c_2 \frac{dc_3}{dx}.$$

Enfin faisons un changement de variable indépendante

$$\frac{dX}{dx} = M(x)$$

et déterminons $M(x)$ de façon que le coefficient de Y^3 devienne l'*unité*; nous aurons

$$M(x) = c_3 U^2 = c_3 e^{6\int \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3} dx},$$

et l'équation prendra la forme *canonique*

$$(5) \qquad \frac{dY}{dX} = Y^3 + J,$$

où

$$J = \frac{s_3}{c_3^3 U^3} = \frac{c_0 c_3^2 - 3 c_1 c_2 c_3 + 2 c_2^3 + c_3 \frac{dc_2}{dx} - c_2 \frac{dc_3}{dx}}{c_3^3} e^{-9\int \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3} dx}.$$

Les fonctions U et s_3 sont des invariants relatifs, J et X des invariants absolus pour toutes les transformations de la forme

$$y = \eta u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

On peut, *a priori*, se rendre compte de ce fait, en remarquant que la réduction à la forme canonique n'est possible que d'une manière.

Nous allons le vérifier. Pour cela faisons dans l'équation

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3$$

le changement ci-dessus de fonction et de variable; l'équation prendra la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \gamma_0 + 3\gamma_1 \eta + 3\gamma_2 \eta^2 + \gamma_3 \eta^3,$$

où

$$\gamma_0 = \frac{c_0 + 3c_1 v + 3c_2 v^2 + c_3 v^3 - v'}{\mu u},$$

$$\gamma_1 = \frac{c_1 + 2c_2 v + c_3 v^2}{\mu} - \frac{u'}{3\mu u},$$

$$\gamma_2 = \frac{u(c_2 + c_3 v)}{\mu},$$

$$\gamma_3 = \frac{u^2 c_3}{\mu}.$$

u' et v' désignent les dérivées $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$.

Si nous appelons $(s_3)_0$, U_0, J_0, X_0 les fonctions composées avec les coefficients $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et la variable ξ comme s_3, U, J, X le sont avec c_0, c_1, c_2, c_3 et la variable x, nous aurons

$$(s_3)_0 = \gamma_0 \gamma_3^2 - 3\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + 2\gamma_2^3 + \gamma_3 \frac{d\gamma_2}{d\xi} - \gamma_2 \frac{d\gamma_3}{d\xi},$$
$$U_0 = e^{3\int \frac{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2}{\gamma_3} d\xi}.$$

En remplaçant γ_0, γ_1, γ_2, γ_3 par les valeurs ci-dessus et $d\xi$ par $\mu\, dx$, on vérifie, toutes réductions faites, que l'on a

$$(s_3)_0 = \frac{u^3}{\mu^3} s_3, \qquad U_0 = \frac{1}{u} U;$$

d'où

$$J_0 = \frac{(s_3)_0}{\gamma_3^3 U_0^3} = \frac{s_3}{c_3^3 U^3} = J,$$

$$X_0 = \int \gamma_3 U_0^2 \, d\xi = \int c_3 U^2 \, dx = X,$$

équations qui montrent que J et X sont des invariants absolus : il en est de même des dérivées $\frac{dJ}{dX}, \frac{d^2J}{dX^2}, \ldots$. Tout autre invariant absolu est une fonction de J, X et des dérivées $\frac{dJ}{dX}, \frac{d^2J}{dX^2}, \ldots$, comme on le voit immédiatement en formant l'invariant supposé sur la forme canonique.

L'invariant s_3 a été formé par M. Roger Liouville (¹).

Remarque. — D'après l'expression de U,

$$U = e^{3\int \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3} dx},$$

cette fonction n'est déterminée qu'à un facteur constant près; suivant le choix de la limite inférieure dans l'intégrale, on aura pour U différentes valeurs, et, si l'on appelle U_1 une autre valeur de U, on aura

$$U_1 = \frac{U}{k},$$

k désignant une constante. Appelant J_1 et X_1 les valeurs correspondantes de J et X, on aura

$$J_1 = k^3 J, \qquad \frac{dX_1}{dx} = \frac{1}{k^2} \frac{dX}{dx}, \qquad X_1 = \frac{1}{k^2}(X + h),$$

h désignant une nouvelle constante. La forme canonique correspondante

$$\frac{dY_1}{dX_1} = Y_1^3 + J_1$$

se ramènera à la forme

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J$$

par la substitution

$$Y_1 = kY, \qquad X_1 = \frac{1}{k^2}(X + h).$$

(¹) *Comptes rendus*, séances du 6 septembre 1886 et du 12 septembre 1887.

D'après cette remarque, nous ne considérerons pas comme distinctes deux formes canoniques qui se déduisent l'une de l'autre par le changement de J en $k^3 J$ et de X en $\frac{1}{k^2}(X+h)$.

3. Les fonctions $\frac{dJ}{dX}, \frac{d^2 J}{dX^2}, \cdots$ sont des invariants absolus qui se calculent facilement, par voie récurrente, en fonction des coefficients c_0, c_1, c_2, c_3. En effet, partons des formules précédentes

$$J = \frac{s_3}{c_3^3 U^3}, \qquad \frac{dX}{dx} = c_3 U^2, \qquad U = e^{3\int \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3} dx}$$

et posons, avec M. Roger Liouville [1],

$$s_{2n+1} = c_3 \frac{ds_{2n-1}}{dx} - (2n-1) s_{2n-1} \left[\frac{dc_3}{dx} + 3(c_1 c_3 - c_2^2)\right],$$

nous trouverons

$$\frac{dJ}{dX} = \frac{\frac{dJ}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{s_5}{c_3^5 U^5}, \qquad \frac{d^2 J}{dX^2} = \frac{s_7}{c_3^7 U^7}, \qquad \cdots, \qquad \frac{d^n J}{dX^n} = \frac{s_{2n+3}}{c_3^{2n+3} U^{2n+3}}.$$

On en conclut, par exemple, que la condition $s_{2n+3} = 0$ exprime que, dans la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J,$$

J est un polynôme de degré $(n-1)$ en X.

Dans ce qui suit nous désignerons par J′, J″, ... les invariants absolus $\frac{dJ}{dX}, \frac{d^2 J}{dX^2}, \cdots$.

Les invariants absolus J, J′ et X sont des fonctions de x que nous avons calculées : l'élimination de x fournira entre J et X ou entre J et J′ une relation caractéristique de l'équation différentielle considérée.

---

[1] *Comptes rendus*, séance du 12 septembre 1887.

Inversement, étant donnée une relation entre J et X, ou mieux une relation entre J et $J' = \frac{dJ}{dX}$, que l'on peut toujours déduire par différentiation d'une relation entre J et X, on aura, comme il suit, la relation correspondante entre les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 et leurs dérivées par rapport à x. Soit

$$(\alpha) \qquad f(J, J') = 0$$

l'équation donnée : on aura, en différentiant,

$$(\beta) \qquad \frac{\partial f}{\partial J} J' + \frac{\partial f}{\partial J'} J'' = 0.$$

D'autre part, les expressions précédentes de J, J', J'' donnent

$$(\gamma) \qquad \frac{J'^3}{J^5} = \frac{s_5^3}{s_3^5}, \qquad \frac{J'J''}{J^4} = \frac{s_5 s_7}{s_3^4}.$$

L'élimination de J, J', J'' entre ces quatre équations (α), (β), (γ) fournira la condition cherchée sous forme d'une relation entre les deux invariants absolus $\frac{s_5^3}{s_3^5}$ et $\frac{s_5 s_7}{s_3^4}$:

$$(\delta) \qquad F\left(\frac{s_5^3}{s_3^5}, \frac{s_5 s_7}{s_3^4}\right) = 0.$$

Cette condition (δ) est donc *nécessaire* pour que J et J' soient liés par la relation (α); elle est *suffisante*. Pour le démontrer, nous pouvons toujours supposer la relation (α) entre J et J' mise sous la forme

$$(\alpha') \qquad J = \varphi\left(\frac{J'^3}{J^5}\right);$$

d'où, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à X,

$$\frac{J'}{J} = \frac{\varphi'\left(\frac{J'^3}{J^5}\right)}{\varphi\left(\frac{J'^3}{J^5}\right)} \left[\frac{3J'^2J''}{J^5} - \frac{5J'^4}{J^6}\right];$$

en divisant par $\frac{J'}{J}$, nous aurons la relation cherchée entre les invariants $\frac{s_5^3}{s_3^5}$, $\frac{s_5 s_7}{s_3^4}$ sous la forme

$$(\delta') \qquad 1 = \frac{\varphi'\left(\frac{s_5^3}{s_3^5}\right)}{\varphi\left(\frac{s_5^3}{s_3^5}\right)}\left[\frac{3 s_5 s_7}{s_3^4} - \frac{5 s_5^3}{s_3^5}\right],$$

qui remplace la condition (δ). Supposons maintenant que, pour une certaine équation différentielle, les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 vérifient cette condition (δ') : appelons J_1 l'invariant absolu de cette équation différentielle, X_1 la variable canonique et J'_1, J''_1 les dérivées de J_1 par rapport à X_1. On aura

$$\frac{s_5^3}{s_3^5} = \frac{J_1'^3}{J_1^5}, \qquad \frac{s_5 s_7}{s_3^4} = \frac{J'_1 J''_1}{J_1^4},$$

et la condition (δ') pourra s'écrire, après qu'on en aura multiplié les deux membres par $\frac{J'_1}{J_1}$,

$$\frac{J'_1}{J_1} = \frac{\varphi'\left(\frac{J_1'^3}{J_1^5}\right)}{\varphi\left(\frac{J_1'^3}{J_1^5}\right)}\left[\frac{3 J_1'^2 J''_1}{J_1^5} - \frac{5 J_1'^4}{J_1^6}\right];$$

d'où, en intégrant et désignant par k^3 une constante arbitraire,

$$J_1 = k^3 \varphi\left(\frac{J_1'^3}{J_1^5}\right).$$

On pourra toujours amener cette constante k à être l'unité, de façon à amener cette dernière relation à prendre la forme (α'). En effet, en faisant dans la dernière relation

$$J_1 = k^3 J, \qquad X_1 = \frac{1}{k^2}(X + h),$$

on aura

$$J'_1 = \frac{dJ_1}{dX_1} = k^5 \frac{dJ}{dX} = k^5 J',$$

et cette relation se réduira à la relation (α') donnée,

$$J = \varphi\left(\frac{J'^3}{J^5}\right).$$

Or, nous avons vu précédemment (page 370) que l'on ne doit pas considérer comme distinctes deux formes canoniques déduites l'une de l'autre par la substitution

$$J_1 = k^3 J, \qquad X_1 = \frac{1}{k^2}(X + h).$$

La condition formée (δ) ou (δ') est donc nécessaire et suffisante pour que J et J' soient liés par la relation donnée (α) ou (α').

On peut remarquer que si, sans employer l'artifice précédent, on voulait trouver la forme canonique correspondant à une relation donnée

$$F\left(\frac{s_5^3}{s_3^5}, \frac{s_5 s_7}{s_3^4}\right) = 0$$

entre les deux invariants absolus $\frac{s_5^3}{s_3^5}$ et $\frac{s_5 s_7}{s_3^4}$, on aurait à intégrer l'équation

$$F\left(\frac{J'^3}{J^5}, \frac{J'J''}{J^4}\right) = 0.$$

Si, dans cette équation, on remplace J'' par sa valeur

$$J'' = \frac{dJ'}{dX} = J'\frac{dJ'}{dJ}$$

et si l'on y fait $J'^3 = z$, $J^5 = t$, elle se transforme en une équation homogène

$$F\left(\frac{z}{t}, \frac{5}{3}\frac{dz}{dt}\right) = 0,$$

intégrable par les méthodes élémentaires.

Exemple. — Cherchons la relation nécessaire et suffisante pour qu'une équation de l'espèce considérée

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3$$

puisse être ramenée à la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + X^2.$$

On devra avoir $J = X^2$, d'où $J' = 2X$ et

$$4J = J'^2;$$

une nouvelle différentiation donne $J'' = 2$. Alors les équations

$$\frac{s_5^3}{s_3^5} = \frac{J'^3}{J^5}, \qquad \frac{s_5 s_7}{s_3^4} = \frac{J' J''}{J^4}$$

donnent, en remplaçant J et J'' par leurs valeurs $\frac{J'^2}{4}$ et 2,

$$\frac{s_5^3}{s_3^5} = \frac{2^{10}}{J'^7}, \qquad \frac{s_5 s_7}{s_3^4} = \frac{2^9}{J'^7},$$

d'où enfin, en éliminant J', la condition cherchée

$$s_5^2 - 2 s_3 s_7 = 0,$$

nécessaire et suffisante. Comme on a

$$\frac{d^3 J}{dX^3} = \frac{s_9}{c_3^9 U^9},$$

la condition $s_9 = 0$ avec $s_7 \gtrless 0$ est aussi une condition *nécessaire* pour que l'équation puisse être réduite à la forme considérée. Mais cette condition n'est pas suffisante; car, si elle est remplie, l'équation pourra se ramener seulement à la forme

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + X^2 + C,$$

C désignant une constante pouvant être différente de o.

En général, la condition pour que J soit de la forme kX^n est

$$(n-1)s_5^2 - n s_3 s_7 = 0.$$

Cet exemple montre bien la nécessité qu'il y a d'exprimer par une relation entre les deux invariants absolus

$$\frac{s_5^3}{s_3^5},\quad \frac{s_5 s_7}{s_3^4}$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation de l'espèce étudiée puisse être ramenée à une forme canonique donnée. En introduisant d'autres invariants s_9, s_{11}, ..., on obtiendrait des conditions *nécessaires*, mais non *suffisantes*.

4. *Cas d'intégrabilité.* — 1° Le cas d'intégrabilité le plus simple de l'équation considérée

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3 \tag{3}$$

est le cas où les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 sont constants (indépendants de x) ou peuvent être rendus constants par un changement convenable de fonction et de variable indépendante. Si les coefficients sont constants et si $(c_1 c_3 - c_2^2)$ est différent de zéro, l'invariant absolu J est de la forme

$$J = Ce^{-9\frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3}x},$$

C désignant une constante, et la variable canonique X est donnée par

$$\frac{dX}{dx} = c_3 e^{6\frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3}x}, \qquad X = Ge^{6\frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3}x},$$

G désignant aussi une constante. On a donc

$$J = kX^{-\frac{3}{2}} \qquad (k \text{ constant}).$$

Si, au contraire, la quantité $c_1 c_3 - c_2^2$ est *nulle*, l'invariant absolu J est *constant*. Ainsi, lorsque l'équation est à coefficients constants, l'invariant absolu J est ou bien constant ou bien de la forme $kX^{-\frac{3}{2}}$. Réciproquement, si J est constant, la forme canonique est à coefficients constants, et si J est de la forme $kX^{-\frac{3}{2}}$, la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + kX^{-\frac{3}{2}}$$

se transforme par la substitution

$$Y = X^{-\frac{1}{2}}Y_1, \qquad X_1 = \log X$$

en l'équation

$$\frac{dY_1}{dX_1} = Y_1^3 + \frac{1}{2}Y_1 + k,$$

dont les coefficients sont constants.

Ce cas d'intégrabilité est identique à celui que M. Roger Liouville a indiqué sous une autre forme dans sa Note du 6 septembre 1886. C'est ainsi que l'équation

$$\frac{dy}{du} + ny^3 p'u + 6ny^2 pu + (2n+1)y\frac{p''u}{p'u} + 2(n+1) = 0,$$

que M. Roger Liouville choisit comme exemple, se ramène à la forme

$$\frac{dY_1}{dX_1} = 4Y_1^3 - g_2 Y_1 - g_3,$$

si l'on y fait

$$2pu + yp'u = 2Y_1, \qquad n\frac{du}{dX_1} = -p'u.$$

2° Nous obtiendrons d'autres cas d'intégrabilité à l'aide de la transformation suivante. Considérons l'équation différentielle

$$(6) \qquad \frac{dx}{dt} = A + Bt,$$

où A et B sont des fonctions de x, et remplaçons la variable t par une variable y liée à t par la relation

$$A + Bt = \frac{B}{y}$$

qui donne

$$dt = -\frac{dy}{y^2} - \left(\frac{A}{B}\right)' dx,$$

$\left(\frac{A}{B}\right)'$ désignant la dérivée de $\frac{A}{B}$ par rapport à x.

L'équation (6) prendra la forme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{B} y^3 - \left(\frac{A}{B}\right)' y^2, \tag{7}$$

équation de la forme qui nous occupe

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3,$$

où

$$c_0 = c_1 = 0, \qquad c_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{A}{B}\right)', \qquad c_3 = -\frac{1}{B}.$$

Si l'équation (6) est intégrable, l'équation (7) l'est aussi et réciproquement.

Par exemple, l'équation (6) est réductible aux quadratures si A et B sont des fonctions *linéaires* de x

$$A = ax + b, \qquad B = \alpha x + \beta,$$

car l'équation (6) est alors *linéaire*. On pourra donc intégrer dans la même hypothèse l'équation (7), qui devient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\alpha x + \beta} y^3 - \frac{3k}{(\alpha x + \beta)^2} y^2, \tag{8}$$

$3k$ désignant la constante $(a\beta - b\alpha)$. Pour simplifier, faisons le changement

$$\alpha x + \beta = \frac{k}{\sqrt{\alpha}} e^{-\xi}, \qquad y = \sqrt{\alpha}\,\eta_1,$$

nous aurons l'équation

$$\frac{d\eta_1}{d\xi} = \eta^3 + 3e^{\xi}\eta_1^2. \tag{9}$$

On pourra donc ramener aux quadratures l'intégration de toute équation de l'espèce considérée

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3,$$

réductible à la forme (9). Pour trouver la condition qui doit lier les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 de l'équation (3) pour qu'elle soit réductible à la forme (9), calculons les invariants absolus

$$\frac{s_5^3}{s_3^5}, \quad \frac{s_5 s_7}{s_3^4}$$

sur l'équation réduite (9). Nous aurons

$$s_3 = 2e^{3\xi} + e^{\xi}, \qquad s_5 = 18e^{5\xi} + 15e^{3\xi} + e^{\xi},$$
$$s_7 = 270e^{7\xi} + 315e^{5\xi} + 60e^{3\xi} + e^{\xi};$$

d'où

$$\frac{s_5^3}{s_3^5} = \frac{(18e^{4\xi} + 15e^{2\xi} + 1)^3}{e^{2\xi}(2e^{2\xi} + 1)^5},$$
$$\frac{s_5 s_7}{s_3^4} = \frac{(18e^{4\xi} + 15e^{2\xi} + 1)(270e^{6\xi} + 315e^{4\xi} + 60e^{2\xi} + 1)}{e^{2\xi}(2e^{2\xi} + 1)^4}.$$

L'élimination de $e^{2\xi}$ entre ces deux relations fournira la condition cherchée entre les deux invariants absolus $\frac{s_5^3}{s_3^5}$, $\frac{s_5 s_7}{s_3^4}$; en faisant cette élimination, on trouvera en outre l'expression de $e^{2\xi}$ en fonction des deux invariants.

L'équation (6) est encore réductible à des quadratures si elle est *homogène*, c'est-à-dire si A est constant et B proportionnel à $\frac{1}{x}$,

$$A = a, \qquad B = \frac{\alpha}{x}.$$

L'équation (7) prend alors la forme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\alpha} y^3 - \frac{a}{\alpha} y^2;$$

mais on n'obtient pas ainsi un nouveau cas d'intégrabilité, car la substitution

$$y = \frac{\eta}{x}, \qquad x = e^{\xi}$$

ramène la dernière équation à avoir ses coefficients constants.

3° Si l'on suppose que A et B sont des polynômes du second degré en x,

$$A = ax^2 + bx + c, \qquad B = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

l'équation (6)

$$\frac{dx}{dt} = A + Bt \tag{6}$$

est une équation de Riccati; l'équation (7)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{B}y^3 - \left(\frac{A}{B}\right)' y^2 \tag{7}$$

prend alors la forme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} - \left(\frac{ax^2 + bx + c}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}\right)' y^2. \tag{10}$$

On a donc un type d'équations de l'espèce considérée

$$\frac{dy}{dx} = c_3 y^3 + 3c_2 y^2 + 3c_1 y + c_0$$

réductibles à une équation de Riccati. On pourra calculer les invariants absolus $\frac{s_5^3}{s_3^5}$, $\frac{s_5 s_7}{s_3^4}$ de la forme (10) en fonction de x, et, en éliminant x, on aura la condition qui doit lier ces deux invariants pour qu'une équation soit réductible à cette forme (10). Un cas particulier intéressant est celui qu'on obtient en faisant $A = \frac{3}{2}kx^2$, $B = 1$; on voit alors que l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -y^3 - 3kxy^2 \tag{11}$$

est réductible à l'équation de Riccati

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}kx^2 + t$$

par le changement de fonction $y = \frac{1}{t + \frac{3}{2}kx^2}$. Ce dernier cas a été traité par M. Roger Liouville (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 12 septembre 1887). Il est bon de remarquer qu'on peut toujours ramener k à être égal à 1, en faisant dans l'équation (11) la substitution

$$y = k^{\frac{1}{3}}\eta, \qquad x = k^{-\frac{2}{3}}\xi.$$

4° L'équation (6)

$$\frac{dx}{dt} = A + Bt,$$

dans laquelle on fait

$$A = -x^3, \qquad B = -3kx^2.$$

prend précisément la forme (11)

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 - 3ktx^2,$$

que nous avons considérée en dernier lieu, et qui a été intégrée par M. Roger Liouville. On saura donc également intégrer l'équation (7)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{B}y^3 - \left(\frac{A}{B}\right)' y^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{3k}\frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{3k},$$

qui, par la substitution

$$y = -3k^{\frac{2}{3}}\eta, \qquad x = -3k^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\xi},$$

devient

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta^3 + \frac{3}{\xi^2}\eta^2.$$

En calculant les invariants absolus $\frac{s_5^3}{s_3^5}$, $\frac{s_3 s_7}{s_5^2}$ sur cette forme réduite, on obtiendra, par l'élimination de ξ, la relation entre ces invariants caractérisant les équations réductibles à cette forme.

Parmi les cas d'intégrabilité précédents, les plus simples peuvent se résumer comme il suit : l'équation

$$\frac{dy}{dx} = y^3 + 3y^2 \varphi(x)$$

est intégrable si $\varphi(x)$ a l'une des quatre formes

$$\varphi(x) = \frac{k}{\sqrt{x}}, \qquad \varphi(x) = ke^x, \qquad \varphi(x) = kx, \qquad \varphi(x) = \frac{k}{x^2}.$$

5. Prenons maintenant une équation différentielle de la forme générale

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p} = \frac{A(y)}{B(y)},$$

où, comme nous l'avons vu, on peut toujours supposer

$$p < n - 1.$$

Les coefficients a_n et b_p sont essentiellement différents de zéro ; le numérateur $A(y)$ et le dénominateur $B(y)$ sont supposés n'avoir pas de diviseur commun.

Nous nous proposons de ramener cette équation à une forme canonique analogue à celle que nous avons trouvée pour l'équation

$$\frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3.$$

Pour cela, faisons d'abord le changement de fonction

$$y = z + V(x),$$

et déterminons V de telle façon que, dans l'expression de $\frac{dz}{dx}$, il ne figure plus au numérateur de terme en z^{n-1}; nous trouverons

$$V(x) = -\frac{a_{n-1}}{na_n},$$

et l'équation prendra la forme

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_{n-2} z^{n-2} + c_n z^n}{g_0 + g_1 z + \ldots + g_p z^p},$$

où

$$\begin{array}{llll} c_0 = A(V) - g_0 V', & c_1 = A'(V) - g_1 V', & c_2 = \frac{1}{2}A''(V) - g_2 V', & \ldots, \quad c_n = a_n, \\ g_0 = B(V), & g_1 = B'(V), & g_2 = \frac{1}{2}B''(V), & \ldots, \quad g_p = b_p. \end{array}$$

Un certain nombre de coefficients $g_0, g_1, g_2, \ldots$ peuvent être nuls, mais $g_p = b_p$ est certainement différent de zéro.

Supposons d'abord $p < n - 2$; nous ferons alors un nouveau changement de fonction

$$z = YU(x),$$

et nous déterminerons $U(x)$ de façon que, dans l'expression de $\frac{dY}{dx}$, il ne figure pas au numérateur de terme en Y^{p+1}.

Nous aurons ainsi

$$g_p U'(x) = c_{p+1} U(x), \qquad U = e^{\int \frac{c_{p+1}}{g_p} dx},$$

et l'équation deviendra

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} c_0 + (c_1 U - g_0 U')Y + \ldots + U^{p-1}(c_p U - g_{p-1} U')Y^p \\ + c_{p+2} U^{p+2} Y^{p+2} + \ldots + c_{n-2} U^{n-2} Y^{n-2} + c_n U^n Y^n \end{array} \right\}}{g_0 U + g_1 U^2 Y + \ldots + g_p U^{p+1} Y^p}.$$

Enfin un changement de variable indépendante

$$\frac{dX}{dx} = M(x)$$

permettra de rendre égaux les coefficients des termes en Y^n et Y^p des degrés les plus élevés au numérateur et au dénominateur : pour cela, il est nécessaire et suffisant de prendre

$$M(x) = \frac{c_n}{g_p} U^{n-p-1},$$

ou bien, comme $c_n = a_n$, $g_p = b_p$,

$$M(x) = \frac{a_n}{b_p} U^{n-p-1}, \qquad X = \int \frac{a_n}{b_p} U^{n-p-1}\, dx.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par la valeur commune des coefficients de Y^n et Y^p, on aura la forme canonique

$$(12) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{J_0 + J_1 Y + \ldots + J_p Y^p + \star + J_{p+2} Y^{p+2} + \ldots + J_{n-2} Y^{n-2} + \star + Y^n}{I_0 + I_1 Y + I_2 Y^2 + \ldots + I_{p-1} Y^{p-1} + Y^p},$$

le signe $\star$ marquant les places des deux termes qui manquent au numérateur. Les $(n + p - 2)$ coefficients restants

$$J_0, \quad J_1, \quad \ldots, \quad J_p, \quad J_{p+2}, \quad \ldots, \quad J_{n-2}; \qquad I_0, \quad I_1, \quad \ldots, \quad I_{p-1}$$

et la variable canonique X sont des *invariants absolus* pour les changements de fonction et de variable de la forme

$$(2) \qquad y = \eta\, u(x) + v(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

$u(x)$, $v(x)$ et $\mu(x)$ étant des fonctions arbitraires de x. Cette propriété résulte de ce que la réduction à la forme canonique n'est possible que d'une seule manière : on peut aussi la vérifier comme nous l'avons fait précédemment (page 369) pour le cas simple de $n = 3$, $p = 0$.

Les dérivées des invariants J_i et I_k par rapport à la variable canonique X sont aussi des invariants absolus. Réciproquement, tout invariant absolu de l'équation différentielle (1) est une fonction des invariants absolus J_i et I_k et de leurs dérivées par rapport à X : c'est ce qu'on voit immédiatement en formant, avec l'équation canonique, l'invariant considéré.

Un cas particulier remarquable auquel s'applique la réduction que nous venons d'indiquer est le cas où $p = 0$, c'est-à-dire le cas d'une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots + a_n y^n,$$

que nous avons traité dans une Note présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 4 juillet 1887.

Application. — Cherchons, par exemple, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation de la forme

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p} = \frac{\mathrm{A}(y)}{\mathrm{B}(y)} \qquad (p < n-2)$$

soit, par la substitution (2), réductible à une équation analogue à *coefficients constants.*

D'abord, si les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_p$ sont constants, on voit, en suivant les transformations effectuées pour arriver à la forme canonique, que les coefficients appelés

$$c_0, \quad c_1, \quad \ldots, \quad c_n, \quad g_0, \quad g_1, \quad \ldots, \quad g_p$$

sont aussi constants. Si c_{p+1} est *nul*, $\mathrm{U}(x)$ est une constante, X est proportionnel à x, et les invariants J_i et I_k

$$i = 0, 1, 2, \ldots, p, p+2, \ldots, n-2; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$$

sont *constants*. Si c_{p+1} est différent de zéro, on a

$$\mathrm{U} = e^{\frac{c_{p+1}}{g_p}x}, \qquad \mathrm{U}' = \frac{c_{p+1}}{g_p}\mathrm{U},$$

$$\mathrm{X} = \int \frac{a_n}{b_p}\mathrm{U}^{n-p-1}\,dx = \frac{a_n}{b_p}\,\frac{g_p}{(n-p-1)c_{p+1}}\,\mathrm{U}^{n-p-1}.$$

D'ailleurs les invariants J_i et I_k sont, en désignant par C_i et E_k des constantes, de la forme

$$\mathrm{J}_i = \mathrm{C}_i \mathrm{U}^{i-n} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p, p+2, \ldots, n-2),$$
$$\mathrm{I}_k = \mathrm{E}_k \mathrm{U}^{k-p} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Comme U est égal à une constante multipliée par $X^{\frac{1}{n-p-1}}$, on aura donc, en calculant les invariants en fonction de X,

$$(13) \qquad J_i = K_i X^{\frac{i-n}{n-p-1}}, \qquad I_k = L_k X^{\frac{k-p}{n-p-1}},$$

les lettres K_i et L_k désignant de nouvelles constantes. En résumé, si l'équation différentielle a ses coefficients constants, ou bien les invariants J_i et I_k sont constants, ou bien ils sont de la forme (13).

Réciproquement, si les invariants J_i et I_k d'une équation donnée sont tous constants, la forme canonique est à coefficients constants; si ces invariants sont de la forme (13), on transformera l'équation canonique

$$\frac{dY}{dX} = \frac{J_0 + J_1 Y + \ldots + J_p Y^p + * + J_{p+2} Y^{p+2} + \ldots + J_{n-2} Y^{n-2} + * + Y^n}{I_0 + I_1 Y + \ldots + I_{p-1} Y^{p-1} + Y^p}$$

en une équation à coefficients constants par la substitution

$$Y = Y_1 X^{-\frac{1}{n-p-1}}, \qquad \log X = X_1.$$

6. Dans les calculs précédents, nous avons supposé

$$p < n - 2.$$

Le cas

$$p = n - 2$$

mérite une attention spéciale pour deux raisons :

1° La réduction à la forme canonique précédente n'est plus possible, car on a actuellement

$$p + 1 = n - 1,$$

et les termes du numérateur de degrés $(p+1)$ et $(n-1)$ que nous avons fait disparaître successivement, pour arriver à la forme canonique, ne sont plus distincts.

2° Comme nous l'avons déjà remarqué, l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p} \qquad (p = n - 2)$$

conserve la même forme si l'on fait le changement de fonction et de variable

$$y=\frac{\eta\, u(x)+v(x)}{\eta\, w(x)+1},\qquad \frac{d\xi}{dx}=\mu(x),$$

u, v, w et μ désignant des fonctions indéterminées de x.

En laissant de côté pour le moment ces changements de fonction avec trois fonctions arbitraires u, v, w, nous nous bornerons à réduire l'équation différentielle dans le cas $p=n-2$ à une forme canonique qui conviendrait aussi aux autres cas, $p<n-2$, et dont les coefficients seront des invariants absolus pour les substitutions

$$y=\eta\, u(x)+v(x),\qquad \frac{d\xi}{dx}=\mu(x).$$

Pour arriver à cette forme canonique, nous ferons

$$y=\mathrm{Y}\,\mathrm{U}(x)+\mathrm{V}(x),\qquad \frac{d\mathrm{X}}{dx}=\mathrm{M}(x),$$

et nous déterminerons U, V et M de façon que, dans l'expression de $\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}$, le coefficient de Y^{p-1} au dénominateur et celui de Y^{p+1} au numérateur soient nuls, et que le coefficient de Y^p au dénominateur soit égal à celui de Y^n au numérateur.

L'équation prendra alors la forme canonique

$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}=\frac{\mathrm{P}_0+\mathrm{P}_1\mathrm{Y}+\ldots+\mathrm{P}_p\mathrm{Y}^p+\star+\mathrm{P}_{p+2}\mathrm{Y}^{p+2}+\ldots+\mathrm{Y}^n}{\mathrm{Q}_0+\mathrm{Q}_1\mathrm{Y}+\ldots+\mathrm{Q}_{p-2}\mathrm{Y}^{p-2}+\star+\mathrm{Y}^p},$$

où P_0, P_1, ..., P_p, P_{p+2}, ..., P_{n-1}; Q_0, Q_1, ..., Q_{p-2} sont des invariants absolus.

Il serait aisé de voir, comme nous l'avons fait pour la forme canonique précédemment indiquée, quelles doivent être les expressions de ces invariants en fonction de X pour que l'équation soit réductible à une équation à coefficients constants, par une substitution telle que

$$y=\eta\, u(x)+v(x),\qquad \frac{d\xi}{dx}=\mu(x).$$

II. — Sur les équations différentielles algébriques et homogènes par rapport a la fonction inconnue et a ses dérivées.

7. Les équations différentielles, qui sont algébriques et homogènes par rapport à une fonction y de la variable x et à ses dérivées y', y'', ..., $y^{(n)}$, partagent, avec les équations différentielles linéaires et homogènes, l'importante propriété de conserver la même forme quand on prend une nouvelle variable indépendante ξ et une nouvelle fonction η liées à x et y par les relations

$$\frac{d\xi}{dx} = \mu(x), \qquad y = \eta\, u(x),$$

$\mu(x)$ et $u(x)$ étant des fonctions indéterminées de x. On pourra donc étendre à ces équations la théorie des invariants des équations différentielles linéaires.

Il est utile de remarquer qu'une équation différentielle algébrique, mais *non homogène* par rapport à une fonction z de x et à ses dérivées $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots,$ peut être transformée en une équation *homogène* d'un ordre supérieur d'une unité : il suffit, pour cela, de poser

$$z = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx},$$

y étant une nouvelle fonction, ou, plus généralement,

$$z = \psi\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right),$$

ψ étant une fonction rationnelle. On peut encore poser $z = \lambda y$, λ désignant une constante arbitraire, puis éliminer λ entre l'équation obtenue et sa dérivée.

Enfin une équation différentielle algébrique et homogène entre y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ se transforme en une autre équation homogène du même ordre, mais d'un autre degré en général, si l'on fait

$$y = u^p,$$

p désignant une constante quelconque.

Si l'on a une équation algébrique et homogène

$$\Phi_m(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

de degré m par rapport à la fonction y de x et à ses dérivées, il est évident que tous les invariants de la *forme algébrique* Φ_m sont des invariants de l'équation différentielle; car effectuer un changement de fonction et de variable par les formules

$$\frac{d\xi}{dx} = \mu(x), \qquad y = \eta\, u(x),$$

c'est faire une certaine substitution linéaire sur les quantités y, y', y'', ..., $y^{(n)}$.

Pour simplifier, nous aborderons d'abord l'étude des équations homogènes du *second ordre* et du *second degré.*

8. L'équation générale homogène et du second degré en y, y', y'' est

$$(14) \qquad a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y'' y' + 2b_2 y y'' + 2b_3 y' y = 0,$$

les coefficients a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3 étant des fonctions de la variable indépendante x. Ces coefficients doivent être envisagés comme étant d'un poids marqué par leurs indices; car, si l'on fait la substitution $y = \lambda^2\eta$, $x = \lambda\xi$ (λ constant) en appelant η', η'' les dérivées de η par rapport à ξ, l'équation prend la forme

$$\alpha_0 \eta''^2 + \alpha_2 \eta'^2 + \alpha_4 \eta^2 + 2\beta_1 \eta'' \eta' + 2\beta_2 \eta \eta'' + 2\beta_3 \eta' \eta = 0,$$

où

$$\alpha_0 = a_0, \qquad \alpha_2 = \lambda^2 a_2, \qquad \alpha_4 = \lambda^4 a_4,$$
$$\beta_1 = \lambda b_1, \qquad \beta_2 = \lambda^2 b_2, \qquad \beta_3 = \lambda^3 b_3.$$

De plus, les dérivées, telles que $\frac{d^k a_i}{dx^k}, \frac{d^k b_i}{dx^k}$, seront de poids $(i+k)$. On a, en effet,

$$\frac{d\alpha_i}{d\xi} = \lambda \frac{d\alpha_i}{dx} = \lambda^{i+1} \frac{da_i}{dx}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^k \alpha_i}{d\xi^k} = \lambda^{i+k} \frac{d^k a_i}{dx^k}.$$

Ces mêmes coefficients doivent être regardés comme étant tous du degré 1, car le changement de fonction

$$y = \eta \sqrt{k},$$

k désignant une constante, transforme l'équation en une autre dont les coefficients sont

$$ka_0, \quad ka_2, \quad ka_4, \quad kb_1, \quad kb_2, \quad kb_3.$$

Tout invariant de l'équation devra être homogène, quant aux poids et aux degrés de ses différents termes. Par exemple, le discriminant de la forme quadratique

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

est un invariant de poids 6 et de degré 3. Nous supposons ce discriminant différent de zéro; car, s'il était nul, l'équation considérée se décomposerait en deux équations linéaires homogènes. Nous désignerons par A_0, A_2, A_4, B_1, B_2, B_3 les mineurs de D relatifs aux éléments a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3, c'est-à-dire les coefficients de la forme adjointe.

Dans l'équation

$$a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y'' y' + 2b_2 y y'' + 2b_3 y' y = 0,$$

faisons le changement de fonction et de variable

$$y = \eta\, u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

$u(x)$ et $\mu(x)$ étant des fonctions indéterminées de x, dont les dérivées par rapport à x seront désignées par u', u'', μ', μ''. Convenons d'appeler η' et η'' les dérivées de η par rapport à ξ : nous aurons les formules

$$y = \eta u, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{dx} u + \eta u', \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2\eta}{dx^2} u + 2\frac{d\eta}{dx} u' + \eta u''$$

et

$$\frac{d\eta}{dx} = \mu \frac{d\eta}{d\xi}, \qquad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \mu^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \mu' \frac{d\eta}{d\xi};$$

d'où les formules de transformation

$$(15) \qquad \begin{cases} y = \eta u, \\ y' = \eta' \mu u + \eta u', \\ y'' = \eta'' \mu^2 u + \eta'(\mu' u + 2\mu u') + \eta u''. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation et ordonnant, ou aura une équation

$$(16) \qquad \alpha_0 \eta''^2 + \alpha_2 \eta'^2 + \alpha_4 \eta^2 + 2\beta_1 \eta'' \eta' + 2\beta_2 \eta \eta'' + 2\beta_3 \eta' \eta = 0,$$

où

$$(17) \qquad \begin{cases} \alpha_0 = a_0 \mu^4 u^2, \\ \alpha_2 = a_0(\mu' u + 2\mu u')^2 + a_2 \mu^2 u^2 + 2b_1 \mu u(\mu' u + 2\mu u'), \\ \alpha_4 = a_0 u''^2 + a_2 u'^2 + a_4 u^2 + 2b_1 u' u'' + 2b_2 u'' u + 2b_3 u u', \\ \beta_1 = a_0 \mu^2 u(\mu' u + 2\mu u') + b_1 \mu^3 u^2, \\ \beta_2 = (a_0 u'' + b_1 u' + b_2 u)\mu^2 u, \\ \beta_3 = (a_0 u'' + b_1 u' + b_2 u)(\mu' u + 2\mu u') \\ \qquad + (b_1 u'' + a_2 u' + b_3 u)\mu u. \end{cases}$$

Si l'on appelle D_1 le nouveau discriminant de la forme quadratique (16), on aura

$$D_1 = \mu^6 u^6 D.$$

D'après les propriétés élémentaires des formes quadratiques, on aperçoit immédiatement un second invariant de l'équation différentielle dans le discriminant des termes du second degré en y' et y''

$$A_1 = a_0 a_2 - b_1^2.$$

En effet, en appelant $(A_1)_1$ la fonction analogue formée avec les nouveaux coefficients

$$(A_1)_1 = \alpha_0 \alpha_2 - \beta_1^2,$$

on a

$$(A_1)_1 = \mu^6 u^4 A_1.$$

Les équations différentielles de la forme (14) homogènes et du second degré en y, y', y'' se divisent en trois classes suivant la façon dont la dérivée y'' figure dans l'équation. Dans la première classe se trouvent les équations pour lesquelles les coefficients a_0 et b_1 sont nuls; dans la seconde, celles pour lesquelles a_0 est nul, b_1 étant différent de zéro; dans la troisième se trouvent les équations dans lesquelles a_0 est différent de zéro. Cette classification se trouve justifiée par ce fait que le changement de fonction et de variable que nous venons d'effectuer transforme une équation d'une classe en une autre de la même classe.

Par exemple, si l'on a

$$a_0 = 0, \qquad b_1 = 0,$$

on aura aussi

$$\alpha_0 = 0, \qquad \beta_1 = 0.$$

9. Prenons d'abord la classe la plus simple, celle que l'on obtient en supposant a_0 et b_1 *nuls*. Le coefficient b_2 est nécessairement différent de zéro, car, autrement, l'équation ne serait plus du second ordre et se décomposerait en facteurs linéaires. On a alors une équation de la forme

$$a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2 b_2 y y'' + 2 b_3 y y' = 0, \tag{18}$$

pour laquelle le discriminant D se réduit à

$$D = - a_2 b_2^2.$$

Si l'on fait le changement

$$y = \eta u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

l'équation se transforme en une autre de même forme

$$\alpha_2 \eta'^2 + \alpha_1 \eta^2 + 2\beta_2 \eta\eta'' + 2\beta_3 \eta\eta' = 0$$

avec

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= a_2 \mu^2 u^2,\\
\alpha_1 &= a_2 u'^2 + a_1 u^2 + 2b_2 uu'' + 2b_3 uu',\\
\beta_2 &= b_2 \mu^2 u^2,\\
\beta_3 &= a_2 \mu uu' + b_2 u(\mu' u + 2\mu u') + b_3 \mu u^2.
\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\frac{a_2}{b_2} = -\frac{D}{b_2^2}$$

est un invariant absolu de l'équation différentielle.

Si l'on fait la substitution

$$y = e^{\int z dx},$$

l'équation différentielle se réduit à l'équation de Riccati

$$(19) \qquad 2b_2 \frac{dz}{dx} + (a_2 + 2b_2) z^2 + 2b_3 z + a_1 = 0.$$

Si $(a_2 + 2b_2) = 0$, c'est-à-dire si l'invariant absolu $\frac{a_2}{b_2}$ est égal à -2, cette dernière équation est *linéaire du premier ordre*. Si $(a_2 + 2b_2)$ n'est pas nul, on peut, comme il est bien connu, ramener l'intégration de l'équation de Riccati (19) à celle d'une équation linéaire du second ordre, par la substitution

$$z = \frac{2b_2}{a_2 + 2b_2} \frac{1}{t} \frac{dt}{dx},$$

t étant la nouvelle fonction inconnue. En particulier, si l'invariant absolu $\frac{a_2}{b_2}$ a une valeur *constante* k différente de -2, on voit que la substitution

$$y = e^{\int z dx} = t^{\frac{2}{k+2}}$$

transforme l'équation proposée (18) en une équation linéaire homogène du second ordre : cette remarque permettra de trouver sous une forme simple l'intégrale générale de l'équation (18) dans le cas où les coefficients sont constants.

En résumé, les équations de la première classe (18) se ramènent toujours à des équations linéaires du premier ou du second ordre. Il est donc inutile d'insister davantage sur ces équations.

10. Prenons maintenant les équations de la seconde classe, pour lesquelles a_0 est nul, b_1 étant différent de zéro. Ces équations sont de la forme

$$(20)\qquad a_2 y'^2 + a_1 y^2 + 2b_1 y'' y' + 2b_2 y y'' + 2b_3 y' y = 0 \qquad (b_1 \gtrless 0).$$

Si nous faisons le changement de fonction et de variable

$$y = \eta u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

l'équation devient

$$\alpha_2 \eta'^2 + \alpha_1 \eta^2 + 2\beta_1 \eta'' \eta' + 2\beta_2 \eta \eta'' + 2\beta_3 \eta' \eta = 0$$

où, d'après les formules (17),

$$(21)\qquad \begin{cases} \alpha_2 = a_2 \mu^2 u^2 + 2b_1 \mu u(\mu' u + 2\mu u'), \\ \alpha_1 = a_2 u'^2 + a_1 u^2 + 2b_1 u'' u' + 2b_2 u u'' + 2b_3 u' u, \\ \beta_1 = b_1 \mu^3 u^2, \\ \beta_2 = (b_1 u' + b_2 u)\mu^2 u, \\ \beta_3 = (b_1 u' + b_2 u)(\mu' u + 2\mu u') + (b_1 u'' + a_2 u' + b_3 u)\mu u. \end{cases}$$

Le discriminant est actuellement

$$D = 2b_1 b_2 b_3 - a_2 b_2^2 - a_1 b_1^2,$$

et le discriminant des termes du second degré en y' et y''

$$A_1 = b_1^2.$$

On obtiendra une forme canonique de l'équation en donnant aux fonctions u et μ des déterminations particulières $U(x)$ et $M(x)$ annulant les coefficients β_2 et α_2. On aura ainsi

$$\frac{U'}{U} = -\frac{b_2}{b_1}, \qquad U = e^{-\int \frac{b_2}{b_1} dx},$$

puis

$$\frac{M'}{M} + \frac{2U'}{U} = -\frac{a_2}{2b_1}, \qquad M = e^{\int \frac{4b_2 - a_2}{2b_1} dx};$$

si l'on divise ensuite tous les termes pour la valeur du coefficient β_1, l'équation prendra la forme canonique

$$(22) \qquad 2Y'Y'' + HY^2 + 2LYY' = 0,$$

où Y désigne la nouvelle fonction inconnue liée à y par la relation

$$y = YU$$

et où Y' et Y'' sont les dérivées de Y par rapport à la variable canonique X liée à x par la relation

$$\frac{dX}{dx} = M(x), \qquad X = \int M(x)\, dx.$$

Les coefficients H et L ont pour valeurs

$$H = \frac{a_1 U'^2 + a_4 U^2 + 2(b_1 U' + b_2 U)U'' + 2 b_3 UU'}{b_1 M^3 U^2},$$

$$L = \frac{(b_1 U' + b_2 U)(M'U + 2MU') + (b_1 U'' + a_2 U' + b_3 U)MU}{b_1 M^3 U^2},$$

ou, en remplaçant les rapports $\frac{U'}{U}$ et $\frac{M'}{M}$ par leurs valeurs calculées ci-dessus,

$$H = -\frac{D}{M^3 b_1^3}, \qquad L = \frac{E_4}{M^2 b_1^2},$$

D étant le discriminant de la forme et E_4 l'invariant relatif

$$E_4 = b_2^2 + b_2 b'_1 - b_1 b'_2 + b_3 b_1 - a_2 b_2$$

de degré 2 et de poids 4.

Comme la réduction à la forme canonique (22) n'est possible que d'une manière, les coefficients H, L et la variable canonique X sont des invariants absolus de l'équation proposée : c'est ce qu'il est aisé de vérifier directement.

Pour qu'une expression soit un invariant absolu de l'équation, il faut et il suffit qu'elle soit fonction de H, L et de leurs dérivées par rapport à X. On aura, par exemple,

$$\frac{d^n \mathrm{L}}{d\mathrm{X}^n} = \frac{\mathrm{E}_{2n+4}}{\mathrm{M}^{n+2} b_1^{n+2}},$$

E_{2n+4} étant un invariant relatif de poids $(2n+4)$ qu'on calculera par la formule récurrente

$$\mathrm{E}_{2n+4} = b_1 \frac{d\mathrm{E}_{2n+2}}{dx} - (n+1)\,\mathrm{E}_{2n+2}\left(\frac{db_1}{dx} + \frac{4b_2 - a_2}{2}\right).$$

Cherchons, par exemple, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation proposée

$$\varphi(y, y', y'') = a_2 y'^2 + a_1 y^2 + 2b_1 y' y'' + 2b_2 y'' y + 2b_3 y y' = 0$$

admette un facteur intégrant, c'est-à-dire pour qu'il existe un facteur λ tel que l'expression

$$\lambda \varphi(y, y', y'')$$

soit la dérivée d'une fonction de y, y', x, qui sera évidemment de la forme

$$g_2 y'^2 + 2g_3 y y' + g_1 y^2.$$

On aura alors identiquement

$$\lambda \varphi(y, y', y'') = \frac{d}{dx}(g_2 y'^2 + 2g_3 y y' + g_1 y^2);$$

faisons le changement de fonction et de variable

$$y = \mathrm{YU}, \qquad \frac{d\mathrm{X}}{dx} = \mathrm{M}$$

qui transforme φ en la forme canonique; l'identité prendra la forme

$$\nu(2\mathrm{Y}'\mathrm{Y}'' + \mathrm{HY}^2 + 2\mathrm{LYY}') = \frac{d}{d\mathrm{X}}(\mathrm{G}_2\mathrm{Y}'^2 + 2\mathrm{G}_3\mathrm{YY}' + \mathrm{G}_1\mathrm{Y}^2);$$

d'où, en identifiant,

$$\mathrm{G}_3 = 0, \qquad \frac{d\mathrm{G}_2}{d\mathrm{X}} = 0, \qquad \mathrm{G}_2 = \nu;$$

G_2 est donc constant ainsi que ν, puis on a

$$\nu\mathrm{H} = \frac{d\mathrm{G}_1}{dx}, \qquad \nu\mathrm{L} = \mathrm{G}_1.$$

On obtient enfin, par l'élimination de G_1, la condition cherchée

$$\mathrm{H} - \frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{X}} = 0. \tag{23}$$

Cette condition nécessaire est évidemment suffisante; car, si elle est remplie, la forme canonique devient

$$2\mathrm{Y}'\mathrm{Y}'' + \mathrm{Y}^2\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{X}} + 2\mathrm{LYY}' = 0,$$

équation dont le premier membre est la dérivée de

$$\mathrm{Y}'^2 + \mathrm{LY}^2.$$

D'après les valeurs indiquées plus haut pour H, L, $\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{X}}$, la condition (23) s'écrit

$$\mathrm{D} + \mathrm{E}_6 = 0,$$

relation dont le premier membre est un invariant relatif de poids 6.

On pourrait de même chercher les conditions pour que l'équation considérée

$$(20) \qquad a_2 y'^2 + a_3 y^2 + 2b_1 y' y'' + 2b_2 y'' y + 2b_3 y y' = 0$$

puisse être ramenée à une équation de même forme à coefficients constants par les substitutions

$$y = \eta u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x);$$

mais nous laisserons cette recherche de côté, en nous bornant à remarquer que l'on peut toujours ramener l'équation différentielle au type

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = c_0 + 3c_1 y + 3c_2 y^2 + c_3 y^3$$

étudié dans la première Partie. Il suffit, pour cela, de faire, dans la forme canonique

$$2Y'Y'' + HY^2 + 2LYY' = 0,$$

le changement de fonction

$$Y = e^{\int \frac{dX}{Z}},$$

ce qui donne

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{H}{2}Z^3 + LZ^2 + 1,$$

équation du type (3) rappelé à l'instant où

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = 0, \qquad c_2 = \frac{L}{3}, \qquad c_3 = \frac{H}{2}.$$

On peut donc réduire l'équation (20) à la forme

$$\frac{dY_1}{dX_1} = Y_1^3 + J,$$

ne contenant qu'un invariant absolu, fonction de H et L.

Chaque cas d'intégrabilité de l'équation (3) en donnera un pour l'équation homogène du second ordre et du second degré (20) et réciproquement.

11. Un cas particulièrement simple, où l'équation

$$(20)\qquad a_2 y'^2 + a_1 y^2 + 2b_1 y'y'' + 2b_2 y''y + 2b_3 yy' = 0$$

est intégrable par les méthodes élémentaires, est le cas où les coefficients sont *constants;* car, en remplaçant y'' par l'expression équivalente $y'\frac{dy'}{dy}$, on a, entre y' et y une équation homogène. Dans ce cas, l'équation admet des solutions de la forme

$$y = ke^{rx},$$

k désignant une constante arbitraire et r une racine de l'équation caractéristique

$$f(r) = 2b_1 r^3 + (a_2 + 2b_2) r^2 + 2b_3 r + a_1 = 0.$$

Ces solutions sont des *intégrales particulières,* comme il résulte de ce que la transformation

$$y = e^{\int u\,dx}$$

donne l'équation

$$-(2b_1 u + 2b_2)\frac{du}{dx} = 2b_1 u^3 + (a_2 + 2b_2)u^2 + 2b_3 u + a_1,$$

et l'on sait que les valeurs constantes $u = r$ qui annulent le second membre sont des intégrales particulières de l'équation en u : ces valeurs n'annulent pas $2b_1 u + 2b_2$, car autrement le discriminant D serait nul.

On vérifiera sans peine le théorème suivant :

Si les racines de l'équation caractéristique

$$f(r) = 0$$

sont SIMPLES *et* COMMENSURABLES *et si le rapport* $\frac{b_1}{b_2}$ *est* COMMENSURABLE, *l'intégrale générale de l'équation est une* RELATION ALGÉBRIQUE *entre* Cy *et* $C'e^x$, C *et* C' *étant des constantes arbitraires.*

Par exemple, si l'on prend l'équation

$$y'y'' - 3yy'' + 2yy' = 0,$$

les racines de l'équation caractéristique sont 0, 1, 2, et les coefficients des termes en y'' ont leur rapport commensurable : l'intégrale générale sera algébrique en y et e^x. On trouve facilement, en exprimant x et y à l'aide de la variable u introduite ci-dessus par la substitution

$$y = e^{\int u\,dx},$$

$$Ce^x = \frac{u^{\frac{3}{2}}(u-2)^{\frac{1}{2}}}{(u-1)^2}, \qquad C'y = \frac{u-2}{(u-1)^2}.$$

L'élimination de u conduira à une relation algébrique entre y et e^x du *genre zéro*. On mettra les expressions de y et e^x sous une forme plus commode en faisant

$$u = \frac{2\lambda^2}{\lambda^2-1};$$

on a alors

$$Ce^x = \frac{4\lambda^3}{(1+\lambda^2)^2}, \qquad C'y = \frac{2(\lambda^2-1)}{(1+\lambda^2)^2},$$

ce qui donne entre e^x et y une équation du quatrième degré. Les solutions *particulières* $y = k$, $y = ke^x$, $y = ke^{2x}$ sont aisées à retrouver sur cette dernière forme. Ainsi faisons, par exemple,

$$\lambda = \frac{t}{C}, \qquad C^2 = 8kC',$$

les expressions de e^x et y deviendront

$$e^x = \frac{4t^3}{(C^2+t^2)^2}, \qquad y = \frac{16k(t^2-C^2)}{(C^2+t^2)^2}$$

et, pour $C = 0$,

$$e^x = \frac{4}{t}, \qquad y = k\frac{16}{t^2};$$

d'où

$$y = ke^{2x}.$$

12. Prenons maintenant l'équation

$$(24)\qquad a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y'y'' + 2b_2 y''y + 2b_3 yy' = 0,$$

où le coefficient a_0 est supposé différent de zéro. Si l'on fait le changement de fonction et de variable

$$y = \eta\, u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

l'équation prend la forme

$$\alpha_0 \eta''^2 + \alpha_2 \eta'^2 + \alpha_4 \eta^2 + 2\beta_1 \eta'\eta'' + 2\beta_2 \eta''\eta + 2\beta_3 \eta\eta' = 0,$$

où les nouveaux coefficients ont les valeurs (17) que nous reproduisons ici :

$$(17)\quad \begin{cases} \alpha_0 = a_0 \mu^4 u^2, \\ \alpha_2 = a_0(\mu' u + 2\mu u')^2 + a_2 \mu^2 u^2 + 2b_1 \mu u(\mu' u + 2\mu u'), \\ \alpha_4 = a_0 u''^2 + a_2 u'^2 + a_4 u^2 + 2b_1 u'u'' + 2b_2 u''u + 2b_3 uu'; \\ \beta_1 = a_0 \mu^2 u(\mu' u + 2\mu u') + b_1 \mu^3 u^2, \\ \beta_2 = (a_0 u'' + b_1 u' + b_2 u)\mu^2 u, \\ \beta_3 = (a_0 u'' + b_1 u' + b_2 u)(\mu' u + 2\mu u') \\ \qquad + (b_1 u'' + a_2 u' + b_3 u)\mu u. \end{cases}$$

Pour trouver, comme précédemment, les invariants absolus les plus simples de l'équation, nous allons la mettre sous une forme réduite dont les coefficients seront des invariants absolus.

Pour cela, nous donnerons d'abord à u et μ des déterminations U et M annulant β_1 ; nous aurons

$$\frac{M'}{M} + 2\frac{U'}{U} = -\frac{b_1}{a_0}, \qquad MU^2 = e^{-\int \frac{b_1}{a_0} dx}.$$

Les coefficients α_2 et β_3 deviennent alors, si l'on y remplace

$$M'U + 2MU'$$

par cette valeur $-\frac{b_1}{a_0}\mathrm{MU}$,

$$\alpha_2 = \frac{\mathrm{M}^2\mathrm{U}^2}{a_0}\mathrm{A}_4, \qquad \beta_3 = \frac{\mathrm{MU}^2}{a_0}\left(\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}\mathrm{A}_4 - \mathrm{B}_3\right),$$

A_4 et B_3 désignant, suivant la convention déjà faite, les mineurs du discriminant D de la forme quadratique (24) relatifs aux éléments a_4 et b_3

$$\mathrm{A}_4 = a_0 a_2 - b_1^2, \qquad \mathrm{B}_3 = b_1 b_2 - a_0 b_3.$$

Deux cas sont à distinguer suivant que l'invariant A_4 est égal à zéro ou différent de zéro.

13. Supposons d'abord A_4 différent de zéro. On pourra alors déterminer U de façon à annuler β_3, ce qui donne

$$\mathrm{U} = e^{\int \frac{\mathrm{B}_3}{\mathrm{A}_4} dx}$$

et, par suite,

$$\mathrm{M} = \mathrm{U}^{-2} e^{-\int \frac{b_1}{a_0} dx} = e^{-\int \frac{2a_0\mathrm{B}_3 + b_1\mathrm{A}_4}{a_0\mathrm{A}_4} dx};$$

enfin, en appelant X la variable canonique

$$\mathrm{X} = \int \mathrm{M}\, dx$$

et Y la fonction correspondante liée à y par la relation

$$y = \mathrm{Y}\,\mathrm{U}(x),$$

on a, après avoir divisé tous les termes par α_0, la forme canonique

$$\mathrm{Y}''^2 + \mathrm{I}\mathrm{Y}'^2 + \mathrm{J}\mathrm{Y}^2 + 2\mathrm{K}\mathrm{Y}\mathrm{Y}'' = 0 \tag{25}$$

avec trois invariants absolus I, J, K. Ces invariants, étant calculés à l'aide des valeurs précédentes de U et M, ont les valeurs

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{A}_4}{a_0^2\mathrm{M}^2}, \qquad \mathrm{J} = \frac{\mathrm{S}_{12}}{a_0\mathrm{M}^4\mathrm{A}_4^2}, \qquad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{S}_6}{\mathrm{M}^2\mathrm{A}_4^2},$$

où les numérateurs sont les invariants relatifs

$$A_4 = a_0 a_2 - b_1^2,$$

$$S_6 = \frac{a_0 B_3^2 + b_1 B_3 A_4 + b_2 A_4^2 + a_0 \left(A_4 \dfrac{dB_3}{dx} - B_3 \dfrac{dA_4}{dx} \right)}{a_0}$$

$$= B_3^2 - A_4 B_2 + A_4 \frac{dB_3}{dx} - B_3 \frac{dA_4}{dx},$$

$$S_{12} = a_0 S_6^2 + A_4^3 D;$$

l'expression de S_{12} résulte immédiatement de cette remarque que le discriminant de la forme canonique est

$$I(J - K^2).$$

L'invariant relatif A_4 est de poids 2, S_6 de poids 6, S_{12} de poids 12.

Si l'on affecte de l'indice 1 les valeurs des quantités précédentes composées avec les coefficients α_0, α_2, α_4, β_1, β_2, β_3 du Tableau (17) et la variable ξ, comme les quantités elles-mêmes sont composées avec a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3, et la variable x, on a

$$(a_0)_1 = a_0 \mu^4 u^2, \qquad (A_4)_1 = A_4 \mu^6 u^4, \qquad D_1 = D \mu^6 u^6,$$

$$M_1 = M \frac{1}{\mu}, \qquad (S_6)_1 = S_6 \mu^{10} u^8, \qquad (S_{12})_1 = S_{12} \mu^{24} u^{18}.$$

La variable canonique

$$X = \int M\, dx$$

est aussi un invariant absolu; on a

$$X_1 = \int M_1\, d\xi = \int M\, dx = X.$$

Toute fonction de I, J, K et de leurs dérivées par rapport à X est un invariant absolu de l'équation, et, réciproquement, tout invariant absolu de l'équation est une fonction de I, J, K et de leurs dérivées par rapport à X.

14. Il serait aisé de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation soit réductible à une autre de même forme à coefficients constants, ou pour qu'elle admette un facteur intégrant. Nous chercherons, pour traiter un autre cas d'intégrabilité, quelles relations doivent lier les trois invariants I, J et K pour que l'intégrale générale puisse se mettre sous la forme

$$(26) \qquad y = h^2 u_1 + hku_2 + k^2 u_3,$$

h et k désignant deux constantes arbitraires, et u_1, u_2, u_3 des fonctions de x linéairement indépendantes.

On reconnaîtra immédiatement, à l'aide du théorème suivant, si une équation donnée admet une intégrale générale de la forme (26).

Pour qu'une équation différentielle

$$\psi(y, y', y'') = a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_1 y^2 + 2b_1 y'y'' + 2b_2 y''y + 2b_3 yy' = 0$$

ait pour intégrale générale

$$y = h^2 u_1 + hku_2 + k^2 u_3,$$

u_1, u_2, u_3 désignant des fonctions de x linéairement indépendantes, h et k des constantes arbitraires, il faut et il suffit qu'il existe une fonction λ de x, telle que l'expression

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi$$

soit décomposable en un produit de facteurs linéaires par rapport à y et à ses dérivées.

L'un de ces facteurs sera linéaire et homogène en y, y', y'', y''' : en l'égalant à zéro, on aura une équation linéaire ayant pour intégrales u_1, u_2, u_3; l'autre facteur sera linéaire et homogène en y, y', y''; en l'égalant à zéro, on aura une équation linéaire donnant des intégrales singulières de l'équation donnée $\psi = 0$.

Comme ce théorème est indépendant du choix de la fonction et de la variable dans l'équation $\psi(y, y', y'') = 0$, on peut changer de fonction et de variable en posant

$$y_1 = \frac{y}{u_3}, \qquad x_1 = \frac{u_2}{u_3},$$

y_1 désignant la nouvelle fonction et x_1 la nouvelle variable; on aura alors, en faisant

$$\frac{u_1}{u_3} = z_1,$$

une équation différentielle ayant pour intégrale générale

$$y_1 = h^2 z_1 + hkx_1 + k^2,$$

z_1 désignant une fonction de x_1. En supprimant l'indice 1, on voit qu'on peut toujours ramener une équation de l'espèce considérée à avoir pour intégrale générale

$$(26') \qquad y = h^2 z + hkx + k^2,$$

z étant une fonction de x dont les dérivées par rapport à x seront appelées z', z'', z'''. En différentiant deux fois l'équation (26'), puis éliminant h et k, on obtient l'équation différentielle

$$\begin{aligned}&\psi(y, y', y'')\\ &\quad = -(z''y' - z'y'')^2 + y''[z''(y - xy') - y''(z - xz')] = 0.\end{aligned}$$

Dans cette équation, les coefficients de y''^2, y'^2, $y'y''$ sont

$$\begin{aligned}a_0 &= -z'^2 - z + xz',\\ a_2 &= -z''^2,\\ 2b_1 &= 2z'z'' - xz''.\end{aligned}$$

Pour que le coefficient a_0 fût nul, il faudrait

$$-z'^2 - z + xz' = 0,$$

équation de Clairaut qui donne, par la différentiation,

$$-2z'z''+xz''=0$$

ou

$$b_1=0.$$

On a alors, ou bien

$$z''=0, \qquad z'=c \qquad \text{et} \qquad z=cx-c^2,$$

ou bien

$$-2z'+x=0, \qquad z=\frac{x^2}{4}.$$

On ne peut pas avoir $z=cx-c^2$, car les fonctions z, x et 1 qui forment les coefficients de h^2, hk et k^2 dans

$$y=h^2z+hkx+k^2$$

ne seraient plus *linéairement indépendantes;* on ne peut pas avoir $z=\frac{x^2}{4}$, car alors on aurait

$$y=\left(h\frac{x}{2}+k\right)^2,$$

et y serait le carré de l'intégrale générale d'une équation linéaire : l'équation différentielle en y, $\psi(y,y',y'')=0$, serait alors de la première classe, caractérisée par $a_0=b_1=0$, et l'on retomberait dans un cas examiné en détail (p. 393).

Dans notre équation, l'invariant

$$A_1=a_0a_2-b_1^2$$

a pour valeur

$$A_1=z''^2\left(z-\frac{x^2}{4}\right),$$

et, d'après ce que nous venons de voir, cet invariant n'est pas nul.

Cela posé, on vérifie immédiatement l'identité

$$\frac{d\psi}{dx}-2\frac{z'''}{z''}\psi=(z''y'''-y''z''')[2y''(xz'-z-z'^2)+y'z''(2z'-x)+yz'']\,;$$

ce qui montre que, conformément à la première partie du théorème, l'expression

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi$$

se décompose en deux facteurs linéaires en y, y', y'', y''' pour $\lambda = 2\frac{z'''}{z''}$. L'un de ces facteurs égalé à zéro,

$$z''y''' - y''z''' = 0,$$

donne une équation linéaire du troisième ordre admettant pour intégrales linéairement indépendantes

$$z, \quad x, \quad 1;$$

le deuxième facteur, dont la valeur est $\frac{d\psi}{dy''}$, égalé à zéro,

$$(27) \qquad 2y''(xz' - z - z'^2) + y'z''(2z' - x) + yz'' = 0$$

donne une équation linéaire du second ordre admettant comme intégrales particulières des intégrales singulières de l'équation $\psi = 0$.

Nous avons ainsi démontré que, si l'équation différentielle

$$\psi(y, y', y'') = a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_1 y^2 \\ + 2b_1 y'y'' + 2b_2 y''y + 2b_3 yy' = 0$$

a pour intégrale générale

$$(26) \qquad y = h^2 u_1 + hku_2 + k^2 u_3,$$

l'expression

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi$$

est, par une détermination convenable de λ en fonction de x, décomposable en un produit de facteurs linéaires et homogènes en y, y', y'', y'''.

Réciproquement, si l'on peut trouver un facteur λ, tel que

$$(28) \qquad \frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi = PQ,$$

P et Q étant linéaires et homogènes en y, y', y'', y''', l'équation $\psi = 0$ aura pour intégrale générale une expression de la forme (26). En effet, l'un des deux facteurs P et Q contiendra seul y''', puisque $\frac{d\psi}{dx}$ contient y''' au premier degré. Supposons que le facteur P contienne seul y''' : alors l'équation

$$P = 0$$

sera une équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre ayant pour intégrale générale

$$y = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3,$$

C_1, C_2, C_3 désignant des constantes arbitraires.

Si, dans l'identité (28), on remplace y par cette expression, on a, quelles que soient les constantes C_1, C_2, C_3,

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi = 0, \qquad \psi = C e^{\int \lambda dx},$$

C étant une constante, fonction de C_1, C_2, C_3,

$$C = \varphi(C_1, C_2, C_3).$$

Cette fonction $\varphi(C_1, C_2, C_3)$ est une fonction homogène et du second degré de C_1, C_2, C_3; en effet, si, dans la forme quadratique

$$\psi(y, y', y''),$$

on fait la substitution

$$\begin{aligned} y &= C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3, \\ y' &= C_1 v'_1 + C_2 v'_2 + C_3 v'_3, \\ y'' &= C_1 v''_1 + C_2 v''_2 + C_3 v''_3, \end{aligned}$$

on obtient évidemment une forme quadratique de C_1, C_2, C_3; en outre, le discriminant de la forme ψ étant supposé différent de zéro, il en est de même du discriminant de $\varphi(C_1, C_2, C_3)$. On pourra toujours remplacer C_1, C_2, C_3 par trois autres constantes K_1, K_2, K_3, liées à C_1,

C_2, C_3 par des relations de la forme

$$C_1 = \alpha_{11} K_1 + \alpha_{12} K_2 + \alpha_{13} K_3,$$
$$C_2 = \alpha_{21} K_1 + \alpha_{22} K_2 + \alpha_{23} K_3,$$
$$C_3 = \alpha_{31} K_1 + \alpha_{32} K_2 + \alpha_{33} K_3,$$

les α_{ij} étant des constantes dont le déterminant n'est pas nul, de telle façon que la forme quadratique $\varphi(C_1, C_2, C_3)$ prenne la forme réduite

$$K_1 K_3 - K_2^2;$$

l'expression de y,

$$y = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3$$

deviendra alors

$$y = K_1 u_1 + K_2 u_2 + K_3 u_3,$$

si l'on pose

$$u_i = \alpha_{1i} v_1 + \alpha_{2i} v_2 + \alpha_{3i} v_3, \qquad (i = 1, 2, 3);$$

et l'on aura identiquement, quelles que soient les constantes K_1, K_2, K_3,

$$\psi(y, y', y'') = (K_1 K_3 - K_2^2) e^{\int \lambda dx}.$$

Si l'on fait, en particulier,

$$K_1 = h^2, \qquad K_2 = hk, \qquad K_3 = k^2, \qquad K_1 K_3 - K_2^2 = 0,$$

on voit que l'expression

$$y = h^2 u_1 + hk u_2 + k^2 u_3$$

est une solution de l'équation $\psi(y, y', y'') = 0$ avec deux constantes arbitraires h et k : c'est donc l'intégrale générale.

Si, dans l'identité

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi = PQ,$$

on prend le second facteur Q pour l'égaler à zéro, on a une équation linéaire du second ordre dont l'intégrale générale est

$$y = g_1 y_1 + g_2 y_2,$$

g_1 et g_2 désignant des constantes arbitraires. En remplaçant y par cette valeur dans l'identité

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi = \mathrm{PQ},$$

on a

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi = 0, \qquad \psi = \mathrm{G}\, e^{\int \lambda\, dx},$$

G étant une fonction homogène et du second degré de g_1 et g_2

$$\mathrm{G} = \varpi(g_1, g_2).$$

Si donc on établit entre g_1 et g_2 la relation

$$\varpi(g_1, g_2) = 0,$$

qui fournit en général deux valeurs pour le rapport $\frac{g_1}{g_2}$, la fonction

$$y = g_1 y_1 + g_2 y_2$$

sera une solution de l'équation $\psi(y, y', y'') = 0$; on obtient ainsi des intégrales singulières, comme il est aisé de le vérifier sur l'équation réduite de la page 405, admettant pour intégrale générale

$$y = h^2 z + hkx + k^2.$$

Ces intégrales singulières se déduisent de l'intégrale générale par les méthodes connues; nous les indiquons plus loin (p. 414).

Le théorème précédent peut être étendu à des équations de tous les ordres et de tous les degrés, comme nous l'avons montré dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 12 novembre 1888.

Exemples. — L'équation

$$(29) \qquad 3x^2 y''^2 - 2y''(3xy' + y) + 4y'^2 = 0$$

a pour intégrale générale l'expression

$$y = h^2 x^2 + hkx + k^2,$$

vérifiant l'équation $y'''=0$, et pour intégrales singulières les expressions

$$y=g_1 x^{\frac{3+2\sqrt{3}}{3}}, \qquad y=g_2 x^{\frac{3-2\sqrt{3}}{3}},$$

vérifiant l'équation du second ordre

$$3x^2y''-3xy'-y=0.$$

L'équation

$$y''^2(2x^2-9x^3)+6x(6x-1)y'y''+6yy''-36xy'^2=0$$

admet l'intégrale générale

$$y=h^2x^3+hkx+k^2$$

vérifiant l'équation du troisième ordre

$$xy'''-y''=0$$

et les deux intégrales singulières

$$y=gx\sqrt{4x-1}\,e^{\pm\int\frac{2\sqrt{9x^2-2x}}{4x^2-x}dx},$$

vérifiant l'équation du second ordre

$$y''(2x^2-9x^3)+3x(6x-1)y'+3y=0.$$

15. Indiquons, pour terminer, quelles conditions doivent remplir les invariants I, J, K pour qu'une équation

$$a_0y''^2+a_2y'^2+a_4y^2+2b_1y'y''+2b_2y''y+2b_3yy'=0,$$

où

$$a_0 \gtrless 0, \qquad A_4 \gtrless 0,$$

admette une intégrale de la forme précédente

$$y=h^2u_1+hku_2+k^2u_3.$$

Cette équation étant ramenée à la forme canonique

$$\Phi = Y''^2 + I Y'^2 + J Y^2 + 2KYY'' = 0,$$

où la variable indépendante est X, nous désignerons par I', J' et K' les dérivées de I, J, K par rapport à X.

En désignant par λ une fonction de X, on a identiquement

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dX} - \lambda\Phi = 2Y''Y''' + 2KYY''' - \lambda Y''^2 + (I' - \lambda I)Y'^2 + (J' - \lambda J)Y^2 \\ + 2(I+K)Y'Y'' + 2(K' - \lambda K)YY'' + 2JYY'.\end{aligned}$$

Il faut exprimer que, pour une détermination convenable de λ, cette expression se décompose en un produit de facteurs linéaires de la forme

$$2(Y''' + \alpha Y'' + \beta Y' + \gamma Y)(Y'' + \delta Y' + \varepsilon Y).$$

En identifiant les termes en Y''', on trouve immédiatement

$$\delta = 0, \qquad \varepsilon = K,$$

puis, en remplaçant δ et ε par ces valeurs,

$$\begin{gathered}2\alpha = -\lambda, \qquad I' - \lambda I = 0, \qquad J' - \lambda J = 2\gamma K, \qquad I + K = \beta, \\ K' - \lambda K = \gamma + \alpha K, \qquad J = K\beta.\end{gathered}$$

L'élimination des indéterminées λ, α, β, γ donne les deux conditions

$$J - K^2 = IK, \qquad I(J' - 2KK') = I'(J - K^2),$$

dont la seconde s'écrit

$$\frac{J' - 2KK'}{J - K^2} = \frac{I'}{I},$$

et, en intégrant,

$$J - K^2 = IC,$$

C désignant une constante. En égalant ces deux valeurs de $J - K^2$, on a la condition

$$(K - C)I = 0,$$

qui donne

$$(30) \qquad I = 0, \qquad J - K^2 = 0,$$

ou bien

$$(31) \qquad K = C, \qquad J = C^2 + CI.$$

Les premières conditions (30) ne peuvent pas être remplies, car elles expriment que le discriminant de la forme canonique est nul. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation ait une intégrale générale de la forme indiquée sont donc les deux conditions (31). Si ces conditions sont remplies, on a

$$\lambda = \frac{I'}{I}, \qquad \alpha = -\frac{I'}{2I}, \qquad \gamma = -\frac{CI'}{2I}, \qquad \beta = I + C.$$

L'équation du troisième ordre qui sert à trouver l'intégrale générale est alors

$$Y''' - \frac{I'}{2I} Y'' + (I + C) Y' - \frac{CI'}{2I} Y = 0,$$

et celle du deuxième ordre qui donne des intégrales singulières

$$Y'' + CY = 0,$$

dont l'intégration est immédiate.

Ainsi, lorsqu'une équation homogène du second degré en y, y', y'' admet pour intégrale générale

$$y = h^2 u_1 + hku_2 + k^2 u_3,$$

h et k étant des constantes arbitraires, la transformation qui ramène cette équation à la forme canonique ramène en même temps l'équation linéaire du second ordre donnant les intégrales *singulières* à la forme immédiatement intégrable

$$Y'' + CY = 0.$$

On vérifiera sans peine que, si l'on substitue l'intégrale générale de cette équation

$$Y = g_1 e^{X\sqrt{-C}} + g_2 e^{-X\sqrt{-C}}.$$

dans l'équation canonique, on trouve

$$g_1 g_2 = 0;$$

de sorte que

$$Y = g_1 e^{X\sqrt{-C}}, \qquad Y = g_2 e^{-X\sqrt{-C}}$$

seront les deux intégrales singulières de l'équation canonique.

Appliquons ce résultat à l'équation formée précédemment page 405

$$(32) \quad -y''^2(z'^2 + z - xz') + y''y'z''(2z' - x) + yy''z'' - y'^2z''^2 = 0,$$

qui a pour intégrale générale

$$y = h^2 z + hkx + k^2$$

et qui admet deux intégrales singulières vérifiant l'équation linéaire du second ordre

$$(33) \qquad -2y''(z'^2 + z - xz') + y'z''(2z' - x) + z''y = 0.$$

Nous verrons qu'en faisant

$$\alpha = z - \frac{x^2}{4}, \qquad \beta = z'^2 + z - xz'$$

on a, pour l'expression des intégrales singulières de l'équation (32),

$$y = g_1 \sqrt{\alpha}\, e^{\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} dx}, \qquad y = g_2 \sqrt{\alpha}\, e^{-\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} dx},$$

g_1 et g_2 désignant des constantes arbitraires. On obtiendrait immédiatement ces deux intégrales en cherchant les solutions communes aux équations (32) et (33). L'élimination de y'' entre ces deux équations donnera deux valeurs pour $\frac{y'}{y}$: les valeurs correspondantes de y

sont celles que nous venons d'indiquer; on vérifiera qu'elles satisfont bien aux deux équations.

16. La forme canonique précédente trouvée pour l'équation

$$a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y'y'' + 2b_2 y''y + 2b_3 yy' = 0$$

a été établie dans l'hypothèse que a_0 et $A_4 = a_0 a_2 - b_1^2$ sont différents de zéro. Voyons ce qui arrive si $A_4 = 0$. Alors on pourra toujours faire un changement de fonction et de variable

$$y = \mathrm{YU}(x), \qquad \frac{d\mathrm{X}}{dx} = \mathrm{M}(x),$$

de façon à annuler le terme en $\mathrm{Y'Y''}$: on trouve ainsi (p. 401)

$$\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}} + 2\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}} = -\frac{b_1}{a_0}, \qquad \mathrm{MU}^2 = e^{-\int \frac{b_1}{a_0} dx}.$$

Comme nous l'avons vu à l'endroit cité, le coefficient α_2 de Y'^2 se réduit alors à $\frac{\mathrm{M}^2\mathrm{U}^2}{a_0} \mathrm{A}_4$, c'est-à-dire à *zéro*, et le coefficient β_3 de YY' devient $-\frac{\mathrm{MU}^2}{a_0} \mathrm{B}_3$.

La quantité B_3 n'est pas nulle : car on a identiquement

$$\mathrm{A}_2 \mathrm{A}_4 - \mathrm{B}_3^2 = a_0 \mathrm{D};$$

comme A_4 est nul, si B_3 l'était aussi, on aurait $\mathrm{D} = 0$ et le premier membre de l'équation différentielle se décomposerait en facteurs linéaires. On pourra alors déterminer M de façon à rendre le coefficient α_0 de Y''^2, dans l'équation en Y, égal au coefficient β_3 de $2\mathrm{YY}'$: on a ainsi, d'après les expressions (17) de la page 401, où l'on remplace u et μ par U et M,

$$a_0 \mathrm{M}^4 \mathrm{U}^2 = -\frac{\mathrm{MU}^2}{a_0} \mathrm{B}_3,$$

$$\mathrm{M}^3 = -\frac{\mathrm{B}_3}{a_0^2}, \qquad \mathrm{M} = -\sqrt[3]{\frac{\mathrm{B}_3}{a_0^2}}.$$

Puis on a

$$\mathrm{MU}^2 = e^{-\int \frac{b_1}{a_0} dx}, \qquad \mathrm{U} = \mathrm{M}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int \frac{b_1}{a_0} dx}.$$

En divisant tous les termes par $\alpha_0 = a_0 M^4 U^2$, on ramène ainsi l'équation à la forme canonique

$$Y''^2 + PY^2 + 2QYY'' + 2YY' = 0,$$

avec deux invariants absolus P et Q dont l'expression est facile à former. La variable canonique X est aussi un invariant absolu. Tout invariant absolu de l'équation est une fonction de P, Q et de leurs dérivées par rapport à X et réciproquement.

Il serait aisé de trouver quelles conditions nécessaires et suffisantes doivent remplir les invariants P et Q pour que l'équation soit réductible à une autre à coefficients constants ou admette un facteur intégrant. Mais je laisse de côté cette question, qui se traiterait comme les questions analogues précédentes, pour ajouter quelques remarques sur les équations homogènes du second ordre et du second degré à coefficients constants.

17. Lorsque, dans l'équation

$$a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y'y'' + 2b_2 y''y + 2b_3 yy' = 0,$$

a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3 sont *constants*, $(a_0 \gtrless 0)$, l'intégration de l'équation se fait par les méthodes élémentaires en remplaçant y'' par $y'\dfrac{dy'}{dy}$, ce qui donne une équation homogène entre y et y'. Il existe alors des solutions de la forme

$$y = ke^{rx},$$

k étant une constante arbitraire et r une racine de l'équation caractéristique

$$f(r) = a_0 r^4 + 2b_1 r^3 + (a_2 + 2b_2) r^2 + 2b_3 r + a_4 = 0.$$

Parmi les solutions ainsi obtenues, les unes sont *particulières*, les autres *singulières*, tandis que, dans le cas de $a_0 = 0$ examiné précédemment, elles sont toutes *particulières*. C'est ce qui résultera d'un exemple que nous allons donner.

Si les coefficients a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3 sont de la forme

$$a_0 = (x-a)^4\alpha_0, \qquad a_2 = (x-a)^2\alpha_2, \qquad a_4 = \alpha_4,$$
$$b_1 = (x-a)^3\beta_1, \qquad b_2 = (x-a)^2\beta_2, \qquad b_3 = (x-a)\beta_3,$$

où a, α_0, α_2, α_4, β_1, β_2, β_3 sont des constantes, on ramènera ce cas au précédent par le changement de variable

$$x - a = e^{x'}.$$

L'équation admettra alors des solutions de la forme

$$y = k(x-a)^r,$$

r étant racine de l'équation

$$\begin{aligned}\varphi(r) = \alpha_0 r^2(r-1)^2 + \alpha_2 r^2 + \alpha_4 + 2\beta_1 r^2(r-1)&\\ + 2\beta_2 r\,(r-1) + 2\beta_3 r &= 0.\end{aligned}$$

Certaines de ces solutions sont *particulières*, d'autres *singulières*. Par exemple, l'équation (29)

$$3x^2y''^2 - 2y''(3xy'+y) + 4y'^2 = 0,$$

déjà examinée à la page 410, rentre dans cette catégorie : elle admet des solutions de la forme

$$y = kx^r,$$

r étant racine de l'équation

$$\varphi(r) = 3r^2(r-1)^2 - 2r(r-1)(3r+1) + 4r^2 = 0.$$

Cette équation du quatrième degré a pour racines

$$0, \quad 2, \quad \frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{3-2\sqrt{3}}{3}.$$

Comme l'intégrale générale est

$$y = h^2x^2 + hkx + k^2,$$

on voit que les valeurs $r = 0$, $r = 2$ donnent des intégrales *particulières* correspondant à $h = 0$, $k = 0$, tandis que les valeurs

$$r = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \qquad r = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$$

donnent des intégrales *singulières*.

Ces conclusions peuvent être étendues aux équations homogènes d'ordre et de degré supérieur à coefficients constants.

18. Une équation homogène du second ordre de degré n, ne contenant y'' qu'au premier degré, c'est-à-dire une équation de la forme

$$(34) \qquad y''\Phi_{n-1}(y, y') = \Psi_n(y, y'),$$

où Φ_{n-1} et Ψ_n désignent des fonctions homogènes de y et y' de degrés n et $n-1$, se ramène à une des équations étudiées dans la première partie, par la substitution

$$y = e^{\int u\,dx},$$

qui donne

$$(35) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{\Psi_n(1, u) - u^2\Phi_{n-1}(1, u)}{\Phi_{n-1}(1, u)}.$$

On pourra réduire cette équation à la forme canonique indiquée dans la première Partie et reconnaître, comme nous l'avons vu, si elle est réductible à une équation à coefficients constants, par les substitutions employées dans cette première Partie.

Lorsque les coefficients de l'équation (34) sont constants, l'équation (35) donne x en u par une quadrature, puis l'équation

$$\log y = \int u\,dx$$

donne $\log y$ en u par une quadrature portant, comme la précédente, sur une fonction rationnelle. L'équation (34) admet alors des intégrales *particulières* de la forme ke^{rx}, r étant racine de l'équation

$$\Psi_n(1, r) - r^2\Phi_{n-1}(1, r) = 0.$$

On étendrait aisément à ce cas le théorème de la page 399.

Si l'on a une équation homogène du second ordre de degré $n > 2$ à coefficients constants, contenant y'' à un degré plus élevé que le premier, elle admet encore des solutions de la forme ke^{rx}, mais ces solutions peuvent être *singulières*. Ainsi l'équation

$$(y''y - y'^2)^2 + y^2(y'^2 - y^2) = 0$$

a pour intégrale générale

$$y = Ce^{\sin(x+\alpha)},$$

C et α désignant des constantes arbitraires, et pour intégrales *singulières*

$$y = ke^{x}, \qquad y = ke^{-x}.$$

19. Une classe importante d'équations homogènes se compose des équations dont l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$(36) \qquad y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n}{G_1 v_1 + G_2 v_2 + \ldots + G_p v_p},$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n, G_1, G_2, \ldots, G_p$ désignent des constantes *arbitraires*, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des fonctions linéairement indépendantes, $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des fonctions linéairement indépendantes; cette expression de y est donc le quotient de l'intégrale générale d'une certaine équation différentielle linéaire homogène d'ordre n par l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre p. L'équation différentielle en y, obtenue par l'élimination des constantes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n; \qquad G_1, \quad G_2, \quad \ldots, \quad G_p,$$

sera d'ordre $(n + p - 1)$, homogène et de degré n; la transformée en $\frac{1}{y}$ sera homogène et de degré p.

Pour le montrer, faisons $y = \frac{u}{v}$, l'expression (36) donnera

$$G_1 uv_1 + G_2 uv_2 + \ldots + G_p uv_p - C_1 vu_1 - C_2 vu_2 - \ldots - C_n vu_n = 0.$$

En différentiant cette équation $(n + p - 1)$ fois et éliminant les constantes arbitraires entre les $(n+p)$ équations ainsi formées, on obtient l'équation différentielle cherchée

$$
(37)\quad \begin{vmatrix}
uv_1 & uv_2 & \cdots & uv_p & vu_1 & vu_2 & \cdots & vu_n \\
\frac{duv_1}{dx} & \frac{duv_2}{dx} & \cdots & \frac{duv_p}{dx} & \frac{dvu_1}{dx} & \frac{dvu_2}{dx} & \cdots & \frac{dvu_n}{dx} \\
\frac{d^2uv_1}{dx^2} & \frac{d^2uv_2}{dx^2} & \cdots & \frac{d^2uv_p}{dx^2} & \frac{d^2vu_1}{dx^2} & \frac{d^2vu_2}{dx^2} & \cdots & \frac{d^2vu_n}{dx^2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{d^{n+p-1}uv_1}{dx^{n+p-1}} & \frac{d^{n+p-1}uv_2}{dx^{n+p-1}} & \cdots & \frac{d^{n+p-1}uv_p}{dx^{n+p-1}} & \frac{d^{n+p-1}vu_1}{dx^{n+p-1}} & \frac{d^{n+p-1}vu_2}{dx^{n+p-1}} & \cdots & \frac{d^{n+p-1}vu_n}{dx^{n+p-1}}
\end{vmatrix} = 0.
$$

On reconnaît que cette équation est d'ordre $(n+p-1)$ par rapport à u et v; elle est homogène et de degré p par rapport à u et à ses dérivées, homogène et de degré n par rapport à v et à ses dérivées. Si l'on fait $v=1$, on a

$$u=y,$$

et si l'on fait $u=1$, on a

$$v=\frac{1}{y},$$

ce qui démontre la proposition énoncée ci-dessus relativement aux équations différentielles en y et en $\frac{1}{y}$.

Soient

$$
(38)\quad \begin{cases}
\dfrac{d^n u}{dx^n} = \alpha_1 \dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \alpha_2 \dfrac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots + \alpha_{n-1}\dfrac{du}{dx} + \alpha_n u, \\
\dfrac{d^p v}{dx^p} = \beta_1 \dfrac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}} + \beta_2 \dfrac{d^{p-2}v}{dx^{p-2}} + \ldots + \beta_{p-1}\dfrac{dv}{dx} + \beta_p v
\end{cases}
$$

les équations différentielles linéaires admettant pour intégrales générales, la première

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n,$$

la seconde

$$G_1 v_1 + G_2 v_2 + \ldots + G_p v_p.$$

L'équation (37) sera vérifiée si l'on y met pour u et v les fonctions les plus générales vérifiant les équations (38); à l'aide de ces équations, on pourra, par différentiation, exprimer toutes les dérivées de u d'ordre supérieur à $(n-1)$ en fonction linéaire homogène de u et de ses $(n-1)$ premières dérivées; on pourra de même exprimer toutes les dérivées de v d'ordre supérieur à $(p-1)$ en fonction linéaire homogène de v et de ses $(p-1)$ premières dérivées. Ces expressions, portées dans l'équation (37), la vérifieront *identiquement*, quelles que soient

$$\begin{array}{l} u, \quad \dfrac{du}{dx}, \quad \dfrac{d^2u}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}, \\ v, \quad \dfrac{dv}{dx}, \quad \dfrac{d^2v}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \dfrac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}}. \end{array}$$

De là un moyen de reconnaître si une équation différentielle d'ordre q, homogène et de degré p par rapport à y et à ses dérivées, admet une intégrale générale de la forme

$$y = \frac{C_1u_1 + C_2u_2 + \ldots + C_nu_n}{G_1v_1 + G_2v_2 + \ldots + G_pv_p}.$$

On aura d'abord

$$q = n + p - 1, \qquad n = q - (p-1),$$

ce qui exige $q > p - 1$. Le nombre n étant ainsi déterminé, on fera $y = \frac{u}{v}$, et il faudra que l'équation transformée soit homogène et de degré n en v. Enfin il restera à essayer si l'on peut trouver des fonctions de x, α_1, α_2, ..., α_n, β_1, β_2, ..., β_p telles, qu'en faisant

$$\begin{aligned} \frac{d^nu}{dx^n} &= \alpha_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \alpha_2\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots + \alpha_nu, \\ \frac{d^pv}{dx^p} &= \beta_1\frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}} + \beta_2\frac{d^{p-2}v}{dx^{p-2}} + \ldots + \beta_pv \end{aligned}$$

l'équation en $\frac{u}{v}$ soit vérifiée identiquement, quelles que soient

$$\begin{array}{l} u, \quad \dfrac{du}{dx}, \quad \dfrac{d^2u}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}, \\ v, \quad \dfrac{dv}{dx}, \quad \dfrac{d^2v}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \dfrac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}}. \end{array}$$

20. Supposons, par exemple, que l'on fasse

$$n=2, \qquad p=2,$$

$$(39) \qquad y=\frac{C_1 u_1+C_2 u_2}{G_1 v_1+G_2 v_2},$$

l'équation en $y=\frac{u}{v}$ sera alors du troisième ordre

$$(40) \qquad \begin{vmatrix} uv_1 & uv_2 & vu_1 & vu_2 \\ \frac{duv_1}{dx} & \frac{duv_2}{dx} & \frac{dvu_1}{dx} & \frac{dvu_2}{dx} \\ \frac{d^2uv_1}{dx^2} & \frac{d^2uv_2}{dx^2} & \frac{d^2vu_1}{dx^2} & \frac{d^2vu_2}{dx^2} \\ \frac{d^3uv_1}{dx^3} & \frac{d^3uv_2}{dx^3} & \frac{d^3vu_1}{dx^3} & \frac{d^3vu_2}{dx^3} \end{vmatrix}=0,$$

homogène et du second degré par rapport à la fonction u et à ses dérivées, et par rapport à la fonction v et à ses dérivées.

Si l'on fait $v=1$, $u=y$, on vérifie immédiatement que la plus haute dérivée y''' figure au premier degré dans l'équation différentielle, que le terme en $y'''y''$ a un coefficient nul, et que le terme en $y'''y'$ a pour coefficient

$$(v_2 v'_1 - v_1 v'_2)(u_2 u'_1 - u_1 u'_2),$$

expression différente de zéro, car les fonctions v_1 et v_2 sont linéairement indépendantes, u_1 et u_2 également. L'équation différentielle est donc de la forme

$$(41) \qquad \begin{cases} y'''(ay'+by)+a_0 y''^2+a_2 y'^2+a_3 y^2 \\ \qquad\qquad +2b_1 y'y''+2b_2 y''y+2b_3 yy'=0. \end{cases}$$

La transformée en $\frac{1}{y}$, obtenue en faisant $u=1$, doit être de la même forme. Si l'on a une équation du troisième ordre de la forme (41) telle que la transformée en $\frac{1}{y}$ soit de la même forme, pour voir si son intégrale générale est

$$(39) \qquad y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2}{G_1 v_1 + G_2 v_2},$$

on posera $y = \frac{u}{v}$ et l'on cherchera à vérifier l'équation proposée en faisant

$$u'' = \alpha_1 u' + \alpha_2 u, \qquad u''' = (\alpha_1^2 + \alpha'_1 + \alpha_2) u' + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha'_2) u,$$
$$v'' = \beta_1 v' + \beta_2 v, \qquad v''' = (\beta_1^2 + \beta'_1 + \beta_2) v' + (\beta_1 \beta_2 + \beta'_2) v.$$

Pour que l'intégrale générale soit de la forme (39), il faut et il suffit que, pour des déterminations convenables de α_1, α_2, β_1, β_2, les expressions précédentes de u'', u''', v'', v''' vérifient l'équation en $\frac{u}{v}$, quelles que soient u, v, u', v'.

On peut ramener les équations du troisième ordre et du second degré du type (41) à une forme réduite, dans laquelle b et b_1 seront nuls; les coefficients restants sont alors des *invariants absolus*. L'application de la méthode précédente fournirait les relations nécessaires et suffisantes qui lient ces invariants lorsque l'intégrale générale de l'équation est de la forme (39).

21. On pourrait plus généralement chercher un caractère distinctif des équations dont l'intégrale générale serait de la forme

$$y = \frac{C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n}{G_1 v_1 + G_2 v_2 + \ldots + G_p v_p},$$

les constantes C_1, C_2, ..., C_n, G_1, G_2, ..., G_p étant liées par m relations homogènes. Dans ce cas, l'intégrale générale ne dépendrait plus que de $(n + p - 1 - m)$ constantes arbitraires, et l'équation différentielle serait d'ordre $(n + p - 1 - m)$. Mais nous laissons pour une autre occasion cette étude, qui donnera une extension importante au théorème que nous avons eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences dans la séance du 19 novembre 1888.