JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 5 (1889), p. 135-319.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1889_4_5__135_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables ([1]);

PAR M. ÉMILE PICARD.

INTRODUCTION.

La théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes a déjà fait l'objet d'importants travaux, parmi lesquels il convient de citer tout particulièrement les mémorables recherches de M. Nœther (*Math. Annalen*, t. II à XI). L'éminent géomètre a principalement étudié la question au point de vue algébrique, en approfondissant l'étude de ces polynômes adjoints d'ordre $m-4$ (m désignant le degré de la surface), qui sont les analogues des polynômes adjoints d'ordre $m-3$, jouant un rôle si important dans la théorie des courbes planes algébriques. Il est arrivé ainsi à la notion de deux nombres invariantifs fondamentaux. Le premier, désigné par p et communément appelé *genre* de la surface (*Flächengeschlecht*), est égal au nombre des paramètres arbitraires figurant dans les polynômes adjoints Q d'ordre $m-4$. Le second nombre, désigné par p_1 (*Curvengeschlecht*), représente le genre de la courbe mobile d'intersection de la surface donnée avec les surfaces représentées par l'équation $Q = 0$.

Dans la théorie des courbes algébriques, on ne s'est pas borné au point de vue algébrique, et la considération de certaines expressions

([1]) Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (grand prix des Sciences mathématiques, 1888).

transcendantes attachées à la courbe présente le plus grand intérêt. Ces transcendantes sont, comme on sait, les intégrales de la forme

$$\int^{x} R(x,y)\,dx,$$

R étant une fonction rationnelle des coordonnées x et y, liées par la relation qui définit la courbe $f(x,y)=0$.

Une première extension du point de vue transcendant a été faite par M. Nœther, qui a, dans un de ses Mémoires (*Math. Annalen*, t. II), considéré les intégrales doubles

$$\int\int \frac{Q(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

Q étant toujours un polynôme adjoint d'ordre $m-4$. La considération de ces intégrales va jouer un rôle capital dans différentes parties de ce Mémoire. On pourrait les appeler des intégrales doubles de première espèce attachées à la surface. On peut, en effet, montrer que ces intégrales restent toujours finies, quel que soit le champ de l'intégration.

L'extension du point de vue transcendant aux surfaces algébriques peut se faire, d'une autre manière, en considérant les *intégrales de différentielles totales* de la forme

$$\int^{x,y} P\,dx + Q\,dy,$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de x, y, z liées par la relation qui définit la surface $f(x,y,z)=0$.

C'est de l'étude de ces intégrales que nous nous sommes tout d'abord occupé. Nous les partageons en intégrales de première, seconde et troisième espèce, comme dans la théorie des courbes algébriques. Nous avions déjà commencé cette étude dans deux Mémoires du *Journal de Mathématiques* (1885 et 1886). Nous reprenons entièrement ici la théorie des intégrales de seconde espèce, dont plusieurs points avaient besoin d'être précisés. Nous établissons d'abord que de telles intégrales n'existent pas, *en général*, pour une surface algébrique, je veux dire qu'il n'y a pas, pour une surface arbitraire, d'autres intégrales de seconde espèce que des fonctions rationnelles des coordonnées. Laissant celles-ci de côté, il faut reconnaître si une surface donnée admet des intégrales de seconde espèce, et apprendre à les former si elles existent. C'est à ce problème qu'est consacrée la plus grande partie du premier Chapitre de ce Mémoire. Nous ramenons sa solution à une question d'une tout autre nature, à l'étude des intégrales rationnelles d'une équation différentielle linéaire. Avant d'approfondir davantage la théorie des intégrales de seconde et de troisième espèce, nous avons dû étudier une question capitale en elle-même, c'est celle *des cycles des surfaces algébriques ;* elle fait l'objet du second Chapitre.

On connaît toute l'importance de la théorie des cycles dans l'étude des courbes algébriques. La pensée d'édifier une théorie analogue pour les surfaces algébriques se présentait naturellement : c'est ce que j'ai essayé de faire. Mais tout d'abord il convient de remarquer que la généralisation peut se faire dans deux directions différentes ; il y a à considérer pour les surfaces *des cycles à une dimension ou linéaires*, et *des cycles à deux dimensions ;* d'où deux théories entièrement distinctes.

En pénétrant dans la première étude, on rencontre dès le début un résultat au premier abord inattendu : c'est qu'en général, pour une surface algébrique, *il n'y a pas de cycles linéaires*, je veux dire qu'ils se réduisent tous à des cycles nuls. Il y a cependant des surfaces possédant effectivement des cycles linéaires, et le problème se pose de rechercher les cycles distincts d'une surface algébrique. Dans cette difficile question, la *réductibilité* d'une certaine équation différentielle linéaire joue un rôle essentiel. Au point de vue pratique, les méthodes que nous proposons seraient, sans doute, d'une pénible application, mais notre principal objet a été de jeter quelque lumière sur une théorie entièrement nouvelle.

Relativement *aux cycles à deux dimensions*, nous avons cherché à montrer à quel problème, relatif aux équations linéaires, pouvait être ramenée leur étude. Ces cycles existent d'ailleurs en général ; c'est donc là qu'on trouvera la véritable généralisation de la théorie des cycles des courbes algébriques, que n'ont pu donner, comme on vient de le voir, les cycles linéaires.

On voit, par ce qui précède, les différences profondes qui séparent la théorie des fonctions algébriques d'une variable de la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. L'analogie, qui souvent est un guide excellent, peut devenir ici bien trompeuse.

Les méthodes employées dans ce Chapitre nous ont permis de compléter la théorie des intégrales de seconde et de troisième espèce. Je citerai seulement ici le théorème suivant : *Le nombre des intégrales distinctes de seconde espèce est égal au nombre de leurs périodes.*

Nous nous occupons dans le troisième Chapitre des transformations birationnelles des surfaces en elles-mêmes. Ce Chapitre peut être considéré comme une application de nos résultats généraux sur les intégrales de différentielles totales. L'étude des transformations d'une surface en elle-même est très différente suivant le genre de la surface. Quand ce genre p est supérieur à un, les transformations ne peuvent contenir plus d'un paramètre arbitraire. Si le genre est au plus égal à un et que la surface admette un groupe continu de transformations birationnelles en elle-même, ou bien on pourra tracer sur elle un réseau de courbes du genre zéro ou un, ou bien la surface jouira de la propriété remarquable que voici : il existera deux intégrales de différentielles totales

$$P\,dx + Q\,dy \qquad \text{et} \qquad P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

telles que les deux équations

$$\begin{aligned} P\,dx + Q\,dy &= du, \\ P_1\,dx + Q_1\,dy &= dv \end{aligned}$$

donneront pour x, y, z des *fonctions uniformes de u et v*. Nous étudions spécialement cette classe intéressante de surfaces, *qui sont vraiment les analogues des courbes planes de genre zéro et un.*

Dans le quatrième Chapitre, nous complétons la théorie précédente; nous faisons voir comment on pourra reconnaître si deux surfaces de genre supérieur à un se correspondent point par point, et nous établissons notamment, par deux voies différentes, que deux surfaces de genre supérieur à l'unité ne peuvent admettre une infinité *discontinue* de transformations birationnelles.

Le cinquième Chapitre a pour objet l'application de quelques-uns des résultats précédents à l'étude de certaines équations différentielles. Nous nous occupons particulièrement des équations de la forme

$$f(y, y', y'') = 0,$$

f étant un polynôme, dans le cas où l'intégrale générale est uniforme. C'est une théorie très difficile, et la raison de cette difficulté est dans le fait suivant, signalé au troisième Chapitre : une surface algébrique peut admettre une transformation *biuniforme* en elle-même, qui ne soit pas *birationnelle,* tandis que, pour les courbes algébriques au contraire, une telle transformation est nécessairement birationnelle.

Tout d'abord nous examinons le cas particulier où une certaine transformation biuniforme de la surface f serait birationnelle. Toute cette étude est intimement liée à celle des surfaces étudiées au Chapitre III; dans ce cas, l'intégrale générale s'exprimera par des transcendantes connues. Nous avons voulu ensuite examiner le cas général, mais un point extrêmement délicat se présente. Il est relativement facile de reconnaître si l'intégrale générale est *à apparence uniforme,* c'est-à-dire est uniforme dans le voisinage de tout point à l'intérieur de la région où doit rester la variable indépendante; mais nous ne sommes pas autorisé pour cela à regarder l'intégrale générale comme une fonction uniforme. Nous avons spécialement considéré le cas où l'équation a la forme

$$y'' = \mathrm{R}(y, y'),$$

R étant rationnelle en y et y'. Il nous a paru curieux de montrer comment on pouvait mettre l'intégrale y sous la forme d'un quotient de deux fonctions à apparence uniforme, *n'ayant plus de pôles,* fonctions que l'on peut regarder comme une généralisation des fonctions Al ou des fonctions Θ de la théorie des fonctions elliptiques.

Nous considérons aussi les équations plus générales

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

où f est un polynôme en y, y' et y'', dans l'hypothèse où les points critiques de l'intégrale générale seraient fixes. C'est l'extension au second ordre du problème posé par M. Fuchs pour les équations du premier ordre, problème sur lequel M. Poincaré a écrit quelques pages si remarquables. Ici encore une certaine transformation biuniforme joue un rôle essentiel; nous ne nous occupons que du cas où cette transformation serait birationnelle.

Dans le sixième Chapitre, nous généralisons la notion d'intégrale de première espèce en envisageant les fonctions u de (x, y, z) qui se transforment en $au + b$ (a et b étant des constantes), quand (x, y, z) décrit un cycle linéaire effectif de la surface. Une pareille généralisation peut aussi être faite pour les courbes algébriques; nous lui consacrons quelques pages au début du Chapitre.

CHAPITRE I.

INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

I. — Généralités.

1. Étant donnée une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

nous allons considérer les intégrales de différentielles totales de la forme

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy, \tag{1}$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x, y et z. On suppose, bien entendu, que la condition d'intégrabilité est satisfaite; l'intégrale précédente est alors une fonction du point analytique (x, y, z), et en un point (x, y, z) les diverses valeurs de l'intégrale ne diffèrent que d'une somme de multiples de périodes.

Les intégrales précédentes peuvent être partagées en trois espèces.

Les intégrales de première espèce sont celles qui restent finies pour tout système de valeurs des variables indépendantes x et y.

Nous allons, pour le moment, définir comme il suit les intégrales de seconde espèce : considérons les courbes le long desquelles l'intégrale devient infinie. Soit C une de ces courbes, et supposons qu'elle soit une courbe simple de la surface; je prends alors un cycle infiniment petit *entourant* cette courbe en un point arbitraire (on peut, par exemple, donner à y une valeur fixe, et considérer dans le plan de la variable x un contour infiniment petit autour d'un point de la courbe C, répondant à la valeur prise pour y); si l'intégrale le long de ce cycle est nulle, nous dirons que la courbe C est une courbe polaire. *Une intégrale de seconde espèce ne possède que des courbes polaires.*

Il a été supposé que la courbe C était une courbe simple de la surface. Le cas où elle serait une courbe multiple ne donne lieu à aucune difficulté; nous pouvons en effet, comme l'a montré M. Nœther (*Göttingen Nachrichten*, p. 267; 1871), résoudre cette singularité par une transformation rationnelle. La courbe C se transformera ainsi en plusieurs courbes simples.

On pourrait encore dire que l'intégrale (1) sera une intégrale de seconde espèce, au sens habituel de la théorie des courbes algébriques, pour une section plane quelconque de la surface ([1]).

Si l'intégrale le long d'un contour infiniment petit, analogue à celui dont nous avons parlé, n'est pas nulle, cette courbe C sera dite une courbe logarithmique, *et l'intégrale sera de troisième espèce.*

Dans le cas des intégrales de troisième espèce, à une courbe logarithmique correspond évidemment une période. Une telle période sera dite une *période polaire.*

2. Une première remarque va nous être fort utile dans l'étude des

---

([1]) Nous aurons à revenir ultérieurement sur cette définition des intégrales de seconde espèce, où nous ne nous sommes pas occupé des points singuliers isolés de la surface (Chap. II), où l'intégrale pourrait devenir infinie.

intégrales précédentes. Soit l'intégrale de différentielle totale

$$\int P\,dx + Q\,dy;$$

j'envisage l'intégrale

$$(2)\qquad \int P(x, y, z)\,dx$$

comme une intégrale abélienne attachée à la relation entre x et z

$$f(x, y, z) = 0;$$

la lettre y dans l'intégrale (2), comme dans cette dernière équation, est considérée comme un paramètre, d'ailleurs arbitraire. Les périodes de l'intégrale (2) seront nécessairement des périodes de l'intégrale (1), car elles correspondent à un cycle dans lequel y reste constant; *ces périodes ne dépendent donc pas du paramètre y.*

Cela posé, considérant toujours la courbe f avec le paramètre y, soit

$$I = \int \varphi(x, y, z)\,dx,$$

φ étant rationnelle en x, y, z, une intégrale abélienne de la courbe f n'ayant pas pour y arbitraire de périodes polaires, c'est-à-dire une intégrale de première ou de seconde espèce. Les périodes de l'intégrale I peuvent être regardées comme une fonction de y, et M. Fuchs a montré (*Journal de Crelle*, t. 73) qu'elles satisfont à une équation linéaire dont les coefficients sont des polynômes en y, et dont l'ordre est au plus égal au genre de la relation f, et est même égal à ce genre si l'intégrale est prise arbitrairement. Le groupe de cette équation sera évidemment indépendant de la fonction φ, et *chaque substitution linéaire de ce groupe revient à une transformation des cycles de la fonction algébrique z de x.*

Si la surface $f(x, y, z) = 0$ est la plus générale de son degré, l'ordre de l'équation sera égal au genre de cette relation entre x et z, et les substitutions du groupe de cette équation linéaire seront à coefficients entiers.

Considérons un instant un cas très particulier; soit

$$z^2 = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_{2p})(x - y),$$

où les a sont des constantes distinctes. Prenons les périodes de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x - a_1)\dots(x - a_{2p})(x - y)}};$$

elles satisfont à une équation d'ordre $2p$, qui rentre d'ailleurs dans le type hypergéométrique d'ordre supérieur, et ses points critiques sont

$$a_1, \; a_2, \; \dots, \; a_{2p} \quad \text{et} \quad \infty.$$

De plus, dans le voisinage de $y = \infty$, les racines de l'équation fondamentale déterminante de M. Fuchs sont

$$r = \tfrac{1}{2}, \qquad r' = p - \tfrac{1}{2},$$

la première étant d'ordre $2p - 1$; donc l'équation aux multiplicateurs de la substitution correspondante aura une racine multiple *d'ordre* $2p$, égale à -1.

Cette dernière remarque nous montre que, si l'on considère une substitution arbitraire du groupe de l'équation, soit

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \omega_1 \;= m_1^1\,\omega_1 + m_1^2\omega_2 + \dots + m_1^{2p}\omega_{2p}, \\ \omega_2 \;= m_2^1\,\omega_1 + m_2^2\omega_2 + \dots + m_2^{2p}\omega_{2p}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega_{2p} = m_{2p}^1\omega_1 + \dots\dots\dots\dots + m_{2p}^{2p}\omega_{2p}, \end{array}\right.$$

l'équation aux multiplicateurs

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} m_1^1 - S & m_1^2 & m_1^{2p} \\ m_2^1 & m_2^2 - S & m_2^{2p} \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ m_{2p}^1 & \dots\dots & m_{2p}^{2p} - S \end{vmatrix} = 0$$

n'admettra pas la racine $S = 1$, puisque, dans le cas particulier considéré, on a l'unique racine, d'ordre $2p$, $S = -1$.

Ce qui vient d'être vérifié dans ce cas particulier s'applique évidemment au cas général, c'est-à-dire que, si nous revenons à l'intégrale I, la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

étant la plus générale de degré m, et la substitution (3) désignant une substitution arbitraire du groupe de l'équation linéaire E, d'ordre $2p$, correspondante, l'équation (4) ne sera pas vérifiée pour $S = 1$.

5. Cette remarque faite, soit

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

une intégrale de différentielle totale de première ou de seconde espèce, correspondant à la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

la plus générale de son degré.

Les périodes de $\int P\,dx$ sont des quantités indépendantes de y,

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p},$$

mais la transformation des cycles correspondant à une substitution quelconque donne, puisque ces quantités sont des constantes, les relations

$$\begin{aligned}
a_1 &= m_1^1 a_1 + m_1^2 a_2 + \ldots + m_1^{2p} a_{2p},\\
a_2 &= m_2^1 a_1 + m_2^2 a_2 + \ldots + m_2^{2p} a_{2p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{2p} &= m_{2p}^1 a_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_{2p}^{2p} a_{2p},
\end{aligned}$$

équations qui, d'après la remarque de la fin du paragraphe précédent, doivent nécessairement donner

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad a_{2p} = 0.$$

Les périodes de l'intégrale sont donc nulles.

Par suite, si elle est de première espèce, l'intégrale se réduira à une constante, et si elle est une intégrale de seconde espèce, ce sera une fonction rationnelle de x, y et z.

Ainsi se trouvent établis bien rapidement les deux théorèmes que j'ai énoncés et démontrés précédemment, concernant les intégrales de première et de seconde espèce, attachées à la surface la plus générale de degré m.

4. On peut établir pour les intégrales de *troisième* espèce une proposition analogue à la précédente. Nous avons dit (n° 1) ce qu'on devait entendre par période polaire d'une telle intégrale; une période polaire provient d'un cycle infiniment petit autour d'un point quelconque d'une courbe logarithmique de l'intégrale.

Une intégrale de troisième espèce peut, *a priori*, avoir d'autres périodes que des périodes polaires, mais nous allons montrer qu'il n'en est cependant pas ainsi en général. Nous établirons, à cet effet, que si la surface f est la plus générale de son degré, *les périodes de toute intégrale de troisième espèce se réduisent aux périodes polaires.*

Il sera plus net de commencer la démonstration par un cas particulier; ce sera celui de la surface

$$z^2 = f(x, y),$$

où f est le polynôme général de degré m en x et y.

La forme générale des intégrales de différentielles totales correspondant à cette surface sera

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x, y)}},$$

P, Q, M désignant des polynômes en x et y, en laissant seulement de côté un terme de la forme

$$R(x, y) + A \log R_1(x, y),$$

où R et R_1 sont des fractions rationnelles en x et y, et où A est une constante. La condition d'intégrabilité s'écrira

$$M\left(P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f(x, y)\left[M\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + Q\frac{\partial M}{\partial x} - P\frac{\partial M}{\partial y}\right].$$

Supposons que $M(x, y)$ ne soit pas divisible par $f(x, y)$ et soit, par suite, premier avec lui. Comme on a pu faire d'abord sur x et y une transformation linéaire quelconque, on peut supposer que la courbe

$$M(x, y) = 0$$

ne rencontre pas la courbe $f(x, y) = 0$ (qui n'a que des points simples) en un point où l'on ait

$$\text{soit} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \text{soit} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Ceci posé, considérons l'intégrale fonction de x

$$\int \frac{P\,dx}{M\sqrt{f(x, y)}};$$

nous avons dit que ses périodes ne dépendent pas de y.

Donnons à y une valeur arbitraire y_0, l'équation

$$f(x, y_0) = 0$$

aura m racines distinctes entre elles,

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m$$

et distinctes des racines de l'équation $M(x, y) = 0$.

Les périodes cycliques de l'intégrale proviendront des intégrales prises le long de courbes joignant les points

$$x_1 x_2, \quad x_2 x_3, \quad \ldots, \quad x_{m-1} x_m,$$

ces courbes étant considérées comme doubles ou, pour plus de précision, le long de contours s'éloignant peu de ces courbes doubles et enveloppant respectivement x_1 et x_2, x_2 et x_3, ...

Il existera un certain nombre de valeurs singulières de y, pour lesquelles l'équation $f(x, y) = 0$ aura une racine double.

Soit $y = b$ une telle valeur, l'équation

$$f(x, b) = 0$$

aura une racine double et une seule; soit $x = a$. Je dis que

$$P(a, b) = 0.$$

En effet, d'après ce que nous avons supposé, $M(a, b)$ n'est pas nul, et par suite, en se reportant à la condition d'intégrabilité,

$$P(a, b) f'_y(a, b) = 0;$$

or le second facteur ne peut être nul, puisque la courbe n'a pas de points multiples : donc $P(a, b) = 0$.

Cette remarque faite, nous pouvons supposer les racines $x_1, \ldots, x_m$ rangées dans un ordre tel que, y allant de y_0 à la valeur singulière b, par un chemin convenable, x_1 et x_2 deviennent égales; puis ensuite, y allant de y_0 à une autre valeur singulière, x_2 et x_3 deviennent égales, et ainsi de suite; y allant de y_0 à b, les racines deviennent, pour $y = b$,

$$x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_m,$$

et l'on aura

$$x'_1 = x'_2 = a,$$

les autres racines étant distinctes. Si nous faisons $y = y_0$, on a pour un système de coupures joignant

$$x_1 x_2, \quad x_2 x_3, \quad \ldots$$

un système de périodes; on peut supposer que ces coupures se déforment d'une manière continue quand y varie de y_0 à b, sans rencontrer les courbes décrites par les racines de l'équation $M(x, y) = 0$.

Je dis que la période relative à $\overline{x_1 x_2}$ est nulle; en effet, elle reste constante quand y varie; or, pour $y = b$, on a

$$x'_1 = x'_2 = a,$$

et $\sqrt{f(x, b)}$ contient $x - a$ en facteur.

Mais il en est de même du numérateur, puisque $P(a, b) = 0$; par suite, l'intégrale prise le long d'une petite courbe enveloppant le point a est nulle, et il en est par suite de même de la période cyclique initiale, correspondant à y arbitraire. Le théorème est démontré.

5. La méthode de démonstration employée dans le cas particulier qui précède peut être suivie pour la surface la plus générale

$$f(x, y, z) = 0.$$

Soit

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{Mf'_z}$$

l'intégrale considérée, P, Q et M étant des polynômes en x et y; M est un polynôme de degré μ; le degré de P est $\mu + m - 2$ par rapport à x, y et z et $\mu + m - 3$ par rapport à x et z; pareillement le degré de Q est $\mu + m - 2$ en x, y et z, et $\mu + m - 3$ en y et z. L'intégrale aura une ou plusieurs courbes logarithmiques situées sur la surface $M = 0$; on peut supposer que pour ces courbes on n'a pas $f'_z = 0$, puisqu'il suffirait de faire une substitution linéaire sur x, y et z pour éviter cet inconvénient.

Écrivons la condition d'intégrabilité qui va nous être utile dans un instant : ce sera, en posant $\frac{P}{M} = P_1$, $\frac{Q}{M} = Q_1$,

$$\begin{aligned} f'_z\left(\frac{\partial P_1}{\partial y} f'_z - \frac{\partial P_1}{\partial z} f'_y\right) - P_1(f''_{zy} f'_z - f''_{z^2} f'_y) \\ - \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} f'_z - \frac{\partial Q_1}{\partial z} f'_x\right) f'_z + Q_1(f''_{zx} f'_z - f''_{z^2} f'_x) = 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant les deux relations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f'_z(x, y, z) = 0;$$

on peut les regarder comme définissant un point analytique (z, x), fonction algébrique de la variable y.

Il y aura certaines valeurs de y pour lesquelles deux valeurs de (z, x) et deux seulement (le polynôme f étant le plus général de son degré) deviendront égales. Soient, pour une valeur arbitraire et non singulière y_0 de y,

$$(z_1, x_1), \quad (z_2, x_2), \quad \ldots, \quad (z_N, x_N)$$

les N déterminations de (z, x). On peut les supposer rangées dans un ordre tel que, y allant de y_0 à une certaine valeur singulière b de y,

$$(z_1, x_1) \quad \text{et} \quad (z_2, x_2)$$

deviennent égaux; puis ensuite, y allant de y_0 à une autre valeur singulière convenable,

$$(z_2, x_2) \quad \text{et} \quad (z_3, x_3)$$

deviennent égaux; et ainsi de suite pour

$$(z_3, x_3), \quad \text{et} \quad (z_4, x_4), \quad \ldots, \quad (z_{N-1}, x_{N-1}) \quad \text{et} \quad (z_N, x_N);$$

y allant de y_0 et arrivant à la première valeur singulière b, les points analytiques (z, x) varieront et deviendront

$$(z'_1, x'_1), \quad (z'_2, x'_2), \quad \ldots, \quad (z'_N, x'_N)$$

et l'on aura

$$(z'_1, x'_1) = (z'_2, x'_2) = (c, a).$$

Le point (a, b, c) est, en langage géométrique, un point de la surface f où le plan tangent est parallèle au plan des xz. On aura donc

$$f(a, b, c) = 0, \qquad f'_z(a, b, c) = 0, \qquad f'_a(a, b, c) = 0.$$

En nous reportant à la condition d'intégrabilité, on conclut que

$$P_1(a, b, c)\, f''_{z^2}(a, b, c)\, f'_y(a, b, c) = 0;$$

mais les deux derniers facteurs ne sont pas nuls, à cause de l'hypothèse faite sur la surface f; nous avons donc

$$P_1(a, b, c) = 0.$$

Il nous faut maintenant étudier la relation algébrique entre z, x pour une valeur arbitraire y_0 de y

$$f(x, y_0, z) = 0;$$

les points analytiques (z_1, x_1), (z_2, x_2), $\ldots$, (z_N, x_N) sont les points de ramification de cette fonction. On peut tracer dans le plan de la variable complexe x un contour simple enveloppant seulement les points x_1 et x_2, et tel qu'après un tour complet de la variable le long de ce contour toute racine z de l'équation précédente reprenne la même valeur.

En effet, l'équation

$$f(x, b, z) = 0$$

définit une courbe qui, au point $x = a$, $z = c$, a un point double dont les tangentes sont distinctes. Quand y varie, comme il a été dit, de y_0 à b, x_1 et x_2 viennent tous deux en a : or considérons un contour simple enveloppant les points x_1, x_2 et a, et n'étant traversé par aucun des chemins que décrivent les autres racines; ce contour sera un cycle pour le point analytique (x, z) défini par l'équation

$$f(x, y_0, z) = 0;$$

car, si, partant d'un point arbitraire du contour, avec une certaine racine, on obtenait au retour une autre racine, il faudrait qu'il en fût de même pour toute la succession des valeurs de y, depuis y_0 jusqu'à b; or, pour $y = b$, on revient nécessairement avec la même valeur, puisque $x = a$ n'est pas un point de ramification pour l'équation

$$f(x, b, z) = 0.$$

Considérons maintenant la surface de Riemann correspondant à la relation algébrique

$$f(x, y_0, z) = 0.$$

Nous allons tracer sur cette surface un système particulier de coupures, à savoir des arcs de courbe joignant

$$(z_1, x_1) \text{ à } (z_2, x_2), \qquad (z_2, x_2) \text{ à } (z_3, x_3), \qquad \ldots,$$
$$(z_{N-1}, x_{N-1}) \text{ à } (z_N, x_N).$$

Toutes les périodes cycliques seront données par des intégrations le long de chacune de ces coupures considérées comme lignes doubles, ou, mieux, le long de courbes fermées voisines de la coupure et analogues au contour dont j'ai parlé plus haut. Les périodes correspondant aux $N - 1$ coupures pourront d'ailleurs n'être pas toutes distinctes.

Cela dit, nous revenons à l'intégrale, fonction de x,

$$\int \frac{P\,dx}{Mf'_z},$$

dont les périodes ne dépendent pas de y. Or que va devenir l'intégrale prise le long de C_1, quand $y = b$; les points (z_1, x_1) et (z_2, x_2) deviennent tous deux égaux à (a, c), et $f'_z(x, b, z)$ va contenir en facteur $x - a$; mais, et c'est là une remarque essentielle, $P(x, b, z)$ contiendra le même facteur, puisque nous avons établi que

$$P_1(a, b, c) = 0.$$

Donc le point $(x = a, z = c)$, qui cesse d'être un point de ramification, ne sera pas non plus un pôle: l'intégrale le long de C_1 sera donc nulle.

Ainsi il est démontré que *toutes les périodes cycliques de l'intégrale*

$$\int \frac{P\,dx}{Mf'_z}$$

sont nulles. Il en est donc de même de celles de l'intégrale de différentielle totale, comme nous voulions l'établir.

En résumé, étant donnée une surface algébrique générale, et étant considérée une intégrale quelconque de différentielle totale, relative à cette surface, cette intégrale (à moins qu'elle ne soit une fonction rationnelle de x, y, z) aura nécessairement des courbes logarithmiques, *et les périodes polaires correspondant à ces courbes logarithmiques seront les seules périodes de l'intégrale.*

II. — Réduction des intégrales de seconde espèce.

6. Cherchons maintenant à effectuer la réduction de ces intégrales. Je prends d'abord une surface dont l'équation ait la forme

$$z^2 = f(x, y);$$

on supposera, comme il est permis, que dans le polynôme $f(x, y)$ de degré m se trouve un terme en x^m, et que $f(x, y)$ n'admette pas de facteur carré parfait.

Soit l'intégrale de différentielle totale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}},$$

P et Q étant des polynômes en x et y. La condition d'intégrabilité peut s'écrire

$$P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x} = 2f(x, y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Soit k le degré de P et Q en x et y; supposons $k \geqq m - 1$.

Si nous considérons l'intégrale (où pour un moment y n'est qu'un paramètre)

$$\int \frac{P\,dx}{\sqrt{f(x, y)}},$$

nous pouvons retrancher une expression $Cx^{k-m+1}\sqrt{f(x, y)}$ (C ne dépendant pas de x), de telle sorte que, dans la différence, P soit remplacé par un polynôme, seulement de degré $k - 1$ en x; il suffit, pour cela, que dans

$$P(x, y) - C\left[(k - m + 1)x^{k-m}f(x, y) + \frac{1}{2}x^{k-m+1}\frac{\partial f}{\partial x}\right]$$

le coefficient de x^k disparaisse. Si dans $P(x, y)$ il n'y a pas de terme en x^k, C sera nul; s'il y a un terme en x^k dans P, on aura pour C une constante, *même par rapport à y*. Retranchons alors de $\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}}$ la fonction de x et y

$$Cx^{k-m+1}\sqrt{f(x, y)},$$

nous avons une intégrale

$$\int \frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{\sqrt{f(x, y)}},$$

où P_1 et Q_1 sont toujours de degré k en x et y, mais P_1 sera seulement de degré $k - 1$ en x. Recommençons un raisonnement analogue si $k \geqq m$;

nous allons de $\int \frac{P_1\,dx}{\sqrt{f(x,y)}}$ retrancher une expression

$$Cx^{k-m}\sqrt{f(x,y)},$$

de telle sorte que, dans la différence, le numérateur soit seulement de degré $k-2$ en x. On a, pour cela, à choisir C de manière que, dans

$$P_1 - C\left[(k-m)x^{k-m-1}f(x,y) + \frac{1}{2}x^{k-m}\frac{\partial f}{\partial x}\right],$$

le terme en x^{k-1} disparaisse; C ainsi déterminé sera, en général, un polynôme du premier degré en y. Retranchons alors de $\int \frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{\sqrt{f(x,y)}}$ la fonction de x et y

$$Cx^{k-m}\sqrt{f(x,y)},$$

on aura

$$\int \frac{P_2\,dx + Q_2\,dy}{\sqrt{f(x,y)}},$$

P_2 et Q_2 étant toujours de degré k en x et y, mais P_2 étant seulement de degré $k-2$ en x.

En continuant ainsi, on arrivera à une intégrale que nous désignerons encore par

$$(1)\qquad \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x,y)}},$$

dans laquelle P et Q seront au plus de degré k en x et y; mais P sera seulement de degré $m-2$ par rapport à x. La condition d'intégrabilité montre alors que Q sera au plus de degré $m-1$ par rapport à x. Nous avons donc l'intégrale (1), où

$$(2)\qquad \begin{cases} P = a_0x^{m-2} + a_1x^{m-3} + \ldots + a_{m-2}, \\ Q = b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}, \end{cases}$$

les b et les a étant des polynômes en y. Nous pourrions partir de cette forme et effectuer une réduction analogue, en prenant pour point de départ l'intégrale

$$\int \frac{Q\,dy}{\sqrt{f(x,y)}},$$

mais nous ne gagnerions rien à cette réduction, qui élèverait le degré de P et Q par rapport à x.

Nous ferons donc seulement la réduction qui nous donne l'intégrale (1), où P et Q ont la forme (2). La condition d'intégrabilité

$$\left(P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f(x,y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

va nous donner maintenant un système d'équations différentielles linéaires ordinaires.

Nous aurons d'abord à chercher si l'on pourra satisfaire à ce système *en prenant pour*

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{m-2}, \quad b_0, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_{m-1}$$

des polynômes en y.

J'avais déjà obtenu le système d'équations différentielles qui précèdent dans mon Mémoire sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce. On peut vérifier facilement que les intégrales de ce système sont régulières (d'après l'expression de M. Fuchs) dans le voisinage de tous leurs points critiques. C'est là un point important, car ce n'est que si toutes les intégrales sont régulières qu'on pourra reconnaître aisément si les équations admettent, comme intégrales particulières, un système de polynômes.

Cela posé, admettons que les équations différentielles soient vérifiées pour un système de polynômes (a, b); on aura alors l'intégrale

$$\int \frac{(a_0 x^{m-2} + \ldots)\,dx + (b_0 x^{m-1} + \ldots)\,dy}{\sqrt{f(x,y)}},$$

je dis qu'elle ne se réduira certainement pas à une fonction algébrique. Il faudrait, en effet, pour cela que l'intégrale, fonction de x (y étant alors un paramètre arbitraire),

$$\int \frac{a_0 x^{m-2} + \ldots + a_{m-2}}{\sqrt{f(x,y)}}\,dx,$$

fût une fonction algébrique de x. Or, si l'intégrale précédente est une fonction algébrique, elle sera nécessairement de la forme

$$\lambda(x)\sqrt{f(x, y)},$$

$\lambda(x)$ étant un polynôme en x; mais cela est impossible, car la différentielle totale de $\lambda(x)\sqrt{f(x, y)}$ est

$$\frac{\lambda'(x)f(x, y) + \frac{1}{2}\lambda(x)\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{f(x, y)}}$$

et le degré du numérateur par rapport à x est au moins $m - 1$.

Il ne reste plus maintenant qu'à rechercher si l'intégrale obtenue n'a pas de courbe logarithmique.

Les seules courbes logarithmiques possibles sont à l'infini. Employons donc les coordonnées homogènes x, y, z et t; l'équation de la surface deviendra

$$z^2 t^{m-2} = f(x, y, t);$$

pour $t = 0$, nous avons le système de *droites*

$$f(x, y, 0) = 0.$$

Ces m droites peuvent être des courbes logarithmiques de l'intégrale; nous aurons à écrire ou à vérifier que la période polaire correspondant à chacune d'elles est nulle. Il n'y aura ainsi bien évidemment que $(m - 1)$ conditions à vérifier, car la somme des périodes polaires est nécessairement nulle.

En résumé, nous venons d'étudier les intégrales

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}},$$

où P et Q sont des polynômes en x et y, et nous savons reconnaître si, parmi les intégrales de cette forme, *il y en a de seconde espèce*.

7. Le problème que nous venons de traiter n'est qu'un cas particulier du problème général de la réduction des intégrales de seconde espèce; prenons maintenant le cas général. Soit donc

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x,y)}}$$

(P, Q, M étant des polynômes en x et y) une intégrale quelconque de seconde espèce. Nous supposerons, comme il est permis, que dans f l'ensemble des termes homogènes du plus haut degré m n'est pas divisible par y.

Une première réduction, très facile, consiste à ramener, par soustraction d'une fonction algébrique, l'intégrale précédente à la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\sqrt{f(x,y)}},$$

$\chi(y)$ étant un polynôme en y. Réduisons donc, autant qu'il est possible, une intégrale de cette forme.

Soit $y = a$ une racine multiple d'ordre α de l'équation $\chi(y) = 0$; α sera plus grand que un, sinon l'intégrale serait de troisième espèce. La condition d'intégrabilité

$$\chi(y)\left[P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right] = 2f(x,y)\left[\chi(y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) - P\frac{\partial \chi}{\partial y}\right]$$

montre que $P(x,y)$ est divisible par $y - a$.

Pourrons-nous remplacer l'intégrale proposée par une intégrale de même forme, mais où, à la place de $\chi(y)$, nous aurons au dénominateur

$$\frac{\chi(y)}{y-a}.$$

Retranchons à cet effet de l'intégrale une expression de la forme

$$\frac{\lambda(x,y)\sqrt{f}}{(y-a)^{\alpha-1}}.$$

Dans cette différence, le coefficient de dx sous le signe d'intégration sera divisible par $y - a$, puisque P est divisible par $y - a$; quant au coefficient de dy, il sera divisible par $y - a$ si

$$Q(x, y) + (\alpha - 1)\lambda(x, y)f(x, y)$$

est divisible par $y - a$; il faut pour cela que

$$Q(x, a) + (\alpha - 1)\lambda(x, a)f(x, a) = 0;$$

donc $Q(x, a)$ doit être divisible par $f(x, a)$. Cette condition sera remplie si $y = a$ n'a que des points simples de rencontre avec la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

La condition d'intégrabilité donne en effet, en remplaçant P par $(y - a)P_1$ et faisant $y = a$,

$$-Q(x, a)f_x(x, a) = 2f(x, a)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} - \alpha P_1 \chi_1\right)_{y=a},$$

χ_1 étant un polynôme en y.

D'après l'hypothèse $f(x, a)$ et $f'_x(x, a)$ n'auront pas de racine commune : donc $Q(x, a)$ sera divisible par $f(x, a)$.

Le polynôme λ pourra donc être déterminé, de manière à satisfaire à la condition indiquée. En continuant ainsi de proche en proche, on arrivera à une intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi_1(y)\sqrt{f(x, y)}}$$

où

$$\chi_1(y) = \frac{\chi(y)}{(y - a)^\alpha}.$$

On pourra donc, en continuant, faire disparaître du dénominateur tous les facteurs $(y - a)^\alpha$ correspondant à une droite $y = a$, qui n'a que des points simples de rencontre avec la courbe $f(x, y) = 0$.

8. Envisageons donc l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\psi(y)\sqrt{f(x, y)}},$$

où $\psi(y)$ n'admet d'autres racines $a, b, \ldots, l$, à un degré d'ailleurs quelconque de multiplicité, que celles de l'équation $\varphi(y) = 0$ résultant de l'élimination de x entre

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

En raisonnant sur cette intégrale comme au n° **6**, nous la ramènerons par des soustractions de fonctions algébriques à la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dx}{\sqrt{f(x, y)}},$$

où

$$P = A_0 x^{m-2} + A_1 x^{m-3} + \ldots,$$
$$Q = B_0 x^{m-1} + \ldots,$$

les A et les B étant ici, non plus des polynômes, mais des fonctions rationnelles de y, dont le dénominateur ne peut s'annuler que pour a, b, ..., l.

Nous aurons donc à considérer, comme plus haut, le système d'équations différentielles en

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad B_0, \quad B_1, \quad \ldots$$

donné par la condition d'intégrabilité, et à rechercher si l'on peut satisfaire à ces équations en prenant pour les A et B des fonctions rationnelles de y, question qui ne présentera pas de difficulté, puisque les intégrales du système sont régulières dans le voisinage de tous les points critiques.

Supposons qu'il soit possible de satisfaire aux conditions précédentes. Il faut maintenant reconnaître si l'intégrale obtenue n'a pas de courbe logarithmique.

Une courbe logarithmique pourrait être donnée par les deux équations

$$y = a, \qquad z^2 = f(x, a);$$

cette courbe est d'ailleurs irréductible, car on peut supposer qu'on a fait préalablement sur x et y une substitution linéaire; donc, pour $y = a$ (qui correspond à une racine multiple de l'équation en x), l'équation

$$f(x, y) = 0$$

aura des racines simples, outre la racine multiple. Il n'y aurait d'exception que dans le cas où f se composerait de droites passant par un même point, cas que l'on peut laisser de côté, car il est très facile de l'étudier directement.

Je dis que, *dans ces conditions d'irréductibilité de la courbe*

$$z^2 = f(x, a),$$

la période polaire est nécessairement nulle. Pour l'évaluer, nous avons à considérer l'intégrale

$$\int \frac{Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}}$$

en donnant à x une valeur fixe arbitraire. Cette période aura une expression de la forme

$$\frac{R(x, a)}{\sqrt{f(x, a)}},$$

R étant rationnel en x et a. Cette période doit être indépendante de x. Par conséquent

$$\frac{R(x, a)}{\sqrt{f(x, a)}} = A,$$

A étant une constante; par suite,

$$z = \frac{R(x, a)}{A};$$

mais z, fonction rationnelle de x, est en contradiction avec le fait que l'équation $z^2 = f(x, a)$ est irréductible.

Par suite, $y = a$ ne donne pas de courbe logarithmique.

Il ne reste plus qu'à considérer les m droites à l'infini; on les étudiera comme au n° **6**.

9. Examinons maintenant le cas d'une surface quelconque

$$f(x, y, z) = 0.$$

La réduction des intégrales de seconde espèce peut être faite encore ici par une méthode analogue. J'en ai précédemment indiqué le point de départ, mais sans approfondir la question. Soit

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

une intégrale quelconque de seconde espèce relative à la surface f: l'intégrale

$$(2)\qquad \int P(x, y, z)\,dx,$$

où y est un moment considéré comme un paramètre arbitraire, est une intégrale de seconde espèce pour la relation algébrique entre x et z,

$$f(x, y, z) = 0.$$

En désignant par p le genre de cette courbe, et désignant par

$$\int \frac{Q_1(x, y, z)\,dx}{f'_z}, \quad \dots, \quad \int \frac{Q_{2p}(x, y, z)\,dx}{f'_z}$$

$2p$ intégrales distinctes de seconde espèce, relatives à cette courbe, les Q étant des polynômes en x, y, z et de degré $2m-4$ en x et z, on peut mettre l'intégrale (2) sous la forme

$$a_1 \int \frac{Q_1\,dx}{f'_z} + \dots + a_{2p} \int \frac{Q_{2p}\,dx}{f'_z} + \lambda(x, y, z),$$

les a étant des fonctions rationnelles de y, et λ étant rationnel en x, y et z.

Si donc de (1) on retranche $\lambda(x, y, z)$, on aura une intégrale

$$\int R\,dx + S\,dy,$$

où

$$R = \frac{a_1 Q_1 + \ldots + a_{2p} Q_{2p}}{f'_z}.$$

Prenant donc pour R une expression de cette forme, les Q pouvant être considérés comme connus, j'ai cherché (*loc. cit.*) à déterminer les fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ de y, de manière que les périodes de l'intégrale

$$\int \frac{a_1 Q_1 + \ldots + a_{2p} Q_{2p}}{f'_z} dx$$

ne dépendent pas de y.

Je trouve ainsi que les a doivent satisfaire à un certain système E d'équations différentielles linéaires, dont les coefficients sont des polynômes en y. On aura donc à rechercher les systèmes de valeurs de

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$$

satisfaisant aux équations (E), et rationnelles en y.

Considérons un tel système s'il en existe; j'ai établi qu'on pourra alors associer à la fonction rationnelle R une fonction rationnelle $S(x, y, z)$, telle que

$$R\,dx + S\,dy$$

soit une différentielle totale exacte.

La fonction S n'est bien évidemment déterminée qu'à une fonction rationnelle près de y. Cette remarque, si simple, va être essentielle pour la suite.

Il s'agit, en effet, maintenant de savoir si l'intégrale

$$\int R\,dx + S\,dy$$

a ou non des courbes logarithmiques.

Les seules courbes logarithmiques à distance finie pourraient être données par

$$y = a, \qquad f(x, a, z) = 0,$$

en désignant par a un point singulier du système d'équations différentielles E. La période s'obtiendrait en calculant pour l'intégrale

$$\int S\, dy,$$

où l'on donne à x une valeur arbitraire, la période polaire relative à $y = a$. Mais, puisque l'on peut ajouter à S un terme de la forme $\frac{A}{y-a}$, on peut supposer que cette période est nulle. Nous pouvons donc supposer que l'intégrale

$$\int R\, dx + S\, dy$$

n'a pas pour courbes logarithmiques les courbes $y = a$.

La seule courbe logarithmique que pourrait avoir l'intégrale précédente est donc *la courbe de la surface à l'infini*. Mais cette courbe peut ici être supposée irréductible; elle ne peut donc être une courbe logarithmique, puisque m fois le résidu correspondant doit être nul.

Nous arrivons donc au théorème suivant : *A chaque solution rationnelle du système* E *correspond une intégrale de différentielle totale qui n'a pas de courbe logarithmique et qui ne se réduit pas à une fonction rationnelle des coordonnées.*

10. Nous avons, dans ce qui précède, parlé d'une manière générale des intégrales de seconde espèce. Si l'on veut obtenir les intégrales de *première espèce,* la question est beaucoup plus facile, car l'intégrale a alors nécessairement la forme

$$\int \frac{B\, dx - A\, dy}{f'_z} \qquad f(x, y, z) = 0 \quad \text{de degré } m,$$

où B et A sont des polynômes en x, y, z de degrés $m = 2$ en x, y, z, le premier étant seulement de degré $m - 3$ en x et z, le second de degré $m - 3$ en y et z. Mais je n'ai rien d'essentiel à ajouter aux considérations générales que j'ai développées dans mon premier Mémoire et aux remarques faites ultérieurement à ce sujet par M. Nöther. Nous pourrons donc dans la suite considérer les deux questions suivantes comme entièrement traitées :

1° Recherche des intégrales de première espèce d'une surface;

2° Recherche des intégrales de seconde espèce, non algébriques, c'est-à-dire formation des intégrales de seconde espèce linéairement indépendantes.

Ce dernier problème a précisément fait l'objet du Chapitre actuel. L'étude des intégrales de seconde espèce est cependant loin d'être épuisée, et nous aurons à revenir sur ce sujet dans le Chapitre suivant (Chapitre II, Section III).

III. — Intégrales de troisième espèce.

11. Nous avons déjà démontré qu'en général, dans une surface algébrique, *toutes les périodes se réduisaient aux périodes polaires*. La question à étudier consiste donc à rechercher dans quels cas il y aura des périodes autres que les périodes provenant des courbes logarithmiques; nous ne sommes pas encore en mesure de traiter cette question, que nous renvoyons au Chapitre suivant.

Pour le moment, nous allons nous borner à imiter ce que nous avons fait pour les intégrales de seconde espèce, en cherchant à faire autant qu'il est possible la réduction d'une intégrale de troisième espèce.

Nous nous limitons d'ailleurs aux équations de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

f étant un polynôme qu'une transformation homographique préalable permet de supposer de degré pair.

Soit donc l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x, y)}},$$

où nous avons

$$M = [A(x, y)]^{\alpha}\,[B(x, y)]^{\beta}\ldots\,[L(x, y)]^{\gamma},$$

les facteurs A, B, ..., L étant irréductibles et premiers avec $f(x, y)$, P et Q étant des polynômes.

Nous aurons d'abord une suite de réductions faciles, qui nous ont déjà servi dans le cas des intégrales de seconde espèce, et qui ramèneront l'intégrale à la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\,A.B\ldots L\sqrt{f(x,y)}},$$

les facteurs A, B, ..., L ne figurant plus qu'à la première puissance au dénominateur; dans le cas des intégrales de seconde espèce, ils disparaissaient dans ce dénominateur, où ne restait plus que le polynôme $\chi(y)$.

Le théorème que je veux établir est relatif à la courbe d'intersection des deux surfaces

$$A(x,y)=0, \qquad z^2=f(x,y).$$

Laissant y constant, considérons la période polaire de l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx}{\chi(y)A,B\ldots L\sqrt{f(x,y)}}$$

relative à un point x, racine de $A(x,y)$; cette période sera

$$\frac{P(x,y)}{\chi\dfrac{\partial A}{\partial x}B\ldots L\sqrt{f(x,y)}}$$

et cette expression devra être indépendante de y [x étant toujours tiré de $A(x,y)=0$, en fonction de y]; c'est donc une constante, soit l'unité : on aura, par suite,

$$P^2 - R^2 f(x,y) = 0,$$

R étant le polynôme $\chi\dfrac{\partial A}{\partial x}B\ldots L$, pour les valeurs de x et y satisfaisant à

$$A(x,y)=0.$$

On en tire une conclusion intéressante : *La surface* A = 0 *coupe la* *surface proposée, suivant les deux courbes distinctes*

$$A = 0, \qquad A = 0,$$
$$z = \frac{P}{R}, \qquad z = -\frac{P}{R}.$$

Ainsi ces polynômes A, B, ..., L *ne peuvent être pris arbitrairement.*

12. La condition nécessaire trouvée vient compliquer singulièrement la discussion complète des intégrales de troisième espèce. Elle peut conduire à des résultats assez singuliers au premier abord, comme celui que je vais indiquer.

Prenons le cas simple de

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{A(x, y)\sqrt{f(x, y)}},$$

la condition d'intégrabilité sera

$$(1)\quad A\left[P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right] = 2f(x, y)\left[A\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + Q\frac{\partial A}{\partial x} - P\frac{\partial A}{\partial y}\right].$$

On peut se donner arbitrairement $A(x, y)$; et l'on peut certainement satisfaire à cette équation en prenant pour P et Q des polynômes en x et y; il suffit de prendre ces polynômes d'un degré suffisamment élevé. Mais, si $A(x, y)$ ne remplit pas la condition nécessaire, qui vient d'être indiquée,

$$A(x, y) = 0$$

ne pourra pas donner une courbe logarithmique; il arrivera nécessairement que P et Q seront divisibles par A.

La question inverse se pose d'elle-même. Comment doit être choisi $A(x, y)$ pour que l'on puisse trouver des polynômes P et Q satisfaisant à l'équation (1), et qui ne soient pas divisibles par A.

Un cas simple serait celui où $A(x, y) = M^2 - N^2 f(x, y)$, car il est évident alors que l'expression $\log \dfrac{M - N\sqrt{f}}{M + N\sqrt{f}}$ répond à la question.

Pour le cas général, remarquons qu'on peut réduire l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{A(x,y)\sqrt{f(x,y)}}$$

en abaissant le degré des numérateurs P et Q.

Soient k le degré de P et Q, et α le degré de $A(x,y)$.

Désignons par p et q l'ensemble des termes homogènes en x et y de degré k dans P et Q, et par $a(x,y)$ l'ensemble des termes homogènes de degré α dans A.

En prenant dans la condition d'intégrabilité l'ensemble des termes homogènes de plus haut degré, nous aurons évidemment

$$(2)\quad a\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial y} - q\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 2\varphi(x,y)\left[a\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) + q\frac{\partial a}{\partial x} - p\frac{\partial a}{\partial y}\right],$$

$\varphi(x,y)$ désignant l'ensemble des termes homogènes de degré m dans φ; nous supposerons seulement que les m directions asymptotiques de $f(x,y) = 0$ sont distinctes, ce qu'on a pu réaliser à l'avance, par une transformation homographique de la surface $z^2 = f(x,y)$.

Cette équation (2) peut s'écrire

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left\{ - maq - 2x\left[a\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) + q\frac{\partial a}{\partial x} - p\frac{\partial a}{\partial y}\right]\right\} \\ + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left\{ map - 2y\left[a\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) + q\frac{\partial a}{\partial x} - p\frac{\partial a}{\partial y}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Or la condition d'intégrabilité (1) montre, puisque A et f sont premiers entre eux, que $Q\frac{\partial A}{\partial x} - P\frac{\partial A}{\partial y}$ est divisible par A : donc $q\frac{\partial a}{\partial x} - p\frac{\partial a}{\partial y}$ est divisible par a; par suite, on peut diviser par a l'identité précédente. On aura donc

$$(mp - y\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (-mq - x\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0.$$

On peut, par suite, écrire

$$p = \mu y + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$q = -\mu x + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

μ et λ étant des polynômes homogènes en x et y, le premier de degré $k-1$ et le second de degré $k-m+1$; substituons ces valeurs de p et q dans l'équation (2).

On aura alors

$$\begin{aligned} &a\mu(m-2k-2+2\alpha) \\ &\quad = 2a\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+2\lambda\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}\right], \end{aligned}$$

qui permet d'exprimer μ en fonction de λ, si l'on n'a pas

$$m+2\alpha = 2k+2.$$

En portant dans l'intégrale

$$\int\frac{p\,dx+q\,dy}{a(x,y)\sqrt{\varphi(x,y)}}$$

la valeur de μ, on voit que cette intégrale est égale à

$$\frac{2m+4\alpha}{2k+2-m-2\alpha}\,\frac{\lambda\sqrt{\varphi}}{a}.$$

Supposons d'abord que $a(x,y)$ n'ait que des facteurs simples, il faudra que λ soit divisible par a, car les seuls infinis de l'intégrale ne pourraient être que logarithmiques. Il s'ensuit que p et q étaient divisibles par a.

Cela posé, soit

$$\frac{\lambda}{a}=\lambda_1,$$

λ_1 étant un polynôme homogène en x et y.

De l'intégrale

$$\int\frac{P\,dx+Q\,dy}{A(x,y)\sqrt{f(x,y)}}$$

retranchons

$$\frac{2m+4\alpha}{2k+2m-2\alpha}\,\lambda_1\sqrt{f(x,y)},$$

la différence sera

$$\int \frac{P_1 dx + Q_1 dy}{A(x,y)\sqrt{f}},$$

P_1 et Q_1 étant seulement de degré $k - 1$. On a donc pu diminuer d'une unité le degré des polynômes qui figurent au numérateur; on continuera ainsi la réduction tant que l'on n'aura pas

$$2k = m + 2\alpha - 2,$$

circonstance qui se présentera, car nous pouvons supposer m pair (en ayant, comme il a été dit, effectué d'abord une transformation homographique sur x et y).

Nous remarquerons que, pour

$$k = m' + \alpha - 1,$$

on aura nécessairement dans les expressions de p et q

$$\lambda = 0;$$

car λ doit être divisible par a; or le degré de λ est égal à

$$k - 2m' + 1 = \alpha - m'.$$

λ ne peut donc être divisible par a, donc

$$\lambda = 0;$$

c'est cette propriété qui est la base de la forme invariante de l'intégrale pour $k = m' - \alpha + 1$, quand on fait sur x et y une transformation homographique.

On arrive donc à la conclusion suivante : *Dans l'intégrale*

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{A(x,y)\sqrt{f(x,y)}},$$

si α est le degré de A, *on peut supposer que le degré de* P *et* Q *est égal à*

$$m' + \alpha - 1, \qquad (m = 2m').$$

Cette proposition conduit à une conséquence intéressante : les surfaces

$$z^2 = f(x, y)$$

se classeront *d'après le degré minimum* α, que l'on peut donner à A pour avoir une intégrale de la forme précédente.

Il est manifeste que, si α est un tel nombre, P et Q seront premiers avec A, sinon α ne serait pas le degré minimum. De plus, il y aura toujours certainement un degré minimum, car α sera au plus égal à $2m'$, puisqu'on répondra aux conditions en prenant

$$\mathrm{A}(x, y) = \mathrm{M}^2 - f(x, y),$$

M étant un polynôme arbitraire de degré m'. On a en effet, dans ce cas,

$$\log \frac{\mathrm{M} - \sqrt{f}}{\mathrm{M} + \sqrt{f}},$$

qui répond à la question.

Le minimum α pourra donc être trouvé par une suite de tâtonnements.

13. Il a été supposé dans la réduction du paragraphe précédent que $a(x, y)$ n'avait que des facteurs simples. Il n'y a là aucune difficulté pour la généralité des remarques qui précèdent.

Reprenons, en effet, l'intégrale

$$\int \frac{\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy}{\mathrm{A}(x, y)\sqrt{f(x, y)}},$$

P et Q étant de degré k supérieur à $m' + \alpha - 1$. Effectuons sur x et y une substitution homographique quelconque :

$$x = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a x' + b y' + c}, \qquad y = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a x' + b y' + c},$$

et soient

$$f(x, y) = \frac{\mathrm{F}(x', y')}{(a x' + b y' + c)^{2m'}},$$

$$\mathrm{A}(x, y) = \frac{\mathrm{B}(x', y')}{(a x' + b y' + c)^{\alpha}},$$

et l'on aura

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{A(x,y)\sqrt{f(x,y)}} = \int \frac{P_1\,dx' + Q_1\,dy'}{B(x',y')(ax'+by'+c)^\lambda\sqrt{F(x',y')}},$$

et dans $B(x',y')$ les directions asymptotiques seront distinctes. On réduira d'abord le facteur $(ax'+by'+c)^\lambda$, qui disparaîtra même complètement, car la surface

$$z^2 = F(x',y')$$

n'est pas coupée, suivant *deux* courbes distinctes, par

$$ax'+by'+c = 0.$$

On ramène donc l'intégrale à

$$\int \frac{P_2\,dx' + Q_2\,dy'}{B(x',y')\sqrt{F(x',y')}},$$

P_2 et Q_2 étant de degré $m'+\alpha-1$. Il n'y a plus alors qu'à revenir aux variables x et y, et l'on a la réduction cherchée.

CHAPITRE II.

SUR LES CYCLES DANS LES SURFACES ALGÉBRIQUES.

I. — Sur la transformation des cycles d'une surface de Riemann dépendant d'un paramètre arbitraire.

1. Considérons l'équation

$$f(x,y,z) = 0$$

(f étant un polynôme), comme représentant une certaine courbe ou surface de Riemann entre x et z; la lettre y représente un paramètre. Quand y varie, la surface de Riemann se déforme.

Soit, pour y arbitraire, p le genre de la surface; nous pourrons tracer sur elle $2p$ cycles indépendants; c'est de la transformation de ces cycles, quand y varie, que nous allons nous occuper. Deux cycles seront considérés comme identiques, quand on pourra passer de l'un à l'autre par une déformation continue de la surface. Nous devons naturellement nous demander quel est le nombre des cycles distincts. Nous nous trouvons avoir répondu par avance à cette question pour le cas d'une relation algébrique arbitraire entre x, y et z; il résulte en effet aisément du théorème démontré dans le premier Chapitre que, si l'équation f est la plus générale de son degré, tout cycle se ramènera à un seul cycle.

Mais nous allons reprendre ce théorème fondamental, en présentant la démonstration de manière à pouvoir aborder ensuite l'étude des cas spéciaux qui forment le point capital de cette théorie. Soit

$$\text{(I)} \qquad \int \frac{F(x,y,z)\,dx}{f'_z}$$

une intégrale abélienne de seconde espèce relative à la courbe f, $F(x,y,z)$ désignant un polynôme en x, y, z.

Les périodes de l'intégrale (I) sont des fonctions de y, et nous avons déjà dit qu'elles satisfaisaient à une équation différentielle linéaire, dont les coefficients sont rationnels en y. Désignons par (E) cette équation; son ordre sera égal à $2p$ [on suppose que l'intégrale (I) est prise arbitrairement; car, pour certaines intégrales, il pourrait y avoir réduction dans l'ordre de E].

De plus, dans l'hypothèse où $f(x,y,z)$ est un polynôme général de son degré, cette équation sera *irréductible*, c'est-à-dire qu'aucune de ses intégrales ne satisfera à une équation linéaire d'ordre moindre et à coefficients rationnels en y.

Les points critiques de l'équation linéaire sont faciles à trouver; élimine-t-on z entre

$$f(x,y,z)=0, \qquad f'_z(x,y,z)=0,$$

on aura une relation entre x et y,

$$P(x, y) = 0.$$

Les valeurs de y, pour lesquelles deux racines de la fonction x de y définie par l'équation précédente deviendront égales, feront connaître les points singuliers de l'équation (E).

L'équation (E) a toutes ses intégrales régulières; de plus, pour chaque point critique, les racines de l'équation fondamentale déterminante sont des racines de l'unité. Nous avons supposé que f était un polynôme arbitraire, mais nous n'allons avoir qu'à retenir une conséquence de ce fait, à savoir que l'équation E est irréductible, et nous allons montrer que, quand l'équation E est irréductible, *tous les cycles se ramèneront à un seul.*

Prenons en effet une valeur arbitraire de y et considérons les cycles donnant les $2p$ périodes de l'intégrale (I). Soit pris un de ces cycles, et ω_1 la période correspondante; en faisant décrire à y tous les chemins possibles, nous reviendrons au point de départ avec $2p$ déterminations linéairement indépendantes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p};$$

ces $2p$ valeurs sont $2p$ périodes distinctes de l'intégrale (I); de plus, Ω désignant la période correspondant à un cycle quelconque, on aura

$$m\Omega + m_1\omega_1 + \ldots + m_{2p}\omega_{2p} = 0,$$

les m étant des entiers, c'est-à-dire que Ω se ramène au cycle ω_1.

Cela posé, suivons pendant la variation de y, en même temps que la variation de la valeur de la période, la déformation continue du cycle correspondant; nous arriverons ainsi à $2p$ cycles, et inversement tous ces cycles se réduiront à l'un d'entre eux. Il est donc établi que, *dans le cas où l'équation* E *est irréductible, tous les cycles se réduisent à un seul.*

2. Les considérations précédentes indiquent la marche à suivre pour faire dans tous les cas l'étude de la transformation des cycles.

Reprenons l'équation (E) qui va jouer un rôle essentiel dans ce qui suit.

En partant pour une valeur arbitraire y_0 de y d'une période ω_1, et décrivant tous les chemins possibles, supposons qu'on n'obtienne seulement que q périodes distinctes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_q,$$

et des combinaisons linéaires à coefficients commensurables de ces q périodes. Soit ω'_1 une période distincte des précédentes [et qui par suite ne peut être non plus une combinaison linéaire à coefficients constants de ces précédentes, car alors l'équation (E) serait d'ordre inférieur à $2p$], et supposons qu'on obtienne avec elle par différents chemins

$$\omega'_1, \quad \omega'_2, \quad \ldots, \quad \omega'_{q'},$$

et des combinaisons linéaires à coefficients commensurables de ces q périodes. Si nous n'avons pas encore épuisé les $2p$ périodes, on continuera de la même manière, et, en résumé, les périodes se trouveront partagées en un certain nombre de groupes distincts.

Le nombre de ces groupes sera le nombre des cycles distincts de la surface de Riemann f.

5. Cherchons à interpréter la distinction précédente en groupes de cycles. Tout d'abord les périodes arithmétiquement distinctes sont linéairement indépendantes, puisque nous supposons, comme il est permis, et comme nous l'avons dit plus haut, que l'ordre de l'équation est égal à $2p$. Les q périodes du premier groupe

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_q.$$

satisferont à une équation linéaire d'ordre q à coefficients rationnels; *l'équation* (E) *sera réductible.*

Pareillement nous aurons pour les ω' une équation linéaire d'ordre q', et ainsi de suite; par conséquent, à chaque groupe de cycles correspond une équation linéaire irréductible.

Nous pouvons approfondir davantage cette réduction. On peut supposer que l'on part d'une période absolument arbitraire ω_1; on arrive alors à une équation linéaire d'ordre q. Ce nombre q est caractéristique pour l'équation différentielle (E); en prenant ensuite pour ω_1 une période absolument arbitraire (sauf qu'elle est arithmétiquement distincte de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$), ce sera encore une équation de degré q que l'on obtiendra; donc tous les nombres

$$q, \quad q', \quad \ldots$$

sont égaux. Le nombre q est un diviseur de $2p$, et *le nombre des cycles distincts est égal à* $\frac{2p}{q}$.

D'après ce qui a été dit plus haut, q est en général égal à $2p$. Comment pourra-t-on toujours le déterminer?

On commencera par déterminer le groupe de l'équation linéaire (E). Soit

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{2p}$$

un système de périodes normales (pour fixer les idées) de l'intégrale initiale.

Le groupe de l'équation est formé de substitutions linéaires, relatives à $u_1, u_2, \ldots, u_{2p}$ substitutions à coefficients entiers, et dont le déterminant est égal à l'unité. Prenant dans le plan des y un point arbitraire O (non singulier pour l'équation différentielle), et le joignant aux divers points singuliers $A_1, A_2, \ldots, A_N$ de l'équation différentielle, nous obtenons ainsi dans le plan des y un système de coupures. En suivant la transformation des périodes, nous pourrons déterminer la substitution linéaire relative à

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{2p},$$

correspondant à chacune des coupures. Le calcul pourra être laborieux, mais ne présente pas de difficultés théoriques que l'on puisse regarder comme insurmontables. Il reviendra à l'étude des variations des racines de l'équation

$$P(x, y) = 0,$$

autour de leurs points critiques, et des cycles correspondants.

Soient donc supposées connues ces substitutions fondamentales de l'équation linéaire; elles sont à coefficients entiers.

Formons une combinaison linéaire

$$U_0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_{2p} u_{2p},$$

les a étant des entiers quelconques.

Désignons par $U_1, U_2, \ldots, U_N$ les valeurs des U_0, quand on a effectué sur les u les N substitutions fondamentales du groupe de l'équation linéaire. Soit q un nombre inférieur à $2p$. Parmi les N expressions

$$U_0, \quad U_1, \quad \ldots, \quad U_N,$$

il n'y en a pas bien évidemment plus de $2p$ linéairement indépendantes, mais écrivons qu'il y en a seulement q; nous obtiendrons ainsi

$$2p - q,$$

équations de condition entre les coefficients des substitutions fondamentales.

Si toutes ces conditions sont satisfaites, quels que soient les entiers a, ce que l'on pourra vérifier puisque les substitutions fondamentales sont connues, on sera certain que U_0 satisfera à une équation linéaire d'ordre q.

Nous avons dit que q doit être un diviseur de $2p$; pour faire les vérifications précédentes, nous prendrons donc successivement pour q les différents diviseurs de $2p$. On commencera par $q = 1$, et le plus petit diviseur, pour lequel seront vérifiées les conditions, sera le nombre cherché.

L'équation linéaire primitivement considérée se trouve donc remplacée par un certain nombre d'équations linéaires d'ordre moindre. Nous désignerons d'une manière générale, dans la suite, ces équations sous le nom d'équations (E).

II. — Sur les cycles linéaires des surfaces algébriques.

4. La définition des cycles linéaires se généralise d'elle-même quand on passe d'une courbe à une surface algébrique. Approfondissons un peu cette notion des cycles d'une surface algébrique.

Étant donnée une relation algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

entre trois variables complexes x, y, z, *un cycle linéaire* de cette relation ou de cette surface algébrique se définira de la manière suivante. Un cycle linéaire sera une suite continue *fermée* à une dimension de valeurs (x, y, z); deux cycles sont à considérer comme identiques, quand on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue.

Si, dans l'équation $f(x, y, z) = 0$, on laisse y constant, les cycles de la courbe algébrique entre x et z sont des cycles pour notre surface, et réciproquement tout cycle de la surface peut, par une déformation continue, être regardé comme une somme de cycles correspondant à ces courbes. Soit en effet conçu un cycle quelconque, et posons

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'';$$

nous pourrons d'abord, par une déformation continue, ramener le cycle à être contenu dans un espace

$$y'' = \text{const.};$$

puis alors, dans l'espace à trois dimensions (x', x'', y'), ramener le cycle dans un plan $y' = \text{const.}$ Ceci suppose seulement qu'il n'y ait pas de lignes de singularité correspondant à $y = \text{const.}$, ce qu'on peut toujours éviter par une transformation préalable de coordonnées.

5. Les cycles de la surface se partageront donc tout d'abord en un certain nombre n de cycles distincts comme ceux de la courbe $f(x, y, z) = 0$. Mais nous avons maintenant à considérer, parmi les cycles distincts de la courbe précédente, ceux qui sont susceptibles de devenir infiniment petits.

Considérons un point singulier b de l'équation (E), et soient $x = a$, $z = c$ les valeurs correspondantes de x et z. Quand y est voisin de b, un certain nombre de cycles de la courbe f peuvent devenir infiniment petits. Admettons, pour un moment, que nous ayons déterminé, parmi ces cycles, ceux qui, *relativement à la surface algébrique*, équivalent à un cycle *nul*, c'est-à-dire se ramènent à un cycle réduit à un point quand (x, y, z) reste dans le voisinage de (a, b, c). Je désigne ces cycles par

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots, \quad \gamma_\alpha$$

et nous opérerons de même pour tous les points singuliers.

Ces cycles γ sont bien des cycles distincts pour la courbe algébrique f entre x et z, quand on donne à y une valeur fixe; mais, relativement à la surface algébrique $f(x, y, z) = 0$, ils ne doivent pas être considérés comme des cycles. Nous aurons donc à chercher combien, parmi l'ensemble des cycles γ, correspondant à tous les points singuliers, il y en a de distincts relativement à la courbe f se déformant avec y; si n' désigne ce nombre, *le nombre des cycles réellement distincts et différents de zéro de la surface* $f(x, y, z) = 0$ *sera*

$$n'' = n - n'.$$

La recherche du nombre n' se fera, sans difficulté *théorique* tout au moins, au moyen des équations linéaires (E); nous n'avons pas à nous arrêter sur ce point. Mais nous avons rencontré une question préalable, à savoir l'étude des cycles infiniment petits de la surface dans le voisinage d'un point (a, b, c), dont il nous faut parler maintenant.

Un cas très simple, et qui d'ailleurs se présentera toujours, est celui où (a, b, c) serait un point simple de la surface, pour lequel on aura, par conséquent,

$$f'_c(a, b, c) = 0, \qquad f'_a(a, b, c) = 0, \qquad \text{mais} \quad f'_b(a, b, c) \neq 0.$$

Pour y voisin de b, on a deux points singuliers de la courbe $f(x, y, z) = 0$ qui tendent à se confondre en $x = a$. On a là un cycle infiniment petit pour cette courbe; pour la surface f ce cycle est un cycle γ, c'est-à-dire qu'il se ramène à un cycle point. La chose est évidente, puisque le point (a, b, c) est un point simple de la surface.

Passons à un cas plus complexe, et supposons que (a, b, c) soit un point multiple isolé de la surface. La question que nous voulons traiter serait évidemment résolue, si nous connaissions les cycles infiniment petits de la surface autour du point (a, b, c), cycles distincts et ne se réduisant pas à un cycle nul. Peut-être ce simple énoncé paraîtra-t-il singulier; mais il ne faut pas perdre de vue que, dans la théorie actuelle, un cycle infiniment petit peut être bien différent d'un cycle se réduisant à un point. Supposons, par exemple, une surface ayant un point multiple d'ordre q, et soit, en faisant $a = b = c = 0$,

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

l'équation du cône des tangentes en ce point multiple. En écartant des circonstances exceptionnelles, tout cycle infiniment petit de la surface autour de l'origine se ramènera à la limite, si on le fait se rapprocher indéfiniment de ce point, à un cycle relatif à la *courbe* algébrique, représentée en coordonnées homogènes par l'équation

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Le nombre des cycles infiniment petits distincts sera donc ici égal à $2p$, en désignant par p le genre de cette courbe.

Dans tous les cas, on peut employer des considérations analogues ; car nous n'avons qu'à faire usage de considérations analogues à celles qu'emploie M. Nœther quand il veut étudier une intégrale de première espèce dans le voisinage d'un point singulier (*Math. Annalen*, t. XXIX, p. 362). A un tel point le savant auteur fait dans tous les cas correspondre une certaine courbe S, et le genre de cette courbe nous donnera le nombre des cycles infiniment petits distincts ne se réduisant pas à un point. Si la surface a des lignes multiples [que nous pouvons, par une transformation préalable, supposer des lignes multiples ordinaires (*gewöhnliche*)], nous aurons à examiner le cas où (a, b, c) est sur une ligne multiple. Cet examen est facile, car, par un simple changement préalable d'axes de coordonnées, on peut admettre que le point (a, b, c) à étudier est un point pour lequel les plans tangents aux différentes nappes de la surface sont distincts, et nous sommes ramenés alors au cas du point simple [1].

---

[1] Théoriquement, toute cette discussion se trouve, pour ainsi dire, supprimée, si l'on s'appuie sur la remarque faite par M. Nœther, que toute surface correspond point par point à une surface n'ayant que des lignes doubles avec des points triples à tangentes distinctes.

6. Qu'arrive-t-il, d'après ce qui précède, quand la surface est la plus générale de son degré. On a vu que dans ce cas les cycles de la courbe f entre x et z se réduisent à un seul; on peut d'ailleurs supposer que ce cycle est un cycle infiniment petit dans le voisinage d'un point simple, c'est-à-dire un cycle nul. *Donc, dans ce cas, il n'y a pas de cycle linéaire effectif pour la surface.*

Il n'est pas difficile d'indiquer des surfaces particulières, pour lesquelles le nombre des cycles distincts ne sera pas nul. Ainsi, si une surface a une intégrale de première espèce, il est manifeste que le nombre de ces cycles est au moins égal à deux.

Prenons, en particulier, une surface dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres u et v, de telle manière qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs de u et v, abstraction faite de multiples des périodes. Une telle surface aura évidemment *quatre* cycles distincts.

Soit encore une surface de la nature de celles qui ont été étudiées au premier Chapitre, c'est-à-dire pour lesquelles on a

$$x = \mathrm{R}(\alpha, \beta, \alpha', \beta'), \qquad y = \mathrm{R}_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta'), \qquad z = \mathrm{R}_2(\alpha, \beta, \alpha', \beta'),$$

les R étant rationnelles en α, β et (α', β') avec $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, $\psi(\alpha', \beta') = 0$, et telles qu'à un point (x, y, z) corresponde un seul système de valeurs de (α, β) et (α', β'). Si la courbe φ est de genre p, la courbe ψ de genre p', le nombre des cycles linéaires distincts de la surface sera égal à $2p + 2p'$.

7. Cette notion du nombre des cycles distincts se ramène à une question de Géométrie de situation (*analysis situs*, comme disait Riemann); c'est ce qu'il est aisé de montrer et de diverses manières.

Mais auparavant il est indispensable de rappeler rapidement la définition des divers ordres de connexité dans la Géométrie à n dimensions.

Nous considérons un continuum *fermé* δ à n dimensions, par exemple, pour fixer les idées, une *surface fermée* à n dimensions dans un espace à $n + 1$ dimensions.

Un ou plusieurs espaces *fermés* à m dimensions constitueront le contour d'un espace à $(m+1)$ dimensions, contenu dans δ, quand, par ces espaces à m dimensions, on pourra faire passer un espace *fermé* à $(m+1)$ dimensions, dont ils limiteront une partie. Ceci posé, si l'on peut imaginer dans δ un nombre p_m d'espaces fermés à m dimensions, qui ne puissent pas constituer le contour d'un espace fermé à $m+1$ dimensions contenu dans δ, mais tels que tout autre espace fermé à m dimensions puisse constituer avec une partie d'entre eux ou avec tous le contour d'un espace fermé à $(m+1)$ dimensions contenu dans δ, *on dit que le domaine δ a une connexion de $m^{\text{ième}}$ espèce p_m+1.*

Pour un domaine fermé δ, les différents nombres p_m, pour les diverses valeurs de m, s'associent deux à deux, et l'on démontre que

$$p_m = p_{n-m}.$$

Si donc il s'agit, comme dans ce qui suit, d'un espace fermé à quatre dimensions, on aura à considérer les deux nombres p_1 et p_2 correspondant aux connexités de première et de seconde espèce.

Ces notions générales rappelées, revenons à l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Posons

$$x = \varphi(u, v),$$
$$y = \psi(u, v);$$

φ et ψ étant, par exemple, des fonctions hyperfuchsiennes de u et v, ayant un certain polyèdre fondamental, et telles qu'à une valeur arbitraire de x et y ne corresponde dans ce polyèdre qu'un seul système de valeurs de u et v.

La fonction z ne sera pas une fonction uniforme de u et de v; elle aura m valeurs pour chaque valeur de u et v. Mais nous pouvons imaginer que le polyèdre se recouvre lui-même m fois, de telle sorte que nous aurons un nouveau domaine, que je désigne par D, et tel qu'à chaque point de ce domaine ne corresponde qu'un système (x, y, z). Ce domaine D peut encore être considéré comme un certain *polyèdre;* il est limité par des *faces* qui se correspondent deux à deux, et sur deux faces correspondantes les points se correspondent deux à deux. En considérant alors comme confondus les points homologues de deux faces correspondantes, *on peut envisager le polyèdre* D *comme un domaine fermé* et lui appliquer les notions précédentes relatives à la connexité. Nous aurons donc les deux membres p_1 et p_2 relatifs à D et c'est le premier qui nous intéresse en ce moment.

Reprenons maintenant les n'' cycles distincts étudiés au paragraphe précédent; à chacun de ces cycles correspondra dans D, envisagé comme un domaine fermé, une courbe fermée, et par ces courbes fermées on ne pourra pas faire passer un espace fermé à deux dimensions dont elles limiteront une partie; car, s'il en était ainsi, ces courbes fermées et, par suite, les cycles se ramèneraient à un moindre nombre, c'est-à-dire qu'ils ne seraient pas distincts. Réciproquement, considérons une autre courbe fermée Γ quelconque dans le domaine D; elle pourra être considérée comme limitant, avec les courbes fermées précédentes, une portion d'un espace fermé à deux dimensions. En effet, à la courbe Γ correspond un certain cycle Γ' que l'on peut ramener par une déformation à l'espace à deux dimensions $y =$ const., sur laquelle sont tracés les n'' cycles distincts; mais Γ' limite avec les n'' cycles ou une partie d'entre eux une certaine portion de surface; en remontant au domaine D, notre assertion est donc justifiée.

Il en résulte que le nombre des cycles distincts est égal au nombre p_1 relatif au domaine D.

Ainsi se trouve rattachée à une notion de géométrie de situation cette question du nombre des cycles distincts.

Notre attention se trouve en même temps portée sur le second nombre p_2, relatif à la connexité de deuxième espèce : nous y reviendrons dans un autre paragraphe.

8. La manière dont nous avons fait correspondre la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

à un certain espace fermé à quatre dimensions n'est bien évidemment pas la seule façon de procéder. On peut, par exemple, opérer encore comme il suit. La relation

$$f(x, y, z) = 0$$

revient à deux relations entre six quantités réelles, ou à une seule relation algébrique entre cinq quantités réelles. On peut sur ces cinq quantités opérer une transformation rationnelle réversible, de telle sorte que, $x_1, x_2, \ldots, x_5$ désignant les cinq nouvelles variables, celles-ci restent toujours finies, et que, par suite, la relation algébrique correspondante

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_5) = 0$$

représente, dans un espace à cinq dimensions, une surface *fermée* à quatre dimensions.

Ces représentations sont excellentes pour fixer nos conceptions; mais, au point de vue pratique, nous sommes sur un terrain plus solide quand nous rattachons cette théorie, comme nous l'avons essayé, à une question de réductibilité d'une équation différentielle linéaire.

III. — Propositions générales sur les intégrales de seconde et troisième espèce.

9. Nous allons pouvoir compléter maintenant notre étude sur les intégrales de seconde et de troisième espèce. La surface de Riemann entre x et z

$$f(x, y, z) = 0$$

a joué un rôle important dans la discussion de ces intégrales. A l'aide des notions que nous venons d'acquérir sur la transformation des cycles de cette surface, cherchons à nous rendre compte à quelles conditions une surface algébrique peut avoir une intégrale de seconde espèce. Reprenons, à cet effet, la marche suivie dans le premier Chapitre. On part de $2p$ intégrales de seconde espèce de la courbe entre x et z, $f = 0$. Soient

$$\int \frac{F_1(x, y, z)\,dx}{f'_z}, \quad \int \frac{F_2(x, y, z)\,dx}{f'_z}, \quad \ldots, \quad \int \frac{F_{2p}(x, y, z)\,dx}{f'_z};$$

nous avons cherché si l'on pouvait déterminer $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ rationnellement en y, de telle sorte que les périodes de

$$a_1 \int \frac{F_1\,dx}{f'_z} + a_2 \int \frac{F_2\,dx}{f'_z} + \ldots + a_{2p} \int \frac{F_{2p}\,dx}{f'_z}$$

ne dépendissent pas de y. Or les périodes se partagent en q catégories; prenons l'une de ces catégories, et soient

$$(1) \qquad \omega_1^1, \quad \omega_1^2, \quad \ldots, \quad \omega_1^q$$

q déterminations, correspondant à la même valeur de y, et linéairement indépendantes de la période ω_1^1; pareillement

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{llll} \omega_2^1, & \omega_2^2, & \ldots, & \omega_2^q, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \omega_{2p}^1, & \omega_{2p}^2, & \ldots, & \omega_{2p}^q \end{array}\right.$$

pour les autres intégrales. On aura

$$(\mathrm{E}) \qquad \left\{\begin{array}{l} a_1\omega_1^1 + a_2\omega_2^1 + \ldots + a_{2p}\omega_{2p}^1 = \alpha, \\ a_1\omega_1^2 + a_2\omega_2^2 + \ldots + a_{2p}\omega_{2p}^2 = \alpha, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1\omega_1^q + a_2\omega_2^q + \ldots + a_{2p}\omega_{2p}^q = \alpha, \end{array}\right.$$

α étant une constante. Faisons décrire maintenant à y un chemin arbitraire, revenant au point de départ: on aura pour la suite (1) et chacune des suites (2) une même transformation linéaire, soit

$$m_1\omega_1^1 + m_2\omega_1^2 + \ldots + m_q\omega_1^q, \quad n_1\omega_1^1 + n_2\omega_1^2 + \ldots + n_q\omega_1^q, \quad \ldots,$$
$$t_1\omega_1^1 + t_2\omega_1^2 + \ldots + t_q\omega_1^q.$$

Donc les relations (E) deviendront

$$\begin{array}{l} \alpha(m_1 + m_2 + \ldots + m_q) = \alpha, \\ \alpha(n_1 + n_2 + \ldots + n_q) = \alpha, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha(t_1 + t_2 + \ldots + t_q) = \alpha. \end{array}$$

Si donc la période α n'est pas nulle, on aura

$$(\mathrm{C}) \qquad \left\{\begin{array}{l} m_1 + m_2 + \ldots + m_q = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_1 + t_2 + \ldots + t_q = 1. \end{array}\right.$$

Toutes les substitutions du groupe devront donc satisfaire à ces relations.

Ainsi nous trouvons une série de nouvelles conditions relativement aux groupes de chacune des équations linéaires que vérifient les périodes. Si d'ailleurs ces groupes satisfont tous à ces conditions, on voit que les $\frac{2p}{q}$ équations analogues à (E), en mettant dans les seconds membres, pour chaque système, une constante arbitraire, nous donneront pour

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p}$$

des fonctions ayant une seule détermination, et, par suite, puisqu'il n'y a dans toute cette question que des équations linéaires à intégrales régulières, les a seront des fonctions rationnelles de y. Nous faisons donc ainsi, sous une autre forme, la recherche des conditions pour que les a puissent être déterminées en fonctions rationnelles de y, et nous voyons que le nombre des constantes arbitraires figurant dans ces fractions rationnelles sera égal au nombre des cycles distincts, pour lesquels le groupe correspondant satisfera aux conditions indiquées par les équations (C).

Ce nombre représentera en même temps le nombre des périodes des intégrales correspondantes; or il a été vu que ces intégrales sont de seconde espèce. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Le nombre des intégrales distinctes de seconde espèce est égal au nombre de leurs périodes.

On se rappelle ce que nous avons dit précédemment sur ce qu'on doit entendre par intégrales distinctes de seconde espèce : ce sont des intégrales dont aucune combinaison linéaire ne se réduit à zéro ou à une fonction rationnelle de x, y et z.

9. Nous pouvons maintenant compléter ce que nous avons à dire sur les intégrales de troisième espèce. Nous avons établi qu'en général ces intégrales n'avaient d'autres périodes que les périodes polaires ; le problème qui se présente naturellement est donc le suivant : rechercher s'il y a des intégrales de troisième espèce possédant des périodes autres que les périodes polaires.

Supposons donc qu'il y ait une intégrale de troisième espèce,

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

possédant un certain nombre de périodes autres que les périodes polaires. Considérons l'intégrale

$$\text{(I)} \qquad \int P\,dx$$

relative à

$$f(x, y, z) = 0,$$

où, comme dans tout ce qui a précédé, y figure comme paramètre. Cette intégrale possède un certain nombre de périodes polaires et cycliques. J'envisage les périodes cycliques; en faisant varier y, les cycles se déformeront, pouvant d'ailleurs traverser des points singuliers logarithmiques, qui donneront des périodes polaires. Supposons, comme plus haut, que le cycle considéré corresponde à une certaine équation linéaire (E) de notre théorie générale, et soient encore

$$\omega_1^1, \quad \omega_1^2, \quad \ldots, \quad \omega_1^q$$

les q cycles fondamentaux correspondant à cette équation linéaire. En désignant par les mêmes lettres les valeurs de l'intégrale (I) le long de ces cycles, nous aurons évidemment

$$\begin{gathered} \omega_1^1 = \alpha, \\ \omega_1^2 = \alpha, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \omega_1^q = \alpha, \end{gathered}$$

α désignant une certaine constante, puisque ces périodes ne dépendent pas de y. Faisons maintenant décrire à y un chemin arbitraire revenant au point de départ, les cycles se sont transformés; mais ici les premiers membres ne se transforment pas seulement, comme dans le cas des intégrales de seconde espèce, en

$$\begin{gathered}
m_1\omega_1^1 + m_2\omega_1^2 + \ldots + m_q\omega_1^q, \\
n_1\,\omega_1^1 + n_2\,\omega_1^2 + \ldots + n_q\,\omega_1^q, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
t_1\,\omega_1^1 + t_2\,\omega_1^2 + \ldots + t_q\,\omega_1^q;
\end{gathered}$$

car il peut s'ajouter des périodes polaires provenant des pôles de P qui ont pu être traversés par les cycles pendant leur déformation.

Nous aurons donc, en désignant par Π les périodes polaires, et par λ, μ, τ, ... des entiers,

$$\begin{gathered}
(m_1 + m_2 + \ldots + m_q)\alpha + \Sigma\lambda\Pi = \alpha, \\
(n_1 + n_2 + \ldots + n_q)\alpha + \Sigma\mu\Pi = \alpha, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
(t_1 + t_2 + \ldots + t_q)\alpha + \Sigma\tau\Pi = \alpha.
\end{gathered}$$

Mais nous supposons que α est une période distincte des périodes polaires Π; par conséquent, il faudra que

$$\begin{gathered}
m_1 + m_2 + \ldots + m_q = 1, \\
n_1 + n_2 + \ldots + n_q = 1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
t_1 + t_2 + \ldots + t_q = 1.
\end{gathered}$$

Nous allons déduire de là un résultat intéressant.

Si les substitutions correspondant à la transformation des cycles se rattachant à une même équation linéaire (E) ne satisfont pas aux relations précédentes, la période cyclique donnée par ces cycles se réduit à des périodes polaires (ou elle est nulle, ce qui revient au même). Les équations (E) pour lesquelles ces relations sont vérifiées peuvent donc seules donner des périodes cycliques qui soient distinctes des périodes polaires; mais il existe alors des intégrales de seconde espèce, puisque les relations dont nous parlons expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des intégrales de seconde espèce, et le nombre des périodes de notre intégrale de troisième espèce, distinctes des périodes polaires, sera précisément égal au nombre des intégrales distinctes de seconde espèce.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Il n'y a d'intégrales de troisième espèce avec des périodes autres que les périodes polaires que dans le cas où il y a des intégrales de seconde espèce, et alors le nombre des périodes autres que les périodes polaires pour une intégrale arbitraire de troisième espèce est égal au nombre des intégrales distinctes de seconde espèce.

Ainsi se trouve rattachée, par cette proposition, la théorie des intégrales de troisième espèce à celle des intégrales de seconde espèce.

10. Nous avons jusqu'ici toujours entendu par intégrales de seconde espèce ces intégrales telles qu'elles ont été définies au début du premier Chapitre de ce Mémoire. On a supposé dans cette définition que l'intégrale ne devenait pas infinie en certains points *isolés;* il y a là une lacune qu'il est nécessaire de combler.

Il est bien évident d'abord qu'une intégrale de différentielle totale ne peut pas devenir infinie, en un point *simple* de la surface, qui ne soit pas sur une de ces courbes que nous avons appelées *logarithmiques*.

Une intégrale pourrait-elle devenir infinie en certains points isolés d'une courbe multiple de la surface, tout en restant finie pour tout autre point de Σ, et en supposant de plus, bien entendu, que ces points isolés ne se trouvent pas à l'intersection de la courbe Σ et d'une courbe logarithmique? Il est aisé de voir que la chose est impossible, en se reportant à un théorème que j'ai donné dans le cas particulier des courbes doubles et qui a été démontré dans toute sa généralité par M. Nœther (Mémoire déjà cité sur les différentielles totales, *Math. Annalen*, t. XXIX, p. 363). L'intégrale étant mise sous la forme

$$\int \frac{A\,dy - B\,dx}{N.F'_z}, \qquad F(x, y, z) = 0,$$

restera finie le long d'une courbe Σ de F (quand N ne s'annule pas), si les polynômes B et A sont des polynômes *adjoints* à F (*adjungirt*) le long de Σ. Or ici, puisque l'intégrale reste, par hypothèse, finie pour tout point de Σ, à l'exception des points isolés supposés, A et B sont nécessairement des polynômes *adjoints* à F le long de Σ; l'intégrale restera donc finie pour tout point de Σ qui n'est pas sur une courbe logarithmique.

Nous n'avons donc à nous préoccuper que des points *multiples isolés* de la surface. Deux cas, *a priori*, peuvent se présenter. En un tel point A l'intégrale peut devenir infinie, quand (x, y, z) se rapproche de A dans une direction arbitraire, ou bien elle ne deviendra infinie que pour certaines directions spéciales.

Examinons d'abord le premier cas. Nous transformerons la surface par une transformation rationnelle admettant A comme point fondamental; à ce point correspondra dans la surface transformée une certaine courbe multiple le long de laquelle l'intégrale sera infinie. Nous nous trouvons alors ramené au cas envisagé dans notre définition primitive, qui se trouve ainsi complétée.

Passons à la seconde hypothèse. Nous emploierons la même transformation rationnelle, et nous aurons une courbe multiple, en certains points seulement de laquelle l'intégrale transformée deviendra infinie. Ceci, nous venons de le voir, est impossible, à moins qu'une courbe logarithmique ne rencontre la ligne multiple, et il y aura, par suite, des courbes logarithmiques passant par le point multiple isolé A. Pour chacune de ces courbes logarithmiques, la période polaire correspondante devra être nulle, si l'intégrale envisagée est de seconde espèce.

La définition des intégrales de seconde espèce se trouve ainsi complétée. Mais une question se présente maintenant tout de suite. Les théorèmes établis aux paragraphes précédents subsistent-ils sans modifications? La réponse est affirmative.

Prenons, par exemple, celui qui concerne les intégrales de seconde espèce. Nous avons trouvé une intégrale renfermant un certain nombre de constantes arbitraires α, ces constantes représentant précisément les périodes de l'intégrale.

S'il y a un point multiple isolé, il pourrait amener, après la transformation, certaines périodes polaires. Les périodes de l'intégrale transformée sont toujours les quantités α; une période provenant d'une courbe logarithmique sera une somme de multiples des α. Par suite, les relations supplémentaires, qui doivent exprimer que notre intégrale est de seconde espèce, sont de la forme

$$\Sigma m\alpha = 0,$$

les m étant des entiers. Le nombre des constantes arbitraires se trouve donc diminué absolument de la même manière que le nombre des périodes (les m étant des entiers). Le théorème subsiste donc complètement.

Sur les cycles à deux dimensions dans les surfaces algébriques.

11. Nous avons dans la deuxième Section de ce Chapitre considéré un certain domaine D auquel nous avons fait correspondre uniformément les points de la surface. Ce domaine D est un domaine fermé, et nous avons étudié avec quelques détails le nombre p_1 relatif à la connexité du premier ordre, et démontré notamment ce résultat, au premier abord singulier, que le nombre p_1 est en général égal à zéro. Que pouvons-nous dire du nombre p_2 relatif à la connexité du second ordre? Quoique nous n'ayons pas fait l'étude bien complète de cette question difficile, les considérations qui vont suivre permettront tout au moins d'entrer quelque peu dans le sujet.

Les domaines fermés à deux dimensions, contenus dans D et servant à la définition de p_2 (en supposant que p_2 ne soit pas nul), nous conduisent à la notion des *surfaces cycliques* ou *cycles à deux dimensions* d'une surface algébrique. Une surface cyclique peut être définie un continuum fermé à deux dimensions, tel que toute courbe fermée à une dimension tracée sur lui soit un cycle linéaire de la surface.

Nous pouvons concevoir de la manière suivante la génération d'une surface cyclique. Soit sur cette surface un cycle linéaire correspondant à une certaine valeur constante de $y (y = y_0)$; faisons maintenant varier y de telle façon qu'à cette suite continue de valeurs de y corresponde une succession continue de cycles linéaires sur la surface cyclique. Revenons enfin au point de départ y_0, après avoir ainsi décrit toute la surface cyclique avec le cycle linéaire mobile; quand y reviendra en y_0, nous reviendrons au cycle linéaire primitif. On voit sous cette forme que la question des cycles à deux dimensions est intimement liée à celle de la transformation des cycles linéaires en eux-mêmes.

Or nous avons étudié la transformation des cycles de la relation entre x et z

$$f(x, y, z) = 0,$$

quand on fait varier y à l'aide d'une certaine équation différentielle linéaire E; nous allons encore avoir à en faire usage.

Soient de nouveau l'intégrale de seconde espèce

$$\int \frac{Q(y, x, z)\,dx}{f'_z},$$

déjà plusieurs fois considérée, et l'équation (E) correspondante.

Désignons par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ un système de périodes normales, et soient

$$\begin{gathered}
m_1^1\omega_1 + m_1^2\omega_2 + \ldots + m_1^{2p}\omega_{2p}, \\
m_2^1\omega_1 + m_2^2\omega_2 + \ldots + m_2^{2p}\omega_{2p}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
m_{2p}^1\omega_1 + m_{2p}^2\omega_2 + \ldots + m_{2p}^{2p}\omega_{2p},
\end{gathered}$$

les m étant des entiers, une substitution quelconque du groupe de l'équation (E). Si l'équation caractéristique de la substitution admet pour racine l'unité, c'est-à-dire si

$$\begin{vmatrix}
m_1^1 - 1 & m_1^2 & \ldots & m_1^{2p} \\
m_2^1 & m_2^2 - 1 & \ldots & m_2^{2p} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
m_{2p}^1 & m_{2p}^2 & \ldots & m_{2p}^{2p} - 1
\end{vmatrix} = 0,$$

il y aura une certaine combinaison linéaire à coefficients entiers,

$$\Omega = M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + \ldots + M_{2p}\omega_{2p},$$

c'est-à-dire une certaine période que la substitution considérée ne transformera pas. A cette période correspond un cycle linéaire et à la substitution linéaire un déplacement du cycle correspondant à la variation de y qui donne la substitution; de cette manière se trouve engendrée une surface cyclique.

12. La première question qui se présente est de savoir s'il y a en général des cycles effectifs à deux dimensions, c'est-à-dire si le nombre p_2 a en général une valeur différente de zéro. Nous allons montrer que ce nombre p_2 existe en général, et que *c'est par suite dans les cycles à deux dimensions d'une surface qu'il faut chercher la généralisation des cycles d'une courbe algébrique.*

Il sera utile pour notre objet, et en même temps intéressant en soi, de considérer simultanément, avec les surfaces cycliques, les intégrales doubles de première espèce

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} \tag{1}$$

attachées à la surface. Comme on le sait, $Q(x, y, z)$ est un polynôme adjoint d'ordre $m-4$ de la surface f de degré m.

Reportons-nous, d'autre part, au Mémoire fondamental de M. Poincaré (*Acta mathematica*, 9), où se trouve développée la notion capitale d'intégrale double *étendue à un contour fermé à deux dimensions*, et démontré ce théorème essentiel, analogue au théorème de Cauchy, que cette intégrale double ne varie pas quand on déforme le contour fermé, sans traverser de singularité de l'élément de l'intégrale.

Considérons donc une surface cyclique et la valeur de l'intégrale (1) prise sur cette surface cyclique; existera-t-il certainement des surfaces cycliques pour lesquelles la valeur de cette intégrale sera différente de zéro?

La surface cyclique étant supposée engendrée comme il a été dit au paragraphe précédent, la valeur de l'intégrale sera

$$\int \Omega\,dy,$$

Ω étant la période qui reprend la même valeur quand y décrit un chemin fermé convenable, et l'intégrale précédente étant prise le long de ce chemin. On peut remarquer de suite que, si le chemin décrit par y ne comprend à son intérieur qu'un seul point singulier de l'équation linéaire (E), l'intégrale sera nulle; en effet, Ω sera dans ce cas uniforme dans les environs de ce point singulier; celui-ci ne pourra être un pôle pour Ω, car alors l'intégrale double ne serait pas de première espèce, et alors, Ω étant holomorphe à l'intérieur du contour d'intégration, l'intégrale sera nulle.

Nous voulons montrer que, la surface f étant une surface arbitraire de degré m, il y a des intégrales du type précédent qui ne sont pas nulles.

Tout d'abord la chose se voit de suite pour certaines surfaces particulières. Prenons, par exemple, la surface

$$z^2 = (x-a_1)\ldots(x-a_\alpha)(y-b_1)\ldots(y-b_\beta);$$

on a l'intégrale double de première espèce

$$\int\int \frac{dx\,dy}{z},$$

et, en désignant par ω une période de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_\alpha)}},$$

par ω' une période de

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y-b_1)\ldots(y-b_\beta)}},$$

$\omega\omega'$ représentera manifestement une période différente de zéro de l'intégrale double.

Cela posé, effectuons une transformation homographique quelconque sur la surface précédente pour que les axes n'aient plus une position spéciale par rapport à la surface; soit alors

$$f(x, y, z) = 0$$

son équation : elle sera de degré $m = \alpha + \beta$ et n'aura pas de lignes multiples.

Concevons alors l'équation linéaire, que nous désignons par E, relative aux cycles de la relation algébrique entre x et z, $f = 0$. Parmi les contours fermés dans le plan de la variable y, ramenant le même cycle et engendrant par suite une surface cyclique, il y en aura certainement pour lesquels l'intégrale

$$\int \Omega\, dy$$

ne sera pas nulle.

Prenons maintenant une surface arbitraire de degré m,

$$F(x, y, z) = 0,$$

et concevons l'équation linéaire (en y) correspondante (E'). Le groupe de l'équation E est un sous-groupe dans le groupe de l'équation E', car on peut passer de l'équation E' à l'équation (E) en faisant varier certains coefficients d'une manière continue, et les points singuliers de l'équation (E) sont les limites des points singuliers de l'équation E', plusieurs de ceux-ci pouvant être confondus en un seul. D'autre part, on peut envisager une intégrale double de première espèce de la surface F, qui se transformera, par la variation continue des mêmes coefficients, en une intégrale double de première espèce de la surface f. A une certaine substitution linéaire du groupe de (E) correspond une intégrale Ω de cette équation, que la substitution laisse invariable; pareillement pour l'équation (E) on aura une intégrale Ω' jouissant de la même propriété, et puisque

$$\int \Omega\, dy$$

n'est pas nulle, il en sera nécessairement de même pour l'expression

$$\int \Omega' dy,$$

dont la précédente n'est qu'une valeur particulière pour des valeurs spéciales de certains coefficients ou paramètres.

On peut, au premier abord, se demander comment il se fait qu'un raisonnement du même genre ne soit pas applicable aux cycles linéaires; d'où l'on conclurait qu'il existe en général des cycles linéaires effectifs, proposition complètement fausse, comme nous l'avons vu précédemment. La raison en est facile à saisir : c'est la présence des singularités de la surface qui amène la réductibilité d'une équation différentielle linéaire en général irréductible. Pour les cycles à deux dimensions, au contraire, la présence des singularités ne peut que diminuer le nombre des substitutions susceptibles de correspondre à un tel cycle.

15. Je me bornerai à introduire ainsi cette notion des cycles à *deux* dimensions d'une surface algébrique. Quant à la recherche précise du nombre de ces cycles, c'est une question que je n'ai pas encore entièrement élucidée; je la laisserai de côté, en me réservant d'y revenir.

Indiquons seulement comment on pourrait encore procéder pour obtenir des *surfaces cycliques*. Soient

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'', \qquad z = z' + iz''.$$

Concevons que l'on prenne pour x', x'', y', y'', z', z'' des fonctions rationnelles réelles de quatre variables réelles u_1, u_2, u_3 et u_4, ne devenant infinies pour aucune valeur réelle de ces variables. En substituant dans $f(x, y, z) = 0$ ces valeurs de x, y et z, nous aurons deux équations

$$Q(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0,$$
$$P(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0.$$

Ces deux équations définiront des surfaces fermées à deux dimensions : ces surfaces seront des surfaces cycliques.

Examinons, pour donner un exemple, un cas particulier bien simple. Considérons une surface pour laquelle les coordonnées x, y, z s'expriment uniformément par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres u et v, et désignons par

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & \omega'_3 & \omega'_4 \end{Bmatrix}$$

les quatre couples de périodes correspondantes. Il n'y a dans ce cas qu'une seule intégrale de première espèce, et l'on peut écrire

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} = \int\int du\,dv;$$

posons

$$u = \omega_1 U + \omega_2 V, \qquad v = \omega'_1 U + \omega'_2 V,$$

l'intégrale deviendra

$$(\omega_1\omega'_2 - \omega_2\omega'_1)\int\int dU\,dV,$$

et nous aurons une période en étendant l'intégrale précédente à un continuum *fermé* à deux dimensions, contenu dans le prismatoïde des périodes; or nous obtiendrons un tel continuum en faisant varier U et V de zéro à l'unité; car, pour U et V, le tableau des deux premières périodes est

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

On en conclut que les expressions $\omega_i\omega'_k - \omega_k\omega'_i (i, k = 1, 2, 3, 4)$ sont les périodes de l'intégrale double de première espèce attachée à la surface considérée.

V. — Digression sur les fonctions de trois variables complexes.

14. Je terminerai ce Chapitre en faisant quelques remarques sur les fonctions de trois variables complexes. Quand on passe du domaine de deux variables complexes à celui de trois variables, on peut de deux manières différentes étendre les notions relatives aux intégrales multiples.

Nous pouvons, en premier lieu, considérer l'intégrale double

$$(1) \qquad \int\int A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy$$

(où A, B, C sont des fonctions analytiques de x, y et z), étendue à une certaine *surface* à deux dimensions; le sens de cette intégrale se détermine en suivant la même voie que M. Poincaré dans le Mémoire cité plus haut. La condition pour que le théorème de Cauchy s'étende à une telle intégrale, c'est-à-dire pour que cette intégrale étendue à une surface *fermée* soit nulle quand on peut, par une déformation continue, réduire cette surface à un point sans rencontrer de valeurs de x, y, z pour lesquelles A, B, C cessent d'être continues, est ici, comme dans le cas des quantités réelles,

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

En supposant vérifiée cette condition, qu'on peut appeler d'*intégrabilité*, et dans le cas où A, B, C sont des fonctions rationnelles de x, y, z, nous allons chercher quels seront les *résidus* de cette intégrale double, c'est-à-dire les diverses valeurs de cette intégrale prise sur une surface fermée à deux dimensions. Nous allons d'ailleurs nous borner au cas où l'on aurait

$$A = \frac{P}{S}, \qquad B = \frac{Q}{S}, \qquad C = \frac{R}{S},$$

P, Q, R, S étant des polynômes en x, y, z, le dernier étant supposé irréductible. La condition d'intégrabilité s'écrira alors

$$(2) \qquad P\frac{\partial S}{\partial x} + Q\frac{\partial S}{\partial y} + R\frac{\partial S}{\partial z} = S\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right).$$

Supposons d'abord que nous laissions à x une valeur constante, d'ailleurs arbitraire; notre intégrale double se réduit alors à

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dy\, dz}{S(x, y, z)}.$$

Prenons alors, dans le domaine des deux variables complexes y et z, les résidus de cette intégrale double. Ceux-ci seront, d'après M. Poincaré, les périodes de l'intégrale abélienne ordinaire

$$(3) \qquad \int \frac{P\, dy}{\frac{\partial S}{\partial z}},$$

relative à la relation algébrique entre y et z,

$$S(x, y, z) = 0.$$

Dans tout ceci, x figure comme un paramètre d'ailleurs arbitraire. Mais les résidus de l'intégrale double (1), si la condition d'intégrabilité est remplie, doivent être des constantes; il faut donc que les périodes de l'intégrale (3) ne dépendent pas de x. Il est essentiel de le vérifier, et cette vérification va précisément nous ramener à certain ordre d'idées qui a joué un rôle important dans le premier Chapitre.

La relation (2), en effet, n'est pas nouvelle pour nous; elle joue un rôle fondamental dans l'étude des intégrales de différentielles totales relatives aux surfaces algébriques. Je dis que l'intégrale

$$\int \frac{P\,dy - Q\,dx}{S'_z}$$

est une intégrale de différentielle totale relative à la surface algébrique $S(x, y, z) = 0$.

Il faut donc montrer, comme conséquence de l'identité (2), que

$$\frac{\partial\left(\dfrac{Q}{S'_z}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\dfrac{P}{S'_z}\right)}{\partial x} = 0,$$

x, y et z étant liés par la relation $S(x, y, z) = 0$.

En développant l'égalité précédente, on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial Q}{\partial y} S'_z - \frac{\partial Q}{\partial z} S'_y\right) S'_z - Q(S''_{zy} S'_z - S''_{z^2} S'_y)&\\ + \left(\frac{\partial P}{\partial x} S'_z - \frac{\partial P}{\partial z} S'_x\right) S'_z - P(S''_{zx} S'_z - S''_{z^2} S'_x) &= 0.\end{aligned}$$

Nous pouvons remplacer $PS'_x + QS'_y$ par $-RS'_z$ d'après l'identité (2).

Nous avons alors S'_z en facteur, et la relation à vérifier devient

$$-(QS''_{zy} + PS''_{zx} + RS''_{z^2}) + S'_z\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) - S'_x \frac{\partial P}{\partial z} - S'_y \frac{\partial Q}{\partial z} = 0.$$

Or différentions maintenant l'identité (2) par rapport à z, et faisons dans le résultat $S = 0$, nous aurons précisément la relation précédente.

Nous avons ainsi vérifié que les périodes de l'intégrale (3) ne dépendent pas de x, puisque ces périodes sont des périodes de l'intégrale de différentielle totale

$$\int \frac{P\,dy - Q\,dx}{S'_z}.$$

Donc les périodes de cette intégrale simple seront des résidus de l'intégrale double (1). Réciproquement, d'ailleurs, tout résidu de (1) sera une période de l'intégrale précédente, car tout résidu peut toujours se ramener à l'intégrale prise le long d'une sorte de tore enveloppant un cycle linéaire de la surface algébrique $S(x, y, z) = 0$.

On voit que l'étude des intégrales de la forme (1), quand A, B, C sont des fonctions rationnelles, se rattache étroitement à la théorie des surfaces algébriques.

15. Il va en être de même pour la seconde catégorie d'intégrales multiples que l'on peut encore considérer. Envisageons maintenant l'intégrale triple

$$(1) \qquad \iiint \frac{P\,dx\,dy\,dz}{Q},$$

P et Q étant des polynômes en x, y, z; la définition de cette intégrale, étendue à un continuum à trois dimensions, se fait toujours d'après les mêmes principes. Nous n'avons ici aucune condition d'intégrabilité; cette intégrale, étendue à un continuum *fermé*, est nulle, quand ce continuum peut se réduire à un point sans rencontrer de systèmes de valeurs x, y, z, pour lesquelles D s'annule.

Cherchons quels sont les résidus de cette intégrale, c'est-à-dire les diverses valeurs qu'elle prend, quand on l'étend à un continuum fermé quelconque à trois dimensions.

Donnons d'abord à x et à y des valeurs fixes, et considérons une racine de l'équation en z

$$Q(x, y, z) = 0.$$

Le résidu ordinaire correspondant de l'intégrale simple

$$\int \frac{P\,dz}{Q}$$

sera manifestement

$$\frac{P}{Q'_z}.$$

Nous avons donc maintenant à considérer l'intégrale double

$$\int\int \frac{P\,dx\,dy}{Q'_z}. \tag{2}$$

Quel devra être le champ de l'intégration? Cette intégrale double devra être étendue à un continuum *fermé* de points analytiques (x, y, z) ou, en d'autres termes, d'après nos définitions précédentes, à un *cycle à deux dimensions*, de la surface Q.

Nous en concluons que les résidus de l'intégrale triple (1) sont les périodes de l'intégrale double (2), cette intégrale double étant relative à la surface algébrique $Q(x, y, z) = 0$.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATION DES SURFACES EN ELLES-MÊMES.

I. — Théorème sur la transformation des surfaces.

1. M. Schwarz a montré que les courbes du genre zéro et du genre un sont les seules qui puissent être transformées en elles-mêmes par une substitution birationnelle renfermant un paramètre arbitraire. Le théorème de l'éminent géomètre de Göttingen peut être établi de la manière suivante.

Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe que transforme en elle-même la substitution birationnelle

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = \mathrm{R}\,(t, x, y), \\ y' = \mathrm{R}_1(t, x, y), \end{cases}$$

où nous mettons en évidence le paramètre t, dont R et R_1 seront des fonctions analytiques, d'ailleurs quelconques. Nous pouvons d'ailleurs supposer, comme l'indique M. Schwarz, que, pour une valeur particulière $t = t_0$ du paramètre t, la substitution précédente se réduit à

$$x' = x, \qquad y' = y.$$

Cela posé, supposons que la courbe soit de genre p, et considérons les intégrales de première espèce

$$\int \frac{\mathrm{Q}_1(x, y)\,dx}{f'_y}, \quad \int \frac{\mathrm{Q}_2(x, y)\,dx}{f'_y}, \quad \ldots, \quad \int \frac{\mathrm{Q}_p(x, y)\,dx}{f'_y},$$

l'élément

$$\frac{\mathrm{Q}_1(x', y')\,dx'}{f'_{y'}};$$

quand on remplacera x' et y' par les valeurs (1) en x et y, prendra la forme

$$\mathrm{A}_1 \frac{\mathrm{Q}_1(x, y)\,dx}{f'_y} + \mathrm{A}_2 \frac{\mathrm{Q}_2(x, y)\,dx}{f'_y} + \ldots + \mathrm{A}_p \frac{\mathrm{Q}_p(x, y)\,dx}{f'_y},$$

puisque une intégrale de première espèce doit nécessairement après la transformation rester encore une intégrale de première espèce. Écrivons donc

$$\frac{\mathrm{Q}_1(x', y')\,dx'}{f'_{y'}} = \mathrm{A}_1 \frac{\mathrm{Q}_1(x, y)\,dx}{f'_y} + \mathrm{A}_2 \frac{\mathrm{Q}_2(x, y)\,dx}{f'_y} + \ldots + \mathrm{A}_p \frac{\mathrm{Q}_p(x, y)\,dx}{f'_y}.$$

Les coefficients A pourraient être des fonctions du paramètre t, mais nous allons précisément montrer qu'ils n'en dépendent pas. On le verra tout de suite par la considération des périodes; donnons en effet à t une valeur arbitraire, mais fixe, et faisons décrire un cycle au point (x, y), auquel correspondent pour les p intégrales envisagées les périodes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_p:$$

le point (x', y') décrira aussi un cycle, et soit ω'_1 la période correspondante ; on aura donc

$$\omega'_1 = A_1\omega_1 + A_2\omega_2 + \ldots + A_p\omega_p,$$

faisant décrire à (x, y), $(p-1)$ autres cycles, nous obtiendrons $p-1$ autres relations de cette forme, et, comme on peut toujours supposer les p cycles tellement choisis que le déterminant des coefficients A_1, $A_2, \ldots A_p$, dans ces p relations, soit différent de zéro, on voit que les quantités A se trouvent complètement déterminées par des relations où ne figure pas le paramètre t : elles sont donc indépendantes de ce paramètre.

De plus, nous avons dit que, pour $t = t_0$, on a

$$x' = x, \qquad y' = y;$$

on aura donc

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = A_3 = \ldots = A_p = 0,$$

et il reste par suite

$$\frac{Q_1(x', y')\,dx'}{f_{y'}} = \frac{Q_{1}(x, y)\,dx}{f_y};$$

dans l'hypothèse où l'on aurait $p > 1$, on aura, par les mêmes raisonnements,

$$\frac{Q_2(x', y')\,dx'}{f_{y'}} = \frac{Q_2(x, y)\,dx}{f_y}:$$

de là nous concluons immédiatement, en divisant,

$$\frac{Q_1(x', y')}{Q_2(x', y')} = \frac{Q_1(x, y)}{Q_2(x, y)};$$

or une telle égalité est impossible, car elle établit entre les deux points analytiques (x, y) et (x', y') une relation où ne figure pas de paramètre arbitraire. *Le théorème est donc démontré.*

Remarque. — Le point capital dans la démonstration consiste à faire voir que les coefficients A ne dépendent pas de t : c'est ce que nous avons montré en considérant les périodes. On peut y parvenir par une autre voie.

Reprenons la substitution

$$x' = R(x, y), \qquad y' = R_1(x, y),$$

les coefficients figurant dans les fonctions rationnelles $R(x, y)$ et $R_1(x, y)$ sont, avons-nous supposé, des fonctions d'un paramètre; mais, d'autre part, ces coefficients seront nécessairement des fonctions *algébriques* d'un ou de plusieurs d'entre eux restant arbitraires; désignons ceux-ci par la lettre θ. Dans ces conditions, reprenons la relation

$$\frac{Q_1(x', y')\,dx'}{f'_{y'}} = A_1 \frac{Q_1(x, y)\,dx}{f'_y} + \ldots + A_p \frac{Q_p(x, y)\,dx}{f'_y},$$

les A vont alors être des fonctions algébriques des quantités θ. Or je dis que ces fonctions doivent être des constantes. Écrivons en effet la relation précédente sous la forme

$$\int_{x'_0, y'_0}^{x', y'} \frac{Q_1(x', y')\,dx'}{f'_{y'}} = A_1 \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{Q_1(x, y)\,dx}{f'_y} + \ldots + A_p \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{Q_p(x, y)\,dx}{f'_y},$$

(x'_0, y'_0) correspondant à (x_0, y_0). Cela posé, laissons (x, y) fixe ainsi que (x_0, y_0); le second membre va être une fonction *algébrique* des θ; si cette fonction ne se réduit pas à une constante, elle deviendra infinie pour certaines valeurs des θ; or cela est impossible, car le premier membre est une intégrale de première espèce, et de plus, x' et y' étant aussi des fonctions algébriques des θ, le point analytique (x', y') ne décrit pas une infinité de cycles avant d'arriver aux limites de l'intégration correspondant à des valeurs de θ qui rendraient infini le second membre. L'expression

$$A_1 \int^{x, y} \frac{Q(x, y)\,dx}{f'_y} + \ldots + A_p \int^{x, y} \frac{Q_p(x, y)\,dx}{f'_y}$$

ne dépend donc pas de θ; c'est donc une intégrale *fixe* de première espèce, attachée à la courbe

$$f(x, y) = 0;$$

par suite, les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_p$ doivent eux-mêmes *séparément* être indépendants de θ; ce qui nous donne de nouveau le résultat annoncé.

2. *Proposition analogue relative aux surfaces algébriques.* — Nous allons maintenant faire connaître, pour les surfaces algébriques, une proposition analogue à celle que M. Schwarz a donnée pour les courbes planes.

Voici le nouveau théorème que nous nous proposons d'établir :

Si une surface peut être transformée en elle-même par une substitution birationnelle renfermant deux paramètres arbitraires, la surface sera du genre zéro ou du genre un.

Le genre dont il est question dans cet énoncé est celui que M. Nœther appelle *Flachengeschlecht*, et il importe de préciser ce qu'on doit entendre ici par transformation avec *deux* paramètres arbitraires; ces deux paramètres devront figurer de telle manière dans la transformation qu'à un point de la surface corresponde, par la transformation et en faisant varier les paramètres, non pas une courbe, mais bien un point *arbitraire* de la surface.

La démonstration du théorème énoncé sera bien facile, après ce que nous venons de dire pour les courbes algébriques. Nous allons en effet suivre entièrement le même mode de démonstration; la surface étant supposée de genre p, considérons les p *intégrales doubles de première espèce* attachées à la surface

$$\iint \frac{Q_1(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z}, \quad \ldots, \quad \iint \frac{Q_p(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

en désignant par $f(x,y,z) = 0$ l'équation de la surface de degré m, et les Q étant des polynômes d'ordre $m-4$. Écrivons les équations de la transformation birationnelle

$$\begin{aligned} x' &= R\,(t, t', x, y, z), \\ y' &= R_1(t, t', x, y, z), \\ z' &= R_2(t, t', x, y, z), \end{aligned}$$

en mettant en évidence les deux paramètres t et t'.

L'élément

$$\frac{Q_1(x', y', z')\,dx'\,dy'}{f'_{z'}},$$

quand on remplacera x', y' et z' par leur valeur en x, y, z, prendra la forme

$$A_1\frac{Q_1(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} + A_2\frac{Q_2(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} + \ldots + A_p\frac{Q_p(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

puisque une intégrale double de première espèce doit nécessairement, après la transformation, rester encore une intégrale de première espèce. Écrivons donc

$$\frac{Q_1(x', y', z')\,dx'\,dy'}{f'_{z'}} = A_1\frac{Q_1(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} + \ldots + A_p\frac{Q_p(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

les coefficients A pouvant être des fonctions des paramètres t et t'; mais nous allons montrer qu'ils n'en dépendent pas. Le premier mode de transformation employé plus haut pourrait être encore employé ici, mais il faudrait faire intervenir les périodes de l'intégrale double; la seconde voie n'exigera au contraire aucune modification pour ainsi dire dans la suite des raisonnements.

Reprenons en effet la substitution

$$x' = R(x, y, z), \qquad y' = R_1(x, y, z), \qquad z' = R_2(x, y, z);$$

les coefficients figurant dans les fonctions rationnelles R, R_1 et R_2 seront nécessairement des fonctions algébriques de deux ou plusieurs entre eux restant arbitraires, que nous désignerons encore par la lettre θ. Écrivons, d'autre part, la relation précédente sous la forme

$$\int_{x'_0}^{x'}\int_{y'_0}^{y'}\frac{Q_1(x', y', z')\,dx'\,dy'}{f'_{z'}} = A_1\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\frac{Q_1(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} + \ldots$$
$$+ A_p\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\frac{Q_p(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}.$$

Cela posé, laissons (x, y, z) fixe ainsi que (x_0, y_0, z_0); le second membre va être une fonction algébrique des θ; si cette fonction ne se réduit pas à une constante, elle deviendra infinie pour certaines valeurs des 0; or cela est impossible, car le premier membre est une intégrale double de première espèce. On conclut, comme précédemment, que les coefficients A ne dépendent pas des paramètres.

On peut supposer la transformation telle que, pour certaines valeurs non singulières des paramètres t et t', soit $t = t_0$, $t' = t_0$, la transformation se réduise à

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

On voit que, dans ce cas, on aura

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = A_3 = \ldots = A_p = 0.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{Q_1(x', y', z')\,dx'\,dy'}{f'_{z'}} = \frac{Q_1(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_{z}};$$

si l'on a $p < 1$, on aura pareillement

$$\frac{Q_2(x', y', z')\,dx'\,dy'}{f'_{z'}} = \frac{Q_2(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_{z}},$$

et des deux égalités précédentes on conclut

$$\frac{Q_1(x', y', z')}{Q_2(x', y', z')} = \frac{Q_1(x, y, z)}{Q_2(x, y, z)},$$

égalité impossible, car pour une valeur fixe du point (x, y, z) correspondrait pour (x', y', z') une courbe sur la surface.

La surface ne peut donc être d'un genre supérieur à l'unité, ce qui est précisément le théorème énoncé.

II. — Surfaces de genre supérieur a un admettant un faisceau de transformations.

3. Nous avons supposé qu'il y avait au moins deux paramètres arbitraires dans la transformation considérée; l'examen du cas où il y aurait seulement un paramètre arbitraire conduit à des conclusions bien différentes. En supposant p supérieur à l'unité, on pourra encore raisonner comme plus haut et écrire

$$\frac{Q_1(x', y', z')}{Q_2(x', y', z')} = \frac{Q_1(x, y, z)}{Q_2(x, y, z)};$$

mais nous ne pouvons plus conclure de cette égalité que p ne peut surpasser l'unité.

Il est même bien facile de voir que, dans une surface susceptible d'être transformée en elle-même par une transformation birationnelle renfermant un seul paramètre arbitraire, le nombre p peut être quelconque. Considérons, en effet, une surface dont les coordonnées soient fonctions rationnelles de quatre paramètres λ, μ, λ', μ',

$$\begin{aligned} x &= R(\lambda, \mu, \lambda', \mu'), \\ y &= R_1(\lambda, \mu, \lambda', \mu'), \\ z &= R_2(\lambda, \mu, \lambda', \mu'), \end{aligned}$$

les deux paramètres λ et μ étant liés par la relation algébrique

$$(1) \qquad f(\lambda, \mu) = 0,$$

et les deux paramètres λ' et μ' par une seconde relation algébrique

$$(2) \qquad F(\lambda', \mu') = 0,$$

et supposons de plus, ce qu'il est évidemment possible de réaliser, qu'à un point arbitraire de la surface ne correspondent qu'un seul système de valeurs (λ, μ) et un seul système de valeurs (λ', μ').

Supposons la relation algébrique (2) de genre p supérieur à l'unité, et la relation (1) de genre un. Dans ces conditions, la courbe f pouvant être transformée en elle-même par une substitution birationnelle renfermant un paramètre arbitraire, il en sera évidemment de même de la surface proposée.

Quel sera le genre de cette surface? Il est aisé de voir qu'il est égal au genre p de la relation (2). Soient, en effet,

$$\int S(\lambda, \mu)\, d\lambda$$

et

$$\int S_1(\lambda', \mu')\,d\lambda', \quad \ldots, \quad \int S_p(\lambda', \mu')\,d\lambda'$$

les intégrales de première espèce correspondant aux courbes f et F.

J'envisage l'intégrale double

$$\int\int S(\lambda, \mu)\,S_i(\lambda', \mu')\,d\lambda\,d\lambda',$$

qui a évidemment la forme

$$\int\int P(x, y, z)\,dx\,dy,$$

P étant une fonction rationnelle de x, y, z; cette intégrale sera une intégrale double de *première espèce* attachée à la surface. En faisant varier i de 1 à p, on obtient ainsi p intégrales doubles linéairement indépendantes, et par suite le genre de la surface est au moins égal à p. Il est aisé de montrer qu'il est précisément égal à p; toute intégrale double sera en effet de la forme

$$\int\int \varphi(\lambda, \mu, \lambda', \mu')\,d\lambda\,d\lambda';$$

supposons-la de première espèce; il sera d'abord nécessaire que l'intégrale simple

$$\int \varphi(\lambda, \mu, \lambda', \mu')\,d\lambda,$$

λ' et μ' étant considérés comme des constantes, soit une intégrale de première espèce pour la courbe

$$f(\lambda, \mu) = 0;$$

on a donc

$$\varphi(\lambda, \mu, \lambda', \mu') = M\,S(\lambda, \mu),$$

M ne dépendant pas de λ, μ et étant par suite une fonction rationnelle de λ' et μ'. On voit ensuite que

$$\int M\,d\lambda'$$

doit être une intégrale de première espèce pour la courbe

$$F(\lambda', \mu') = 0,$$

et l'on en conclut

$$M = A_1 S_1(\lambda', \mu') + A_2 S_2(\lambda', \mu') + \ldots + A_p S_p(\lambda', \mu'),$$

les A étant des constantes, ce qui démontre notre théorème.

Considérons maintenant les polynômes adjoints d'ordre $m - 4$ correspondant à la surface, dont nous représenterons l'équation par

$$\psi(x, y, z) = 0;$$

soit une intégrale double de première espèce

$$\int\int \frac{Q_1(x, y, z)}{\psi'_z} dx\, dy;$$

ce sera, par exemple, celle qui était représentée tout à l'heure par

$$\int\int S(\lambda, \mu) S_1(\lambda', \mu') d\lambda\, d\lambda'.$$

Étudions l'intersection de $Q_1(x, y, z) = 0$ avec la surface. Elle sera donnée par l'équation

$$S(\lambda, \mu) = 0,$$

et par cette autre

$$S_1(\lambda', \mu') = 0.$$

La première équation ne nous donnera rien en dehors des lignes multiples de la surface, car la courbe adjointe d'une courbe de genre *un* ne rencontre celle-ci qu'aux points multiples. L'intersection cherchée sera donc donnée par

$$S_1(\lambda', \mu') = 0,$$

qui, en dehors des points multiples, nous donne, sur la courbe

$$F(\lambda', \mu') = 0,$$

$2p - 2$ points, comme il est bien connu. Ainsi, toute surface adjointe d'ordre $m-4$

$$Q_1(x, y, z) = 0$$

rencontre, en dehors des lignes multiples, la surface ψ suivant $2p-2$ courbes, qui sont manifestement du genre un.

4. Après avoir étudié ce cas particulier, considérons d'une manière générale une surface algébrique pouvant être transformée en elle-même par une substitution birationnelle renfermant un paramètre arbitraire, *dans le cas où le genre de cette surface est supérieur à l'unité*. Désignant par

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} x' = \mathrm{R}(t, x, y, z), \\ y' = \mathrm{R}_1(t, x, y, z), \\ z' = \mathrm{R}_2(t, x, y, z) \end{cases}$$

cette substitution, on a, comme il a été dit plus haut et en conservant les mêmes notations,

$$\frac{Q_1(x', y', z')}{Q_2(x', y', z')} = \frac{Q_1(x, y, z)}{Q_2(x, y, z)}.$$

J'envisage maintenant le faisceau de surfaces

$$Q_1(x, y, z) - \lambda Q_2(x, y, z) = 0$$

pour une valeur fixe, d'ailleurs quelconque, donnée à λ; cette équation définit (en dehors des lignes multiples et des lignes qui seraient invariables avec λ) une courbe sur la surface. Cette courbe peut d'ailleurs être décomposable en plusieurs courbes irréductibles; nous désignerons l'une d'elles par C.

La courbe C se transformera évidemment en elle-même par la substitution (S); elle sera donc du genre un, car elle ne peut être du genre zéro, puisque le genre de la surface est supérieur à un. Nous pouvons ajouter que son module ne dépend pas de λ; la courbe est, en effet, donnée par les équations

$$x' = \mathrm{R}(t, x, y, z), \qquad y' = \mathrm{R}_1(t, x, y, z), \qquad z' = \mathrm{R}_2(t, x, y, z),$$

en désignant par (x, y, z) les coordonnées d'un point fixe, d'ailleurs quelconque, situé sur elle, et x', y', z' désignant les coordonnées courantes, fonctions du paramètre t. Or les coefficients de x, y, z dans la substitution (S) peuvent être considérés comme fonctions algébriques d'un d'entre eux, ou, ce qui revient au même, comme fonctions rationnelles de deux paramètres α et β liés par une relation algébrique irréductible $P(\alpha, \beta) = 0$.

Les périodes de l'intégrale de première espèce correspondant à la courbe C ne pourront être que des multiples des périodes d'une intégrale de première espèce correspondant à la courbe P; le module de la courbe C ne dépend donc pas de x, y, z, et par suite de λ, comme nous l'avions annoncé.

Ainsi, *l'intersection de la surface avec le faisceau*

$$Q_1(x, y, z) - \lambda Q_2(x, y, z) = 0$$

nous donnera un certain nombre de courbes, variables avec λ, qui seront de genre un, et dont le module ne dépendra pas de λ.

Mais approfondissons davantage la nature de cette intersection. Je dis tout d'abord qu'il n'est pas possible qu'il n'y ait qu'une seule courbe, sauf si $p = 2$; car, en désignant par $p^{(1)}$ le genre de la partie mobile de l'intersection supposée irréductible, on a, d'après M. Nœther (*Math. Annalen*, t. VIII, p. 522),

$$p^{(1)} \geqq 2p - 3.$$

Il résulte alors d'un autre théorème de M. Nœther (même Mémoire, p. 523) que l'intersection, n'étant pas irréductible, se compose de $(p - 1)$ courbes du genre un. Ces courbes ne forment pas un réseau à $(p - 1)$ paramètres, mais seulement un faisceau à un paramètre. On obtiendra ce faisceau le plus simplement en prenant le faisceau

$$Q_1(x, y, z) - \lambda Q_2(x, y, z) = 0$$

des surfaces adjointes passant par $(p - 2)$ points fixes, d'ailleurs arbitraires.

Ce faisceau passera par $(p - 2)$ points fixes, et il y aura alors une seule courbe mobile du genre un.

Considérons la projection de cette courbe sur le plan des xy; soit

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$

f étant un entier en x, y, λ, et nous pouvons supposer que z sera fraction rationnelle de x, y et λ.

La courbe précédente est de genre un, et son module doit être indépendant de λ. Par conséquent, on pourra exprimer x et y de la manière suivante : x et y seront fonctions rationnelles d'un paramètre θ et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré, dont les coefficients ne dépendront pas de λ, soit $A(\theta)$; les coefficients de ces fonctions rationnelles seront des fonctions algébriques de λ. Ils pourront donc s'exprimer par des fonctions rationnelles de deux paramètres α et β, liées par une relation algébrique (λ étant lui-même rationnel en α et β),

$$P(\alpha, \beta) = 0.$$

On aura donc, pour notre surface,

$$(\mu) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= R\left[\alpha, \beta, \theta, \sqrt{A(\theta)}\right], \\ y &= R_1\left[\alpha, \beta, \theta, \sqrt{A(\theta)}\right], \\ z &= R_2\left[\alpha, \beta, \theta, \sqrt{A(\theta)}\right], \end{aligned} \right.$$

les R étant rationnelles en α, β, θ et $\sqrt{A(\theta)}$.

Telles sont les expressions que l'on peut donner aux coordonnées d'un point quelconque de la surface; d'ailleurs, dans ces expressions, rien ne nous autorise à supposer, comme dans le cas particulier du début, qu'à un point arbitraire de la surface ne correspond qu'un système de valeurs de (α, β) et $\left[\theta, \sqrt{A(\theta)}\right]$.

Mais, après avoir obtenu les équations (μ), ou en partant *a priori* d'expressions de ce genre, il sera facile de décider si la surface correspondante admet une infinité de transformations birationnelles avec un paramètre arbitraire. Remarquons d'abord que θ et $\sqrt{A(\theta)}$ seront, par les équations (μ), fonctions rationnelles des x, y, z, α et β; car, quand on a α et β, la courbe f sera déterminée; donc θ et $\sqrt{A(\theta)}$ ont alors une valeur déterminée pour un point arbitraire de la courbe.

On peut maintenant supposer que $A(\theta)$ a la forme normale; soit donc

$$\theta = \operatorname{sn} t \quad \text{et} \quad \sqrt{A(\theta)} = \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t;$$

on aura

$$x = R\,(\alpha, \beta, \operatorname{sn} t, \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t),$$
$$y = R_1(\alpha, \beta, \operatorname{sn} t, \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t),$$
$$z = R_2(\alpha, \beta, \operatorname{sn} t, \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t).$$

Or la transformation birationnelle proviendra, si elle existe, du changement de t en $t + h$, h étant une constante arbitraire.

Soit donc

$$x' = R[\alpha, \beta, \operatorname{sn}(t+h), \operatorname{cn}(t+h)\operatorname{dn}(t+h)], \qquad \ldots;$$

donc, puisque $\operatorname{sn} t$ et $\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t$ sont des fonctions rationnelles de x, y, z, α et β, on aura

$$x' = P\,(\alpha, \beta, x, y, z, h),$$
$$y' = P_1(\alpha, \beta, x, y, z, h),$$
$$z' = P_2(\alpha, \beta, x, y, z, h),$$

les P étant rationnelles en x, y, z, α et β.

Si donc α et β sont fonctions rationnelles de x, y, z, il n'y aura aucun doute; x', y', z' seront fonctions rationnelles de x, y, z. Quand α et β sont seulement fonctions algébriques de x, y, z, il faudra, en faisant la substitution, vérifier si x', y', z' sont rationnelles en x, y, z.

III. — Surfaces du genre zéro et un.

5. Nous allons maintenant rechercher les surfaces admettant un *groupe continu* de transformations birationnelles en elles-mêmes, sans nous inquiéter du genre de la surface [1].

J'emploie ici l'expression de groupe de transformations dans le même

[1] L'hypothèse que les transformations forment un groupe est essentielle, car on pourrait avoir des transformations dépendant de paramètres arbitraires, et qui ne formeraient pas un groupe de transformations.

sens que M. Sophus Lie, c'est-à-dire que les deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = \varphi(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_r), \\ y' = \psi(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_r), \end{cases}$$

relatives aux variables indépendantes x et y, et contenant r paramètres a, définiront un groupe de transformations, si les substitutions (1) et

$$(2) \qquad \begin{cases} x'' = \varphi(x', y', b_1, b_2, \ldots, b_r), \\ y'' = \psi(x', y', b_1, b_2, \ldots, b_r), \end{cases}$$

donnent, pour x'' et y'', en fonction de x et y,

$$x'' = \varphi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_r),$$
$$y'' = \varphi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_r),$$

les c dépendant uniquement des a et des b.

Démontrons d'abord un lemme relatif à un groupe de transformations à deux paramètres, en supposant *permutables* les transformations de ce groupe. [Nous dirons, pour abréger, qu'un tel groupe est permutable (¹).]

Représentons ce groupe par

$$x' = \varphi(x, y, a_1, a_2),$$
$$y' = \psi(x, y, a_1, a_2).$$

Nous pouvons de ces deux relations et des deux suivantes

$$dx' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy,$$
$$dy' = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy,$$

(¹) Je me sers de cette locution pour éviter une périphrase; aucune confusion n'est à craindre ici avec une locution analogue employée dans la théorie des substitutions.

éliminer a_1 et a_2; *je dis que le résultat de l'élimination peut se mettre sous la forme*

$$(\alpha)\quad \begin{cases} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = P(x', y')\,dx' + Q(x', y')\,dy', \\ P_1(x, y)\,dx + Q_1(x, y)\,dy = P_1(x', y')\,dx' + Q_1(x', y')\,dy'. \end{cases}$$

Pour démontrer ce théorème, nous supposerons connues les propositions générales données par M. Lie sur les groupes de transformations. Soient

$$\begin{aligned} \delta x &= X_1(x, y)\,\delta t, & \delta x &= X_2(x, y)\,\delta t, \\ \delta y &= Y_1(x, y)\,\delta t, & \delta y &= Y_2(x, y)\,\delta t \end{aligned}$$

les deux transformations infinitésimales linéairement indépendantes du groupe.

Ces deux transformations infinitésimales formant un groupe dont les substitutions sont permutables, nous avons entre les X et les Y les deux identités

$$(\beta)\quad \begin{cases} A_1(X_2) - A_2(X_1) = 0, \\ A_1(Y_2) - A_2(Y_1) = 0, \end{cases}$$

en posant

$$A_1(F) = X_1 \frac{\partial F}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$A_2(F) = X_2 \frac{\partial F}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Cela posé, avec les deux transformations infinitésimales précédentes, on obtiendra les équations finies du groupe, en considérant le système d'équations différentielles ordinaires où λ_1 et λ_2 sont des constantes arbitraires

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2. \end{cases}$$

On tire de là, par l'intégration,

$$\begin{aligned} x &= \varphi[x_0, y_0, \lambda_1(t - t_0), \lambda_2(t - t_0)], \\ y &= \psi[x_0, y_0, \lambda_1(t - t_0), \lambda_2(t - t_0)], \end{aligned}$$

en formant l'intégrale, qui pour $t = t_0$ donne

$$x = x_0,$$
$$y = y_0.$$

Si l'on pose alors

$$\lambda_1(t - t_0) = a_1, \qquad \lambda_2(t - t_0) = a_2,$$

le groupe peut s'écrire

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = \varphi(x, y, a_1, a_2), \\ y' = \psi(x, y, a_1, a_2). \end{cases}$$

Mais les équations (3) donnent, en remplaçant $\lambda_1 dt$ par da_1 et $\lambda_2 dt$ par da_2,

$$dx = X_1 da_1 + X_2 da_2,$$
$$dy = Y_1 da_1 + Y_2 da_2.$$

On en tire

$$da_1 = P\ dx + Q\ dx,$$
$$da_2 = P_1 dx + Q_1 dy,$$

les P et Q étant des fonctions de x et y. Or les relations (β) montrent que

$$P\,dx + Q\,dy \qquad \text{et} \qquad P_1\,dx + Q_1\,dy$$

sont des différentielles totales exactes, comme le prouve un calcul facile. Par suite, le groupe donné par les équations (4) peut se mettre sous la forme

$$a_1 = \int_{x,y}^{x',y'} P\ dx + Q\ dy,$$
$$a_2 = \int_{x,y}^{x',y'} P_1 dx + Q_1 dy.$$

Nous avons donc bien, entre (x, y) et (x', y') la relation (α) écrite plus haut,

$$\mathrm{P}\,(x,y)\,dx + \mathrm{Q}\,(x,y)\,dy = \mathrm{P}\,(x',y')\,dx' + \mathrm{Q}\,(x',y')\,dy',$$
$$\mathrm{P}_1(x,y)\,dx + \mathrm{Q}_1(x,y)\,dy = \mathrm{P}_1(x',y')\,dx' + \mathrm{Q}_1(x',y')\,dy'.$$

6. Ce lemme établi, supposons que nous ayons une surface qui se transforme en elle-même pour une infinité de substitutions *birationnelles, formant un groupe permutable à deux paramètres.* Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface et soit

$$x' = \mathrm{F}_1(x, y, z, a_1, a_2),$$
$$y' = \mathrm{F}_2(x, y, z, a_1, a_2),$$
$$z' = \mathrm{F}_3(x, y, z, a_1, a_2)$$

cette substitution supposée birationnelle. Il n'y a, en réalité, que deux variables indépendantes; nous pouvons donc appliquer le lemme. Les substitutions infinitésimales seront évidemment rationnelles en x, y et z. Les relations entre (x, y, z) et (x', y', z') pourront donc s'écrire sous la forme différentielle adoptée dans le paragraphe précédent,

$$\mathrm{P}\,(x,y,z)\,dx + \mathrm{Q}\,(x,y,z)\,dy = \mathrm{P}\,(x',y',z')\,dx' + \mathrm{Q}\,(x',y',z')\,dy',$$
$$\mathrm{P}_1(x,y,z)\,dx + \mathrm{Q}_1(x,y,z)\,dy = \mathrm{P}_1(x',y',z')\,dx' + \mathrm{Q}_1(x',y',z')\,dy'.$$

les P et Q étant ici *rationnels* en x, y et z.

Nous aurons donc

$$\int_{\alpha,\beta,\gamma}^{x,y,z} \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy = \int_{\alpha',\beta',\gamma'}^{x',y',z'} \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy,$$
$$\int_{\alpha,\beta,\gamma}^{x,y,z} \mathrm{P}_1\,dx + \mathrm{Q}_1\,dy = \int_{\alpha',\beta',\gamma'}^{x',y',z'} \mathrm{P}_1\,dx + \mathrm{Q}_1\,dy,$$

les limites inférieures étant deux *points* arbitraires (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$.

Or à un système de valeurs des seconds membres, pour une valeur donnée de (x', y', z'), ne correspond qu'un système de valeurs de (x, y, z).

Nous arrivons donc à la conclusion suivante : *Les équations*

$$\int^{x,y,z} P\,dx + Q\,dy = u,$$

$$\int^{x,y,z} P_1\,dx + Q_1\,dy = v$$

donnent pour x, y et z des fonctions uniformes de u et v.

Ainsi les coordonnées d'un point quelconque x, y, z de la surface s'exprimeront par des fonctions uniformes de u et v, provenant de l'inversion d'intégrales de différentielles totales attachées à la surface (¹).

7. Après ce cas particulier, nous devons examiner le cas général d'une surface, admettant une infinité de transformations birationnelles formant *un groupe à un nombre quelconque de paramètres.*

Le groupe étant d'ordre fini, il y a nécessairement dans ce groupe un sous-groupe à *un* paramètre (*voir* Lie, *Math. Annalen*, t. 16, p. 463), et, d'après Lie, un tel sous-groupe à un paramètre peut être obtenu de la manière suivante. On prendra une substitution infinitésimale quelconque du groupe primitif,

$$\delta x = X(x, y, z)\,\delta t, \qquad \delta y = Y(x, y, z)\,\delta t, \qquad \delta z = Z(x, y, z)\,\delta t,$$

X, Y et Z étant bien évidemment ici des fonctions rationnelles de x, y et z.

Ces trois équations reviennent d'ailleurs à deux, comme toutes celles que je vais écrire, puisque $S(x, y, z) = 0$, en désignant par $S = 0$ l'équation de la surface.

(¹) J'ai énoncé le théorème précédent (*Comptes rendus*, octobre 1886), sans préciser la façon dont je supposais implicitement que figuraient les paramètres a_1 et a_2 dans la transformation birationnelle. Dans le même numéro des *Comptes rendus*, M. Poincaré a nettement indiqué le profit que l'on pouvait tirer, dans cette question, de la notion de groupes de transformations.

Les équations

$$\frac{dx}{dt}=X(x,y,z),$$
$$\frac{dy}{dt}=Y(x,y,z),\qquad \frac{dz}{dt}=Z(x,y,z),$$

donneront par l'intégration

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} x &= f(x_0,y_0,z_0,t-t_0),\\ y &= \varphi(x_0,y_0,z_0,t-t_0),\\ z &= \psi(x_0,y_0,z_0,t-t_0),\end{aligned}\right.$$

x_0, y_0, z_0 étant les valeurs initiales pour $t=t_0$; et l'on a le groupe à un seul paramètre a

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y,z,a),\\ y' &= \varphi(x,y,z,a),\\ z' &= \psi(x,y,z,a);\end{aligned}$$

f, φ, ψ seront rationnelles en x, y, z, puisque ce groupe est un sous-groupe contenu dans le groupe initial.

Mais revenons au système

$$(\mathrm{A})\quad \frac{dx}{dt}=X(x,y,z),\qquad \frac{dy}{dt}=Y(x,y,z),\qquad \frac{dz}{dt}=Z(x,y,z);$$

son intégrale générale devra être une fonction uniforme de t; car, en changeant dans x, y, z, t en $t+h$, x, y, z deviennent x', y', z' et l'on a, d'après les équations (I),

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y,z,h),\\ y' &= \varphi(x,y,z,h),\\ z' &= \psi(x,y,z,h).\end{aligned}$$

Donc, d'après un mode de raisonnement fréquemment employé, par exemple dans la théorie des fonctions abéliennes, les fonctions pourront s'étendre d'une manière uniforme de proche en proche, et, par suite, l'intégrale générale du système (A) est fonction uniforme de t.

Nous venons de voir que, x, y, z désignant une solution quelconque du système (A),

$$(1) \qquad f(x, y, z, h), \quad \varphi(x, y, z, h), \quad \psi(x, y, z, h),$$

donnera encore une solution de ce système. Les f, φ, ψ sont des fonctions rationnelles parfaitement déterminées en x, y et z.

Cela posé, écrivons ces fonctions rationnelles en mettant pour coefficients des lettres indéterminées, soit

$$F(x, y, z), \quad \Phi(x, y, z), \quad \Psi(x, y, z).$$

Écrivons que, x, y, z désignant une solution de (A), ces trois fonctions satisfont au système (A).

Divers cas pourront se présenter :

1° Il peut rester un arbitraire parmi les coefficients, quelle que soit la solution (x, y, z). Donc, dans F, Φ, Ψ les coefficients s'expriment en fonctions rationnelles de deux quantités liées par une relation algébrique ; il en résulte que dans f, φ, ψ les coefficients, qui sont des fonctions uniformes de h, seront des fonctions doublement périodiques de h (ou dégénérescences).

On a, dans ce cas, sur la surface, *un faisceau de courbes de genre zéro ou un.*

2° Il reste deux arbitraires. Écrivons alors

$$x' = F(x, y, z, \alpha, \beta),$$
$$y' = \Phi(x, y, z, \alpha, \beta),$$
$$z' = \Psi(x, y, z, \alpha, \beta).$$

On peut dire que l'on a là l'intégrale générale du système (A). Deux cas peuvent d'ailleurs se présenter ici, suivant que ces équations définissent ou non un *groupe* de transformations birationnelles à deux paramètres. Plaçons-nous d'abord dans le cas de la négative.

I. Prenons

$$F(x, y, z, \alpha, \beta), \quad \Phi(x, y, z, \alpha, \beta), \quad \ldots$$

et

$$F(x, y, z, \alpha_1, \beta_1), \quad \Phi(x, y, z, \alpha_1, \beta_1), \quad \ldots,$$

α, β et α_1, β_1 ayant des valeurs arbitraires. Si l'on forme

$$(1)\qquad F[F(x, y, z, \alpha, \beta), \Phi, \Psi, \alpha_1, \beta_1], \quad \ldots,$$

on aura nécessairement une solution de (A). Elle devra donc rentrer dans le type

$$(2)\qquad F(x, y, z, \alpha_2, \beta_2), \quad \ldots,$$

α_2 et β_2 ne dépendant pas de t. Mais, par hypothèse, la substitution ne définit pas un groupe de transformations; par conséquent on ne pourra pas déterminer α_2, β_2 en fonction de α_1, β_1 et α, β, de manière que (1) et (2) coïncident pour tout point (x, y, z) de la surface S. En égalant (1) à (2), on aura donc nécessairement une relation algébrique entre x, y, z, et les constantes α_2 et β_2 dépendront de la solution particulière x, y, z que l'on considère.

Il y aura donc dans ce cas entre x, y, z une relation algébrique, variable d'une intégrale à l'autre, et distincte bien entendu de

$$S(x, y, z) = 0.$$

Ces fonctions de t seront donc encore des fonctions doublement périodiques (ou dégénérescences). Considérant une intégrale particulière x, y, z, l'intégrale générale x', y', z' s'obtiendra par les formules précédentes. *On a donc encore sur la surface un réseau de courbes du genre zéro ou un.*

Nous désignerons par le cas D tous les cas où il y a un réseau de courbes de genre zéro ou un sur la surface.

II. Il nous reste à examiner le cas où nous avons un groupe de transformations à deux paramètres, α, β, donné par les expressions F, Φ, Ψ.

Je dis que dans ce cas le groupe sera permutable.

Les paramètres peuvent évidemment être tellement choisis que l'un soit h; nous écrirons donc le groupe

$$\begin{aligned} x' &= F(x, y, z, h, \alpha), \\ y' &= \Phi(x, y, z, h, \alpha), \\ z' &= \Psi(x, y, z, h, \alpha), \end{aligned}$$

et, d'après tout ce qui précède, x, y, z désignant une intégrale quelconque du système,

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, z), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dt} = Z(x, y, z),$$

les formules précédentes donneront l'intégrale générale de ce système. La substitution infinitésimale, correspondant à la variation δh de h, sera

$$\delta x = X(x, y, z)\,\delta h, \qquad \delta y = Y(x, y, z)\,\delta h, \qquad \delta z = Z(x, y, z)\,\delta h.$$

Nous aurons donc établi que le groupe est permutable, si nous établissons le théorème suivant : *Étant donné le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

où X *et* Y *sont des fonctions quelconques de* x *et* y, *si ce système admet un groupe de transformations à deux paramètres*

$$x' = F(x, y, h, k),$$
$$y' = \Phi(x, y, h, k),$$

une des substitutions infinitésimales étant

$$(1) \qquad \delta x = X(x, y)\,\delta h, \qquad \delta y = Y(x, y)\,\delta h,$$

le groupe sera nécessairement permutable.

C'est ce qu'il est aisé d'établir comme il suit. Représentons par

$$(2) \qquad \delta x = X_1(x, y)\,\delta k, \qquad \delta y = Y_1(x, y)\,\delta k,$$

la seconde substitution infinitésimale; (1) et (2) formant un groupe, on a, d'après les principes de M. Lie,

$$(3) \qquad \begin{cases} X_1 \dfrac{\partial X}{\partial x} + Y_1 \dfrac{\partial X}{\partial y} - X \dfrac{\partial X_1}{\partial x} - Y \dfrac{\partial X_1}{\partial y} = \alpha X_1 + \beta X, \\[2ex] X_1 \dfrac{\partial Y}{\partial x} + Y_1 \dfrac{\partial Y}{\partial y} - X \dfrac{\partial Y_1}{\partial x} - Y \dfrac{\partial Y_1}{\partial y} = \alpha Y_1 + \beta Y, \end{cases}$$

α et β étant des constantes.

Mais nous devons écrire, d'autre part, que le système d'équations différentielles admet ce groupe. Nous devons donc avoir

$$\delta \frac{dx}{dt} = \frac{\partial X}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\,\delta y.$$

Substituons aux δ leurs valeurs correspondant à la seconde substitution; il viendra

$$\delta k\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}X + \frac{\partial X_1}{\partial y}Y\right) = \frac{\partial X}{\partial x}X_1\,\delta k + \frac{\partial X}{\partial y}Y_1\,\delta k$$

ou

$$X_1\frac{\partial X}{\partial x} + Y_1\frac{\partial X}{\partial y} - X\frac{\partial X_1}{\partial x} - Y\frac{\partial X_1}{\partial y} = 0;$$

pareillement, la seconde équation donnerait

$$X_1\frac{\partial Y}{\partial x} + Y_1\frac{\partial Y}{\partial y} - X\frac{\partial Y_1}{\partial x} - Y\frac{\partial Y_1}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) montrent que $\alpha = \beta = 0$, ce qui revient à dire, comme on sait, que le groupe est permutable.

Ainsi notre surface S *admet (sauf le cas* D) *un groupe permutable de transformations birationnelles.*

Nous sommes donc ramené à la conclusion du n° **6**.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant, qui résume cet alinéa :

Si une surface algébrique S *admet un groupe fini de transformations birationnelles à un nombre quelconque de paramètres, deux cas peuvent se présenter :*

1° *Il y a sur la surface un faisceau de courbes algébriques du genre zéro ou un.*

2° *Les coordonnées d'un point quelconque de la surface peuvent s'exprimer par des fonctions uniformes de deux paramètres u et v, au moyen de l'inversion de deux intégrales de différentielles totales* *attachées à la surface, soit*

$$\int^{x,y,z} \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy = u,$$

$$\int^{x,y,z} \mathrm{P}_1\,dx + \mathrm{Q}_1\,dy = v,$$

les P *et* Q *étant rationnelles en* x, y, z.

Dans ce dernier cas, le genre de la surface sera nécessairement zéro ou un; dans le premier cas, le genre peut être quelconque. L'étude complète de ce premier cas a été faite dans l'alinéa précédent, en supposant que le genre de la surface soit supérieur à l'unité.

IV. — Surfaces rentrant dans la seconde catégorie; cas où les intégrales ont quatre périodes.

8. Nous allons nous occuper maintenant des surfaces de la seconde catégorie, c'est-à-dire des surfaces pour lesquelles il existe deux intégrales de différentielles totales

$$\int \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy \qquad \text{et} \qquad \int \mathrm{P}_1\,dx + \mathrm{Q}_1\,dy,$$

telles que les équations

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy &= du, \\ \mathrm{P}_1\,dx + \mathrm{Q}_1\,dy &= dv, \end{aligned}$$

donnent pour x, y et z des fonctions uniformes de u et v.

9. Nous rencontrons tout d'abord, comme surfaces de ce type, celles pour lesquelles les équations précédentes donnent x, y, z fonctions uniformes *quadruplement* périodiques de u et v. J'ai étudié ces surfaces dans un autre travail; je rappelle brièvement les résultats que j'ai obtenus et j'y ajoute quelques remarques qui me paraissent très importantes.

Tout d'abord la surface doit être du genre *un*.

Ensuite elle doit posséder deux intégrales de première espèce linéairement indépendantes, soit

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} \quad \text{et} \quad \int \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z}.$$

Soit de plus $R(x, y, z)$ la surface d'ordre $(m-4)$, *adjointe* à la surface f de degré m. Cette surface $R = 0$ coupe, en dehors des lignes multiples, la surface f suivant une certaine courbe Γ. J'ai ajouté aux conditions précédentes la condition que la courbe Γ soit unicursale, et que cette courbe satisfasse à l'équation différentielle

$$B\,dx - A\,dy = 0,$$

ce qui entraînera d'ailleurs immédiatement $B_1\,dx - A_1\,dy = 0$.

Or M. Nœther a fait la remarque que la courbe Γ est nécessairement unicursale, ce n'est même qu'un cas particulier d'une proposition donnée il y a longtemps par cet éminent géomètre, d'après laquelle une courbe « *ausgezeichnete* » tracée sur la surface, c'est-à-dire une courbe par laquelle passent *toutes* les adjointes d'ordre $(m-4)$, est nécessairement unicursale. Mais, dans le cas où le genre est un, il n'y a qu'une adjointe d'ordre $(m-4)$ et, par suite, la courbe Γ peut être considérée comme une courbe « *ausgezeichnete* ».

Une fois que l'on sait que la courbe Γ est unicursale, il est bien facile de voir qu'elle doit satisfaire à l'équation

$$B\,dx - A\,dy = 0.$$

Substituons, en effet, dans l'intégrale

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z},$$

à la place de x, y et z, leurs expressions en fonctions rationnelles d'un paramètre, qui correspondent à la courbe Γ; il faudra que l'élément soit identiquement nul, sinon on aurait une intégrale de fraction rationnelle qui devrait toujours rester finie, ce qui est impossible.

Si la courbe Γ se compose de plusieurs courbes irréductibles, ces différentes courbes seront unicursales; nous les appellerons les courbes Γ.

Ainsi, les conditions nécessaires et suffisantes se réduisent aux deux conditions d'abord énoncées, et les équations

$$\int^{x,y,z} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = u, \qquad \int^{x,y,z} \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = v,$$

donnent pour x, y, z des fonctions uniformes quadruplement périodiques de u et v.

Nous ajouterons que, quand (x, y, z) est située sur une courbe Γ, u et v ont, sur chacune de ces courbes, une valeur constante. Appelons (a, b) ces différents points qui sont manifestement des points d'indétermination pour les fonctions x, y, z de u et v.

Nous venons de dire que, si une surface était de genre un et possédait deux intégrales distinctes de première espèce, les deux équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{x_0, y_0, z_0}^{x,y,z} P\,dx + Q\,dy = u - u_0, \\ &\int_{x_0, y_0, z_0}^{x,y,z} P_1\,dx + Q_1\,dy = v - v_0 \end{aligned} \right.$$

donnent pour x, y et z des fonctions uniformes de u et v.

En réalité, si l'on veut être entièrement rigoureux, ce n'est pas tout à fait ce résultat qui se trouve établi, mais cet autre dans l'énoncé duquel j'emploie une locution dont je ferai souvent usage dans le Chapitre V : x, y, z sont des fonctions de u et v *à apparence uniforme*.

Il est aisé de compléter la démonstration et de montrer que, sous les conditions indiquées, les équations (1) définissent des fonctions uniformes de u et v, pour tout l'ensemble des systèmes de valeurs finies de u et v.

Considérons, en effet, la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

et en même temps le continuum fermé à quatre dimensions, que nous lui avons fait correspondre uniformément dans le second Chapitre ; et concevons tracées dans ce continuum les *coupures* à trois dimensions correspondant à la connexité du troisième ordre (ou du premier, ce qui est identique). Quand (x, y, z) décrit la surface sans franchir les coupures, les variables u et v données par les équations (1) décrivent l'intérieur d'un certain *polyèdre* P_1 limité manifestement par des *faces* qui se correspondent respectivement par des substitutions de la forme

$$(u, v, u+\omega, v+\omega_1),$$

ω et ω_1 étant des périodes des intégrales. D'ailleurs, ce polyèdre peut, *a priori*, se recouvrir lui-même en totalité ou en partie.

Considérons maintenant un chemin C allant de (u_0, v_0) à un autre système quelconque de valeurs des variables (u_1, v_1). Le point (u_0, v_0) est à l'intérieur du polyèdre P; si le point (u_1, v_1) est à l'intérieur de ce même polyèdre, nous aurons en arrivant en (u_1, v_1) par le chemin indiqué une valeur déterminée pour (x, y, z). Si, au contraire, le point (u_1, v_1) est à l'extérieur de P, le chemin C sortira du polyèdre par une certaine *face*, et l'on construira le polyèdre limitrophe, et l'on continuera ainsi de suite. Arrivera-t-on certainement en (u_1, v_1) après avoir construit un nombre *fini* de polyèdres? C'est ce que l'on démontrera en raisonnant absolument comme M. Poincaré, dans son Mémoire sur les groupes fuchsiens, et même ici nous sommes dans des circonstances singulièrement plus faciles, pouvant raisonner sur la longueur de l'arc au sens habituel du mot, et toutes les substitutions à considérer étant nécessairement paraboliques.

Nous sommes donc assuré qu'en partant de (u_0, v_0) et allant, par un chemin déterminé, jusqu'en un point arbitraire (u_1, v_1), les fonctions (x, y, z) se trouvent déterminées; ou, en d'autres termes, *il n'y a certainement pas de limites au domaine des deux variables indépendantes u et v*.

Ce point acquis, la démonstration s'achève aisément. Deux chemins quelconques, partant de (u_0, v_0) pour aboutir en (u_1, v_1), doivent conduire à la même valeur; en effet, deux chemins infiniment voisins conduisent d'abord à la même valeur, puisqu'ils traversent la même suite de polyèdres, et, d'autre part, comme il n'existe par hypothèse aucun système de valeurs de u et v dans le voisinage duquel les fonctions cessent d'être uniformes, on ne pourra rencontrer pendant la déformation du chemin aucune ligne de ramification.

En définitive, x, y, z sont bien des fonctions uniformes de u et v dans tout le domaine des variables complexes illimitées u et v.

10. On sait former les intégrales de première espèce: nous pouvons donc supposer que nous avons les deux équations

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = du,$$
$$\frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = dv,$$

dont on sait qu'elles donnent pour x, y et z des fonctions uniformes quadruplement périodiques de u et v.

x, y, z peuvent s'exprimer par des quotients *de fonctions entières de u et v*, que nous pouvons supposer réduites au même dénominateur

$$x = \frac{G_1(u,v)}{G(u,v)}, \qquad y = \frac{G_2(u,v)}{G(u,v)}, \qquad z = \frac{G_3(u,v)}{G(u,v)};$$

on pourra dire que l'intégration des équations précédentes est faite effectivement si l'on peut former les séries entières G, c'est-à-dire si l'on peut former un système d'équations différentielles permettant de calculer de proche en proche les coefficients de ces fonctions entières de u et v.

Nous nous appuierons sur ce théorème que les fonctions G peuvent être regardées comme appartenant à la classe des fonctions Θ de deux variables; je veux dire que pour un quelconque des systèmes de périodes ω et ω' on aura

$$G(u+\omega, v+\omega') = e^{au+bv+c}G(u,v),$$

a, b, c étant des constantes. Ce théorème n'est autre chose que le théorème jadis énoncé par Riemann, et dont nous avons, M. Poincaré et moi, donné une démonstration, il y a quelques années, que les fonctions quadruplement périodiques peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions Θ (¹).

(¹) *Comptes rendus*, deuxième semestre 1884.

Mais, avant de traiter la question précédente, il ne sera pas inutile d'appliquer la méthode dont je veux faire usage au cas beaucoup plus simple d'une courbe algébrique de genre un

$$f(x,y)=0 \qquad (\text{degré } m).$$

Si $Q(x,y)$ est le polynôme adjoint d'ordre $m-3$, l'équation donnant x en fonction doublement périodique d'un paramètre u sera

$$\frac{Q(x,y)\,dx}{f'_y}=du.$$

Montrons comment, en posant

$$x=\frac{G_1(u)}{G(u)},$$

G et G_1 étant des fonctions holomorphes de u dans tout le plan, appartenant à la classe des fonctions Θ, on pourra obtenir deux équations donnant G et G_1.

Si l'on pose

$$\frac{G'(u)}{G(u)}=\lambda(u),$$

on aura

$$\lambda(u+\omega\ )=\lambda(u)+a,$$
$$\lambda(u+\omega')=\lambda(u)+b,$$

ω et ω' étant les deux périodes, a et b deux constantes.

Donc $\lambda(u)$ sera une intégrale de seconde espèce de la courbe f. Or, ici, cette intégrale ne deviendra infinie que pour $x=\infty$; on aura donc

$$\lambda(u)=\int\frac{P(x,y)\,dx}{f'_y},$$

$P(x,y)$ étant un polynôme de degré $(m-1)$. Il nous faut déterminer le polynôme P. Nous aurons d'abord $\frac{m(m-3)}{2}$ conditions exprimant que la courbe $P=0$ passe par les points doubles de f, puis nous devons écrire que dans

$$\frac{P(x,y)}{f'_y}$$

le développement suivant les puissances descendantes de x (pour x très grand) ne contient pas de terme en $\frac{1}{x}$, condition pour que l'intégrale $\lambda(u)$ soit de seconde espèce.

On aura ainsi $(m-1)$ conditions (non pas m, parce que, la somme des résidus devant être nulle, il suffit d'écrire la condition pour $m-1$ des branches à l'infini). De plus, la fonction $G(u)$ ou

$$e^{\int \lambda(u)\,du}, \text{ c'est-à-dire } e^{\int du \int \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}du},$$

est uniforme.

Or soit, pour une quelconque des branches de la courbe à l'infini, le développement pour x très grand

$$\int \frac{P(x,y)\,dx}{f'_y} = Ax + B + \frac{C}{x} + \ldots,$$

on aura

$$\int \lambda(u)du = \int\left(Ax + B + \frac{C}{x} + \ldots\right)du,$$

et cette intégrale doit, pour la valeur de u correspondant à $x = \infty$, avoir un résidu égal à l'unité.

Il suffit de prendre

$$A\int x\,du \qquad \text{ou} \qquad A\int \frac{Q(x,y)\,x\,dx}{f'_y},$$

dont le résidu, pour $x = \infty$, est de suite calculé, soit pour une des branches à l'infini

$$\frac{Q(x,y)\,x}{f'_y} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \ldots;$$

donc la partie devenant infinie dans $\int \lambda(u)\,du$ sera $A\alpha \log x$.

On devra par conséquent avoir $A\alpha = -1$, et l'on aura m relations analogues. Nous avons donc en tout

$$\frac{m(m-3)}{2}+m-1+m \qquad \text{ou} \qquad \frac{m(m+1)}{2}-1$$

équations pour déterminer le polynôme P d'ordre $m-1$. Or le nombre des coefficients entrant dans ce polynôme est $\frac{m(m+1)}{2}$; il restera donc une arbitraire, ce qui *a priori* devait être, puisque les polynômes G sont seulement déterminés à un facteur près de la forme $e^{\alpha u^2+\beta u+\gamma}$, et par suite $\lambda(u)$ à une expression additive près de la forme $2\alpha u+\beta$.

Nous connaissons donc le polynôme $P(x,y)$, et nous pouvons écrire

$$\frac{d^2\log G}{du^2}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{1}$$

puisque l'on a

$$G(u)=e^{\int du\int\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}du}$$

L'équation (1) avec

$$\frac{dx}{du}=\frac{f'_y}{Q(x,y)}, \qquad \text{où} \qquad x=\frac{G_1}{G},$$

donne les *deux* équations auxquelles doivent satisfaire G et G_1 fonctions *entières* de u.

11. Nous allons voir que l'on peut suivre une voie analogue pour l'intégration des équations

$$\frac{B\,dx-A\,dy}{f'_z}=du, \qquad \frac{B_1dx-A_1dy}{f'_z}=dv.$$

Il s'agit de former quatre équations pour avoir les fonctions G entières en u et v.

J'envisage la fonction $\log G(u,v)$; elle peut se mettre sous la forme

$$\int\lambda(u,v)\,du+\mu(u,v)\,dv,$$

λ et μ étant des fonctions uniformes de u et v.

En posant

$$\lambda = \frac{\frac{\partial G}{\partial u}}{G}, \qquad \mu = \frac{\frac{\partial G}{\partial v}}{G};$$

donc

$$\left.\begin{aligned}\lambda(u+\omega, v+\omega') &= \lambda(u,v)+a\\ \mu(u+\omega, v+\omega') &= \mu(u,v)+b\end{aligned}\right\} \quad (a,\ b \text{ étant des constantes}),$$

en désignant par (ω, ω') un système de périodes.

Par conséquent, λ et μ sont des intégrales de différentielles totales attachées à la surface $f(x,y,z) = 0$.

De plus, ce sont des intégrales de *seconde espèce*, car elles ne peuvent avoir aucun infini de nature logarithmique.

Pour quelles valeurs de (x,y,z) les intégrales de seconde espèce λ et μ deviendront-elles infinies? Ce sera évidemment pour les valeurs de (x,y,z) correspondant à

$$G(u,v) = 0;$$

or, pour toute valeur de u et v, satisfaisant à cette relation et différente des valeurs (a,b) d'indétermination (fin du n° **9**), une au moins des quantités x, y sera infinie; d'autre part, les valeurs (a,b) correspondent aux courbes Γ. Par conséquent, λ et μ ne deviendront infinies que quand le point (x,y,z) sera à l'infini ou sur une courbe Γ. On en conclut que

$$\lambda(u,v) = \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{R^2 f'_z},$$

$$\mu(u,v) = \int \frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{R^2 f'_z},$$

les P et Q étant des polynômes en x,y,z; R ne figure qu'au carré au dénominateur, car les courbes Γ sont des courbes polaires *simples*.

Comme, d'autre part, en employant les coordonnées homogènes x, y, z, t, la *courbe* $t=0$ est aussi une courbe polaire simple, on en conclut que P sera de degré $m+2(m-4)$ ou $3m-8$ en x, y, z et de degré $3m-9$ en x et z; pareillement Q sera de degré $3m-8$, en x, y, z et de degré $3m-9$ en y et z.

Nous chercherons donc les intégrales de seconde espèce linéairement indépendantes; les degrés étant limités, il n'y aura nécessairement qu'un nombre limité de telles intégrales, et l'on devra pouvoir en trouver deux λ et μ, telles que

$$\lambda\, du + \mu\, dv$$

soit une différentielle exacte, ou encore

$$\lambda_1\, dx + \mu_1\, dy,$$

en posant

$$\lambda_1 = \frac{B\lambda - A\mu}{f'_z}, \qquad \mu_1 = \frac{B_1\lambda - A_1\mu}{f'_z}.$$

Il faut écrire maintenant que, dans

$$\int \lambda_1\, dx + \mu_1\, dy,$$

la période polaire correspondant à la courbe à l'infini $t = 0$ et aux courbes Γ est égale à $2\pi i$.

Tous ces calculs peuvent être effectués et l'on peut ainsi obtenir sous formes d'intégrales de différentielles totales les expressions $\lambda(u, v)$ et $\mu(u, v)$; écrivons donc

$$d \log G(u, v) = \lambda\, du + \mu\, dv,$$

et, par conséquent, on aura

$$\frac{\partial^2 \log G}{\partial u^2} = \varphi(G, G_1, G_2, G_3),$$

$$\frac{\partial^2 \log G}{\partial u\, \partial v} = \psi(G, G_1, G_2, G_3),$$

$$\frac{\partial^2 \log G}{\partial v^2} = \chi(G, G_1, G_2, G_3),$$

φ, ψ et χ étant des fonctions rationnelles *connues* de x, y, z ou, ce qui revient au même, des fonctions homogènes de degré zéro en G, G_1, G_2, G_3. D'ailleurs on tire des équations différentielles

$$\frac{\partial \log G_1}{\partial u} = \frac{\partial \log G}{\partial u} + A(G, G_1, G_2, G_3),$$

$$\frac{\partial \log G_1}{\partial v} = \frac{\partial \log G}{\partial v} + B(G, G_1, G_2, G_3),$$

A et B étant encore des fonctions rationnelles *connues*, analogues à φ, ψ, χ et deux autres équations analogues relatives à

$$\frac{\partial \log G_2}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \log G_2}{\partial v}.$$

On aura ainsi un système d'équations, qui déterminent les fonctions G, G_1, G_2 et G_3, fonctions holomorphes de u et v pour toutes les valeurs finies de ces variables.

On voit donc, sans approfondir davantage la question, comment des deux équations initiales on pourra tirer des équations donnant les numérateurs et le dénominateur de x, y et z. Ainsi se trouve réalisée, par la considération des différentielles totales de seconde espèce, la formation de ces équations, que M. Weierstrass annonce sans détail avoir prises comme point de départ d'une de ses méthodes d'inversion, au moins dans le cas des intégrales hyperelliptiques (*Journal de Crelle*, t. **47**, p. 297 : *Théorie des fonctions abéliennes*).

V. — Cas où les intégrales ont trois périodes.

12. Nous venons d'étudier les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres. Mais les surfaces précédentes ne sont évidemment pas les seules rentrant dans la seconde catégorie, c'est-à-dire pour lesquelles on pourra par l'inversion de deux intégrales convenables

$$\int^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy = u$$

$$\int^{(x,y,z)} P_1\,dx + Q_1\,dy = v,$$

tirer x, y, z en fonctions uniformes de u et v.

C'est de ces dégénérescences que nous allons maintenant nous occuper. Le premier cas à examiner est celui où x, y, z, donnés par les équations précédentes, seraient des fonctions *triplement* périodiques de u et v.

On peut remarquer d'abord que la surface sera nécessairement *de genre zéro*, car autrement on aurait une intégrale double

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

restant toujours finie; or celle-ci peut s'écrire

$$\int\int F(u, v)\, du\, dv,$$

$F(u, v)$ étant une fonction uniforme, triplement périodique de u et v. Or une telle fonction ne peut être une fonction entière de u et v; l'intégrale ne peut donc rester toujours finie.

13. Avant d'aller plus loin, arrêtons-nous sur quelques surfaces particulières pour lesquelles les coordonnées x, y, z d'un point quelconque s'exprimeront, comme il vient d'être dit, par des fonctions triplement périodiques. Un premier exemple nous sera fourni par le système bien connu, considéré par Rosenhain; je le prends sous la forme que lui ont donnée Briot et Bouquet, dans leur *Théorie des fonctions elliptiques* (p. 501).

En posant

$$\Delta u = \sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)},$$

les deux équations

$$\frac{du}{\Delta u} + \frac{dv}{\Delta v} = dx,$$

$$\left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{k^2 \lambda(a) \lambda'(a) u^2}{1 - k^2 \lambda^2(a) u^2}\right] \frac{du}{\Delta u} + \left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{k^2 \lambda(a) \lambda'(a) v^2}{1 - k^2 \lambda^2(a) v^2}\right] \frac{dv}{\Delta v} = dy$$

définissent deux fonctions u et v de x et y, et les deux fonctions $u^2 + v^2$ et $u^2 v^2$ sont des fonctions *uniformes* de ces variables. Ces fonctions sont triplement périodiques, et l'on a le tableau suivant de périodes conjuguées :

$$\begin{array}{llll}
\text{Pour } x \ldots\ldots\ldots & \omega, & 0, & \omega' \\
\text{Pour } y \ldots\ldots\ldots & 0, & \pi i, & \dfrac{2\pi a i}{\omega}
\end{array}$$

Les fonctions peuvent être obtenues à l'aide des fonctions θ d'une variable, elles sont de plus fractions rationnelles de e^{2y}.

Ces résultats rappelés, je poserai

$$u^2 = U, \qquad v^2 = V;$$

les équations précédentes deviennent, en remplaçant x et y par $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{2}$,

$$\frac{dU}{\sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}} + \frac{dV}{\sqrt{V(1-V)(1-k^2V)}} = dx,$$

$$\left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)U}{1-k^2\lambda^2(a)U}\right]\frac{dU}{\sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}} + \ldots = dy.$$

qui donnent pour $U+V$ et UV des fonctions uniformes, triplement périodiques de x et y; le Tableau des périodes étant ici

$$\begin{matrix} 2\omega & 0 & 2\omega', \\ 0 & 2\pi i & \dfrac{4\pi a i}{\omega}, \end{matrix}$$

à un système de valeurs de

$$U, \quad \sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}, \quad V, \quad \sqrt{V(1-V)(1-k^2V)}$$

ne correspondra qu'un *seul* système de valeurs de x et y, aux périodes près.

Considérons maintenant les équations

$$\begin{aligned} X &= U + V, \\ Y &= UV, \\ Z &= \sqrt{U(1-U)(1-k^2U)} + \sqrt{V(1-V)(1-k^2V)}; \end{aligned}$$

elles définissent une certaine surface $F(X, Y, Z) = 0$.

A un point arbitraire de cette surface correspond un système de valeurs de U et V, et des déterminations parfaitement déterminées des deux radicaux

$$\sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}, \quad \sqrt{V(1-V)(1-k^2V)},$$

par conséquent, *à un point arbitraire de la surface* F *correspond* *un seul système de valeurs de x et y, aux périodes près. De plus X, Y, Z sont des fonctions uniformes triplement périodiques de x et y.*

x et y s'expriment par des intégrales de différentielles totales; on a

$$\int P\,dX + Q\,dY = x,$$

$$\int P_1\,dX + Q_1\,dY = y,$$

les P et Q étant rationnelles en X, Y, Z. De plus, la première de ces intégrales sera de première espèce; ainsi la surface F *possède une intégrale de première espèce.*

Faisons $x = \text{const.}$, nous aurons sur la surface une famille de courbes; cette famille sera algébrique, car elle sera donnée par l'équation d'Euler

$$\frac{dU}{\sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}} + \frac{dV}{\sqrt{V(1-V)(1-k^2V)}} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(1)\qquad \frac{\sqrt{U(1-V)(1-k^2V)} + \sqrt{V(1-U)(1-k^2U)}}{1-k^2UV} = \text{const.}$$

Cette famille de courbes sera du genre zéro, puisque X, Y, Z sont des fonctions rationnelles de e^y.

En remplaçant dans (1) U et V par leurs valeurs en X, Y, Z, après avoir élevé au carré, on a de suite

$$(1)\qquad \frac{Z^2 + (1+k^2-k^2X)(X^2-4Y)}{(1-k^2Y)^2} = \text{const.} = \lambda.$$

Cherchons l'intersection du réseau de surfaces qui précède avec F. Ce réseau coupe F suivant une courbe qui a pour projection sur le plan des xy la courbe du quatrième degré

$$\lambda^2(1-k^2Y)^4 + 2\lambda(1-k^2Y)^2[(1+k^2)2Y - X - k^2XY]$$
$$+ (X^2-4Y)(1-k^2Y)^2 = 0;$$

d'où d'abord

$$1 - k^2 Y = 0,$$

et la conique variable avec λ

$$\lambda^2(1 - k^2 Y)^2 + 2\lambda[2(1 + k^2)Y - X - k^2 XY] + (X^2 - 4Y) = 0 :$$

elle passe par le point $Y = 0$, $X = \lambda$.

Nous allons donc pouvoir exprimer X et Y en fonction rationnelle de λ et d'un paramètre θ; on aura donc certainement, pour la courbe cherchée,

$$X = P(\lambda, \theta),$$
$$Y = Q(\lambda, \theta),$$
$$Z = \sqrt{R(\lambda, \theta)},$$

P, Q et R étant rationnelles en λ et θ.

Mais on peut aller plus loin. Reprenons, en effet, la relation d'Euler, sous la forme

$$\frac{dU}{\sqrt{U(1-U)(1-k^2 U)}} + \frac{dV}{\sqrt{V(1-V)(1-k^2 V)}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}},$$

où

$$\lambda = \left[\frac{\sqrt{U(1-V)(1-k^2 V)} + \sqrt{V(1-U)(1-k^2 U)}}{1 - k^2 UV}\right]^2,$$

ou encore, comme il a été déjà écrit,

$$\lambda = \frac{Z^2 + (1 + k^2 - k^2 X)(X^2 - 4Y)}{(1 - k^2 Y)^2},$$

ce qui donne, par conséquent,

$$P\,dX + Q\,dY = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}},$$

où λ a la valeur précédente, fonction rationnelle de X, Y et Z; et, par conséquent, $\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}$ sera aussi une fonction rationnelle de X, Y et Z.

On tire de là une conséquence intéressante. Le réseau (1) coupe la surface suivant une certaine courbe variable avec λ, qui doit se décomposer en deux courbes, et ces courbes correspondent aux deux déterminations du radical $\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}$; elles sont symétriques par rapport au plan des xy.

Donc on aura, pour les expressions de X, Y, Z en fonction de λ et θ,

$$\begin{aligned} X &= P(\lambda, \theta), \\ Y &= Q(\lambda, \theta), \\ Z &= \sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}\, S(\lambda, \theta), \end{aligned}$$

S étant, comme P et Q, rationnelle en λ et θ; et de tout ce qui précède il résulte que λ, $\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}$ et θ sont fonctions rationnelles de X, Y et Z.

Il y a donc sur la surface : 1° un réseau de courbes du genre zéro: 2° un réseau de courbes du genre un, correspondant à $\theta = \text{const}$.

14. Le type que nous venons d'examiner est manifestement une dégénérescence du cas général abélien; ayant

$$\Delta u = \sqrt{(u-a_1)(u-a_2)\ldots(u-a_6)},$$

les équations abéliennes sont

$$\begin{aligned} \frac{du}{\Delta u} + \frac{dv}{\Delta v} &= dx, \\ \frac{u\,du}{\Delta u} + \frac{v\,dv}{\Delta v} &= dy; \end{aligned}$$

or, si l'on suppose que $a_5 = a_6 = b$, on a

$$\begin{aligned} \frac{du}{(u-b)\sqrt{(u-a_1)\ldots(u-a_4)}} + \frac{dv}{(v-b)\sqrt{(v-a_1)\ldots(v-a_4)}} &= dx, \\ \frac{u\,du}{(u-b)\sqrt{(u-a_1)\ldots(u-a_4)}} + \frac{v\,dv}{(v-b)\sqrt{(v-a_1)\ldots(v-a_4)}} &= dy. \end{aligned}$$

C'est le cas étudié par Rosenhain, et qui nous a conduit à la classe précédente de surfaces.

Peut-on aller plus loin? Soit $a_2 = a_1 = c$; nous aurons le système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{du}{(u-b)(u-c)\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)}} + \frac{dv}{(v-b)(v-c)\sqrt{(v-a_1)(v-a_2)}} = dx,\\ &\frac{u\,du}{(u-b)(u-c)\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)}} + \frac{v\,dv}{(v-b)(v-c)\sqrt{(v-a_1)(v-a_2)}} = dy,\end{aligned}\right.$$

qui donnent encore pour $u+v$ et uv des fonctions uniformes de x et y. Il y a seulement ici deux périodes, la période cyclique s'exprimant à l'aide des périodes polaires.

Nous trouvons donc, comme dégénérescence à trois périodes, le seul cas de Rosenhain.

15. Revenons maintenant d'une manière générale aux surfaces pour lesquelles les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres au moyen de l'inversion de différentielles totales. Soit

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int P\,dx + Q\,dy = u,\\ &\int P_1\,dx + Q_1\,dy = v,\end{aligned}\right\} \qquad f(x, y, z) = 0, \quad \text{soit} \left\{\begin{aligned} x &= \lambda(u, v),\\ y &= \mu(u, v),\\ z &= \nu(u, v).\end{aligned}\right.$$

Il est évident, d'après tout ce qui a été dit précédemment, que

$$\lambda(u+h, v+k)$$

est une fonction rationnelle de

$$\lambda(u, v),\quad \mu(u, v),\quad \nu(u, v),\quad \lambda(h, k),\quad \mu(h, k),\quad \nu(h, k),$$

quels que soient u, v et h, k; pareillement pour μ et ν. Par suite, $\lambda(-u, -v)$ est fonction rationnelle de $\lambda(u, v)$, $\mu(u, v)$, $\nu(u, v)$.

Cela posé, supposons que les intégrales (1) aient trois couples de périodes :

$$\begin{matrix} \omega_1, & \omega_2, & \omega_3,\\ U_1, & U_2, & U_3,\end{matrix}$$

et supposons que, parmi ces périodes, se trouve au moins une période polaire, correspondant à une certaine courbe logarithmique C. Soit ω_2, U_2 ce couple de périodes. En effectuant sur u et v une substitution linéaire, on peut supposer que le Tableau précédent soit de la forme trouvée dans le paragraphe précédent :

$$\begin{array}{c|ccc} u & 2\omega & 0 & 2\omega', \\ v & 0 & 2\pi i & \dfrac{4\pi a i}{\omega}. \end{array}$$

Ceci posé, je considère les deux équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} P\,dx + Q\,dy &= \frac{dU}{\sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}} + \frac{dV}{\sqrt{V(1-V)(1-k^2V)}}, \\ P_1\,dx + Q_1\,dy &= \left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)U}{1-k^2\lambda^2(a)U}\right]\frac{dU}{\sqrt{U(1-U)(1-k^2U)}} \\ &\quad + \left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \ldots\right]\frac{dV}{\sqrt{V(1-V)(1-k^2V)}}, \end{aligned}\right.$$

Elles donnent pour x, y, z des fonctions uniformes des coordonnées

$$X, Y, Z$$

de la surface $F(X, Y, Z)$ que nous venons d'étudier; et réciproquement X, Y, Z sont des fonctions uniformes de x, y, z. Tout cela est évident, *mais cette transformation, que nous pouvons appeler biuniforme, est-elle birationnelle?* Quand il s'agit d'une *courbe* algébrique, la réponse est toujours affirmative; *une transformation birationnelle est toujours biuniforme :* c'est un théorème que nous établirons dans une Note à la fin de ce Chapitre. Mais il en est tout autrement pour les *surfaces,* et l'on trouve aisément, pour le cas de deux variables, des transformations biuniformes qui ne soient pas birationnelles. Il suffira de citer la correspondance donnée par

$$x = Xe^{Y^2}, \qquad y = XYe^{Y^2},$$

d'où se tire

$$Y = \frac{y}{x}, \qquad X = xe^{-\frac{y^2}{x^2}};$$

la transformation est *biuniforme,* mais non *birationnelle.*

Étudions donc le système (2). V étant arbitraire, quand U tend vers $\frac{1}{k^2\lambda^2(a)}$, le radical ayant un signe convenable, la période polaire est pour v égale à $+2\pi i$. Donc, quand U tend vers $\frac{1}{k^2\lambda^2(a)}$, le radical ΔU ayant un certain signe, quels que soient d'ailleurs V et ΔV, (x, y, z) tendra vers un point de la courbe logarithmique C.

Supposons maintenant que U, après avoir décrit un lacet, revienne en $\frac{1}{k^2\lambda^2(a)}$ avec l'autre détermination de ΔU, *nous pouvons avoir à craindre* que ce système de U et ΔU corresponde à une singularité essentielle des fonctions x, y, z; nous allons montrer qu'il n'en est rien.

En désignant par I et I_1 les premières valeurs des intégrales en U qui figurent dans le second membre, et pareillement par J et J_1 les intégrales relatives à V, ces seconds membres, qui étaient primitivement

$$I + J \quad \text{et} \quad I_1 + J_1,$$

sont devenus

$$A - I + J, \quad A_1 - I_1 + J_1,$$

A et A_1 désignant deux constantes. Donc $\lambda(A - I + J)$ s'exprimera en fonction rationnelle de

$$\lambda(I + J, I_1 + J_1), \quad \mu(I + J, I_1 + J_1), \quad \nu(I + J, I_1 + J_1)$$

et de

$$\lambda(J, J_1), \quad \mu(J, J_1), \quad \nu(J, J_1);$$

par conséquent, pour les valeurs de x, y, z correspondant à la seconde détermination du radical, nous sommes ramenés aux valeurs de ces fonctions correspondant à la première détermination du radical. Il n'y avait pas de singularité essentielle dans le premier cas; *il n'y en aura donc pas dans le second.*

Il suit de là que x, y, z sont des fonctions rationnelles de X, Y, Z, et nécessairement alors X, Y, Z fonctions rationnelles de x, y, z, puisque la transformation est biuniforme.

Ainsi : *Dans le cas où les intégrales* (1) *ont trois périodes, et parmi celles-ci au moins une période polaire correspondant à une* *courbe logarithmique, on est assuré que la surface f correspond point par point à une surface rentrant dans le type F étudié précédemment.*

On peut encore dire que, pour la surface f, les coordonnées peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles de

$$\lambda, \quad \sqrt{a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e}, \quad \theta,$$

λ et θ étant deux paramètres, et cela de telle manière, que θ, λ et le radical soient inversement des fonctions rationnelles de x, y, z. La surface F est un exemple d'une telle surface, mais il n'est pas difficile d'en trouver de bien plus simples.

16. Prenons en effet une surface du quatrième degré ayant deux droites doubles, ne se rencontrant pas. Elle satisfera aux conditions précédentes; soient en effet D et D_1 ces deux droites doubles.

Tout plan passant par D coupe la surface suivant une conique ayant un point double, c'est-à-dire suivant deux droites. Prenons un tétraèdre de référence dont les arêtes

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad z = 0, \quad t = 0$$

seront les droites doubles de la surface.

L'équation de celle-ci sera alors

$$Px^2 + Qxy + Ry^2 = 0,$$

P, Q et R étant homogènes et du second degré en z et t.

Faisant $t = 1$, nous aurons l'équation

$$\begin{aligned}(Az^2 + Bz + C)x^2 \\ + (A'z^2 + B'z + C')xy + (A''z^2 + B''z + C'')y^2 = 0.\end{aligned}$$

Soit

$$y = \lambda x;$$

la section sera formée de deux droites parallèles dont les équations seront de la forme

$$z = \varphi(\lambda, \sqrt{a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e}),$$

z étant rationnelle par rapport à λ et au radical; celui-ci porte sur un polynôme du quatrième degré, d'ailleurs arbitraire. Ainsi x, y, z se trouvent exprimés en fonctions rationnelles de x, λ et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en λ.

Réciproquement, à un point arbitraire de la surface ne correspond qu'une valeur de λ et du radical.

Comment pourra-t-on reconnaître si une surface donnée

$$f(x, y, z) = 0$$

rentre dans la classe des surfaces précédentes?

Tout d'abord elle doit être du genre zéro, et doit avoir une intégrale de première espèce, soit

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z},$$

que l'on pourra former. L'intégrale générale de l'équation

$$(1) \qquad B\,dx - A\,dy = 0$$

devra être algébrique; on sait d'ailleurs qu'elle sera de la forme

$$R(x, y, z) = \lambda,$$

R étant rationnelle. Il devra y avoir *deux courbes mobiles,* du genre zéro, d'intersection de ce faisceau avec la surface.

Il faudrait trouver R, c'est-à-dire savoir reconnaître si l'équation (1) admet une intégrale algébrique. Ici peut intervenir très utilement la considération des *cycles linéaires* de la surface.

Le nombre des cycles effectifs d'une surface dont les coordonnées s'expriment uniformément en fonctions rationnelles d'un paramètre θ, et en fonctions doublement périodiques d'un second paramètre u, est évidemment égal au nombre des cycles distincts dans le plan de la variable u, c'est-à-dire égal à *deux*. Réciproquement, si l'on a constaté que le nombre des cycles de la surface donnée est égal à deux, l'intégrale de première espèce aura seulement deux périodes, et alors l'équation (1) aura nécessairement son intégrale algébrique.

On peut encore recourir à une autre considération qui dispensera de faire l'étude des cycles linéaires. La surface doit avoir deux intégrales distinctes de seconde espèce, et deux seulement. On cherchera donc les intégrales de seconde espèce de la surface proposée; s'il y en a *deux* distinctes, on sera assuré que la surface possède deux cycles linéaires effectifs, d'après le théorème démontré au Chapitre II, que le nombre des intégrales de seconde espèce est égal à celui de leurs périodes.

17. Nous avons précédemment supposé que, parmi les trois périodes, il y avait au moins une période polaire. On peut, *a priori*, se demander s'il ne pourrait arriver que les deux intégrales fussent de seconde espèce, en possédant toujours trois périodes.

Nous allons voir, par une marche indirecte, que cette circonstance ne peut se présenter.

Écrivons les deux équations

$$\int^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy = u,$$

$$\int^{(x,y,z)} P_1\,dx + Q_1\,dy = v.$$

Tout d'abord, quand (x, y, z) tendra vers un point d'une courbe irréductible C, pour laquelle u et v sont infinis, le rapport $\frac{u}{v}$ tendra vers une constante, indépendante de la position du point sur cette courbe. Si, en effet, $\frac{u}{v}$ variait avec la position du point (x, y, z) sur la courbe C, quand u et v augmenteraient indéfiniment, le rapport $\frac{u}{v}$ tendant vers une certaine limite d'ailleurs arbitraire, x, y, z tendraient vers des valeurs déterminées, et, par conséquent, x, y, z seraient des fonctions rationnelles de u et v; les intégrales n'auraient pas de périodes.

Cela dit, considérons un cas particulier d'inversion de deux intégrales de seconde espèce. Prenons, à cet effet, les deux équations

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} + \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2y)}} = du,$$

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2y)}} = dv.$$

Elles donnent pour $x+y$ et xy des fonctions uniformes de u et v.

Ceci nous conduit même à un résultat assez curieux; c'est que, en posant encore

$$X = x + y,$$
$$Y = xy,$$
$$Z = \sqrt{x(1-x)(1-k^2x)} + \sqrt{y(1-y)(1-k^2y)},$$

nous retombons encore sur notre surface

$$F(X, Y, Z) = 0$$

du nº **15**. On peut donc, pour cette surface, exprimer d'une tout autre manière que précédemment X, Y, Z par des fonctions uniformes de deux paramètres.

On conclut de ce qui précède que la surface F possède, outre l'intégrale de première espèce, une intégrale de seconde espèce non rationnelle en X, Y, Z.

Désignons ces deux intégrales par

$$\int R\,dX + S\,dY \quad \text{et} \quad \int R_1\,dX + S_1\,dY$$

et soient

$$\begin{matrix} \omega, & \omega, \\ \omega_1, & \omega'_1 \end{matrix}$$

leurs périodes.

Revenons maintenant aux deux intégrales de seconde espèce

$$u = \int P\ dx + Q\,dy,$$
$$v = \int P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

intégrales ayant deux ou trois périodes.

Soit C une courbe pour laquelle u et v sont infinies, mais de telle manière nécessairement, comme nous l'avons dit, que le rapport $\frac{u}{v}$ soit fixe, quel que soit le point de C. On voit de suite que les intégrales ne peuvent être que *simplement* infinies le long de C, dans l'hypothèse où les équations précédentes donnent x, y, z fonctions uniformes de u et v (j'entends par là que les points de rencontre de C avec un plan quelconque sont seulement des pôles simples pour l'intégrale ordinaire correspondante); de plus, $\frac{u}{v}$ restant constant le long de C, on pourra, par une combinaison linéaire convenable, faire en sorte que u reste fini pour la courbe C. Ensuite, en prenant k^2 convenablement, nous pouvons supposer que u a les périodes ω et ω', puis enfin, en effectuant encore une combinaison linéaire convenable, que v a pour périodes ω_1 et ω'_1.

Cela fait, nous considérons les équations

$$\int^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy = \int^{(X,Y,Z)} R\,dX + S\,dY,$$
$$\int^{(x,y,z)} P_1\,dx + Q_1\,dy = \int^{(X,Y,Z)} R_1\,dX + S_1\,dY.$$

x, y, z sont des fonctions *uniformes* de X, Y, Z; ceci est évident, mais il faut montrer que ce sont des fonctions rationnelles, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de singularités essentielles. Étudions ces équations sous la forme

$$\int^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy = \int \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}} + \int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)(1-k^2\theta)}},$$
$$\int^{(x,y,z)} P_1\,dx + Q_1\,dy = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}} + \int \frac{\theta\,d\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)(1-k^2\theta)}},$$

faisons tendre (x, y, z) vers un point de la courbe C, dont il a été parlé plus haut; u restera finie, v augmentera indéfiniment. Or, u restant finie et v augmentant indéfiniment, on a pour t et θ des quantités déterminées (à la symétrie près) dont l'une est infinie. Réciproquement donc, pour t infini et θ arbitraire, x, y, z ont des valeurs déterminées, et les lignes t infini, θ infini ne correspondent pas à des singularités essentielles.

Donc x, y, z sont des fonctions rationnelles de X, Y, Z.

On en conclut que X, Y, Z sont des fonctions algébriques de x, y et z. Par suite, les deux intégrales de seconde espèce, dont l'inversion se faisait par hypothèse d'une manière uniforme, et qui avaient soit *deux* ou *trois* couples de périodes ne peuvent en avoir que deux.

Donc le cas où l'on a deux intégrales ayant trois couples de périodes est complètement épuisé par l'unique cas étudié (n^{os} **15** et suivants).

VI. — Cas où les intégrales ont moins de trois périodes.

18. La discussion des autres cas sera bien rapidement faite. Supposons d'abord que les deux intégrales soient de seconde espèce; c'est le cas que nous venons d'étudier au paragraphe précédent. Il rentre au fond dans le cas où l'on aurait trois périodes.

Nous pouvons donc supposer qu'il y ait au moins une période polaire. Comme type nous prendrons la dégénérescence signalée au n° **14**, et qui est plus complète encore que celle de Rosenhain.

Soit, pour

$$\int \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy \quad \text{et} \quad \int \mathrm{P}_1\,dx + \mathrm{Q}_1\,dy,$$

o et ω cette période polaire.

Nous poserons

$$\int^{x,y,z} \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy = \frac{\alpha\,du}{(u-c)\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)}} + \frac{\alpha\,dv}{(v-c)\sqrt{(v-a_1)(v-a_2)}},$$

$$\int^{x,y,z} \mathrm{P}_1\,dx + \mathrm{Q}_1\,dy = \frac{\beta\,du}{(u-b)\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)}} + \frac{\beta\,dv}{(v-b)\sqrt{(v-a_1)(v-a_2)}};$$

on peut supposer que les périodes polaires correspondant à $u=b$, dans le second membre, sont

$$\text{o} \quad \text{et} \quad \omega;$$

on peut supposer ensuite, en prenant encore convenablement α et β, que la seconde période du second membre, pour $v=c$, coïncide avec le second système de périodes de l'intégrale. Dans ces conditions, x, y, z sont des fonctions uniformes de $u+v$ et uv. On montrera, en suivant un mode de raisonnement déjà fait, que le point $u=b$, quel que soit le signe du radical, n'est pas un point singulier essentiel.

Que se passe-t-il pour $u=c$, v étant arbitraire? S'il y a une seconde courbe logarithmique, correspondant au second système de périodes, il n'y aura aucune difficulté, et il n'y aura pas de singularités essentielles dans la correspondance biuniforme. Le seul cas qui puisse arrêter est celui où il y aurait une courbe rendant infinies (non d'une manière logarithmique) les deux intégrales; nous avons dit que, dans ce cas, le rapport des intégrales doit être constant pour les points de cette courbe; par conséquent, en faisant une combinaison convenable, nous aurons une des intégrales restant finie. Considérons donc

$$\int^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy = U,$$
$$\int^{(x,y,z)} P_1\,dx + Q_1\,dy = V,$$

U restant fini pour les points d'une certaine courbe C, qui donnent $V=\infty$. Il est immédiat que x, y, z ne peuvent être que des fonctions rationnelles de V, puisque, pour U fini, on a x, y, z fonctions uniformes de V et parfaitement déterminées pour V infini. Considérons maintenant une certaine courbe logarithmique Γ; une combinaison linéaire de ces deux intégrales n'aura pas de période polaire : il est impossible que cette combinaison se réduise à U, car alors on aurait une fonction rationnelle de V qui serait périodique. Soit donc V, comme nous pouvons le supposer, cette combinaison ; x, y, z sont, par suite, des fonctions rationnelles de V, les coefficients étant des fonctions de U ayant une certaine période. Il n'y a pas, par hypothèse, d'autres courbes logarithmiques, ou du moins, s'il y en a, elles donnent au signe près la même période polaire que celle que nous venons d'envisager, et pour toutes celles-ci U sera finie comme pour Γ. En dehors de ces courbes, il peut y en avoir d'autres analogues à la courbe C, pour lesquelles U et V soient infinies; il y aura, comme nous l'avons déjà dit plusieurs fois, une combinaison des intégrales qui restera finie; si cette combinaison est différente de U, on en conclura que x, y, z sont fonctions rationnelles de U et V; si elle coïncide avec U, il en résultera que U deviendra infinie seulement pour la courbe logarithmique Γ et ses analogues : donc x, y, z sera fonction rationnelle de e^{aU} et V, a étant une constante convenable; nous avons donc seulement alors une seule période.

Nous avons ainsi examiné toutes les hypothèses qui peuvent se présenter quand l'inversion des deux intégrales doit donner des fonctions uniformes.

19. Nous avons énoncé (n° **15**) que, dans le cas des courbes algébriques, *toute transformation biuniforme était nécessairement birationnelle*. On peut l'établir de la manière suivante :

Soient deux courbes algébriques

$$f(x,y) = 0, \qquad F(X, Y) = 0.$$

Il existe, par hypothèse, entre (x,y) et (X, Y), une transformation biuniforme n'ayant d'autres singularités possibles que des points essentiels *isolés;* il faut montrer que, dans cette hypothèse, la transformation est birationnelle.

Soit $x = a$, $y = b$ un point singulier essentiel de la transformation; on peut toujours supposer que ce point est un point simple de la courbe algébrique.

Dans ces conditions, X et Y seront des fonctions uniformes de x dans le voisinage de $x = a$, ce point étant un point singulier essentiel de ces fonctions; soit

$$X = \varphi(x), \qquad Y = \psi(x).$$

A une valeur de X correspond dans le voisinage de $x = a$ une *infinité* de racines de l'équation

$$X = \varphi(x),$$

d'après un théorème que j'ai démontré autrefois; pour ces racines, la fonction $\psi(x)$ ne pourra avoir qu'un nombre limité de valeurs, celles qui satisfont à l'équation

$$F(X, Y) = 0;$$

donc à un point arbitraire (X, Y) de la courbe F se trouve correspondre une infinité de points (x, y) de la première dans le voisinage de $x = a, y = b$; la substitution ne serait donc pas biuniforme. Le théorème est par suite établi.

CHAPITRE IV.

CORRESPONDANCE ENTRE DEUX SURFACES.

I. — Surfaces de genre supérieur a un, admettant une série infinie discontinue de substitutions birationnelles.

1. Nous avons considéré le cas d'une substitution birationnelle renfermant un paramètre arbitraire. Des surfaces peuvent-elles se transformer en elles-mêmes au moyen d'une infinité de substitutions birationnelles qui ne dépendent pas nécessairement d'un paramètre arbitraire? C'est la question à laquelle nous allons répondre en supposant le genre de la surface supérieur à l'unité.

Considérons la surface d'ordre m

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

de genre p, et soit

$$A_1 Q_1(x, y, z) + A_2 Q_2(x, y, z) + \ldots + A_p Q_p(x, y, z)$$

le polynôme adjoint d'ordre $(m-4)$ avec ses p constantes arbitraires $A_1, A_2, \ldots, A_p$. J'envisage la surface

$$A_1 Q_1(x, y, z) + A_2 Q_2(x, y, z) + \ldots + A_p Q_p(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

A quelle condition cette surface sera-t-elle tangente à la surface $f = 0$?

En écrivant qu'en un point (x, y, z), commun aux surfaces (1) et (2), les deux surfaces sont tangentes, on obtient deux équations. En éliminant x, y, z entre ces deux équations et les équations (1) et (2), on obtiendra la condition

$$\lambda(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0,$$

λ étant un polynôme homogène en $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Ceci exprime, bien entendu, la condition pour que la surface (2) soit tangente à la surface f, en un point (x, y, z), situé en dehors des lignes ou des points multiples de cette surface. Les coordonnées (x, y, z) du point de contact seront des fonctions rationnelles de $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

$$\begin{aligned}
x &= R_1(A_1, A_2, \ldots, A_p),\\
y &= R_2(A_1, A_2, \ldots, A_p),\\
z &= R_3(A_1, A_2, \ldots, A_p).
\end{aligned}$$

Effectuons sur f une substitution birationnelle la transformant en elle-même; la surface (2) deviendra évidemment

$$A'_1 Q_1 + A'_2 Q_2 + \ldots + A'_p Q_p = 0,$$

les A' étant des fonctions linéaires homogènes des A, et l'on aura

$$\lambda(A'_1, A'_2, \ldots, A'_p) = 0.$$

Par suite, à toute substitution f transformant la surface en elle-même correspond une substitution linéaire Σ effectuée sur les A et pour laquelle

$$\lambda(A_1, A_2, \ldots, A_p)$$

se reproduit à un facteur près. Inversement, considérons une substitution Σ effectuée sur les A et pour laquelle la forme se reproduit à un facteur près; nous avons d'une part

$$\begin{aligned}
x &= R_1(A_1, A_2, \ldots, A_p),\\
y &= R_2(A_1, A_2, \ldots, A_p),\\
z &= R_3(A_1, A_2, \ldots, A_p),
\end{aligned}$$

et soit, d'autre part,

$$x' = R_1(A'_1, A'_2, \ldots, A'_p),$$
$$y' = R_2(A'_1, A'_2, \ldots, A'_p),$$
$$z' = R_3(A'_1, A'_2, \ldots, A'_p).$$

Soit p supérieur ou égal à quatre; considérons les équations

$$\Sigma A_i Q_i(x, y, z) = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{\Sigma A_i \dfrac{\partial Q_i}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\Sigma A_i \dfrac{\partial Q_i}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\Sigma A_i \dfrac{\partial Q_i}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}};$$

faisons, pour fixer les idées, $A_5 = A_6 = \ldots = A_p = 0$; ces équations nous donnent pour A_1, A_2, A_3, A_4 des fonctions rationnelles de x, y, z; les A', qui sont des fonctions linéaires des A, sont alors des fonctions rationnelles de x, y, z, et, par suite, x', y', z' deviennent des fonctions rationnelles de x, y, z.

D'autre part, la substitution considérée permettra d'exprimer quatre des A' au moyen de A_1, A_2, A_3, A_4; et par suite, $p-4$ des A' au moyen des quatre autres que nous désignerons par A'_1, A'_2, A'_3, A'_4. On a d'ailleurs

$$\Sigma A'_i Q_i(x', y' z') = 0$$

$$(3') \qquad \frac{\Sigma A'_i \dfrac{\partial Q_i}{\partial x'}}{\dfrac{\partial f}{\partial x'}} = \frac{\Sigma A_i \dfrac{\partial Q_i}{\partial y'}}{\dfrac{\partial f}{\partial y'}} = \frac{\Sigma A'_i \dfrac{\partial Q_i}{\partial z'}}{\dfrac{\partial f}{\partial z'}},$$

et ces équations nous donneront pour A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, et, par suite, pour tous les A' et, enfin, pour les A des fonctions rationnelles de x', y', z'. Nous voyons donc que x, y, z sont aussi fonctions rationnelles de x', y', z'.

Ainsi, à toute substitution linéaire Σ effectuée sur les A et laissant invariable l'équation

$$\lambda(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0$$

correspond une substitution birationnelle de la surface en elle-même. Cette substitution ne sera pas nécessairement unique; nous aurions pu donner à $A_3, \ldots, A_p$ des valeurs arbitraires, mais, et c'est là un point essentiel pour la suite, si les substitutions S correspondant à une substitution Σ sont en nombre infini, elles renferment nécessairement au moins un paramètre arbitraire.

Ceci posé, supposons que la surface f puisse être transformée en elle-même par une infinité de substitutions birationnelles. A chacune de ces substitutions S correspond une substitution linéaire Σ pour l'équation

$$\lambda(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0.$$

Nous supposons les substitutions S en nombre infini; soient d'abord les substitutions Σ en nombre fini. Alors, d'après ce que nous venons de dire, les substitutions S renferment au moins un paramètre arbitraire; nous sommes donc dans un des cas examinés précédemment : la surface du genre zéro ou du genre un, si le nombre des paramètres est supérieur à un, et, si, le genre étant supérieur à un, il y a un paramètre arbitraire, la surface fera partie de la famille étudiée plus haut.

Si les substitutions Σ sont en nombre infini, elles dépendront nécessairement d'un paramètre arbitraire; car, si l'on cherche les substitutions linéaires Σ transformant en elle-même l'équation

$$\lambda(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0,$$

on aura un certain nombre d'équations algébriques, et si ces équations ne déterminent pas les rapports des coefficients des substitutions Σ, il restera nécessairement dans celles-ci un ou plusieurs paramètres arbitraires; les substitutions S renferment alors au moins un paramètre arbitraire et nous retombons dans le cas précédent.

2. La démonstration précédente suppose que $p \geqq 4$. Une démonstration toute semblable, quant au principe, pourra s'appliquer non seulement à ces cas, mais comprendra aussi le cas de $p = 3$. Considérons à cet effet les deux équations

$$A_1 Q_1(x, y, z) + A_2 Q_2(x, y, z) + \ldots + A_p Q_p(x, y, z) = 0,$$
$$B_1 Q_1(x, y, z) + B_2 Q_2(x, y, z) + \ldots + B_p Q_p(x, y, z) = 0;$$

ces deux surfaces ont une courbe mobile d'intersection.

Nous chercherons la condition pour que cette courbe soit tangente à la surface; nous obtenons ainsi une équation de la forme

$$\lambda(A_1 B_2 - A_2 B_1, \ldots) = 0,$$

λ étant un polynôme homogène en $A_i B_k - A_k B_i$. Quant aux coordonnées (x, y, z) du point de contact, ce seront des fonctions rationnelles et homogènes de degré zéro par rapport aux A et par rapport aux B. Ceci posé, rien n'est à changer à la démonstration précédente; à une substitution S correspond une substitution Σ effectuée simultanément sur A et B; on considérera ensuite les substitutions Σ effectuées simultanément sur A et B, et laissant invariable l'équation $\lambda = 0$. La correspondance entre les substitutions S et Σ, établie comme plus haut, nous conduira à la même conclusion.

Il nous reste à examiner le cas de $p = 2$, auquel ne s'appliquent pas les démonstrations précédentes. Soit

$$A_1 Q_1(x, y, z) + A_2 Q_2(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface adjointe d'ordre $m - 4$. Il résulte d'une proposition plus générale de M. Nœther (*Math. Annalen*, t. VIII, p. 524), que la partie mobile de l'intersection se composera d'une courbe irréductible de genre un.

Une substitution transformant la surface en elle-même transformera (1) en

$$B_1 Q_1 + B_2 Q_2 = 0, \tag{2}$$

B_1 et B_2 étant des fonctions linéaires de A_1 et A_2. Soit C_α la courbe (1) et soit C_β la courbe (2). Si nous cherchons à quelle condition les deux courbes de genre un, C_α et C_β, se correspondent point par point, ou bien nous aurons une relation algébrique entre

$$\frac{A_1}{A_2} \quad \text{et} \quad \frac{B_1}{B_2},$$

ou bien toutes les courbes auront même module, et alors deux quelconques se correspondront point par point.

Que l'on soit dans l'un ou l'autre cas, soient C_α et C_β deux courbes se correspondant; on aura, pour la transformation de la première en la seconde,

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \varphi\left(x, y, z, \frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \theta\right),\\ y' &= \varphi_1\left(x, y, z, \frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \theta\right),\\ z' &= \varphi_2\left(x, y, z, \frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \theta\right),\end{aligned}\right.$$

les φ étant rationnelles en x, y, z et algébriques en $\frac{A_1}{A_2}$ et $\frac{B_1}{B_2}$, avec le paramètre θ que l'on peut supposer entrer algébriquement.

Si donc on remplace $\frac{A_1}{A_2}$ par $-\frac{Q_2(x, y, z)}{Q_1(x, y, z)}$ et $\frac{B_1}{B_2}$ par $-\frac{Q_2(x', y', z')}{Q_1(x', y', z')}$, toutes les transformations de la surface en elle-même devront rentrer dans le type (α), où figure l'arbitraire θ. Il devra donc arriver que, pour un nombre infini de valeurs de θ, les équations (α) donneront une substitution birationnelle. Or ceci est impossible; car, θ entrant algébriquement, pour exprimer que x', y', z' données par les relations (α) sont fonctions rationnelles de (x, y, z), on n'a à écrire que des conditions qui s'expriment algébriquement. Si donc les équations (α) donnent une substitution birationnelle pour une *infinité* de valeurs de θ, il devra en être ainsi quel que soit θ, et l'on rentrera alors dans les surfaces étudiées précédemment.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Les seules surfaces de genre supérieur à un admettant une infinité de transformations birationnelles sont celles qui admettent une suite continue de transformations avec un paramètre arbitraire, et dont nous avons précédemment fait l'étude.

II. — Sur la correspondance point par point de deux surfaces données.

3. Étant données deux surfaces f et F, de genre au moins égal à deux, il est facile de reconnaître si ces surfaces se correspondent point par point; c'est une question qui peut se traiter de diverses manières.

Avant de nous occuper des surfaces, reprenons d'abord la même question pour les courbes algébriques. Supposons que le genre p des courbes soit supérieur à deux; nous prendrons alors, sur la courbe f, $(p-2)$ points arbitraires

$$(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad (x_{p-2}, y_{p-2}),$$

et nous considérerons le faisceau des adjointes d'ordre $m-3$ (m étant le degré de f) passant par ces points. Soit

$$A_1 Q_1 + A_2 Q_2 = 0$$

ce faisceau avec le paramètre arbitraire $\frac{A_2}{A_1}$, les coefficients de Q_1 et Q_2 dépendant, bien entendu, de $(x_1, y_1), \ldots, (x_{p-2}, y_{p-2})$. Considérons alors, avec Brill et Nœther dans leur Mémoire, devenu classique, sur les courbes algébriques (*Math. Annalen*, t. VII), l'équation

$$\varphi(A_1, A_2) = 0, \tag{1}$$

donnant les courbes de ce faisceau tangentes à f; son degré bien connu est égal à $4p-2$.

Soit maintenant la courbe F que l'on suppose correspondre point par point à la première; soient $(x'_1, y'_1), \ldots, (x'_{p-2}, y'_{p-2})$ les points correspondants aux points de la première $(x_1, y_1), \ldots, (x_{p-2}, y_{p-2})$. On aura le réseau

$$B_1 Q'_1 + B_2 Q'_2 = 0.$$

et l'équation correspondante de contact

$$\Phi(B_1, B_2) = 0. \tag{2}$$

Les équations (1) *et* (2) *peuvent être transformées l'une dans l'autre par une substitution linéaire convenable effectuée sur* B_1 *et* B_2.

Tel est, en changeant seulement la forme, le point de départ de MM. Brill et Nœther dans l'étude si importante des modules des courbes algébriques.

Je dis que nous pouvons en tirer la réponse à la question posée relativement à la correspondance des deux courbes f et F.

En effet, les deux formes binaires (1) et (2) étant équivalentes, nous pouvons égaler leurs $(4p-5)$ invariants absolus. Ceux-ci sont évidemment des fonctions rationnelles de $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{p-2}, y_{p-2})$ pour la première forme, et pareillement de $(x'_1, y'_1), \ldots$ pour la seconde.

Nous pouvons donc écrire $4p-5$ équations, parfaitement déterminées, de la forme

$$(\mathrm{E}) \qquad i(x_1, y_1, \ldots, x_{p-2}, y_{p-2}) = \mathrm{I}(x'_1, y'_1, \ldots, x'_{p-2}, y'_{p-2}).$$

Nous pouvons même encore obtenir une autre relation entre les (x, y) et les (x', y').

En effet, quand les équations (E) sont vérifiées, les deux formes Φ et φ pourront se transformer l'une dans l'autre, et cela, en général, d'une seule manière. On aura donc la substitution

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_1 &= \alpha \mathrm{B}_1 + \beta \mathrm{B}_2, \\ \mathrm{A}_2 &= \gamma \mathrm{B}_1 + \delta \mathrm{B}_2, \end{aligned}$$

les α, β, γ, δ étant des fonctions rationnelles des (x, y) et des (x', y').

Ainsi se trouvera déterminée la substitution linéaire qui fait correspondre une courbe quelconque du faisceau des adjointes de f passant par les (x, y) à une courbe du faisceau des adjointes de F passant par les (x', y'). Or considérons dans le premier faisceau la courbe tangente à f en (x_1, y_1); son équation sera parfaitement déterminée. D'autre part, dans le second faisceau la courbe tangente en (x'_1, y'_1) sera de même déterminée. A la première courbe correspond une valeur de $\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2}$ et à la seconde une valeur de $\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{B}_2}$. En écrivant que

$$\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2} = \frac{\alpha \mathrm{B}_1 + \beta \mathrm{B}_2}{\gamma \mathrm{B}_1 + \delta \mathrm{B}_2},$$

nous obtenons une nouvelle équation, qui est symétrique en $(x_2, y_2), \ldots, (x_{p-2}, y_{p-2})$ d'une part et en $(x'_2, y'_2), \ldots, (x'_{p-2}, y'_{p-2})$

d'autre part, mais où (x_1, y_1) et (x'_1, y'_1) jouent un rôle à part. Appelons cette équation (d); on pourra la mettre sous la forme

$$(d) \qquad \delta(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{p-2}, y_{p-2}) = \Delta(x'_1, y'_1, \ldots, x'_{p-2}, y'_{p-2}).$$

4. En partant de p adjointes arbitraires dans l'une et l'autre courbe, nous pouvons former les équations (E) et l'équation (d). En se donnant arbitrairement $(x_1, y_1), \ldots, (x_{p-2}, y_{p-2})$, on doit pouvoir déduire de ces équations les valeurs des (x', y'). Pratiquement on opérera de la manière suivante : on supposera, comme il est évidemment permis, les $p-2$ points (x, y) confondus et pareillement alors les $p-2$ points (x', y'). On aura alors à la place des équations (E) et (d) un système d'équations entre (x_1, y_1) et (x'_1, y'_1); et ces équations devront donner (x'_1, y'_1) en fonctions rationnelles de (x_1, y_1) et inversement.

On a donc là une méthode régulière pour reconnaître si deux courbes se correspondent point par point, et pour trouver la substitution birationnelle quand elle existe.

Remarquons incidemment que des dernières équations se tire de suite la démonstration de ce théorème qu'une courbe $(p > 2)$ ne peut admettre une infinité, continue ou discontinue, de transformations, puisque le nombre des transformations tirées de ces équations ne peut être que limité.

5. Revenons maintenant aux surfaces algébriques, et cherchons de quelle manière les considérations précédentes peuvent être étendues aux surfaces algébriques.

Prenons sur la surface $(p-1)$ points

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad \ldots, \quad (x_{p-3}, y_{p-3}, z_{p-3}).$$

Le réseau des surfaces adjointes passant par ces points contient deux arbitraires; soient Q_1, Q_2, Q_3 trois polynômes adjoints, linéairement indépendants, s'annulant pour ces $(p-3)$ points. Désignons, d'une manière générale, par *courbe* C une courbe (mobile) intersection de deux surfaces adjointes. Il y a une infinité de courbes C passant par les

$(p-3)$ points considérés; leurs équations peuvent s'écrire

$$\frac{Q_1(x,y,z)}{\lambda}=\frac{Q_2(x,y,z)}{\mu}=\frac{Q_3(x,y,z)}{\nu},$$

λ, μ, ν étant arbitraires. Parmi ces courbes C, il y en a une infinité qui sont tangentes à la surface, et la condition pour qu'il en soit ainsi s'exprimera par une équation

$$P(\lambda,\mu,\nu)=0,$$

P étant un polyôme homogène en λ, μ, ν et irréductible. Nous ne comprenons pas dans P les $p-3$ expressions linéaires en λ, μ, ν correspondant aux courbes C tangentes en (x_1, y_1, z_1), ..., $(x_{p-3}, y_{p-3}, z_{p-3})$, ni les relations entre λ, μ, ν correspondant aux courbes C rencontrant les lignes multiples de la surface.

Le degré a du polynôme P est un *invariant,* puisque, quand on passe d'une surface à une autre qui lui correspond point par point, les polynômes Q se transforment linéairement. A cet invariant, nous pouvons en associer deux autres; si l'on considère l'équation P comme représentant une courbe en coordonnées homogènes, ou un cône, cette courbe aura

δ points doubles,

$\varkappa$ points de rebroussement.

Ces nombres sont des invariants, car un point double correspondra à une courbe C tangente deux fois à la surface, et un point de rebroussement à une courbe C ayant avec la surface un contact de second ordre et le nombre de ces courbes est manifestement le même pour deux surfaces se correspondant point par point.

Soit maintenant une seconde surface algébrique correspondant point par point à la première. Si on considère les points

$$(x'_1, y'_1, z'_1),\ \ldots,\ (x'_{p-3}, y'_{p-3}, z'_{p-3})$$

correspondant à (x_1, y_1, z_1), ..., $(x_{p-3}, y_{p-3}, z_{p-3})$, on aura une équation

$$P_1(\lambda',\mu',\nu')=0,$$

Les deux courbes (si l'on veut employer le langage de la Géométrie plane)

$$P(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$
$$P_1(\lambda', \mu', \nu') = 0$$

seront de même ordre a et auront δ points doubles et $\varkappa$ points de rebroussement.

On doit pouvoir passer de l'une à l'autre par une substitution homographique.

On pourra donc écrire un certain nombre de conditions, revenant à l'égalité de certains invariants pour l'une et l'autre courbe, qui seront par conséquent de la forme

$$(\mathrm{E})\qquad \begin{cases} i(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_{p-3}, y_{p-3}, z_{p-3}) \\ \quad = \mathrm{I}(x'_1, y'_1, z'_1, \ldots, x'_{p-3}, y'_{p-3}, z'_{p-3}). \end{cases}$$

Nous pouvons encore obtenir deux autres relations entre les (x, y, z) et les (x', y', z').

A cet effet, considérons l'un des points, soit (x_1, y_1, z_1). Il y a une infinité de courbes C tangentes à la surface en (x_1, y_1, z_1) et la relation λ, μ, ν est évidemment linéaire, soit

$$(1)\qquad A\lambda + B\mu + C\nu = 0,$$

et pareillement en (x'_1, y'_1, z'_1), nous aurons pour l'autre surface

$$(2)\qquad A_1\lambda' + B_1\mu' + C_1\nu' = 0.$$

La substitution linéaire qui transforme la courbe P en la courbe P_1 devra transformer l'équation (1) en l'équation (2), et, comme ce fait s'exprimera toujours en écrivant l'égalité d'invariants communs aux deux couples de formes, on aura deux nouvelles relations de la forme

$$(d)\qquad \begin{cases} \delta(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_{p-3}, y_{p-3}, z_{p-3}) \\ \quad = \Delta(x'_1, y'_1, z'_1, \ldots, x'_{p-3}, y'_{p-3}, z'_{p-3}), \end{cases}$$

δ et Δ étant rationnelles et symétriques par rapport aux indices 2, 3, ... $p-3$; mais (x_1, y_1, z_1) et (x'_1, y'_1, z'_1) jouant un rôle à part.

En partant de p points arbitraires dans deux surfaces données, on pourra former les équations (E) et (d). En se donnant arbitrairement les (x, y, z), on doit pouvoir déduire de ces équations les (x', y', z'), si les surfaces se correspondent point par point.

Ceci entraînera manifestement un certain nombre de conditions. Quand elles seront remplies, on pourra, *en général*, tirer de ces équations des valeurs pour les (x', y', z'); ainsi l'on pourra éliminer

$$(x'_2, y'_2, z'_2), \ldots, (x'_{p-3}, y'_{p-3}, z'_{p-3})$$

et avoir des équations où ne figure plus que (x'_1, y'_1, z'_1). On aura donc à voir si (x'_1, y'_1, z'_1) ainsi déterminés sont fonctions rationnelles de (x_1, y_1, z_1), point sur lequel il n'y a pas d'indications générales à donner, mais qui dans la pratique ne présentera pas de difficultés.

Ainsi donc, en général, on pourra reconnaître la correspondance des deux surfaces et trouver la substitution exprimant cette correspondance.

Nous disons, en général : quel pourrait être le cas d'exception où la marche suivie serait impuissante à conduire au résultat? Ce serait le cas où des équations (d) et (E) on ne pourrait tirer, après l'élimination de $(x'_2, y'_2, z'_2), \ldots, (x'_{p-3}, y'_{p-3}, z'_{p-3})$, qu'une seule équation pour trouver (x'_1, y'_1, z'_1). Dans ce cas tout spécial, nous aurons recours à une autre méthode, que nous allons exposer, méthode plus générale même que la précédente, puisqu'elle s'applique encore au cas où $p = 3$.

6. Soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ et $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_p$ les p polynômes adjoints pour l'une et l'autre surface : la correspondance cherchée doit être de la forme

$$\frac{Q_2(x, y, z)}{Q_1(x, y, z)} = \frac{A_1 Q'_1(x', y', z') + A_2 Q'_2 + \ldots + A_p Q'_p}{B_1 Q'_1 + B_2 Q_2 + \ldots + B_p Q'_p},$$

$$\frac{Q_3(x, y, z)}{Q_1(x, y, z)} = \frac{C_1 Q'_1 + C_2 Q'_2 + \ldots + C_p Q'_p}{B_1 Q'_1 + B_2 Q'_2 + \ldots + B_p Q'_p},$$

les A, B, C étant des constantes convenables. Si donc $\frac{Q_2}{Q_1}$ et $\frac{Q_3}{Q_1}$ ne sont pas fonctions l'un de l'autre, on peut tirer de là (x, y, z) en fonctions algébriques de (x', y', z'). On aura donc à reconnaître si l'on peut choisir les constantes A, B, C de manière que x', y', z' soient des fonctions rationnelles de x, y, z et inversement. On voit que la méthode précédente avait sur celle-ci l'avantage de n'introduire dans le calcul aucune indéterminée; par contre, nous pouvons ici étudier complètement le cas exceptionnel. Celui-ci est relatif à l'hypothèse où $\frac{Q_2}{Q_1}$ et $\frac{Q_3}{Q_1}$ seraient liées par une relation.

Ainsi, Q_1, Q_2, Q_3 désignant trois polynômes adjoints quelconques de la surface f, on suppose que l'on a la relation

$$\psi\left(\frac{Q_2}{Q_1}, \frac{Q_3}{Q_1}\right) = 0,$$

ψ étant nécessairement un polynôme, et cela pour tout point (x, y, z) de f. Considérons la surface

$$Q_2 - \lambda Q_1 = 0.$$

Quand λ varie, elle coupe f suivant une certaine courbe C mobile avec λ.

Prenons un point sur cette courbe C, et un autre point en dehors; nous pouvons déterminer le polynôme adjoint Q_3 de telle sorte qu'il s'annule pour ces deux points. Q_3 étant ainsi déterminé, reprenons l'identité supposée

$$\psi\left(\frac{Q_2}{Q_1}, \frac{Q_3}{Q_1}\right) = 0.$$

Quand (x, y, z) décrit la courbe C, Q_3 reste constant et égal à zéro; donc

$$Q_3 = 0$$

coupe la surface f suivant la courbe C; mais en même temps il doit y avoir une autre courbe d'intersection, puisque la surface Q_3 passe par un point de f qui n'est pas sur C. Ainsi donc $Q_3 = 0$, qui est une adjointe arbitraire, coupe la surface suivant une courbe décomposable.

Nous nous sommes déjà trouvé précédemment dans ce cas, où une adjointe quelconque coupe la surface suivant *plusieurs* courbes variables. Nous avons dit alors que ces courbes variables étaient toutes du genre *un*.

Dans ce cas particulier, la recherche de la correspondance des deux surfaces f et F se fera sans difficultés, en raisonnant sur les deux surfaces f et F, comme nous avons raisonné sur une seule surface au n° **4** du troisième Chapitre. Nous avons sur les deux surfaces deux réseaux de courbes de genre *un*, qui doivent se transformer l'un dans l'autre.

Il a été supposé, dans ce qui précède, que p était au moins égal à trois. Le cas de $p = 2$ peut se traiter comme le cas particulier qui précède; il rentre en effet dans ce cas, car nous savons que, pour $p = 2$, toute adjointe coupe la surface suivant une courbe du premier genre [1].

7. Ainsi, *étant données deux surfaces de genre supérieur à un, nous savons reconnaître si elles se correspondent point par point;* mais nous n'avons pu traiter, en général, la même question pour les surfaces du genre zéro ou un. Nous dirons seulement à ce sujet qu'une condition nécessaire se trouvera exprimée par l'égalité du nombre des cycles à *une* et *deux* dimensions de la surface.

CHAPITRE V.

QUELQUES APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — GÉNÉRALITÉS.

1. Nous allons nous occuper principalement, dans ce Chapitre, des équations différentielles de la forme

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0, \tag{1}$$

[1] On remarquera que la méthode employée dans ce paragraphe peut évidemment aussi être employée pour étudier les transformations d'une surface en elle-même, et qu'il en résulte de suite une nouvelle démonstration du théorème démontré dans la première Section de ce Chapitre.

f étant un polynôme en y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$. La variable indépendante ne figure pas dans l'équation qui, par suite, se ramène à une équation du premier ordre, mais nous voulons garder l'équation sous cette forme, et c'est du cas où l'intégrale générale de cette équation serait une fonction uniforme de x que nous allons nous occuper.

Supposons donc que l'intégrale générale de l'équation précédente soit une fonction uniforme de x, n'ayant que le seul point ∞ comme point singulier essentiel; soit $y = P(x)$ une intégrale quelconque.

Pour une valeur de x, qui ne soit pas un pôle de $P(x)$, on pourra, pour h suffisamment petit, développer $P(x+h)$,

$$P(x+h) = P(x) + h\,P'(x) + \ldots,$$

et les coefficients des puissances de h seront des fonctions rationnelles de $P(x)$, $P'(x)$ et $P''(x)$. Par suite, $P(x+h)$ est une fonction uniforme de $P(x)$, $P'(x)$ et $P''(x)$, qui sont d'ailleurs liées par la relation (1), du moins dans le voisinage d'un système de valeurs de P, P' et P'' finies, et n'annulant pas $\frac{\partial f}{\partial P''} = 0$.

L'élément de fonction du point analytique (P, P', P''), ainsi déterminé, s'étendra manifestement de proche en proche; on obtiendra ainsi une fonction analytique uniforme de (P, P', P''), d'après l'hypothèse faite que l'intégrale $P(x)$ est une fonction uniforme. Nous pouvons donc écrire

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} P(x+h) &= \varphi[P(x), P'(x), P''(x), h], \\ P'(x+h) &= \psi[P(x), P'(x), P''(x), h], \\ P''(x+h) &= \chi[P(x), P'(x), P''(x), h], \end{aligned}\right.$$

φ, ψ et χ étant des fonctions uniformes du point analytique (P, P', P'') et de h.

Des équations (2), on peut évidemment tirer $P(x)$, $P'(x)$ et $P''(x)$ en fonctions uniformes de $[P(x+h), P'(x+h), P''(x+h)]$. La transformation (2) *est donc biuniforme*. Mais nous avons déjà dit que, entre les points de deux surfaces, pouvaient exister des transformations biuniformes qui ne sont pas birationnelles. Prenons comme exemple d'équations qui conduisent à une transformation (2), qui ne soit pas birationnelle, l'équation

$$yy'' - y'^2 = 2y^2;$$

on a

$$y = Ce^{x^2},$$

et l'on trouve de suite

$$P(x+h) = P(x)e^{h^2}e^{h\frac{P'(x)}{P(x)}}.$$

C'est le cas où cette transformation biuniforme serait birationnelle que nous allons d'abord traiter.

2. Dans tout ce qui va suivre, la transformation biuniforme (2) est donc supposée birationnelle. *La surface*

$$f(y, y', y'') = 0$$

admet donc une transformation birationnelle en elle-même, renfermant un paramètre arbitraire h.

Écrivons cette transformation

$$(1) \qquad \begin{cases} Y = \varphi(y, y', y'', h), \\ Y' = \psi(y, y', y'', h), \\ Y'' = \chi(y, y', y'', h), \end{cases}$$

et transcrivons-la de nouveau en désignant par des lettres indéterminées les divers coefficients; soit alors

$$(2) \qquad \begin{cases} Y = \lambda(y, y', y''), \\ Y' = \mu(y, y', y''), \\ Y'' = \nu(y, y', y''). \end{cases}$$

Soit y une solution de l'équation f; écrivons que

$$(3) \qquad f(Y, Y', Y'') = 0, \qquad \frac{dY}{dx} = Y', \qquad \frac{dY'}{dx} = Y''.$$

Nous obtenons ainsi trois relations entre y, y', y'' et les coefficients de λ, μ et ν.

Divers cas pourront se présenter [1] :

1° Les coefficients dans λ, μ, ν dépendent d'une seule constante arbitraire. La forme (1) rentrera dans le type (2) ainsi trouvé. Dans ces conditions, les coefficients dans (1), qui sont des fonctions uniformes de h, sont liés deux à deux par des équations algébriques; par conséquent, Y et Y′ sont liés par une relation algébrique; donc l'intégrale générale sera une fonction doublement périodique de h, et les périodes ne dépendront pas de la constante d'intégration.

2° Les coefficients dans λ, μ et ν dépendent de deux arbitraires, soient α et β; écrivons alors

$$\begin{aligned} Y &= \lambda(y, y', y'', \alpha, \beta), \\ Y' &= \mu(y, y', y'', \alpha, \beta), \\ Y'' &= \nu(y, y', y'', \alpha, \beta), \end{aligned}$$

y désignant une solution quelconque de l'équation f, Y représentera l'intégrale générale de cette équation avec les constantes α et β.

Deux cas peuvent se présenter :

I. La substitution précédente ne forme pas un groupe de transformations. Prenons alors

$$\lambda(y, y', y'', \alpha, \beta), \quad \mu(y, y', y'', \alpha, \beta), \quad \ldots$$

et

$$\lambda(y, y', y'', \alpha_1, \beta_1), \quad \mu(y, y', y'', \alpha_1, \beta_1), \quad \ldots,$$

α, β et α_1, β_1 étant arbitraires, l'expression

$$(1) \qquad \lambda[\lambda(y, y', y'', \alpha, \beta), \mu, \nu, \alpha_1, \beta_1]$$

sera encore une solution de l'équation; elle doit donc être de la forme

$$(2) \qquad \lambda(y, y', y'', \alpha_2, \beta_2),$$

[1] On reconnaîtra, dans ce qui va suivre, une succession de raisonnements analogues à ceux qui ont été employés dans le troisième Chapitre.

α_2 et β_2 étant indépendants de x; mais, par hypothèse, la substitution ne définit pas un groupe de transformations, c'est-à-dire qu'on ne pourra pas trouver α_2 et β_2 dépendant uniquement de (α, β) et (α_1, β_1), de telle sorte que (1) et (2) soient identiques pour tout *point* y, y', y'' de f. On pourra cependant sûrement trouver des quantités α_2, β_2 indépendantes de x, de telle sorte que (1) et (2) représentent la même fonction de x. On aura donc ainsi, entre y, y', y'', une nouvelle relation algébrique, relation qui, comme on voit, dépendra de l'intégrale considérée y, car les quantités α_2 et β_2 ne seront pas indépendantes de la constante figurant dans y.

Nous avons donc, en résumé, une seconde relation algébrique entre y, y', y'', relation qui n'est d'ailleurs pas indépendante de l'intégrale particulière considérée y. Il s'ensuit, par l'élimination de y'' entre cette relation et l'équation différentielle f, qu'il y a entre y et y' une relation algébrique.

L'intégrale générale de l'équation est encore une fonction doublement périodique (ou dégénérescence).

Appelons *le cas* D les cas où l'intégrale est doublement périodique (ou dégénérescence).

II. Nous arrivons enfin au cas où les expressions λ, μ, ν donneraient un groupe de transformations à deux paramètres α et β. Nous n'avons pas besoin de répéter la série des raisonnements qui ont été faits dans le n° **7** de notre second Chapitre. Il n'y aurait, sur ce point, rien à changer aux raisonnements. On verra donc, par une marche toute semblable, que *ce groupe de transformations est permutable*.

Ainsi nous sommes conduit à cette conclusion, que la surface

$$f(y, y', y'') = 0$$

admet un groupe de transformations birationnelles à deux paramètres et permutables.

Or nous avons démontré, dans le Chapitre précédent, le théorème suivant : si une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

admet un groupe de transformations birationnelles à deux paramètres et permutable, la correspondance entre (x, y, z) et (x', y', z') sur la surface sera donnée par les deux équations

$$P\,(x, y, z)\,dx + Q\,(x, y, z)\,dy = P\,(x', y', z')\,dx' + Q\,(x', y', z')\,dy',$$
$$P_1(x, y, z)\,dx + Q_1(x, y, z)\,dy = P_1(x', y', z')\,dx' + Q_1(x', y', z')\,dy',$$

ou, si l'on veut, par

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P\,dx + Q\,dy - \int_{x'_0, y'_0, z'_0}^{x', y', z'} P\,dx + Q\,dy = \text{const.}$$

et

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P_1\,dx + Q_1\,dy - \ldots = \text{const.},$$

ce qui veut dire que (x', y', z') est une fonction de (x, y, z), telle que la différence qui forme le premier membre ne dépend pas de (x, y, z).

Par suite, si l'on considère

$$\int_{y_0, y'_0, y''_0}^{y, y', y''} P\,dx + Q\,dy \quad \text{et} \quad \int_{y_0, y'_0, y''_0}^{y, y', y''} P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

ce seront des fonctions de x, $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ qu'il sera bien facile de trouver.

Si, en effet, on remplace x par $x + h$, (y, y', y'') éprouve une transformation du groupe, et devient (Y, Y', Y''), la différence

$$\int_{y_0, y'_0, y''_0}^{y, y', y''} P\,dx + Q\,dy - \int_{y_0, y'_0, y''_0}^{Y, Y', Y''} P\,dx + Q\,dy$$

ne dépend pas de y, y', y'', mais seulement de la transformation, c'est-à-dire de h; elle ne dépend donc pas de x. Ceci revient à dire que

$$\lambda(x + h) - \lambda(x) \quad \text{et} \quad \mu(x + h) - \mu(x)$$

ne dépendent pas de x, quel que soit h.

Donc

$$\lambda(x) = ax + \alpha,$$
$$\mu(x) = bx + \beta,$$

a, b, α et β étant indépendants de x.

Nous pouvons donc énoncer le théorème *fondamental* qui suit :

Il existera pour la surface $f(y, y', y'') = 0$ deux intégrales de différentielles totales, telles que

$$\int^{y, y', y''} P\, dx + Q\, dy = u,$$

$$\int^{y, y', y''} P_1\, dx + Q_1\, dy = v,$$

donneront pour y, y' et y'' des fonctions uniformes de u et v; soit

$$y = \Theta(u, v);$$

alors l'intégrale générale de l'équation sera

$$y = \Theta(ax + \alpha, bx + \beta),$$

α et β étant des constantes arbitraires, et a et b deux constantes.

II. — Recherche de l'intégrale.

3. Nous devons maintenant nous proposer de reconnaître, autant qu'il sera possible, sur l'équation différentielle elle-même, si cette équation rentre dans la classe d'une intégrale générale uniforme avec une substitution correspondante birationnelle.

Mais, auparavant, faisons deux remarques générales. Tout d'abord, si la surface

$$f(y, y', y'') = 0$$

est de *genre supérieur à l'unité*, on tire de suite une conséquence importante de ce que la surface admet une infinité de transformations birationnelles. Nous pouvons écrire en effet, en remplaçant x par zéro et h par x,

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x, y_0, y'_0, y''_0), \\ y' &= \psi(x, y_0, y'_0, y''_0), \\ y'' &= \chi(x, y_0, y'_0, y''_0), \end{aligned}$$

y_0, y'_0, y''_0 désignant les valeurs de y, y', y'' pour $x = 0$.

Désignons alors par $Q_1(y, y', y'')$ et $Q_2(y, y', y'')$ deux polynômes adjoints d'ordre $(m-4)$. En refaisant les raisonnements faits au commencement du troisième Chapitre, qui traite de la transformation des surfaces, on trouve immédiatement que

$$\frac{Q_1(y, y', y'')}{Q_2(y, y', y'')} = \frac{Q_1(y_0, y'_0, y''_0)}{Q_2(y_0, y'_0, y''_0)};$$

d'où le théorème suivant : dans le cas qui nous occupe, *le genre de la surface*

$$(1) \qquad f(y, y', y'') = 0$$

est zéro ou un, ou bien on a pour toute intégrale

$$(2) \qquad \frac{Q_1(y, y', y'')}{Q_2(y, y', y'')} = a,$$

a étant une constante. Les équations (1) et (2) entraînent une relation algébrique entre y et y', et, par conséquent, les intégrales seront des fonctions doublement périodiques (ou dégénérescences). Dans le cas où les intégrales seront doublement périodiques, le module ne dépendra pas de la constante arbitraire.

On voit donc que le cas où le genre de f serait supérieur à l'unité ne présente aucune difficulté, et nous pouvons, par suite, supposer que le genre de f est égal à *zéro* ou à *un*.

Voici une seconde remarque : Si, le genre de la surface

$$f(y, y', y'') = 0$$

étant zéro ou un, celle-ci admet seulement un groupe de transformations à *un* paramètre, on aura, comme nous l'avons déjà dit (cas I) pour y, y', y'', des fonctions doublement périodiques de x avec un module toujours le même.

4. Ces remarques faites, je considère d'abord le cas où le genre de f serait l'unité, et je vais chercher dans quels cas l'intégrale générale correspondra aux cas D. Si l'on se trouve dans ce cas, l'intégrale générale sera certainement doublement périodique; elle ne peut être, en effet, rationnelle en x, ou fonction rationnelle de e^{ax}, *puisque le genre de la surface est l'unité*.

Écrivons $f(y, z, t) = 0$, et soit $Q(y, z, t)$ l'unique polynôme adjoint d'ordre $(m-4)$.

y, z et t sont fonctions doublement périodiques de x, et fonctions d'un paramètre α, qui est la constante de l'intégration; d'ailleurs $z = y'$, $t = y''$.

Si l'on considère alors

$$\frac{Q(y, z, t)\left[\dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]}{f'_t},$$

cette expression, fonction doublement périodique en x (qui sert à former l'élément de l'intégrale double de première espèce), restera finie pour toute valeur de x; ce sera donc une fonction de α seulement, puisqu'elle doit se réduire à une constante par rapport à x.

En faisant sur α un changement de variable convenable et en désignant par a le nouveau paramètre, on pourra manifestement écrire

$$\frac{Q(y, z, t)\left[\dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial a} - \dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]}{f'_t} = 1.$$

Or les équations

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial a}da,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial a}da$$

donnent

$$da = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}dy - \dfrac{\partial y}{\partial x}dz}{\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial a} - \dfrac{\partial z}{\partial a}\dfrac{\partial y}{\partial x}} = \frac{Q(y, z, t)[z\,dz - t\,dy]}{f'_t};$$

donc

$$(e) \qquad a = \int^{y, z, t} \frac{Q(y, z, t)(z\,dz - t\,dy)}{f'_t}$$

et cette intégrale portera nécessairement sur une différentielle totale, car a peut être considéré comme fonction de (y, z, t).

Ainsi, *la constante d'intégration a peut s'exprimer par une intégrale de différentielle totale attachée à la surface f.*

La relation (e) doit exprimer entre y, z et t une relation algébrique (*voir* plus bas)

$$R(y, z, t) = C,$$

R étant rationnelle, qui correspond au faisceau de courbes de genre un, tracé sur la surface. Si donc on peut mettre l'équation (e) sous cette seconde forme, on aura une équation

$$R(y, y', y'') = C,$$

et, pour achever, il n'y aura plus qu'à traiter une équation entre y et y'.

On voit que, théoriquement, la solution n'est pas complète, puisque c'est seulement *sous forme intégrale* que nous trouvons le faisceau des courbes de genre un, qui correspondent aux solutions supposées doublement périodiques. Pratiquement, la relation (e) permettra, le plus souvent, d'achever l'intégration de l'équation.

5. J'ajouterai encore une remarque générale concernant le cas D. Je dis, en premier lieu, que, dans ce cas, l'intégrale générale sera obtenue en joignant à

$$f(y, y', y'') = 0$$

une équation $R(y, y', y'') = C$, où R est une fonction rationnelle de y, y', y''; c'est un point qui n'est pas absolument évident, que la constante puisse s'exprimer rationnellement (et non pas simplement algébriquement) en fonction de y, y', y''. Mais il le devient, si l'on se rappelle le théorème suivant de M. Fuchs : Quand l'intégrale générale d'une équation de premier ordre

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

est algébrique (F est un polynôme), on peut la considérer comme donnée par cette équation F et l'équation

$$R\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = C,$$

R étant rationnelle.

Ceci admis, on n'a qu'à remplacer l'équation f par l'équation du premier ordre

$$f\left(y, p, p\,\frac{dp}{dy}\right) = 0,$$

dont, dans l'hypothèse admise, l'intégrale générale sera algébrique, et l'on a de suite le résultat annoncé.

Considérons donc les équations

$$f(y, y', y'') = 0, \qquad R(y, y', y'') = C;$$

le réseau R coupe la surface suivant une ou plusieurs courbes du genre zéro ou un. Les équations de leur projection en y et y' seront donc données par

$$\varphi(y, y', \lambda, C) = 0,$$

φ étant un polynôme irréductible; λ et C sont liées par une relation algébrique

$$F(\lambda, C) = 0.$$

λ est, comme C, une fonction rationnelle de y, y', y''.

Si le genre de la relation F *est égal ou supérieur à un,* la surface f aura au moins une intégrale de *première* espèce; on pourra chercher directement les intégrales de première espèce de f. S'il n'y en a qu'une, c'est que le genre de F est égal à un, et l'on aura

$$\int P\,dy + Q\,dy' = \text{const.},$$

c'est-à-dire le faisceau sous la forme intégrale. S'il y a plusieurs intégrales de première espèce, deux de celles-ci étant fonctions l'une de l'autre, on aura, en formant le quotient des coefficients de dy ou dy' dans les deux intégrales, l'équation du réseau sous forme finie. S'il y a deux intégrales ne dépendant pas l'une de l'autre, on aura les deux équations

$$x = \int P_1\, dy + Q_1\, dy',$$

$$C = \int P\, dy + Q\, dy'.$$

qui devront donner y, y', y'' en fonction uniforme de x.

Si le genre de F *est nul,* en exprimant λ et C en fonction d'un paramètre α (uniformément), l'équation pourra s'écrire

$$\varphi(y, y', \alpha) = 0,$$

et α, qui est fonction rationnelle de λ et C, pourra s'exprimer rationnellement en y, y', y'', c'est-à-dire que nous remplaçons le faisceau R par le faisceau

$$S(y, y', y'') = \alpha$$

(S étant rationnelle), qui coupe la surface suivant une *seule* courbe mobile de genre zéro ou un.

Nous avons donc le théorème suivant : Si la surface f n'a pas d'intégrale de première espèce, et si l'intégrale générale est une fonction doublement périodique ou dégénérescence d'une telle fonction, cette intégrale générale peut s'obtenir en adjoignant à f l'équation d'un faisceau

$$S(y, y', y'') = \alpha$$

qui coupe la surface suivant une seule courbe (variable avec α).

En particulier, dans le cas des dégénérescences, la courbe sera de genre zéro. On a donc alors un faisceau coupant la surface f suivant une *seule courbe* de genre zéro. Il résulte alors d'un théorème de

M. Nöther (*Math. Annalen*, t. III) que la surface sera unicursale, et d'une manière uniforme. Nous avons donc cet énoncé :

Si l'équation différentielle

$$f(y, y', y'') = 0$$

a pour intégrale générale une fonction rationnelle de x ou de e^{ax}, la surface f sera uniformément unicursale, à moins qu'elle ne possède une intégrale de première espèce.

Je n'ai rien de plus à ajouter sur *le cas* D; la solution est complète quand le genre de la surface est *supérieur* à un. Elle laisse peu à désirer quand le genre est *égal* à un; mais, pour le genre zéro, c'est seulement dans le cas où la surface aura des intégrales de première espèce que l'on pourra tirer parti de ce que nous avons dit, pour la recherche effective des intégrales.

6. Occupons-nous maintenant du cas différent du cas D. Nous avons établi qu'alors il y avait deux intégrales de différentielles totales

$$\int \mathrm{P}\,dy + \mathrm{Q}\,dy' \quad \text{et} \quad \int \mathrm{P}_1\,dy + \mathrm{Q}_1\,dy',$$

telles que les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int^{(y, y', y'')} \mathrm{P}\,dy + \mathrm{Q}\,dy' = u, \\ &\int^{(y, y', y'')} \mathrm{P}_1\,dy + \mathrm{Q}_1\,dy' = v \end{aligned} \right.$$

donnent pour y, y' et y'' des fonctions uniformes de u et v; soit

$$y = \Theta(u, v);$$

de plus, en remplaçant u et v respectivement par $ax + \mathrm{C}$ et $a'x + \mathrm{C}'$, a et a' étant deux constantes convenables, C et C′ deux constantes arbitraires, on a l'intégrale générale de l'équation.

Par les équations ci-dessus écrites, les coordonnées d'un point quelconque de la surface f s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres; nous pourrons donc faire usage de tout ce que nous avons dit sur de telles surfaces dans le troisième Chapitre.

Si la surface f appartient à la première classe de surfaces, pour lesquelles y, y', y'' s'expriment par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de u et v, ce que nous savons reconnaître, on aura

$$y = \Theta(ax + C, a'x + C'),$$

Θ étant une fonction quadruplement périodique de u et v.

J'ajoute cette remarque, *que ce cas est le seul qui puisse se présenter quand le genre de la surface est égal à l'unité*. Ceci résulte de suite de ce que nous avons dit au troisième Chapitre que toutes les dégénérescences correspondaient au genre zéro.

Dans le cas où les intégrales (1) auraient trois périodes, l'une d'elles est de première espèce. Cette intégrale

$$\int P\,dy + Q\,dy'$$

peut être formée; elle ne devra avoir que deux périodes, car la surface a seulement deux cycles linéaires (*voir* Chapitre III). Or on peut étudier les cycles linéaires, et par conséquent reconnaître le nombre des périodes. Soit $\lambda(z)$ une fonction doublement périodique aux mêmes périodes :

$$\lambda\left[\int^{(y, y', y'')} P\,dy + Q\,dy'\right]$$

sera une fonction rationnelle de (y, y', y''), soit $R(y, y', y'')$. On aura l'équation

$$R(y, y', y'') = \lambda(ax),$$

dont l'intégrale générale devra être uniforme.

Ce qui précède s'applique aussi au cas où les intégrales (1) auraient deux périodes, l'une d'elles étant de première espèce.

Dans tous les autres cas, la surface sera nécessairement unicursale, et l'expression générale de y sera une fonction rationnelle de e^{ax}, e^{bx}, ou une fonction rationnelle de x et e^{ax}, ou enfin une fonction rationnelle de x.

III. — Examen du cas général.

7. Nous avons supposé jusqu'ici qu'une certaine transformation biuniforme était birationnelle. Il faudrait examiner maintenant le cas général où l'équation

$$f(y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

a son intégrale générale uniforme; c'est une question qui présente les plus grandes difficultés. Les considérations qui suivent vont nous montrer la difficulté du problème.

L'équation précédente revient à l'équation du premier ordre

$$f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0. \tag{2}$$

Pour étudier p comme fonction de y, on peut appliquer les principes développés par Briot et Bouquet dans leur Mémoire classique; pour éliminer une première série de difficultés, nous allons supposer que, dans l'étude des singularités de cette équation, on puisse *toujours* se trouver ramené au cas, à la fois général et simple, spécialement étudié par Briot et Bouquet, c'est-à-dire, en employant les notations de ces auteurs,

$$t\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta + bt + \ldots,$$

et que de plus les développements en séries correspondant aux intégrales ne contiennent pas de logarithmes. Ces conditions se trouveront réalisées bien évidemment dans un grand nombre de cas.

Quand l'équation (2) aura été complètement discutée, on aura à revenir à l'équation initiale, c'est-à-dire poser

$$\frac{dy}{dx} = p(y).$$

La grande difficulté est de reconnaître si y ainsi définie est une fonction uniforme de x. Il est facile de reconnaître si, dans le voisinage de chaque valeur atteinte par la variable x, la fonction y est uniforme; mais cela ne fait pas nécessairement, quand il en est ainsi, que la fonction y soit réellement une fonction uniforme. Il y a là une difficulté considérable, qu'il paraît bien difficile de lever, et nous avons dû nous borner à ce cas des fonctions intégrales de l'équation (1), que l'on pourrait appeler *à apparence uniforme*.

Arrêtons-nous spécialement sur le cas où l'équation a la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = R\left(y, \frac{dy}{dx}\right),$$

R étant rationnelle en y et $\frac{dy}{dx}$.

On voit aisément tout d'abord que l'équation doit être de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A(y) + B(y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + C(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

A, B, C étant rationnels en y.

On vérifiera encore facilement, toujours sous les conditions énoncées au début, que l'équation a la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A(y) + B(y)\frac{dy}{dx} + C(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{(y-a)(y-b)\ldots(y-l)},$$

les quantités distinctes $a, b, \ldots, l$ étant en nombre m, et A, B, C étant maintenant des polynômes en y,

A	de degré	$m+3$,
B	»	$m+1$,
C	»	$m-1$.

Prenons donc un tel type d'équations, et cherchons à quelles conditions l'intégrale générale pourra être uniforme.

Considérons donc l'équation

$$(3) \qquad p\frac{dp}{dy} = \frac{A(y) + B(y)p + C(y)p^2}{(y-a)\ldots(y-l)}.$$

Tout d'abord $y = a, \ldots, l$ peuvent être des points singuliers des intégrales. Prenons a, et considérons l'équation

$$A(a) + B(a)p + C(a)p^2 = 0$$

dont nous supposons les deux racines p_1 et p_2 distinctes et différentes de zéro.

A quelles conditions toutes les intégrales de cette équation, qui pour $y = a$ deviendront égales à p_1 ou p_2, seront-elles des fonctions uniformes dans le voisinage de $y = a$? C'est ce que nous savons trouver avec Briot et Bouquet; ceci exigera deux conditions, dans lesquelles figure d'ailleurs un entier positif arbitraire. Nous aurons donc deux conditions à écrire pour chaque racine du dénominateur, ce qui fait $4m$ relations. Nous aurons ensuite quatre conditions à écrire, relativement à $y = \infty$, ce qui se fera en changeant dans l'équation y en $\frac{1}{y}$, et raisonnant sur $y = 0$ comme nous avons raisonné sur $y = a$. Nous obtiendrons ainsi $4m + 4$ équations, qui pourront d'ailleurs n'être pas distinctes et renfermeront des entiers arbitraires.

En raisonnant comme nous venons de le faire, nous avons supposé que l'équation avait une *infinité* d'intégrales devenant égales à p_1, et une *infinité* d'intégrales devenant égales à p_2, pour $y = a, \ldots, l$. Quand ces intégrales existent, il faut bien qu'elles soient holomorphes en y, car ce sera pour une valeur finie de x que l'on aura ici $y = a$, puisque l'on a $\int^y \frac{dy}{p} = x$, et nous avons supposé $p_1 p_2 \neq 0$. On pourrait, en restant dans la plus grande généralité, se trouver dans d'autres conditions; il pourra arriver qu'une *seule* intégrale (l'holomorphe) devienne égale à p_1 pour $y = a$. Il n'y a là qu'une condition d'inégalité, et nous n'avons pas alors de condition à écrire relativement à cette racine p_1.

Il faut ensuite chercher s'il n'y aurait pas d'intégrale de l'équation (3) devenant infinie pour $y = a$. Or, si l'on change dans cette équation p en $\frac{1}{p'}$, elle devient

$$-\frac{dp'}{dy} = \frac{A(y)p'^3 + B(y)p'^2 + C(y)p'}{(y-a)\ldots(y-l)}.$$

Il ne doit pas, dans le cas qui nous occupe, y avoir d'autre intégrale de cette équation s'annulant pour $y = a$, que $p' = 0$; car l'égalité $\int p'\,dy = x$ montre que x sera finie; donc, pour une valeur finie de x, y serait finie et $\frac{dy}{dx}$ infinie. La condition indiquée exige seulement que

$$\frac{C(a)}{(a-b)\ldots(a-l)}$$

ait sa partie réelle positive; nous avons seulement donc une condition d'inégalité.

Nous avons encore à considérer le cas où p deviendrait nulle pour une valeur finie de y; il n'y a aucun embarras si cette valeur de y n'est pas racine de $A(y)$; car on a

$$\frac{p(y-a)(y-b)\ldots(y-l)}{A + Bp + Cp^2} = \frac{dy}{dp};$$

on aura donc

$$y = \alpha p^2 + \ldots,$$

en supposant que la valeur de y soit $y = 0$, ce qui ne restreint rien: donc

$$p = \beta\sqrt{y} + \gamma(\sqrt{y})^2 + \ldots.$$

$\alpha \neq 0$, comme on le voit de suite; par suite,

$$\frac{dy}{\sqrt{y}}(\beta' + \gamma'\sqrt{y} + \ldots) = dx,$$

l'inversion sera uniforme.

Si la valeur de y est racine de $A(y)$, nous sommes dans des conditions différentes, puisque alors $\frac{dy}{dp}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. La discussion n'offre cependant aucune difficulté. Il suffit de poser, en désignant par α la valeur de y,

$$y - \alpha = \lambda p$$

et l'on a la forme classique. On aura seulement des conditions d'inégalité à écrire.

On devra enfin se livrer, pour $y = \infty$, à la même discussion des différents cas que nous venons d'examiner pour y fini. C'est ce que nous avions déjà d'ailleurs indiqué plus haut.

8. Nous supposons donc remplies toutes les conditions d'égalités ou d'inégalités, dont il vient d'être parlé. *L'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A(y) + B(y)\frac{dy}{dx} + C(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{(y-a)\ldots(y-l)}$$

sera une fonction de x à apparence uniforme.

Prenons maintenant un cas particulier; le plus simple correspond à $m = 0$. Nous aurons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay^3 + by^2 + cy + d + (ky + h)\frac{dy}{dx}.$$

Nous avons à étudier l'équation

$$p\frac{dp}{dy} = ay^3 + by^2 + cy + d + (ky + h)p.$$

Cherchons d'abord si, pour une valeur finie de y, on peut avoir p infini. Changeant p en $\frac{1}{p'}$, l'équation devient

$$-\frac{dp'}{dy} = p'^3(ay^3 + by^2 + \ldots + d) + (ky + h)p'^2 :$$

donc il n'y a que p' identiquement nul.

Examinons ensuite si pour y, racine de l'équation

$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0,$$

on ne pourrait pas avoir $p = 0$. Supposons, comme il est permis, $d = 0$ et soit $y = 0$ cette racine. En posant $p = \lambda y$, l'équation devient

$$(3) \qquad y\frac{d\lambda}{dy} = \frac{ay^2 + by + c - \lambda^2 + (ky + h)\lambda}{\lambda};$$

on a à considérer les racines de $c - \lambda^2 + h\lambda = 0$; soient λ_1 et λ_2 ces racines. Il faut envisager le coefficient de $\lambda - \lambda_1$ ou $\lambda - \lambda_2$ dans le second membre; ces coefficients sont

$$-2 + \frac{h}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad -2 + \frac{h}{\lambda_2};$$

si leurs parties réelles sont négatives, il n'y aura que deux intégrales (les holomorphes) et pas d'autres. Si ces quantités sont positives, il y aura d'autres intégrales devenant égales à λ_1 ou λ_2; mais, dans tous les cas, l'équation

$$\frac{dy}{dx} = y(\lambda_1 + \ldots),$$

ne donnera pas pour x une valeur finie, quand y tendra vers zéro. Il n'y aura donc pas de ce chef de valeur de x où la fonction cesse d'avoir une apparence uniforme. Il n'y a pas à se préoccuper enfin pour l'équation (3) du cas de $\lambda = 0$ pour $y = 0$, car ceci équivaut à p ayant dans l'équation initiale une valeur finie arbitraire différente de zéro.

9. Nous avons jusqu'ici laissé de côté le cas de $y = \infty$; remplaçons, pour étudier ce cas, y par $\frac{1}{y}$, dans l'équation initiale. Elle devient

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{2\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 - a - by' - cy'^2 - dy'^3 + (k + hy')\frac{dy'}{dx}}{y'}.$$

Nous avons donc à étudier les intégrales de l'équation

$$(4) \qquad y'\frac{dp'}{dy'} = \frac{2p'^2 - a - by' - cy'^2 - dy'^3 + (k + hy')p'}{p'},$$

dans le voisinage de $y' = 0$. Soit l'équation

$$2p'^2 - a + kp' = 0,$$

dont les racines, supposées distinctes, seront désignées par p'_1 et p'_2.

Si l'on suppose qu'il y ait une infinité d'intégrales holomorphes devenant égales à p'_1 et pareillement pour p'_2, il faudra que

$$2 + \frac{a}{p'^2_1} \quad \text{et} \quad 2 + \frac{a}{p'^2_2},$$

qui représentent respectivement les dérivées du second membre de (4) pour $y' = 0, p' = p'_1$ et pour $y' = 0, p' = p'_2$, soient des entiers positifs. Ces deux quantités peuvent se remplacer par $4 + \frac{k}{p'_1}$ et $4 + \frac{k}{p'_2}$.

Ainsi $\frac{k}{p'_1}$ et $\frac{k}{p'_2}$ sont des entiers au moins égaux à -3.

Soit $\frac{k}{p_1} = m$, $\frac{k}{p_2} = n$, on aura $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = -\frac{1}{2}$, $\frac{k^2}{mn} = -\frac{a}{2}$.

On pourra satisfaire à la première relation avec des entiers au moins égaux à -3, dans la seule hypothèse

$$m = -1, \qquad n = 2; \qquad \text{on aura alors} \qquad k^2 = a.$$

On a encore deux autres relations à écrire; elles sont faciles à former, mais très compliquées. Je ne les écrirai pas ici, me proposant tout à l'heure de faire le calcul complet pour un cas particulier un peu plus simple.

Nous avons, en résumé, *trois relations entre les quantités a, b, c, d, k moyennant lesquelles l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay^3 + by^2 + cy + d + ky\frac{dy}{dx}$$

est à apparence uniforme (nous avons fait $h = 0$, comme il est évidemment légitime).

10. Une question se pose maintenant, qui, si l'intégrale était réellement uniforme dans toute l'étendue du plan, reviendrait à l'*intégration* de l'équation. Peut-on associer à l'équation précédente une autre équation, présentant les mêmes caractères, mais dont l'intégrale générale *n'aura pas de pôles?* Nous allons voir que la chose est possible.

Quand y devient infinie (soit, par exemple, pour $x = 0$), nous avons deux développements

$$(1) \qquad y = \frac{\alpha}{x} + \beta + \gamma x + \delta x^2 + \ldots,$$

$$(2) \qquad y = \frac{\alpha'}{x} + \beta' + \gamma' x + \delta' x^2 + \varepsilon' x^3 + \ldots.$$

Je suppose que le premier développement corresponde à la racine $p_1' = -k$, les *trois* premiers coefficients α, β, γ sont déterminés; c'est ce que montre de suite l'équation (4) du paragraphe précédent. Dans le second développement correspondant à $p_2' = \frac{k}{2}$, les *cinq* premiers coefficients α', β', γ', δ', ε' sont connus.

Écrivons les valeurs de α et β (en supposant, comme plus haut, $h = 0$), on a

$$\alpha = -\frac{1}{k}, \qquad \beta = -\frac{b}{4k^2},$$

$$\alpha' = \frac{2}{k}, \qquad \beta' = -\frac{2b}{5k^2}, \qquad \ldots.$$

Ceci posé, j'écris la combinaison suivante

$$Y = Ay^2 + By + C\frac{dy}{dx}.$$

On peut choisir les constantes A, B, C de manière que Y ne devienne pas infinie pour le premier développement; il suffira que

$$\alpha A - C = 0,$$

$$2A\beta\alpha + B\alpha = 0,$$

ou

$$A + Ck = 0,$$

$$Ab - 2Ba = 0;$$

Y aura donc seulement des pôles (doubles) correspondant au développement (2). Soit

$$Y = \frac{\alpha''}{x^2} + \frac{\beta''}{x} + \gamma'' + \delta'' x + \varepsilon'' x^2 + \eta'' x^3 + \ldots;$$

on voit de suite que α'', β'', γ'', δ'', ε'' sont connus, puisque α', β', γ', δ', ε' le sont. Il ne semble pas *a priori* qu'il en soit de même de η'', mais cependant η'' est également connu; car soit, dans (2), η' le coefficient de x^4, le coefficient de x^3 dans Y sera

$$A \cdot 2\alpha'\eta' + 2A\beta'\varepsilon' + B\varepsilon' + 4C\eta';$$

or η' disparaît, car $A\alpha' + 2C = 0$, puisque $\frac{A}{C} = \frac{1}{\alpha}$, ce qui revient à $\alpha' + 2\alpha = 0$; or $\alpha' = \frac{2}{k}$, $\alpha = -\frac{1}{k}$.

Ayant ainsi formé l'expression Y, posons

$$F = mY^3 + nY^2 + pY + (qY + r)\frac{dY}{dx} + s\left(\frac{dY}{dx}\right)^2,$$

qui aura des pôles sextuples. Les coefficients de toutes les puissances négatives dans le développement au voisinage d'un pôle seront déterminés; c'est ce qui se vérifie immédiatement, puisque dans Y tous les coefficients jusqu'à η'' inclusivement sont déterminés. Par conséquent, on peut choisir les six indéterminées qui figurent dans l'expression précédente, de manière que tous les pôles soient des pôles simples.

Cela fait, le résidu commun correspondant à tous ces pôles sera connu. Si ce résidu n'est pas nul, on pourra faire en sorte qu'il soit égal à l'unité. L'expression

$$G = e^{\int F\,dx}$$

sera alors, comme F, une fonction à apparence uniforme, *mais elle n'aura plus de pôles*. On voit que, si y est réellement uniforme dans tout le plan, G sera une fonction entière de x. Cette fonction G satisfait à une équation du troisième ordre qui se déduit de suite de l'équation proposée en y; dans ce cas, cette équation du troisième ordre aura pour intégrale générale une fonction holomorphe dans tout le plan.

11. Considérons encore le cas plus particulier de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by^2 + cy = 0.$$

La discussion se fait comme précédemment, sauf pour ce qui concerne $y = \infty$. Ici les pôles seront doubles. Soit $x = 0$ un tel pôle ; écrivons le développement

$$y = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \gamma + \delta x + \varepsilon x^2 + \eta x^3 + \ldots.$$

Les six premiers coefficients de α à η sont déterminés. Écrivons les résultats complets du calcul :

$$b\alpha + 6 = 0, \tag{1}$$

$$\beta = -\frac{a\alpha}{5} = \frac{6a}{5b}, \tag{2}$$

$$2\gamma = -\frac{c}{b} + \frac{a^2}{25b}. \tag{3}$$

$$\delta = \frac{a^3}{5^3.2b}, \tag{4}$$

$$10\varepsilon = \frac{17a\delta}{5} + b\gamma^2 + c\gamma, \tag{5}$$

$$6\eta + 2a\varepsilon + 2b\gamma\delta + 2b\beta\varepsilon + 2b\alpha\eta + c\delta = 0.$$

$$6\eta = 2a\varepsilon + 2b\gamma\delta + 2b\beta\varepsilon + c\delta,$$

$$6\eta = \delta(c + 2b\gamma) + 2\varepsilon(a + b\beta),$$

$$6\eta = \frac{a^2}{25}\delta + \frac{22a\varepsilon}{5}. \tag{6}$$

Enfin nous avons l'équation de condition

$$3a\eta + 2b\beta\eta + 2b\gamma\varepsilon + b\delta^2 + c\varepsilon = 0,$$

$$\eta(3a + 2b\beta) + \varepsilon(2b\gamma + c) + b\delta^2 = 0,$$

$$\frac{27\eta a}{5} + \varepsilon\frac{a^2}{25} + b\delta^2 = 0,$$

$$\frac{9a}{10}\left(\frac{a^2\delta}{25} + \frac{22a\varepsilon}{5}\right) + \varepsilon\frac{a^2}{25} + \frac{a^6}{4.5^6.b} = 0,$$

ou, en divisant par $\frac{a^2}{25}$,

$$\frac{9}{2}\left(\frac{a\delta}{5}+22\varepsilon\right)+\varepsilon\frac{a^4}{4.5^4.b}=0,$$

$$\frac{9a\delta}{10}+100\varepsilon+\frac{a^4}{4.5^4.b}=0,$$

$$\frac{9a\delta}{10}+\frac{a^4}{4.5^4b}+34a\delta+10(b\gamma^2+c\gamma)=0;$$

or

$$b\gamma^2+c\gamma=\frac{b}{4}\left(\frac{a^2}{25b}-\frac{c}{b}\right)^2+\frac{c}{2}\left(\frac{a^2}{25b}-\frac{c}{b}\right)=\frac{a^4}{4.25^2.b}-\frac{c^2}{4b},$$

$$\frac{349.a\delta}{10}+\frac{a^4}{4.5^4.b}\frac{10a^4}{4.5^4.b}-\frac{5}{2}\frac{c^2}{b}=0, \qquad \text{de plus} \qquad \delta=\frac{a^3}{5^3.2b}.$$

En réduisant, on arrive à la relation

$$36a^4=5^4.c^2.$$

Telle est la condition (tout ce calcul suppose, bien entendu, $b\neq 0$) pour que l'intégrale générale de l'équation soit *à apparence uniforme*.

Nous pouvons ici raisonner sur y comme nous avons raisonné sur Y au paragraphe précédent. On formera une combinaison

$$F=my^3+ny^2+py+(py+r)\frac{dy}{dx}+s\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

telle que

$$G=e^{\int F dx}$$

n'ait plus de pôles.

12. Citons encore un autre type d'équations dont l'intégrale générale est à apparence uniforme.

Étant donnée une surface $f(x,y,z)=0$, on connaît l'importance de l'identité en x, y et z

$$A\frac{\partial f}{\partial x}+B\frac{\partial f}{\partial y}+C\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)f(x,y,z).$$

qui est intimement liée à la théorie des intégrales de première espèce.

Si l'on peut satisfaire à cette identité en prenant pour A un polynôme de degré $m-3$ en y et z et de degré $m-2$ en x, y, z, et pareillement pour B et C l'expression

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$$

est une intégrale de première espèce (en y ajoutant seulement des conditions relatives à la manière dont se conduisent les surfaces $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, par rapport aux singularités de la surface). Si, ces mêmes dernières conditions étant remplies, nous pouvons trouver trois polynômes A, B, C des degrés indiqués et tels que

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z}$$

soit divisible par $f(x, y, z)$, sans que le quotient soit

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z},$$

l'expression

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$$

ne sera pas une différentielle totale exacte; mais nous pouvons l'appeler une expression différentielle de première espèce, en ce sens que, quelle que soit la relation analytique que l'on établisse entre x et y dans le voisinage d'une valeur arbitraire x_0 et y_0, l'expression

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$$

reste toujours finie.

Ceci posé, considérons une surface du genre *un*, admettant deux expressions différentielles de première espèce

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} \quad \text{et} \quad \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z}$$

($BA_1 - AB_1$ n'étant pas identiquement nul).

Je forme le système des deux équations du premier ordre

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = du,\\ &\frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = 0,\end{aligned}\right.$$

devant donner x, y en fonction de la variable indépendante u.

L'intégrale générale de ce système est à apparence uniforme. On a en effet

$$BA_1 - AB_1 = Q(x, y, z) f'_z,$$

$Q(x, y, z)$ étant le polynôme adjoint d'ordre $m - 4$ qui coupe (en dehors des lignes multiples) la surface suivant une ou plusieurs courbes C de genre zéro (*voir* au troisième Chapitre). Pour ces courbes C, on a identiquement

$$\begin{aligned} B\,dx - A\,dy &= 0,\\ B_1\,dx - A_1\,dy &= 0,\end{aligned}$$

car, l'expression $\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}$ étant de première espèce, quand on remplacera x, y, z par des fonctions rationnelles d'un paramètre, l'expression deviendra infinie si l'élément n'est pas identiquement nul.

Donc il ne sera pas possible pour un système intégral des équations (1) que x, y, z atteigne un point des courbes C. Donc x, y, z ne cesseront jamais d'être des fonctions uniformes de u; *elles seront à apparence uniforme*.

13. Cette étude des équations différentielles algébriques où la variable ne figure pas explicitement, et dont l'intégrale générale est uniforme, me paraît avoir une très grande importance. C'est en l'approfondissant que l'on pourra, sans doute, découvrir de nombreuses classes d'équations différentielles dont l'intégration deviendra possible. Prenons, par exemple, l'équation différentielle du premier ordre

$$(1)\qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

f étant un polynôme.

Le problème suivant mérite d'être posé :

Pourra-t-on déterminer une fonction rationnelle R *de* x, y, z, *cette dernière quantité étant définie par l'équation*

$$f(x, y, z) = 0,$$

de telle sorte que les deux équations différentielles

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = z\mathrm{R}(x, y, z), \\ \dfrac{dx}{dt} = \mathrm{R}(x, y, z) \end{cases}$$

admettent pour intégrales générales des fonctions uniformes de t?

Il en résulterait évidemment l'intégration de l'équation (1), x et y se trouvant exprimés par des fonctions uniformes d'un paramètre.

Pour indiquer au moins un exemple d'une telle intégration, bornons-nous au cas où l'intégration du système (2) se ferait à l'aide des fonctions quadruplement périodiques. Dans ce cas, pour la surface (1), x, y et $\frac{dy}{dx}$ s'exprimeront par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres u et v; de plus, comme il a été vu, on aura

$$u = at + \mathrm{C}, \qquad v = bt + \mathrm{C}',$$

a et b étant deux constantes convenables, C et C′ deux constantes arbitraires. On pourra tirer de (1)

$$x = \mathrm{F}_1(u, v),$$
$$y = \mathrm{F}_2(u, v),$$
$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}_3(u, v),$$

et les fonctions F sont à considérer comme connues.

On devra pouvoir déterminer le rapport des deux constantes a et b

de telle sorte qu'on ait identiquement

$$F_3(u, v) = \frac{a\dfrac{\partial F_2}{\partial u} + b\dfrac{\partial F_2}{\partial v}}{a\dfrac{\partial F_1}{\partial u} + b\dfrac{\partial F_1}{\partial v}}.$$

S'il en est ainsi, on aura l'intégrale générale de l'équation (1) par les formules

$$x = F_1(at + C, bt + C'),$$
$$y = F_2(at + C, bt + C'),$$

et l'on peut dire que, étant donnée l'équation (1), il est possible de reconnaître si elle est susceptible d'être ainsi intégrée.

IV. — Quelques remarques générales.

14. Dans les généralités du n° **1** de ce Chapitre, nous avons supposé que l'intégrale n'avait pas de singularités essentielles à distance finie; d'autres circonstances peuvent se présenter. L'intégrale peut avoir des singularités essentielles à distance finie; voici un premier exemple très simple.

Soit $R(y)$ un polynôme du quatrième degré en y. De la relation

$$e^{\int^y \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}} = x$$

on peut tirer une équation différentielle

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

f étant un polynôme.

L'intégrale générale de cette équation sera à apparence uniforme; elle aura un point singulier à distance finie, et elle ne sera véritablement une fonction uniforme que si l'intégrale elliptique admet $2\pi i$ pour période. Par cet exemple si simple on voit que les conditions exprimant que l'intégrale d'une équation $f = 0$ est une fonction uniforme *se traduiront en général par des relations transcendantes entre les coefficients de l'équation;* au contraire, comme nous l'avons indiqué plus haut, les relations seront algébriques si l'on veut seulement écrire que l'intégrale est à apparence uniforme.

Voici, pour le cas du troisième ordre, un autre exemple où vont se présenter des circonstances analogues, mais d'une manière plus complexe.

Soit l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2u}{dy^2} + p\frac{du}{dy} + qu = 0$$

(p et q fonctions algébriques de y).

Le rapport de deux intégrales distinctes satisfait à l'équation bien connue

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dy},$$

en désignant par $\eta(y)$ le rapport de deux intégrales.

Or posons

$$\eta(y) = z,$$

et considérons y comme fonction de z. Cette fonction y de z satisfera manifestement à une équation du troisième ordre algébrique entre

$$y, \quad \frac{dy}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dz^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^3y}{dz^3},$$

soit

$$F\left(y, \frac{dy}{dz}, \frac{d^2y}{dz^2}, \frac{d^3y}{dz^3}\right) = 0.$$

Ceci est général; soit maintenant l'équation linéaire telle que

$$\eta(y) = z$$

donne pour y une fonction fuchsienne de z, soit

$$y = \varphi(z).$$

L'intégrale générale de l'équation F sera

$$y = \varphi\left(\frac{az+b}{z+c}\right),$$

a, b, c étant arbitraires. Nous avons donc une équation admettant pour intégrale générale une fonction uniforme, et ce que je veux surtout remarquer, c'est que *le domaine dans lequel est déterminée la fonction est variable avec l'intégrale que l'on considère.*

Un exemple particulier, rentrant dans le type précédent, est fourni par l'équation suivante, rencontrée par Jacobi dans son *Mémoire sur certaines séries de la théorie des fonctions elliptiques* (*Journal de Crelle*, t. 34),

$$y^2\left(y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\left[16y^3\frac{d^2y}{dx^2} + 1\right].$$

Son intégrale générale est uniforme et de la nature des fonctions modulaires.

15. Les considérations que nous avons développées sur l'équation

$$f(y, y', y'') = 0$$

peuvent, avec très peu de modifications, s'étendre à la classe des équations du second ordre où x figure explicitement

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

quand on est dans le cas dont M. Fuchs a commencé l'étude, et sur lequel, pour les équations du premier ordre, M. Poincaré a donné de si remarquables résultats; je veux parler des équations dans lesquelles les points critiques sont *fixes*, c'est-à-dire indépendants des constantes arbitraires.

Les raisonnements faits par M. Poincaré pour les équations du premier ordre peuvent être répétés ici. Si y_0, y'_0, y''_0 sont les valeurs initiales pour $x = x_0$, on a, si l'on suit un chemin déterminé (ne passant pas par les points critiques),

$$y = \varphi(x, y_0, y'_0, y''_0),$$
$$y' = \psi(x, y_0, y'_0, y''_0),$$
$$y'' = \chi(x, y_0, y'_0, y''_0),$$

y, y', y'' étant des fonctions *uniformes* de (y_0, y'_0, y''_0), et inversement y_0, y'_0, y''_0 sont des fonctions uniformes de (y, y', y''). *Malheureusement la fin du raisonnement n'est plus applicable;* la transformation qui transforme la surface

$$f(\underline{x}, y, y', y'') = 0 \qquad \text{en} \qquad f(x_0, y, y', y'') = 0.$$

est *biuniforme;* mais, nous le savons, elle n'est pas nécessairement birationnelle, et c'est ce qui vient changer du tout au tout le caractère de cette théorie.

Si l'on suppose que la transformation est birationnelle, et que le genre de la surface

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

en y, y', y'', est supérieur à l'unité, le développement de la théorie ne présentera aucune difficulté, après ce que nous avons dit sur la transformation des surfaces. Si la surface f n'admet qu'un nombre limité de transformations birationnelles en elle-même, l'intégrale sera nécessairement algébrique. Si, comme il peut arriver, la surface admet une infinité de transformations birationnelles avec un paramètre arbitraire, on démontre aisément qu'on sera ramené à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre, algébrique entre x, y et y', et dont l'intégrale générale a aussi ses points critiques fixes.

16. Si le genre de la surface

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

pour x arbitraire, est inférieur à deux, nous allons nous borner aux cas où cette surface rentrerait dans l'un ou l'autre des types étudiés aux nos 4 et 5 du Chapitre III.

Plaçons-nous d'abord dans le premier cas : les coordonnées d'un point quelconque de la surface sont alors susceptibles de s'exprimer par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres. Les deux surfaces

$$f(x, y, y', y'') = 0, \tag{1}$$

$$f(x_0, y_0, y'_0, y''_0) = 0 \tag{2}$$

se correspondent, avons-nous dit d'une manière générale, point par point, et il est admis que cette correspondance est birationnelle. Écrivons les équations de la correspondance

$$\begin{aligned} y &= F_1(x, y_0, y'_0, y''_0), \\ y' &= F_2(x, y_0, y'_0, y''_0), \\ y'' &= F_3(x, y_0, y'_0, y''_0), \end{aligned}$$

les F étant rationnelles en y_0, y'_0, y''_0.

Considérons

$$\int P_0\, dy_0 + Q_0\, dy'_0 \quad \text{et} \quad \int R_0\, dy_0 + S_0\, dy'_0,$$

deux intégrales de première espèce de la surface (2).

La transformation précédente les transformera en deux intégrales

$$\int P\, dy + Q\, dy' \quad \text{et} \quad \int R\, dy + S\, dy',$$

relatives à la surface (1), et ici P, Q, R, S dépendront de x en général. Nous pouvons donc écrire

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{y, y', y''}^{Y, Y', Y''} P\, dy + Q\, dy' &= \int_{y_0, y'_0, y''_0}^{Y_0, Y'_0, Y''_0} P_0\, dy_0 + Q_0\, dy'_0, \\ \int_{y, y', y''}^{Y, Y', Y''} R\, dy + S\, dy' &= \int_{y_0, y'_0, y''_0}^{Y_0, Y'_0, Y''_0} R_0\, dy_0 + S_0\, dy'_0, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

en considérant deux intégrales de l'équation différentielle correspondant aux valeurs initiales y_0, y'_0, y''_0 et Y_0, Y'_0, Y''_0.

Les seconds membres, et par suite les premiers, des relations précédentes sont donc des constantes, c'est-à-dire indépendants de x; désignons-les par α et β.

Revenons maintenant aux surfaces (1) et (2), et envisageons une substitution birationnelle, *connue cette fois*, transformant ces surfaces. Soient

$$\begin{aligned} y &= \varphi_1(x, \lambda, \mu, \nu), & f(x, y, y', y'') &= 0, \\ y' &= \varphi_2(x, \lambda, \mu, \nu), & f(x_0, \lambda, \mu, \nu) &= 0, \\ y'' &= \varphi_3(x, \lambda, \mu, \nu), \end{aligned}$$

et nous pouvons supposer que les φ dépendent algébriquement de x. Nous avons là une substitution connue, et les coefficients λ, μ, ν dans les φ sont des fonctions algébriques connues de x. Que va donner cette transformation effectuée sur

$$(4) \qquad \int \mathrm{P}\,dy + \mathrm{Q}\,dy' \quad \text{et} \quad \int \mathrm{R}\,dy + \mathrm{S}\,dy'?$$

Si

$$\int \mathrm{A}\,d\lambda + \mathrm{B}\,d\mu \quad \text{et} \quad \int \mathrm{C}\,d\lambda + \mathrm{D}\,d\mu$$

sont deux intégrales distinctes de la surface $f(x_0, \lambda, \mu, \nu) = 0$, on aura nécessairement

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,dy + \mathrm{Q}\,dy' &= \mathrm{M}(\mathrm{A}\,d\lambda + \mathrm{B}\,d\mu) + \mathrm{N}(\mathrm{C}\,d\lambda + \mathrm{D}\,d\mu), \\ \mathrm{R}\,dy + \mathrm{S}\,dy' &= \mathrm{P}(\mathrm{A}\,d\lambda + \mathrm{B}\,d\mu) + \mathrm{Q}(\mathrm{C}\,d\lambda + \mathrm{D}\,d\mu); \end{aligned}$$

M, N, P, Q *ne dépendront pas de* x, car, d'après (3), les périodes de (4) ne dépendent pas de x. Nous pouvons donc écrire, en ayant préalablement fait une combinaison linéaire convenable

$$\mathrm{P}\,dy + \mathrm{Q}\,dy' = \mathrm{A}\,d\lambda + \mathrm{B}\,d\mu, \qquad \mathrm{R}\,dy + \mathrm{S}\,dy' = \mathrm{C}\,d\lambda + \mathrm{D}\mu,$$

A, B, C, D ne dépendant pas de x; et, par suite, en désignant par L, M, N les valeurs de λ, μ, ν correspondant à Y, Y', Y'', nous aurons

$$\int_{\lambda,\mu,\nu}^{L,M,N} A\,d\lambda + B\,d\mu = \alpha,$$
$$\int_{\lambda,\mu,\nu}^{L,M,N} C\,d\lambda + D\,d\mu = \beta.$$

Si, au lieu d'intégrer depuis (λ, μ, ν), nous intégrons depuis des valeurs arbitraires constantes λ_0, μ_0, ν_0, nous pourrons écrire

$$\int_{\lambda_0,\mu_0,\nu_0}^{L,M,N} A\,d\lambda + B\,d\mu = \alpha + G(x),$$
$$\int_{\lambda_0,\mu_0,\nu_0}^{L,M,N} C\,d\lambda + D\,d\mu = \beta + G_1(x).$$

L, M, N seront donc des fonctions uniformes quadruplement périodiques de

$$\alpha + G(x) \quad \text{et} \quad \beta + G_1(x),$$

et l'on aura par suite, en revenant à

$$Y = \varphi_1(x, L, M, N),$$

l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée.

Mais nous avons introduit deux fonctions $G(x)$ et $G_1(x)$, que nous ne connaissons pas encore; je dis que la recherche de ces fonctions se ramènera certainement à une quadrature. En effet, quand on passe d'une intégrale à une autre, les constantes α et β changent simplement. Donc, si nous posons *a priori*

$$Y = \varphi_1(x, L, M, N),$$
$$Y' = \varphi_2(x, L, M, N),$$
$$Y'' = \varphi_3(x, L, M, N),$$

L, M, N étant des fonctions quadruplement périodiques de u et v, en posant

$$u = \alpha + G(x), \qquad v = \beta + G_1(x),$$

nous aurons deux équations différentielles pour déterminer u et v, en écrivant que Y' et Y'' sont les dérivées premières et secondes de Y. Ces équations détermineront nécessairement u et v par de simples quadratures. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Sous les hypothèses faites, l'intégration de l'équation se ramène à des quadratures.

16. Examinons maintenant le cas où la surface ferait partie de la seconde classe. On pourra, dans ce cas, exprimer y, y' et y'' en fonction rationnelle d'un paramètre λ de θ et de $\sqrt{R(\theta)}$, $R(\theta)$ désignant un polynôme du quatrième degré en θ. Les rapports des périodes de l'intégrale de première espèce de la surface ne pouvant pas dépendre de x, les coefficients de $R(\theta)$ ne dépendent pas de x. Quant aux coefficients de λ, θ et $\sqrt{R(\theta)}$, nous pouvons les supposer fonctions algébriques de x. Nous pouvons remplacer θ et $\sqrt{R(\theta)}$ par $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$, φ étant une fonction doublement périodique de u. Cette lettre u représente l'intégrale de première espèce de la surface; par suite, en raisonnant comme plus haut, on verra que u est de la forme

$$G(x) + \alpha,$$

α étant une constante arbitraire. Il en résulte que la détermination de u, en fonction de x, se ramène à une quadrature; il reste à déterminer λ. On se trouve alors dans le cas des équations du premier ordre; λ sera donc donnée par une équation de Riccati.

17. J'indiquerai, en terminant, une équation différentielle curieuse, à laquelle conduit la théorie des fonctions elliptiques, et dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes.

Désignons par ω et ω' les périodes de la fonction elliptique $\operatorname{sn} x$, et soient a et b deux constantes arbitraires. L'expression

$$u = \operatorname{sn}(a\omega + b\omega'),$$

considérée comme fonction du module k, satisfait, quelles que soient les constantes a et b, à une équation différentielle du second ordre que nous allons former.

Posons

$$a\omega + b\omega' = y,$$

on aura

$$(1) \qquad k(1-k^2)\frac{d^2y}{dk^2} + \frac{dy}{dk}(1-3k^2) - ky = 0.$$

Soit

$$\Omega = \int_0^u \frac{dx}{\Delta x}, \qquad \Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

u étant supposé constant, on peut regarder Ω comme fonction de k. Elle satisfera à l'équation

$$(2) \quad k(1-k^2)\frac{d^2\Omega}{dk^2} + \frac{d\Omega}{dk}(1-3k^2) - k\Omega + \frac{ku(1-u^2)}{(1-k^2u^2)\Delta u} = 0.$$

L'égalité $u = \operatorname{sn}(a\omega + b\omega')$ revient à $\Omega = y$; on a

$$\frac{1}{\Delta u}\frac{du}{dk} + \frac{d\Omega}{dk} = \frac{dy}{dk},$$

$$\frac{d^2u}{dk^2}\frac{1}{\Delta u} - \left(\frac{du}{dk}\right)^2 \frac{u(2k^2u^2-1-k^2)}{\Delta u(1-u^2)(1-k^2u^2)} + 2\frac{du}{dk}\frac{ku^2}{\Delta u(1-k^2u^2)} + \frac{d^2\Omega}{dk^2} = \frac{d^2y}{dk^2}.$$

Dans ces égalités, les dérivées de Ω par rapport à k sont prises en laissant u constant. En multipliant les deux membres de ces trois égalités respectivement par $k(1-k^2)$, $1-3k^2$ et $-k$, puis ajoutant, nous avons immédiatement l'équation différentielle cherchée, en tenant compte de (1) et (2).

J'écris de suite cette équation, en remplaçant la variable k par $x = k^2$,

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{u(2xu^2-1-x)}{(1-u^2)(1-xu^2)} + \frac{du}{dx}\left[\frac{u^2-1}{(1-x)(1-xu^2)} + \frac{1}{x}\right] - \frac{u(1-u^2)}{x(1-x)(1-xu^2)} = 0.$$

Les seuls points critiques des intégrales sont $x = 0, 1, \infty$.

Cette équation différentielle offre encore une particularité digne de remarque : *elle admet une infinité d'intégrales algébriques.* Si l'on prend en effet pour a et b des nombres commensurables, l'intégrale correspondante sera une fonction algébrique de k^2; ces intégrales algébriques ne sont pas d'un degré déterminé : celui-ci peut être aussi grand qu'on voudra.

CHAPITRE VI.

SUR CERTAINES FONCTIONS DU POINT ANALYTIQUE (x, y, z).

Nous avons étudié précédemment les intégrales de première et de seconde espèce; c'est cette notion que nous allons chercher à étendre. Mais, avant de nous occuper des surfaces, généralisons la notion des intégrales de différentielles algébriques dans la théorie des courbes algébriques.

1. Soit donc la courbe $f(x,y) = 0$.

Posons-nous la question suivante :

Trouver les fonctions $u(x,y)$, fonctions du point analytique (x,y), uniformes et régulières dans le voisinage de tout point de la surface de Riemann correspondant à f, et dont toutes les déterminations se déduisent d'une seule u par des substitutions linéaires de la forme

$$Au + B,$$

où A et B sont des constantes.

Parmi ces fonctions, considérons spécialement celles qui restent *toujours finies.* Il est évident qu'une telle fonction u satisfait à une relation de la forme

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda(x,y)\frac{du}{dx},$$

c'est-à-dire que les fonctions qui nous occupent sont de la forme

$$\text{(I)} \qquad \int e^{\int \lambda(x,y)\,dx}\,dx,$$

λ étant une fonction rationnelle de x et y. Étudions donc les expressions de la forme (I).

Je suppose, comme il est permis, que la courbe f n'a que des points doubles et ses directions asymptotiques distinctes. On peut aussi supposer que la fonction λ reste finie en chacun des points doubles, car on peut effectuer préalablement sur f une transformation birationnelle convenable, de façon à transformer les infinis de λ en des points simples.

Cela dit, envisageons les infinis de $\lambda\,(x,y)$. Soit d'abord $(a,\,b)$ un infini pour lequel on n'ait pas $f'_b = 0$; a sera un pôle de $\lambda(x,y)$, et *son résidu devra être un entier positif*. Soit k le nombre des points (a,b), et désignons par

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\ldots,\quad \alpha_k$$

les résidus (entiers positifs) correspondant à ces différents points.

Considérons maintenant les points de la courbe, pour lesquels $f'_y = 0$ [soit (x_1,y_1) un tel point], qui rendraient λ infini. On aura le développement

$$y - y_1 = \mathrm{H}\sqrt{(x-x_1)} + \ldots;$$

donc $\lambda(x,y)$ se développera suivant les puissances de $(x-x_1)^{\frac{1}{2}}$, et ici les premiers termes du développement devront être

$$\frac{\mathrm{A}_1}{(x-x_1)} + \frac{\mathrm{B}_1}{(x-x_1)^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{C}_1 + \ldots$$

et A_1 devra être égale à $-\frac{1}{2}$ ou à un multiple positif de $\frac{1}{2}$.

Soit

$$\mathrm{A}_1 = \frac{m_1}{2},$$

m_1 étant un *entier au moins égal à* -1.

Il nous reste à parler des points à l'infini; pour les m branches à l'infini, le développement de $\lambda(x,y)$ suivant les puissances descendantes de x devra commencer par un terme en $\frac{1}{x}$, soit

$$\frac{R}{x}+\ldots$$

et R étant un entier au plus égal à -2.

Ainsi nous avons trois catégories de quantités

$$\alpha,\quad m,\quad R,$$

et l'on a entre elles la relation immédiate

$$\Sigma\alpha+\Sigma m_1=\Sigma R.$$

ΣR est un entier au plus égal à $-2m$; les α sont des entiers positifs en nombre k. Enfin les lettres m sont en nombre

$$m(m-1)-2d,$$

et chacune d'elles est un entier au moins égal à -1. On a donc

$$\Sigma R \overline{\overline{<}} -2m,\quad \Sigma m_1 \overline{\overline{<}} m(m-1)-2d,$$

donc

$$\Sigma\alpha=\Sigma R-\Sigma m_1 \overline{\overline{<}} m(m-3)-2d.$$

Le nombre des points (a,b) est donc au plus égal à $m(m-3)-2d$.

2. Nous pouvons, après ce qui précède, donner aisément la forme de la fonction rationnelle $\lambda(x,y)$. On aura

$$\lambda(x,y)=\frac{S(x,y)}{Q(x,y)(f'_y)^2};$$

$Q(x,y)=0$ étant une courbe de degré k passant par les points doubles de f, la courbe $S=0$ passera aussi par les points doubles de f, et ces derniers seront aussi pour S des points doubles. De plus, S sera un polynôme de degré $k+2m-3$. Cherchons à déterminer S et Q de manière à réaliser le cas où le nombre des points (a, b) du paragraphe précédent atteint son maximum

$$m(m-3)-2d \qquad \text{ou} \qquad 2p-2,$$

en désignant par p le genre de f. Chacun des nombres m_1 sera alors égal à -1, et chacun des nombres R sera égal à -2.

Donnons-nous arbitrairement le polynôme $Q(x,y)$, sauf cette condition que la courbe $Q=0$ passe par les points doubles de f. Ensuite, parmi les

$$mk-2d$$

points de rencontre de Q et de f, choisissons S de manière que ce polynôme s'annule pour

$$mk-2d-(2p-2)$$

d'entre eux, et que pour les $2p-2$ autres le résidu de λ soit $+1$. De plus, faisons en sorte que les d points doubles de f soient aussi des points doubles pour S. Ces diverses conditions seront en nombre

$$mk-2d+3d \qquad \text{ou} \qquad mk+d,$$

$S_1(x,y)$ étant un polynôme satisfaisant aux conditions précédentes; les autres seront de la forme

$$S_1(x,y)+A(x,y)Q(x,y),$$

$A(x,y)$ étant de degré $2m-3$, et s'annulant pour les d points doubles.

Les points pour lesquels $f'_y=0$ sont en nombre

$$m(m-1)-2d.$$

Choisissons les A de manière que les résidus correspondants soient $-\frac{1}{2}$, ce qui fera $m(m-1)-2d$ conditions.

$A_1(x,y)$ étant un de ces polynômes, les autres seront de la forme

$$A(x,y) = A_1(x,y) + \Theta(x,y) f'_y,$$

Θ étant de degré $m-2$.

Il reste à considérer les points à l'infini. Nous devons écrire que, pour les m branches à l'infini de la fonction algébrique y, la fonction rationnelle $\lambda(x,y)$ commence par un terme en $-\frac{2}{x}$. Or, soit dans Θ représenté par θ l'ensemble des termes homogènes de degré $m-2$; on en déduira, en désignant par $c_1, c_2, \ldots, c_m$ les m valeurs de $\frac{y}{x}$ pour x infini, les valeurs de

$$\theta(1, c_1), \quad \theta(1, c_2), \quad \ldots, \quad \theta(1, c_m),$$

mais on a seulement dans $\theta(x,y)$ un nombre de coefficients arbitraires égal à $m-1$; on pourra donc seulement disposer de $(m-1)$ des coefficients de $\frac{1}{x}$, correspondant à x très grand. Mais il est bien aisé de voir que *le dernier coefficient sera de lui-même égal à* -2.

Nous devons, en effet, avec les notations du paragraphe précédent, avoir

$$\Sigma\alpha + \Sigma m_1 = \Sigma R.$$

Désignons encore par R le dernier coefficient inconnu, dont nous n'avons pu disposer; la relation précédente donne

$$2p - 2 - [m(m-1) - 2d] = -2(m-1) + R.$$

On en conclut

$$R = -2.$$

Nous avons donc construit de cette manière la fonction $\lambda(x,y)$, de telle sorte que l'expression

$$\int e^{\int \lambda(x,y)dx} dx$$

réponde au problème proposé.

Nous avons, dans l'expression précédente de λ, fait figurer un polynôme arbitraire $Q(x,y)$ de degré k. Le nombre des paramètres arbitraires figurant dans λ n'en est pas moins, bien évidemment, essentiellement fini. On peut prendre pour Q la courbe de moindre degré, passant par les points doubles et les $2p-2$ points (a,b). Il serait d'ailleurs facile d'approfondir davantage la forme de la fonction λ, mais ceci n'est pas utile pour mon objet.

3. Cherchons ce que deviennent les fonctions précédentes, quand $p=1$. On aura d'abord, dans ce cas,

$$e^{\int \lambda dx} = \frac{Q(x,y)}{f'_y} e^{a\int \frac{Q dx}{f'_y}},$$

a désignant une constante et $\int \frac{Q(x,y)\,dx}{f'_y}$ représentant l'intégrale de première espèce.

Nous ne trouvons donc ici que l'expression bien simple

$$\int \frac{Q}{f'_y} e^{a\int \frac{Q dx}{f'_y}} dx,$$

expression qui, en posant

$$\int \frac{Q\,dx}{f'_y} = V,$$

devient

$$\int e^{aV} dV = \frac{1}{a} e^{aV},$$

si $a = 0$, et qui se réduit à V si $a = 0$; on aura ensuite l'expression

$$\int e^{aV} dx.$$

Si, p étant quelconque, on exprime x et y par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre u, la fonction

$$\int e^{\int \lambda dx} dx$$

devient une fonction holomorphe G(u) *dans le cercle fondamental*, et, en désignant par U une substitution quelconque du groupe fuchsien, on aura

$$G(U) = AG(u) + B,$$

A et B étant des constantes, et l'on doit remarquer que, pour toute substitution elliptique, on a $A = 1$, $B = 0$.

L'étude de ces fonctions, qu'on peut faire directement, ne serait pas sans intérêt; mais elle est étrangère à notre sujet, et je reviens aux fonctions algébriques de deux variables indépendantes.

4. Comment le problème traité par les courbes algébriques pourra-t-il s'étendre aux surfaces?

Étant donnée une surface $f(x,y,z) = 0$, les fonctions u du point (x,y,z), analogues aux fonctions du point (x,y) que nous venons d'étudier pour les courbes, satisferont aux conditions suivantes.

Quand (x,y,z) partant d'un point reviendra à ce point après avoir décrit un chemin se ramenant à un cycle nul, la fonction n'aura pas changé.

Si, au contraire, le chemin se ramène à un cycle linéaire effectif de la surface, la fonction u se transformera en

$$Au + B,$$

A et B étant des constantes.

Ces fonctions u pourront être de diverses espèces; les fonctions de première espèce analogues à celles des paragraphes précédents restent toujours finies.

La forme des fonctions u est facile à trouver. Tout d'abord on a évidemment

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\int M\,dx + N\,dy}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{\int M_1\,dx + N_1\,dy},$$

les expressions différentielles $M\,dx + N\,dy$ et $M_1\,dx + N_1\,dy$ étant des différentielles exactes; les M et N sont des fonctions rationnelles de x, y et z.

On aura donc pour u

$$u = \int e^{\int \mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy} dx + e^{\int \mathrm{M}_1 dx+\mathrm{N}_1 dy} dy. \tag{1}$$

Quelle sera maintenant la forme des fonctions M et N? En nous reportant à ce qui a été vu pour les courbes, on trouve que

$$\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy = \frac{\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy}{\mathrm{R}(f'_y)^2};$$

$\mathrm{R}(x,y,z)$ est un polynôme de degré k en x, y, z, et de degré $k-1$ en x et z; P et Q sont des polynômes : ils sont de degré $k+2m-3$ en x, y et z, mais le premier est seulement de degré $k+2m-4$ en x et z. Pareillement

$$\mathrm{M}_1\,dx + \mathrm{N}_1\,dy = \frac{\mathrm{P}_1\,dx + \mathrm{Q}_1\,dy}{\mathrm{R}_1(f'_z)^2};$$

$\mathrm{R}_1(x,y,z)$ est un polynôme de degré k_1 en x, y, z, et de degré k_1-1 en y et z; P_1 et Q_1 sont des polynômes : ils sont de degré k_1+2m-3 en x, y et z, mais le second est seulement de degré k_1+2m-4 en y et z.

Supposons, pour ne pas compliquer l'exposition, que la surface ait seulement pour singularités des lignes doubles. La surface $\mathrm{R}=0$ passera par les lignes doubles et coupera, en dehors de ces lignes, la surface f suivant deux courbes distinctes; l'une A de degré $m(m-2)$ avec m points à l'infini dans les plans $y=$ const., et une seconde courbe B. Les surfaces $\mathrm{P}=0$ et $\mathrm{Q}=0$ auront pour lignes doubles les lignes doubles de f, et passeront par la courbe B.

Semblablement, la surface $\mathrm{R}_1=0$ passera par les lignes doubles de f, et coupera en dehors de ces lignes la surface f suivant deux courbes distinctes : l'une A_1 de degré $m(m-2)$ avec m points à l'infini dans les plans $x=$ const., et une seconde courbe B_1. Les surfaces $\mathrm{P}_1=0$, $\mathrm{Q}_1=0$ auront pour lignes doubles les lignes de f et passeront par la courbe B_1.

L'intégrale

$$\int \frac{\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy}{\mathrm{R}(f'_z)^2}$$

aura pour courbes logarithmiques la courbe A et les lignes (non multiples de la surface) ou $f'_z = 0$. L'intégrale relative à x seule

$$\frac{P\,dx}{R(f'_z)^2},$$

pour y arbitraire, devra rentrer dans le type de celles qui ont été étudiées aux paragraphes précédents pour les courbes planes.

Nous nous bornons à énoncer ces conditions; la vérification n'exige qu'un calcul un peu fastidieux. On part d'une expression générale telle que (1), et, comme on le fait au début de l'étude des intégrales abéliennes, on effectue sur x, y, z une substitution homographique générale. On voit alors, sans la moindre difficulté, que les différents polynômes remplissent les conditions indiquées au point de vue de leur degré. Quant aux conditions subséquentes, elles sont une conséquence directe de ce qui a été vu pour les courbes planes.

Il faudra, bien entendu, écrire en outre les conditions d'intégrabilité; or on pourra d'abord exprimer de suite la première exponentielle en fonction de la seconde et mettre l'expression sous la forme

$$u = \int e^{\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{R(f'_z)^2}} \left(dx + \frac{R_1 Q}{P_1 R}\,dy \right).$$

On aura ainsi à écrire seulement *deux* conditions d'intégrabilité, qui s'exprimeront par des relations algébriques entre les polynômes et leurs dérivées partielles.

On doit remarquer que les fractions rationnelles

$$\frac{P}{R}, \quad \frac{Q}{R}, \quad \frac{P_1}{R_1},$$

qui seules figurent dans u, ne devenant infinies à distance finie que pour les points d'une courbe de degré $m(m-2)$, et la différence entre les degrés des numérateurs et dénominateurs étant limitée en fonction de m, *le nombre des arbitraires figurant dans ces fractions rationnelles sera limité*, et, par suite, il n'y aura pas, en général, d'expressions u pour une surface algébrique, pas plus qu'il n'y a, en général, d'intégrales de première espèce, ce qui était d'ailleurs évident *a priori*, puisqu'il n'y aura pas alors de cycle linéaire.

4. Il me paraît prématuré de chercher à approfondir d'une manière générale l'étude des expressions u. Tel n'a pas été mon but ; j'ai uniquement en vue ici de présenter quelques considérations sur le cas où *l'inversion d'un système de deux fonctions u conduirait à un système de fonctions uniformes*.

Concevons donc une surface $f(x, y, z) = 0$, possédant deux expressions u de première espèce

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
u &= \int^{(x,y,z)} e^{\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{R(f'_z)^2}} \left(dx + \frac{R_1 Q}{P_1 R}\, dy \right), \\
v &= \int^{x,y,z} e^{\int \frac{P'\,dx + Q'\,dy}{R'(f'_z)^2}} \left(dx + \frac{R'_1 Q'}{P'_1 R'}\, dy \right).
\end{aligned}
\right.
$$

Pouvons-nous imaginer que x, y, z *soient des fonctions uniformes de u et v*?

Dans ce type se trouve compris, bien entendu, tout d'abord le cas de l'inversion de deux intégrales de première espèce, dont nous avons parlé longuement dans le Chapitre III de ce Mémoire.

D'une manière générale, étant données deux expressions u et v relatives à une certaine surface f, pourra-t-on reconnaître si les équations (1) donnent pour x, y, z des fonctions uniformes de u et v? C'est un problème que nous avons traité dans le cas où u et v sont des intégrales de première espèce ; on peut encore employer les mêmes considérations ; mais il s'en faut ici qu'elles nous donnent des conditions nécessaires et *suffisantes* : nous obtiendrons seulement ainsi des conditions *pour que x, y, z soient des fonctions à apparence uniforme*. C'est qu'en effet, dans le cas général, le domaine des variables u et v, où les fonctions x, y, z sont uniformes et se comportent comme des fractions rationnelles, n'est pas nécessairement l'ensemble des valeurs finies de u et v, mais il peut se trouver à distance finie une infinité de systèmes de valeurs des variables, *formant des singularités essentielles*, pour ces fonctions de u et v.

De nouveau se présente donc ici cette difficulté que nous avons déjà rencontrée dans le Chapitre précédent ; on ne peut guère songer à l'aborder de front.

J'ai dit que la recherche des conditions, exprimant que les fonctions x, y, z sont *à apparence uniforme*, se faisait comme dans le cas de l'inversion de deux intégrales de première espèce. Les valeurs de x, y, z pouvant donner prise à quelques difficultés sont évidemment celles qui annulent le déterminant fonctionnel de u et v, c'est-à-dire

$$e^{\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{R(f'_z)^2}} \times e^{\int \frac{P'\,dx + Q'\,dy}{R'(f'_z)^2}} \left(\frac{R'_1 Q'}{P'_1 R'} - \frac{R_1 Q}{P_1 R}\right).$$

Les courbes Γ, pour lesquelles cette expression s'annule, sont évidemment des courbes algébriques. Ici, comme dans le cas plus simple déjà cité et pour les mêmes raisons, *ces courbes devront être unicursales*.

Si cette condition est vérifiée, ces courbes satisferont aux équations

$$du = 0, \qquad dv = 0.$$

En effet, quand, dans une expression u de première espèce, on met à la place de x, y, z des fonctions rationnelles d'un paramètre, cette expression doit se réduire à une constante indépendante du paramètre, sinon elle ne pourrait rester toujours finie : u et v restent donc fixes quand x, y, z se déplace le long d'une courbe Γ; ces valeurs de u et v correspondent aux points d'indétermination des fonctions x, y, z.

On peut encore démontrer que le genre de la surface ne peut dépasser l'unité; c'est un cas particulier d'un théorème plus général que nous démontrerons à la fin de ce Chapitre.

5. Nous avons, dans ce qui précède, supposé que les fonctions u étaient de première espèce. On pourrait se proposer d'une manière générale l'étude des fonctions u, qu'on peut évidemment classer en trois espèces.

Arrêtons-nous un moment sur le cas d'une fonction u, relative à une courbe algébrique, et indiquons rapidement dans quel cas l'inversion de l'expression

$$(1) \qquad \int^{x,y} e^{\int^{x,y} \lambda(x,y)\,dx}\,dx = u$$

donne pour x et y des fonctions uniformes de u. Supposons d'abord que l'expression soit de première espèce. Dans ce cas, il ne devra y avoir aucun infini (a, b), en gardant les notations du § I; nous aurons donc

$$\Sigma m_1 = \Sigma \mathrm{R}.$$

Or, pour que l'inversion donne une fonction uniforme, il est nécessaire que toutes les quantités m_1 soient égales à -1, et que tous les R aient la valeur -2. Par suite,

$$-[m(m-1)-2d] = -2m;$$

d'où l'on conclut

$$d = \frac{m(m-3)}{2}.$$

La courbe sera, par suite, de genre un. On voit alors aisément que u se réduit, soit à l'intégrale de première espèce, soit à

$$e^{av},$$

v désignant l'intégrale de première espèce. Les fonctions inverses résultant de (1) sont donc des fonctions doublement périodiques, ou des fonctions doublement périodiques de la combinaison linéaire

$$\mathrm{A} \log u + \mathrm{B},$$

A et B étant des constantes.

Affranchissons-nous maintenant de l'hypothèse que u est une expression de première espèce.

Supposons d'abord que u soit une expression de *seconde espèce*. Il est manifeste qu'elle ne peut avoir qu'un seul pôle, si l'inversion se fait d'une manière uniforme; en effet, dans le cas contraire, à des valeurs très grandes de u correspondraient plusieurs valeurs de (x, y). Ceci posé, les quantités α du § I seront nulles, *sauf une* qui sera égale à -2; on aura donc, d'après la relation

$$\Sigma\alpha + \Sigma m_1 = \Sigma \mathrm{R},$$

$$-2-[m(m-1)-2d] = -2m,$$

d'où l'on conclut que

$$d = \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

c'est-à-dire que la courbe est unicursale. Remplaçant alors dans u les coordonnées x et y par leur valeur en fonctions rationnelles du paramètre θ, on voit que θ ne pourra être qu'une fraction rationnelle de u; donc x et y seront des fractions rationnelles de u.

Supposons enfin que u soit une expression de *troisième espèce*, c'est-à-dire que son développement dans le voisinage de certains points renferme des termes logarithmiques. On peut d'ailleurs supposer que les points où u devient infinie sont distincts des points doubles et de ceux où $f'_y = 0$. On montrera d'abord qu'il ne peut y avoir de pôles, et que la fonction u ne peut devenir infinie qu'en deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2), la partie devenant infinie se réduisant respectivement pour les deux points à

$$A \log(x - x_1) \quad \text{et} \quad -A \log(x - x_2).$$

La démonstration de cette remarque, qui facilite singulièrement la discussion, est immédiate, car on voit de suite que, dans toute autre hypothèse, à de très grandes valeurs de u correspondent plusieurs valeurs de (x, y).

Si nous revenons maintenant aux notations du § I, il n'y aura que deux α différents de zéro, et leur valeur commune sera -1. Nous aurons donc, toujours d'après la même relation,

$$-1 - 1 - [m(m-1) - 2d] = -2m,$$

c'est-à-dire que, comme plus haut, la courbe est unicursale.

Remplaçant alors dans u les coordonnées x et y par leur valeur en fonctions rationnelles du paramètre θ, nous aurons à faire l'inversion d'une intégrale de différentielle algébrique ayant deux infinis logarithmiques; donc θ et par suite x et y seront des fonctions rationnelles de e^{au}, a étant une constante.

6. La considération des groupes kleinéens, dont les substitutions sont de la forme

$$(u,\ au+b), \tag{1}$$

conduirait à des résultats plus généraux que ceux qui viennent d'être trouvés dans le paragraphe précédent. A chacun de ces groupes correspondra une relation algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

et les coordonnées (x et y) d'un point de cette courbe, fonctions kleinéennes du paramètre u, pourront être considérées comme provenant de l'inversion d'une équation de la forme

$$u = \int e^{\int \lambda\, dx}\, dx,$$

λ étant une fonction rationnelle de x et y. Mais ici la fonction u du point analytique (x, y) ne sera pas nécessairement ramifiée comme la fonction y de x définie par l'équation f.

Quant aux groupes kleinéens dont les substitutions sont de la forme (1), ils se ramènent à des types bien connus, et leur recherche est si facile qu'il est inutile de nous y arrêter.

7. Pareillement, en passant de une à deux variables u et v, il sera intéressant de faire la recherche des groupes discontinus dont les substitutions sont de la forme

$$(u,\ v,\ au+b,\ cv+d),$$

les (a, b, c, d) étant des constantes.

Mais ici se présentera une difficulté qui ne s'est pas rencontrée dans le cas d'une seule variable; car, en supposant obtenu un tel groupe, la question suivante se pose : Existe-t-il des fonctions invariables par les substitutions de ce groupe? D'une manière générale même, la réponse est négative, comme le montre l'exemple des fonctions ayant quatre paires de périodes.

Dans le cas où a, b, c, d sont réels, a et c étant positifs, la recherche des groupes précédents n'offrira pas de très grandes difficultés. Dans cette hypothèse en effet, les groupes discontinus précédents rentrent dans ce type de groupes, relatifs à deux variables indépendantes, et que j'ai désignés sous le nom de *groupes hyperabéliens* (*Journal de Mathématiques*, 1885). Donnons-en un exemple.

En se reportant au Mémoire cité, on voit qu'à chaque forme quadratique quaternaire réelle

$$f(x, y, z, t)$$

de discriminant différent de zéro, et appartenant au type

$$U_1^2 + U_2^2 - U_3^2 - U_4^2,$$

correspond un groupe hyperabélien. Ne considérons ici dans un tel groupe que le seul sous-groupe formé des substitutions de la forme

$$(u, v, au + b, cv + d), \tag{2}$$

nous aurons ainsi engendré un groupe discontinu du type cherché. Prenons, comme application, la forme suivante

$$f(x, y, z, t) = x^2 - Dy^2 - zt,$$

D désignant un entier positif quelconque.

Nous obtiendrons, dans ce cas particulier, le groupe correspondant de la manière suivante. Concevons les quatre lettres x, y, z, t liées par la relation

$$x^2 - Dy^2 - zt = 0.$$

Posons

$$u = \frac{x - y\sqrt{D}}{z}, \qquad v = \frac{-x - y\sqrt{D}}{z}.$$

Soit maintenant une substitution linéaire quelconque, à coefficients entiers, transformant en elle-même la forme f; x, y, z, t deviendront X, Y, Z, T et posons alors

$$U = \frac{X - Y\sqrt{D}}{Z}, \qquad V = \frac{-X - Y\sqrt{D}}{Z};$$

U et V seront des fonctions linéaires de u et v, fractionnaires en général. Nous ne prenons ici, parmi ces substitutions, que celles qui sont de la forme (2).

C'est ainsi que nous trouvons les substitutions

$$(\mathrm{U}, \mathrm{V}, u+1, v-1),$$
$$(\mathrm{U}, \mathrm{V}, u-\sqrt{\mathrm{D}}, v-\sqrt{\mathrm{D}}),$$
$$[\mathrm{U}, \mathrm{V}, (a-c\sqrt{\mathrm{D}})u, (a+c\sqrt{\mathrm{D}})v].$$

Dans cette dernière, a et c désignent deux entiers positifs satisfaisant à l'équation de Pell, $a^2 - \mathrm{D}c^2 = 1$. Le groupe admettant ces substitutions fondamentales est un groupe discontinu.

8. Que pouvons-nous dire maintenant des fonctions restant invariables par les substitutions des groupes discontinus dont nous venons de parler? En se bornant au cas où le groupe est du type hyperabélien, on peut recourir aux séries dont j'ai fait usage dans l'étude des fonctions hyperabéliennes; mais, dans le cas actuel, il s'en faut que nous puissions en tirer le même parti.

Nous devons d'abord remplacer le domaine des (u, v), où les coefficients de i (pour u et pour v) sont positifs, par deux cercles de rayon un, ce que donneront les transformations

$$\xi = \frac{u-i}{u+i}, \qquad \eta = \frac{v-i}{v+i}.$$

Au groupe précédent correspond alors un certain groupe

$$\left(\xi, \eta, \frac{\mathrm{A}\xi+\mathrm{B}}{\mathrm{C}\xi+\mathrm{D}}, \frac{\mathrm{A}'\eta+\mathrm{B}'}{\mathrm{C}'\eta+\mathrm{D}'}\right), \qquad \mathrm{AD}-\mathrm{BC} = \mathrm{A}'\mathrm{D}'-\mathrm{B}'\mathrm{C}' = 1.$$

Prenant alors une fraction rationnelle $\mathrm{R}(\xi, \eta)$, qui reste finie à l'intérieur des cercles et sur leur circonférence, c'est la fonction

$$\Sigma \mathrm{R}\left(\frac{\mathrm{A}\xi+\mathrm{B}}{\mathrm{C}\xi+\mathrm{D}}, \frac{\mathrm{A}'\eta+\mathrm{B}'}{\mathrm{C}'\eta+\mathrm{D}'}\right) \frac{1}{(\mathrm{C}\xi+\mathrm{D})^{2m}(\mathrm{C}'\eta+\mathrm{D}')^{2m}} \qquad (m \geqq 2),$$

(la sommation étant étendue à toutes les substitutions du groupe), qui conduit aux fonctions restant invariables par les substitutions du groupe.

Si nous revenons aux variables u et v, les fonctions que nous obtenons ainsi se trouvent seulement définies pour les valeurs des variables

$$u = u' + iu'', \qquad v = v' + iv'',$$

qui correspondent à

$$u'' > 0, \qquad v'' > 0.$$

Dans les cas que j'ai autrefois étudiés, cela suffisait; car les fonctions étaient nécessairement limitées à ce domaine et ne pouvaient s'étendre au delà. Avec nos groupes actuels, il en est tout autrement; le domaine possible n'est pas *a priori* limité, mais les développements en séries, qui précèdent, ne peuvent être employés sans examen préalable, quand on n'a plus

$$u'' > 0, \qquad v'' > 0.$$

Nous ne pouvons donc décider s'il existe ou non des fonctions restant invariables par les substitutions du groupe considéré. Les fonctions, bien entendu, ne doivent pas avoir d'autres singularités essentielles que celles qui appartiennent au groupe lui-même. Malgré de longues recherches sur ce sujet, il m'a été impossible d'arriver à des résultats précis, si ce n'est dans des cas particuliers, d'ailleurs intéressants, que j'étudierai dans un autre travail.

9. Nous terminerons en démontrant un théorème auquel nous avons déjà fait précédemment allusion (n° **4**). Si les coordonnées x, y, z d'un point quelconque d'une surface s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres u et v, restant invariables pour un groupe de substitutions de la forme

$$(u, v, au + b, cv + d),$$

et que le domaine fondamental de ce groupe soit tout entier à distance finie, sans singularité essentielle des fonctions sur sa surface, *le genre de la surface ne pourra dépasser l'unité.*

Soit une intégrale double de première espèce

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

en remplaçant x, y, z par leur valeur en u et v, nous aurons

$$\int\int G(u, v)\,du\,dv,$$

en posant

$$G(u, v) = \frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)}{f'_z}.$$

La fonction $G(u, v)$ sera holomorphe dans le domaine fondamental. En posant

$$U = au + b, \qquad V = cv + d,$$

on aura

$$G(U, V) = \frac{1}{ac} G(u, v).$$

Or écrivons

$$G(u, v) = e^{\Phi};$$

il en résulte que

$$\Phi = \int \frac{G'_u}{G}\,du + \frac{G'_v}{G}\,dv = \int P\,dx + Q\,dy,$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de x, y et z. On a donc

$$G(u, v) = e^{\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P\,dx + Q\,dy}.$$

L'exponentielle qui est dans le second membre doit donc rester finie pour tout point (x, y, z) de la surface; d'où cette conséquence, que l'intégrale

$$\text{(I)} \qquad \int P\,dx + Q\,dy$$

est une intégrale de première espèce. Ainsi, à chaque intégrale double de première espèce correspond une intégrale de différentielle totale de première espèce. Lorsque (x, y, z) décrira un cycle correspondant à la substitution

$$(u, v, au + b, cv + d),$$

l'intégrale s'augmentera de

$$-\log(ac) + 2k\pi i,$$

k étant un entier.

S'il existe donc *deux* intégrales doubles de première espèce, il y correspondra deux intégrales de première espèce

$$\int P\,dx + Q\,dy \quad \text{et} \quad \int P_1\,dx + Q_1\,dy;$$

la différence de ces deux intégrales

$$\int (P - P_1)\,dx + (Q - Q_1)\,dy$$

sera une intégrale de première espèce, n'ayant que la période $2\pi i$. Or ceci est impossible, car une intégrale de première espèce doit avoir au moins *deux* périodes distinctes. *Le genre de la surface ne peut donc dépasser l'unité.*

TABLE DES MATIÈRES

DU MÉMOIRE DE M. E. PICARD.