JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G.-H. HALPHEN

Sur le mouvement d'un solide dans un liquide

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 4 (1888), p. 5-81.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur le mouvement d'un solide dans un liquide;

PAR M. G.-H. HALPHEN.

Tous les géomètres connaissent la belle application qui, dans l'Ouvrage de Sir William Thomson et Tait, a été faite du principe de Hamilton au problème du mouvement d'un solide dans un liquide indéfini, et le système de six équations différentielles donné par M. Kirchhoff pour la solution de ce problème. En supposant qu'aucune force accélératrice n'agisse sur le corps solide et sur le liquide où il est plongé, M. Kirchhoff en a déduit un cas, celui par exemple où le solide est homogène et de révolution, dans lequel les équations différentielles conduisent à des quadratures elliptiques, et ce cas a reçu depuis une certaine extension, comme on peut voir dans un Mémoire de Clebsch. Par l'emploi des fonctions elliptiques, il existe donc un cas où ce beau problème est susceptible d'une solution complète, où tous les éléments du mouvement peuvent être exprimés en fonction explicite du temps (¹).

(¹) Un autre cas, signalé par Clebsch, donne lieu aussi à une solution com-

C'est cette application des fonctions elliptiques que j'ai en vue d'exposer dans le présent Mémoire, application bien propre à marquer, vu la complication du problème, les services que l'on doit attendre de l'emploi, de plus en plus propagé, des fonctions elliptiques.

L'attention a été appelée récemment (¹) sur un admirable théorème trouvé par Jacobi et d'après lequel le mouvement d'un corps grave de révolution, suspendu par un point de son axe, se décompose en deux mouvements *à la Poinsot*. C'est dans les formules elliptiques représentant le mouvement du corps grave que Jacobi a su lire cette décomposition merveilleuse, et certes il est difficile de ne pas admirer la perspicacité dont a fait preuve, dans cette occasion, le célèbre géomètre.

En étudiant l'analyse de Jacobi, j'ai été conduit à lui trouver une extension inattendue; les formules qui représentent le mouvement d'un solide dans un liquide font apparaître aussi une décomposition analogue. J'exposerai ici ce résultat après avoir donné les formules du mouvement. Mais, pour pouvoir me suivre jusque-là, il faut que le lecteur connaisse la représentation elliptique des mouvements à la Poinsot et la composition de ces mouvements. De là l'obligation d'exposer cette théorie dans des paragraphes séparés par où je commencerai ce Mémoire, avant d'entamer le problème du mouvement d'un solide dans un liquide. Je réduirai d'ailleurs ces préliminaires à leurs parties essentielles pour le but que je poursuis.

I. — Sur une représentation elliptique des cosinus des neuf angles que font entre elles les arêtes de deux trièdres trirectangles.

Soit u un argument elliptique quelconque. La fonction $(pu - e_\alpha)$ est, comme on sait, un carré parfait, c'est-à-dire le carré d'une fonction uniforme (la notation e_α désigne, rappelons-le, la valeur de la fonc-

---

plète au moyen des fonctions hyperelliptiques. Cette solution a été développée par M. H. Weber dans les *Mathematische Annalen*, t. XIV, p. 173.

(¹) Par M. Darboux et par moi-même dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. C, p. 1065, et t. CI, p. 11; 1885. (*Voir* aussi *Cours de Mécanique* de M. Despeyrous, *avec des Notes* par M. Darboux, t. II, p. 537.)

tion $\wp$ pour une *demi-période* quelconque ω_α, en sorte que $e_\alpha = \wp\omega_\alpha$). Si l'on prend donc deux arguments u et v, la fonction $\frac{\wp u - e_\alpha}{\wp v - e_\alpha}$ est aussi un carré parfait P^2.

D'autre part, la fonction $1 - P^2 = \frac{\wp v - \wp u}{\wp v - e_\alpha}$ est décomposable en deux facteurs uniformes, différents de $1 \pm P$. Soient Q, R ces deux facteurs; ils donnent lieu à l'égalité $P^2 + QR = 1$, et les trois fonctions P, Q, R peuvent servir à représenter trois quantités liées par une relation quadratique. Elles peuvent donc servir à représenter les cosinus des angles qu'une droite fait avec trois axes rectangulaires.

Composons ces trois facteurs, affectons Q et R de coefficients arbitraires C et $\frac{1}{C}$, qui ne troublent pas la relation quadratique, puis, pour la symétrie, changeons v en $(v - \omega_\alpha)$, et nous aurons les expressions suivantes pour les trois cosinus d'une droite a avec trois axes x, y, z,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \cos az &= \frac{\sigma(u-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\alpha)}{\sigma u\,\sigma v}\, e^{\eta_\alpha(v+u-\omega_\alpha)},\\ \cos ax + i\cos ay &= C\,\frac{\sigma(u+v-\omega_\alpha)\,\sigma\omega_\alpha}{\sigma u\,\sigma v}\, e^{\eta_\alpha(v+u-\omega_\alpha)},\\ \cos ax - i\cos ay &= \frac{1}{C}\,\frac{\sigma(u-v+\omega_\alpha)\,\sigma\omega_\alpha}{\sigma u\,\sigma v}\, e^{\eta_\alpha(v-u-\omega_\alpha)}.\end{aligned}\right.$$

En employant les fonctions σ à indices et la notation

$$(2)\qquad U_\alpha = \sigma\omega_\alpha\, e^{-\frac{1}{2}\eta_\alpha\omega_\alpha},$$

on peut encore écrire ainsi ces formules

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \cos az &= U_\alpha^2\,\frac{\sigma_\alpha u\,\sigma_\alpha v}{\sigma u\,\sigma v},\\ \cos ax + i\cos ay &= -\,C U_\alpha^2\,\frac{\sigma_\alpha(u+v)}{\sigma u\,\sigma v},\\ \cos ax - i\cos ay &= \frac{1}{C}\,U_\alpha^2\,\frac{\sigma_\alpha(u-v)}{\sigma u\,\sigma v}.\end{aligned}\right.$$

Prenons maintenant des formules toutes semblables pour exprimer les cosinus des angles que fait une seconde droite b avec les mêmes axes, en conservant les mêmes quantités C, u, v, et changeant seulement l'indice α. Ainsi

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \cos bz &= \frac{\sigma(u-\omega_\beta)\,\sigma(v-\omega_\beta)}{\sigma u\,\sigma v}\,e^{\eta_\beta(v+u-\omega_\beta)},\\ \cos bx + i\cos by &= \mathrm{C}\,\frac{\sigma(u+v-\omega_\beta)\,\sigma\omega_\beta}{\sigma u\,\sigma v}\,e^{\eta_\beta(v+u-\omega_\beta)},\\ \cos bx - i\cos by &= \frac{1}{\mathrm{C}}\,\frac{\sigma(u-v+\omega_\beta)\,\sigma\omega_\beta}{\sigma u\,\sigma v}\,e^{\eta_\beta(v-u-\omega_\beta)}. \end{aligned}\right.$$

Les deux droites a et b sont rectangulaires.

Pour le prouver, faisons usage de la formule de décomposition en éléments simples relative à une fonction doublement périodique de deuxième espèce ayant un seul pôle, mais double. Je ne renvoie pas le lecteur, pour la connaissance de cette formule, soit à tel Mémoire de M. Hermite, inventeur de ces décompositions, soit à un Ouvrage sur les fonctions elliptiques. Pour retrouver, sans aucun secours, les formules de ce genre, il suffit d'en connaître le principe.

Une fonction doublement périodique $\mathrm{F}(u)$ de deuxième espèce, avec un seul infini mais double, a pour expression générale, u désignant l'argument variable, et un coefficient constant arbitraire étant omis,

$$\mathrm{F}(u) = \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)}{\sigma^2 u}\,e^{\rho u}.$$

L'élément simple correspondant, à résidu unité, est le suivant

$$\Phi(u) = -\frac{\sigma(u-a_1-a_2)}{\sigma(a_1+a_2)\,\sigma u}\,e^{\rho u},$$

et la décomposition donne la formule

$$\frac{1}{\sigma a_1\,\sigma a_2}\,\mathrm{F}(u) = -\Phi'(u) + (\rho - \zeta a_1 - \zeta a_2)\,\Phi(u).$$

Soient d'abord

$$a_1 = \omega_\alpha, \qquad a_2 = \omega_\beta, \qquad \rho = \zeta\omega_\alpha + \zeta\omega_\beta = \eta_\alpha + \eta_\beta,$$

et désignons par $\Psi(u)$ ce que devient ainsi $\Phi(u)$, sauf un facteur constant,

$$(5)\qquad \Psi(u) = \frac{\sigma(u-\omega_\alpha-\omega_\beta)}{\sigma u} e^{(\eta_\alpha+\eta_\beta)u}.$$

Nous aurons

$$(6)\qquad \frac{\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta}\,\frac{\sigma(u-\omega_\alpha)\,\sigma(u-\omega_\beta)}{\sigma^2 u} e^{(\eta_\alpha+\eta_\beta)u} = \Psi'(u).$$

Soient, en second lieu,

$$a_1 = v - \omega_\beta, \qquad a_2 = \omega_\alpha - v, \qquad \rho = \eta_\alpha - \eta_\beta;$$

l'élément simple $\Phi(u)$ est alors

$$\Phi(u) = -\frac{\sigma(u-\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\beta)\,\sigma u} e^{(\eta_\alpha-\eta_\beta)u},$$

et il ne diffère de $\Psi(u)$ que par un facteur constant, car on a effectivement

$$\Phi(u) = -\frac{1}{\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}\Psi(u).$$

La formule de décomposition ci-dessus donne donc

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)}\,\frac{\sigma(u-v+\omega_\beta)\,\sigma(u+v-\omega_\alpha)}{\sigma^2 u} e^{(\eta_\alpha-\eta_\beta)u} \\ &\quad = -\Psi'(u) + [\zeta(v-\omega_\beta) - \zeta(v-\omega_\alpha) + \eta_\beta - \eta_\alpha]\,\Psi(u). \end{aligned}\right.$$

Échangeons les indices α et β, ajoutons membre à membre la dernière égalité et celle que nous obtenons par cet échange, puis remplaçons $\Psi'(u)$ par son expression (6). Il vient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)} &[\sigma(u-v+\omega_\beta)\,\sigma(u+v-\omega_\alpha)\,e^{(\eta_\alpha-\eta_\beta)u} \\ &\quad + \sigma(u-v+\omega_\alpha)\,\sigma(u+v-\omega_\beta)\,e^{(\eta_\beta-\eta_\alpha)u}] \\ &\quad + \frac{2}{\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta}\,\sigma(u-\omega_\alpha)\,\sigma(u-\omega_\beta)\,e^{(\eta_\alpha+\eta_\beta)u} = 0. \end{aligned}$$

D'après les égalités (1, 4), ceci revient à

$$(\cos bx - i\cos by)(\cos ax + i\cos ay)$$
$$+(\cos bx + i\cos by)(\cos ax - i\cos ay) + 2\cos az\cos bz = 0$$

ou bien

$$\cos bx\cos ax + \cos by\cos ay + \cos az\cos bz = 0.$$

Ainsi est prouvée la perpendicularité des deux droites a et b.

Comme il y a trois demi-périodes distinctes, nous pouvons prendre une troisième droite c en définissant les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes x, y, z par des formules toutes pareilles, où seulement on mettra la troisième demi-période ω_γ. Cette droite c sera perpendiculaire aux droites a et b. Donc *les cosinus des neuf angles que les arêtes d'un trièdre trirectangle a, b, c font avec les arêtes d'un autre trièdre trirectangle x, y, z peuvent être représentés par les formules suivantes où* C, u, v *sont arbitraires et* ω_α, ω_β, ω_γ *sont trois demi-périodes distinctes* (c'est-à-dire dont les différences deux à deux ne sont pas des périodes), *savoir les formules* (1) *et celles qu'on en déduit en changeant a et α en b et β ou en c* et γ [1].

Chacune des six droites a, b, c et x, y, z est ici affectée d'un sens, considéré comme positif. Elles forment, si l'on veut, deux systèmes d'axes rectangulaires. En faisant correspondre entre eux ces axes deux à deux, a avec x, b avec y, c avec z, on peut rencontrer deux cas : ou bien les deux systèmes sont *congruents*, c'est-à-dire qu'on peut transporter l'un d'eux de telle sorte que les axes correspondants coïncident en position et en sens, ou bien ils sont *incongruents*. La distinction des deux cas se fait par la quantité

$$(8)\qquad \frac{\cos ax\cos by - \cos ay\cos bx}{\cos cz} = \varepsilon,$$

qui est égale à $+1$ dans le premier cas, à -1 dans le second.

---

[1] Les quantités C, u, v sont *complexes;* dans chacune d'elles cependant il n'y a qu'une seule arbitraire. Pour abréger, je ne place pas ici l'étude des conditions sous lesquelles les formules (1) fournissent des angles réels, étude qui conduit à la conclusion que je viens de dire. La nature des quantités C, u, v apparaîtra plus loin, d'une autre manière.

Examinons quel est ε dans le mode de représentation ci-dessus. A cet effet, après avoir, dans la relation (7), échangé α et β, comme précédemment, retranchons les deux égalités membre à membre, au lieu de les ajouter. C'est alors le terme $\Psi'(u)$ qui disparaît au second membre, et le terme suivant qui se conserve. Transformons d'abord la quantité entre crochets : c'est une fonction doublement périodique de v; exprimons-la en produit de facteurs, ce qui est aisé, ses racines étant évidentes. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
&\zeta(v-\omega_\beta)-\zeta(v-\omega_\alpha)+\eta_\beta-\eta_\alpha\\
&\quad=\frac{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\beta)}{\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta}\,\frac{\sigma v\,\sigma(v-\omega_\alpha-\omega_\beta)}{\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)}\\
&\quad=-e^{-2\eta_\beta\omega_\alpha}\frac{\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta}\,\frac{\sigma v\,\sigma(v-\omega_\alpha-\omega_\beta)}{\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)}.
\end{aligned}$$

De là résulte, d'après (1, 4),

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
&\cos ax\cos by-\cos ay\cos bx\\
&\quad=-\frac{1}{i}\,e^{\eta_\alpha\omega_\beta-\eta_\beta\omega_\alpha}\,\frac{\sigma(u-\omega_\alpha-\omega_\beta)\,\sigma(v-\omega_\alpha-\omega_\beta)}{\sigma u\,\sigma v}\,e^{(\eta_\alpha+\eta_\beta)(u+v-\omega_\alpha-\omega_\beta)}.\\
&\quad=-\frac{1}{i}\,e^{\eta_\alpha\omega_\beta-\eta_\beta\omega_\alpha}\,U^2_{\alpha+\beta}\,\frac{\sigma_{\alpha+\beta}u\,\sigma_{\alpha+\beta}v}{\sigma u\,\sigma v}.
\end{aligned}\right.$$

Les trois demi-périodes ω_α, ω_β, ω_γ étant distinctes, la fonction $\sigma_{\alpha+\beta}$ reproduit σ_γ. De même $U^2_{\alpha+\beta}$ reproduit $\pm U^2_\gamma$; le signe dépend du choix de ces demi-périodes, qu'on peut altérer en y ajoutant à volonté des périodes entières. Pour fixer les idées, *je supposerai désormais la somme des trois demi-périodes nulle.* Alors $U^2_{\alpha+\beta}$ reproduit U^2_γ. Le second membre (9) reproduit alors $\cos cz$, multiplié par le facteur

$$\varepsilon=-\frac{1}{i}\,e^{\eta_\alpha\omega_\beta-\eta_\beta\omega_\alpha}.$$

On sait que l'exposant de e, dans cette formule, est toujours un multiple impair de $\frac{i\pi}{2}$. Soit donc

$$\eta_\alpha\omega_\beta-\eta_\beta\omega_\alpha=(2k+1)\frac{i\pi}{2};$$

le caractère de congruence des axes est défini par l'égalité

$$\varepsilon = (-1)^{k+1}.$$

II. — Sur la décomposition d'une somme en produit.

Parmi les égalités qui ont lieu entre les neuf cosinus, prenons celle-ci

$$\sum_a (\cos ax + i\cos ay)(\cos ax - i\cos ay) = 2,$$

où le signe sommatoire indique qu'on devra successivement remplacer a par a, b et c.

Remplaçons les quantités $\cos ax \pm i\cos ay$ et les similaires par leurs expressions (1), et nous aurons

$$\sum_\omega \sigma(u+v-\omega)\sigma(u-v+\omega)\sigma^2\omega\, e^{2\eta(v-\omega)} = 2\sigma^2 u\, \sigma^2 v,$$

où le signe sommatoire indique que ω devra être successivement remplacé par les trois demi-périodes ω_α, ω_β, ω_γ, en même temps que η par η_α, η_β, η_γ.

En mettant v et v_1 au lieu de $v+u$ et $v-u$, on peut encore écrire

$$(10) \qquad \sum_\omega \sigma(v-\omega)\sigma(v_1-\omega)\sigma^2\omega\, e^{\eta(v+v_1-2\omega)} = -2\sigma^2\frac{v+v_1}{2}\sigma^2\frac{v-v_1}{2},$$

cas particulier d'une formule plus générale, que nous allons établir. Prenons la fonction

$$(11) \qquad \varphi(u, v, w) = \frac{\sigma(u-v+w)\sigma(u-w)}{\sigma^2 u\, \sigma(v-w)\sigma w},$$

qui diffère seulement par les notations et par un facteur constant de la fonction doublement périodique de seconde espèce $F(u)$, envisagée plus haut, où l'on suppose $\rho = 0$.

L'élément simple s'écrit ici

$$\Phi(u) = -\frac{\sigma(u-v)}{\sigma u \sigma v},$$

et l'on a

$$(11\,a) \qquad \varphi(u, v, w) = -\Phi'(u) - [\zeta(v-w) + \zeta w]\,\Phi(u).$$

Si, dans cette formule, on multiplie les deux membres par cette fonction de l'argument v

$$f(v) = \sigma(v-w)\, e^{v\zeta w},$$

on pourra écrire le résultat sous la forme

$$(11\,b) \qquad f(v)\varphi(u, v, w) = -f(v)\Phi'(u) - f'(v)\Phi(u).$$

Soit A la somme (10) et soit aussi S la somme obtenue en prenant successivement pour w les trois demi-périodes et multipliant chacune des fonctions $\varphi(u, v, \omega)$ par le terme correspondant de la somme A; on aura

$$S = \sum_{\omega} \sigma(v-\omega)\sigma(v_1-\omega)\,\sigma^2\omega\, e^{\eta(v+v_1-2\omega)}\,\varphi(u, v, \omega).$$

Dans cette somme, chaque multiplicateur de φ a la forme supposée ci-dessus pour f, sauf un facteur constant. On a donc, d'après (11 b),

$$S = -A\Phi'(u) - \frac{dA}{dv}\Phi(u).$$

Si maintenant l'on met, au lieu de A, le second membre (10), il vient

$$S = 2\sigma^2\frac{v+v_1}{2}\,\sigma^2\frac{v-v_1}{2}\left[\Phi'(u) + \left(\zeta\frac{v+v_1}{2} + \zeta\frac{v-v_1}{2}\right)\Phi(u)\right],$$

ou bien, d'après (11 a),

$$S = -2\sigma^2\frac{v+v_1}{2}\,\sigma^2\frac{v-v_1}{2}\,\varphi\left(u, v, \frac{v-v_1}{2}\right).$$

Remettant enfin, pour S et pour φ, les formes de définition et chassant les dénominateurs, j'obtiens la formule cherchée

$$\sum_{\omega} \sigma(u-\omega)\,\sigma(u-v+\omega)\,\sigma(v_1-\omega)\,\sigma\omega\, e^{\eta(v+v_1-2\omega)}$$
$$= -2\sigma\frac{v+v_1}{2}\,\sigma\frac{v-v_1}{2}\,\sigma\left(u-\frac{v+v_1}{2}\right)\sigma\left(u-\frac{v-v_1}{2}\right),$$

dont l'aspect est plus symétrique si l'on écrit u, v, w, au lieu de u, $v-u$, v_1 :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\omega} \sigma(u-\omega)\,\sigma(v-\omega)\,\sigma(w-\omega)\,\sigma\omega\, e^{\eta(u+v+w-2\omega)} \\ &\quad = 2\prod \sigma\frac{u\pm v\pm w}{2}; \end{aligned}\right.$$

le produit, au second membre, est composé avec les quatre facteurs obtenus par les diverses combinaisons des signes $\pm$.

III. — Composition des trièdres trirectangles.

Soient trois systèmes d'axes rectangulaires a, b, c; x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1. On donne les cosinus des angles que font les axes a, b, c avec x_0, y_0, z_0 et avec x_1, y_1, z_1, et l'on demande les cosinus des angles que font entre eux les axes x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1. C'est ce problème que, pour abréger, j'appelle *problème de la composition des trièdres trirectangles,* problème résolu par des formules élémentaires de Géométrie analytique, mais qu'il s'agit de résoudre explicitement au moyen de la représentation elliptique précédente. On suppose les cosinus exprimés par les formules ci-dessus au moyen des mêmes fonctions elliptiques dans les deux cas, mais avec des quantités C_0, u_0, v_0 pour les axes x_0, y_0, z_0, et des quantités différentes C_1, u_1, v_1 pour les axes x_1, y_1, z_1.

Pour résoudre le problème, je chercherai les expressions elliptiques des quantités suivantes :

$$(13)\quad \cos z_0x_1 + i\cos z_0y_1, \qquad \cos z_1x_0 + i\cos z_1y_0, \qquad \cos z_1z_0.$$

Les conjuguées des deux premières se déduisent par deux relations évidentes, savoir :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &(\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1)(\cos z_0 x_1 - i\cos z_0 y_1)\\ &\quad = (\cos z_1 x_0 + i\cos z_1 y_0)(\cos z_1 x_0 - i\cos z_1 y_0)\\ &\quad = 1 - \cos^2 z_1 z_0,\end{aligned}\right.$$

et les autres cosinus s'obtiennent, sans aucune ambiguïté, quand on sait si les deux systèmes d'axes sont congruents ou incongruents. Pour ce but, on a, en effet, l'équation suivante, qui se conclut des relations analogues à la relation (8), et qui équivaut à quatre équations distinctes, quand on donne à i et à j séparément les valeurs

$$i = \pm\sqrt{-1}, \qquad j = \pm\sqrt{-1},$$

$$\begin{aligned}&\cos x_0 x_1 + i\cos x_0 y_1 + j\cos y_0 x_1 + ij\cos y_0 y_1\\ &\quad = -\frac{(\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1)(\cos z_1 x_0 + j\cos z_1 y_0)}{\varepsilon ij - \cos z_0 z_1}.\end{aligned}$$

La quantité ε est ± 1, suivant que les axes x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 sont congruents ou non. Mais ici ces deux systèmes d'axes présentent un même caractère de congruence ou d'incongruence par rapport à a, b, c; ils sont donc congruents entre eux, et ε devra être pris égal à $+1$.

On voit donc que les trois quantités (13) déterminent sans ambiguïté les positions respectives des deux systèmes d'axes, moyennant la connaissance du caractère figuré par le signe de ε, lequel est ici le signe *plus*.

D'après une formule élémentaire de Géométrie analytique, on a

$$\cos z_0 x_1 \pm i\cos z_0 y_1 = \sum_a \cos a z_0 (\cos a x_1 \pm i\cos a y_1).$$

D'après les formules (1), nous aurons, en prenant le signe *plus*,

$$\begin{aligned}&\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1\\ &\quad = \frac{C_1}{\sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 \sigma v_1}\sum_\omega \sigma(u_0-\omega)\sigma(v_0-\omega)\sigma(u_1+v_1-\omega)\sigma\omega\, e^{\eta(v_0+u_0+v_1+u_1-2\omega)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la formule de sommation (12),

$$(15)\quad \cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1 = \frac{2C_1}{\sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 \sigma v_1}\prod \sigma\frac{u_1+v_1\pm u_0\pm v_0}{2}.$$

Semblablement, en prenant le signe *moins*,

$$(16)\quad \cos z_0 x_1 - i\cos z_0 y_1 = -\frac{2}{C_1\sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 v_1}\prod \sigma\frac{u_1-v_1\pm u_0\pm v_0}{2}.$$

De même, $\cos z_1 x_0 \pm i\cos z_1 y_0$ s'expriment par des formules toutes semblables : il suffit d'échanger les indices o et 1. On remarquera que l'on retrouve, par cet échange, les huit mêmes facteurs, mais groupés différemment, ce qui constitue, d'après la double égalité (14), une seule et même expression pour $1-\cos^2 z_0 z_1 = \sin^2 z_0 z_1$, savoir :

$$\sin^2 z_0 z_1 = -\frac{4}{(\sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 \sigma v_1)^2}\prod \sigma\frac{u_0\pm u_1\pm v_0\pm v_1}{2}.$$

Pour parvenir à l'expression de $\cos z_0 z_1$, transformons d'abord cette dernière formule au moyen de la relation fondamentale

$$(17)\qquad \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} = \wp v - \wp u.$$

Posant

$$\wp\frac{u_0+u_1}{2} = \alpha, \qquad \wp\frac{u_0-u_1}{2} = \alpha',$$

$$\wp\frac{v_0+v_1}{2} = \beta, \qquad \wp\frac{v_0-v_1}{2} = \beta',$$

nous pouvons écrire

$$\sin^2 z_0 z_1 = -4\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\beta')(\alpha'-\beta)(\alpha'-\beta')}{(\alpha-\alpha')^2(\beta-\beta')^2},$$

$$\cos^2 z_0 z_1 = \frac{(\alpha-\alpha')^2(\beta-\beta')^2+4(\alpha-\beta)(\alpha-\beta')(\alpha'-\beta)(\alpha'-\beta')}{(\alpha-\alpha')^2(\beta-\beta')^2}.$$

En tenant compte de l'identité

$$(\alpha-\alpha')(\beta-\beta') = (\alpha-\beta)(\alpha'-\beta') - (\alpha-\beta')(\alpha'-\beta),$$

on voit que le numérateur de $\cos^2 z_0 z_1$ est le carré de

$$(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')+(\alpha-\beta')(\alpha'-\beta).$$

En extrayant la racine carrée, il reste seulement à fixer le signe, qui est entièrement déterminé, puisque l'on pourrait obtenir aussi ce même cosinus par la formule

$$\cos z_0 z_1 = \sum_a \cos a z_0 \cos a z_1.$$

Le signe se détermine immédiatement si l'on observe que les deux axes z_0 et z_1 coïncident quand on a $u_0 = u_1$, $v_0 = v_1$. En ce cas, α' et β' sont infinis, et $\cos z_0 z_1$ doit se réduire à $+1$. On a donc

$$(18)\qquad \cos z_0 z_1 = -\frac{(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')+(\alpha-\beta')(\alpha'-\beta)}{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')}.$$

Par ces formules (15), (16), (18), le problème de la composition des trièdres trirectangles est résolu.

Voici quelques formules intéressantes ou utiles qui se rattachent aux précédentes. A cause de l'identité

$$\frac{(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')}{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')} = \frac{(\alpha-\beta')(\alpha'-\beta)}{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')} + 1,$$

on a

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} 1+\cos z_0 z_1 &= -2\frac{(\alpha-\beta')(\alpha'-\beta)}{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')},\\ 1-\cos z_0 z_1 &= +2\frac{(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')}{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')}.\end{aligned}\right.$$

Par le moyen de la relation fondamentale (17), on transforme ces expressions en produits de fonctions σ, par exemple,

$$1+\cos z_0 z_1 = -\frac{2}{\sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 \sigma v_1} \prod{}' \sigma \frac{u_0 \pm v_0 \pm u_1 \pm v_1}{2},$$

le produit $\prod'$ comprenant seulement les quatre facteurs où le nombre des signes *moins* est impair. L'expression de $1 - \cos z_0 z_1$ comprend, au contraire, les quatre facteurs où le nombre des signes *moins* est pair.

Voici encore, pour $\cos z_0 z_1$, une autre forme qui se rencontrera dans l'application que nous avons en vue.

Pour un instant, posons

$$\alpha = pa, \qquad \alpha' = pa', \qquad \beta = pb, \qquad \beta' = pb',$$

d'où résulte

$$(20) \quad \frac{(\alpha - \beta')(\alpha' - \beta)}{(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')} = \frac{\sigma(a+b')\sigma(a-b')\sigma(a'+b)\sigma(a'-b)}{\sigma(a+a')\sigma(a-a')\sigma(b+b')\sigma(b-b')}.$$

Envisageons à part les facteurs

$$\frac{\sigma(a'+b)\sigma(a'-b)}{\sigma(a+a')\sigma(a-a')}$$

comme composant une fonction de a', qui est doublement périodique et que nous décomposons en éléments simples. Nous avons ainsi

$$\frac{\sigma(a'+b)\sigma(a'-b)}{\sigma(a+a')\sigma(a-a')} = \frac{\sigma(a-b)\sigma(a+b)}{\sigma 2a}[\zeta(a+a')+\zeta(a-a')-\zeta(a+b)-\zeta(a-b)].$$

Échangeons a' et b', puis divisons les deux égalités membre à membre; nous obtenons

$$\frac{\sigma(a+b')\sigma(a-b')\sigma(a'+b)\sigma(a'-b)}{\sigma(a+a')\sigma(a-a')\sigma(b+b')\sigma(b-b')} = -\frac{\zeta(a+a')+\zeta(a-a')-\zeta(a+b)-\zeta(a-b)}{\zeta(a+b')+\zeta(a-b')-\zeta(a+b)-\zeta(a-b)}.$$

D'après l'égalité (20) et l'expression (19) de $1 + \cos z_0 z_1$, nous obtenons, en mettant pour a, a', b, b' leurs valeurs $\frac{u_0 \pm u_1}{2}$, $\frac{v_0 \pm v_1}{2}$,

$$(21) \quad \cos z_0 z_1 = \frac{2\zeta u_0 + 2\zeta u_1 - \sum \zeta \dfrac{u_0 + u_1 \pm v_0 \pm v_1}{2}}{\sum \zeta \dfrac{u_0 + u_1 \pm (v_0 - v_1)}{2} - \sum \zeta \dfrac{u_0 + u_1 \pm (v_0 + v_1)}{2}}.$$

Cette expression est dissymétrique relativement aux arguments u et v, tandis que les précédentes étaient, au contraire, symétriques. Elle est ici sous la forme que nous rencontrerons naturellement dans notre application, où les arguments u et v joueront des rôles très différents.

IV. — Mouvements a la Poinsot.

Si l'on écrit l'expression de $\cos cz$ sous la forme suivante

$$\cos cz = \frac{\sigma(u+\omega_\gamma)\,\sigma(v+\omega_\gamma)}{\sigma u\,\sigma v}\,e^{-\eta_\gamma(v+u+\omega_\gamma)},$$

on voit que la fonction (5) $\Psi(u)$ diffère de ce cosinus par un facteur indépendant de u. De même aussi les facteurs du premier membre, dans la relation (6), diffèrent de $\cos az$ et de $\cos bz$ par des facteurs indépendants de u. En considérant ces trois cosinus comme des fonctions de u, on trouve donc qu'ils satisfont à trois équations différentielles déduites de la relation (6) par permutation des indices. Ainsi, cette relation (6) donne immédiatement

$$\begin{aligned}\frac{\sigma^2 v\,\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta\,\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)}\,&e^{-(\eta_\alpha+\eta_\beta)v+\eta_\alpha\omega_\alpha+\eta_\beta\omega_\beta}\cos az\cos bz\\ &= \frac{\sigma v}{\sigma(v+\omega_\gamma)}\,e^{\eta_\gamma(v+\omega_\gamma)}\,\frac{d\cos cz}{du},\end{aligned}$$

ce qui se réduit simplement à

$$(22)\qquad \frac{1}{\cos az\cos bz}\,\frac{d\cos cz}{du} = \frac{\sigma v\,\sigma(v-\omega_\alpha-\omega_\beta)\,\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)\,e^{-\eta_\beta\omega_\alpha-\eta_\alpha\omega_\beta}}{\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)\,\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta}.$$

Comme on a d'ailleurs

$$\frac{\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\beta)} = -\,e^{2\eta_\beta\omega_\alpha},$$

on voit que le second membre (22) peut s'écrire

$$-\,e^{\eta_\beta\omega_\alpha-\eta_\alpha\omega_\beta}\,\frac{\sigma v\,\sigma(v-\omega_\alpha-\omega_\beta)\,\sigma(\omega_\alpha-\omega_\beta)}{\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)\,\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta}.$$

C'est, au premier facteur près, une fonction doublement périodique de v, dont les pôles sont en évidence, avec les résidus ± 1, avec des racines mises également en évidence, et dont la décomposition en éléments simples est immédiate. Quant à l'exponentielle, on a vu plus haut qu'elle est égale à $i\varepsilon$, ε étant le caractère de congruence des axes. Ainsi le second membre (22) peut s'écrire ainsi

$$i\varepsilon[\zeta(v-\omega_\alpha)-\zeta(v-\omega_\beta)+\zeta\omega_\alpha-\zeta\omega_\beta].$$

Par le théorème d'addition des fonctions ζ, on a

$$\zeta(v-\omega_\alpha)-\zeta v+\zeta\omega_\alpha=\frac{1}{2}\,\frac{p'v}{pv-p\omega_\alpha}=\frac{1}{2}\,\frac{p'v}{pv-e_\alpha}.$$

En employant pareille formule avec l'indice β au lieu de α, on peut écrire le second membre (22) sous la forme

$$\frac{i\varepsilon}{2}\left(\frac{p'v}{pv-e_\alpha}-\frac{p'v}{pv-e_\beta}\right).$$

Soient désignées par P, Q, R les trois quantités telles que $\frac{i\varepsilon p'v}{2(pv-e_\alpha)}$,

$$-P=\frac{\varepsilon}{2i}\,\frac{p'v}{pv-e_\alpha}=\frac{\varepsilon}{i}[\zeta(v-\omega_\alpha)-\zeta v+\eta_\alpha];$$

on a, comme on voit, les trois équations différentielles

$$(23)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{d\cos cz}{du}&=(P-Q)\cos az\cos bz,\\ \frac{d\cos az}{du}&=(Q-R)\cos bz\cos cz,\\ \frac{d\cos bz}{du}&=(R-P)\cos cz\cos az,\end{aligned}\right.$$

satisfaites par les trois fonctions envisagées. Pour ces équations, on a immédiatement deux intégrales : l'une est la somme des carrés des trois cosinus, l'autre la somme des produits $P\cos^2 az$. On retrouve aisément ces deux intégrales au moyen des expressions des carrés des cosinus, si on les écrit ainsi

$$\cos^2 az = \frac{(pu - e_\alpha)(pv - e_\alpha)}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}.$$

En effet, $\Sigma \cos^2 az$ est le coefficient de $\frac{1}{\xi}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{(pu - \xi)(pv - \xi)}{(\xi - e_\alpha)(\xi - e_\beta)(\xi - e_\gamma)},$$

effectué suivant les puissances ascendantes de ξ; et, de même,

$$\Sigma \mathrm{P} \cos^2 az$$

est aussi le coefficient de $\frac{1}{\xi}$ dans le développement analogue de la fonction

$$-\frac{\varepsilon p'v}{2i} \frac{pu - \xi}{(\xi - e_\alpha)(\xi - e_\beta)(\xi - e_\gamma)}.$$

Le premier de ces coefficients est l'unité, l'autre est zéro. Ainsi, l'on a

$$\cos^2 az + \cos^2 bz + \cos^2 cz = 1,$$

$$(24) \qquad \mathrm{P}\cos^2 az + \mathrm{Q}\cos^2 bz + \mathrm{R}\cos^2 cz = 0.$$

Généralisant un peu la conception du mouvement donné par Poinsot comme image de celui d'un corps solide qui n'est soumis à aucune force, on a été conduit à envisager le mouvement dans lequel une surface du second degré, fixée en son centre, roule sans glisser sur un de ses plans tangents, avec une vitesse de rotation proportionnelle, à chaque instant, à la longueur du rayon vecteur qui va du centre au point de contact.

Pour le but que je poursuis, il est plus commode de considérer la surface comme fixe et le plan tangent comme mobile. J'appelle donc *mouvement à la Poinsot* celui d'un plan qui roule sans glisser sur une surface du second degré, en restant à une distance constante du centre de cette surface, avec une vitesse de rotation définie, comme je viens de le dire.

Les axes a, b, c de la surface sont alors supposés fixes, et l'on envisage trois axes rectangulaires mobiles x, y, z, liés au plan, ayant leur origine au centre, et dont le dernier z est perpendiculaire à ce plan.

Je vais emprunter aux éléments de la Cinématique la proposition suivante :

Par rapport aux axes rectangulaires fixes a, b, c, soient p, q, r les composantes d'une rotation instantanée autour d'une droite passant à l'origine. Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ les coordonnées d'un point de la figure mobile, et t le temps. On a

$$(25)\qquad \frac{d\mathfrak{a}}{dt}=q\mathfrak{c}-r\mathfrak{b},\qquad \frac{d\mathfrak{b}}{dt}=r\mathfrak{a}-p\mathfrak{c},\qquad \frac{d\mathfrak{c}}{dt}=p\mathfrak{b}-q\mathfrak{a}.$$

Les sens de rotation sont supposés, dans ces équations, positifs quand, autour de l'axe c, la rotation positive de 90° fait appliquer le côté positif de a sur le côté positif de b, etc. ; ce sont les conventions usuelles.

Dans un mouvement à la Poinsot, soient a', b', c' les coordonnées du point où le plan roulant touche la surface ; soient a^2, b^2, c^2 les carrés des axes (positifs ou négatifs). La normale z au plan roulant fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont

$$\cos az=\frac{ha'}{a^2},\qquad \cos bz=\frac{hb'}{b^2},\qquad \cos cz=\frac{hc'}{c^2},$$

astreints à la condition, qui exprime le contact,

$$(26)\qquad a^2\cos^2 az+b^2\cos^2 bz+c^2\cos^2 cz=h^2.$$

La rotation instantanée a, par définition, ses composantes p, q, r proportionnelles à a', b', c' ; soit $\frac{1}{n}$ le coefficient de proportion. Envisageons le point dont les coordonnées sont les trois cosinus ; on aura, d'après les formules (25) de rotation,

$$(27)\qquad \frac{d\cos az}{dt}=q\cos cz-r\cos bz=\frac{1}{nh}(b^2-c^2)\cos bz\cos cz,$$

avec les deux analogues obtenues par permutation circulaire de a, b, c.

Que l'on suppose les différences $P - Q$, $Q - R$, $R - P$ proportionnelles aux différences $a^2 - b^2$, $b^2 - c^2$, $c^2 - a^2$, et du proportionnel à dt; alors, les équations telles que ces dernières (27) coïncident avec les équations (23). En outre, la comparaison de la relation (24) avec celle-ci, déduite de (26),

$$(28) \quad (a^2 - h^2)\cos^2 az + (b^2 - h^2)\cos^2 bz + (c^2 - h^2)\cos^2 cz = 0,$$

conduit à poser, en désignant par μ un coefficient arbitraire d'homogénéité,

$$(29) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\mu}{n},$$

$$(30) \qquad \begin{cases} a^2 - h^2 = \mu h P = -\dfrac{\varepsilon\mu h}{2i}\dfrac{\wp' v}{\wp v - e_\alpha}, \\ b^2 - h^2 = \mu h Q = -\dfrac{\varepsilon\mu h}{2i}\dfrac{\wp' v}{\wp v - e_\beta}, \\ c^2 - h^2 = \mu h R = -\dfrac{\varepsilon\mu h}{2i}\dfrac{\wp' v}{\wp v - e_\gamma}. \end{cases}$$

Ainsi, en supposant l'argument u variable et proportionnel au temps, l'argument v constant, les formules (1) nous donnent la représentation d'un mouvement à la Poinsot. Il reste à trouver la quantité C, qui est, dans les formules (1), tout à fait arbitraire, et qui, dans le mouvement à la Poinsot, doit être entièrement déterminée. Nous l'obtiendrons en envisageant le mouvement des axes x et y, réglé, comme celui de l'axe z, par des équations telles que

$$(31) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\cos ax}{dt} = q\cos cx - r\cos bx, \\ \dfrac{d\cos ay}{dt} = q\cos cy - r\cos by. \end{cases}$$

Posons, pour abréger,

$$\mathcal{A} = \cos ax + i\cos ay,$$
$$\mathcal{A}_0 = \cos ax - i\cos ay,$$

et de même $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$ désigneront les quantités analogues, b et c remplaçant a. Nous déduisons de (31)

$$\mathcal{A}_0 \frac{d\mathcal{A}}{dt} - \mathcal{A} \frac{d\mathcal{A}_0}{dt} = q(\mathcal{A}_0\mathcal{C} - \mathcal{A}\mathcal{C}_0) - r(\mathcal{A}_0\mathcal{B} - \mathcal{A}\mathcal{B}_0).$$

Mais on a (8)

$$\mathcal{A}_0\mathcal{C} - \mathcal{C}_0\mathcal{A} = -2i\varepsilon\cos bz,$$

$$\mathcal{A}_0\mathcal{B} - \mathcal{B}_0\mathcal{A} = +2i\varepsilon\cos cz,$$

$$q = \frac{b'}{n} = \frac{b^2}{nh}\cos bz, \qquad r = \frac{c'}{n} = \frac{c^2}{nh}\cos cz;$$

il reste donc, d'après (26),

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 \frac{d\mathcal{A}}{dt} - \mathcal{A} \frac{d\mathcal{A}_0}{dt} &= -\frac{2i\varepsilon}{nh}(b^2\cos^2 bz + c^2\cos^2 cz)\\ &= -\frac{2i\varepsilon h}{n}\left(1 - \frac{a^2}{h^2}\cos^2 az\right).\end{aligned}$$

Divisant aux deux membres par $\mathcal{A}\mathcal{A}_0 = 1 - \cos^2 az$ et introduisant du au lieu de dt, suivant la relation (29), nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{A}}\frac{d\mathcal{A}}{du} - \frac{1}{\mathcal{A}_0}\frac{d\mathcal{A}_0}{du} &= -\frac{2i\varepsilon h}{\mu}\,\frac{1 - \dfrac{a^2}{h^2}\cos^2 az}{1-\cos^2 az}\\ &= -\frac{2i\varepsilon h}{\mu}\left(1 - \frac{a^2-h^2}{h^2}\,\frac{\cos^2 az}{1-\cos^2 az}\right).\end{aligned}$$

En remplaçant $a^2 - h^2$ par son expression (30) et $\cos^2 az$ par

$$\cos^2 az = \frac{\wp u - e_\alpha}{\wp(v-\omega_\alpha) - e_\alpha}, \tag{32}$$

on obtient

$$\frac{a^2-h^2}{h^2}\,\frac{\cos^2 az}{1-\cos^2 az} = \frac{\varepsilon\mu}{2ih}\,\frac{\wp' v}{\wp v - e_\alpha}\,\frac{\wp u - e_\alpha}{\wp u - \wp(v-\omega_\alpha)}.$$

La décomposition en éléments simples, par rapport à u, donne

$$\begin{aligned}\frac{\wp u - e_\alpha}{\wp u - \wp(v-\omega_\alpha)} = \frac{\wp(v-\omega_\alpha) - e_\alpha}{\wp'(v-\omega_\alpha)}\,[\zeta(u - v + \omega_\alpha) - \zeta(u + v - \omega_\alpha)\\ + \zeta v + \zeta(v - 2\omega_\alpha)].\end{aligned}$$

Mais on a d'abord

$$\zeta(v - 2\omega_\alpha) = \zeta v - 2\eta_\alpha$$

et, par le théorème d'addition des demi-périodes,

$$\frac{\wp(v - \omega_\alpha) - e_\alpha}{\wp'(v - \omega_\alpha)} = -\frac{\wp v - e_\alpha}{\wp' v}.$$

Il reste donc

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2 - h^2}{h^2}\,\frac{\cos^2 az}{1 - \cos^2 az}\\
&\quad = -\frac{\varepsilon\mu}{2ih}\left[\zeta(u - v + \omega_\alpha) - \zeta(u + v - \omega_\alpha) + 2\zeta v - 2\eta_\alpha\right],\\
&\frac{1}{\mathcal{A}}\,\frac{d\mathcal{A}}{du} - \frac{1}{\mathcal{A}_0}\,\frac{d\mathcal{A}_0}{du}\\
&\quad = -\frac{2i\varepsilon h}{\mu} + \zeta(u + v - \omega_\alpha) - \zeta(u - v + \omega_\alpha) - 2\zeta v + 2\eta_\alpha.
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_0$ ne sont autres que $\cos ax \pm i \cos ay$, le premier membre de cette dernière égalité nous est fourni aussi, d'après (1), sous la forme

$$\frac{1}{\mathcal{A}}\,\frac{d\mathcal{A}}{du} - \frac{1}{\mathcal{A}_0}\,\frac{d\mathcal{A}_0}{du} = \frac{2}{C}\,\frac{dC}{du} + \zeta(u + v - \omega_\alpha) - \zeta(u - v + \omega_\alpha) + 2\eta_\alpha.$$

La comparaison des deux égalités nous donne

$$\frac{1}{C}\,\frac{dC}{du} = -\frac{i\varepsilon h}{\mu} - \zeta v.$$

Par conséquent, C est une exponentielle du premier degré en u, où le seul coefficient de u est bien déterminé,

$$C = k e^{-\left(\frac{i\varepsilon h}{\mu} + \zeta v\right) u};$$

k est une constante arbitraire, dont le choix est subordonné à celui des axes rectangulaires x, y, parallèles au plan roulant, et qu'on peut prendre arbitrairement dans une des positions de la figure.

En conclusion, les formules (1) où l'on suppose v constant, u variant proportionnellement au temps, et C une exponentielle du premier degré en u, $C = ke^{\lambda u}$, représentent un mouvement à la Poinsot. La distance h du plan roulant au centre est donnée par la formule

$$h = -\frac{\mu}{i\varepsilon}(\lambda + \zeta v),$$

et les carrés des axes par les formules (30); μ est une constante arbitraire d'homogénéité, le signe de la quantité $\varepsilon = \pm 1$ indique si les deux systèmes d'axes x, y, z et a, b, c sont congruents ou non congruents.

Pour mieux faire apparaître l'homogénéité, il faut considérer comme donné $\frac{\mu}{n}$, au lieu de μ, et écrire alors

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{h}{n} = -\frac{1}{i\varepsilon}\frac{\mu}{n}(\lambda + \zeta v), \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\mu}{n}, \qquad C = ke^{\lambda u},\\ &\frac{a^2 - h^2}{n^2} = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{n^2}(\lambda + \zeta v)\frac{p' v}{p v - e_\alpha},\\ &\frac{b^2 - h^2}{n^2} = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{n^2}(\lambda + \zeta v)\frac{p' v}{p v - e_\beta},\\ &\frac{c^2 - h^2}{n^2} = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{n^2}(\lambda + \zeta v)\frac{p' v}{p v - e_\gamma}. \end{aligned}\right.$$

Il convient maintenant de discuter cette représentation des mouvements à la Poinsot, pour s'assurer de sa généralité.

En premier lieu, comment doit être choisi l'argument constant v? Il est clair que les trois racines e_α sont réelles, en d'autres termes, que les fonctions elliptiques sont à discriminant positif. En outre, l'arbitraire μ est choisie réelle par convention. Il en résulte d'abord (33) que $\lambda + \zeta v$ doit être purement imaginaire et, par conséquent, $p' v$ est purement imaginaire et $p v$ réel. Ceci peut avoir lieu de deux manières : $p v$ peut être compris entre e_2 et e_1 ou inférieur à e_3. Mais ce dernier cas est impossible; car alors les trois quantités $a^2 - h^2$, $b^2 - h^2$, $c^2 - h^2$ auraient un même signe (33) et, d'après (28), les trois cosinus de az, bz, cz ne seraient pas réels. Ainsi $p v$ est entre e_2 et e_1, c'est-à-dire que v, *diminué d'un multiple impair de la demi-période réelle, est purement imaginaire.*

Avant d'examiner l'argument variable u, considérons le produit

$V = U_\alpha^2 U_\beta^2 U_\gamma^2$, qui va intervenir. D'après la définition (2) de U_α, cette quantité se reproduit multipliée par ± 1 ou $\pm i$ quand on modifie la demi-période ω_α par l'addition d'une période $2\bar{\omega}$. Effectivement ce changement a pour effet de la multiplier par

$$-e^{\bar{\eta}\omega_\alpha - \eta_\alpha\bar{\omega}}.$$

Supposons $2\bar{\omega} = 2f\omega_\alpha + 2g\omega_\beta$, f et g étant des nombres entiers. Alors le facteur par lequel se multiplie U_α^2 est $(-1)^g$. Si, en même temps, ω_β n'est pas altéré, ω_γ doit être modifié pour que la somme des trois demi-périodes reste nulle, et U_γ^2 se reproduit, de même, multiplié par $(-1)^{f+g}$. Le produit V est donc multiplié par $(-1)^f$. Il est à remarquer que la quantité $\eta_\alpha\omega_\beta - \eta_\beta\omega_\alpha$ se reproduit aussi multipliée par $(-1)^f$. On aurait un résultat analogue si l'on altérait ω_β sans changer ω_α, et encore si l'on altérait à la fois ces deux demi-périodes. Il est donc prouvé que les altérations des demi-périodes ont pour effet de multiplier V et ε par un même facteur ± 1.

On peut aussi changer entre elles les demi-périodes; l'échange de deux d'entre elles change le signe de ε, sans altérer V, mais change aussi le signe du produit des différences $(e_\alpha - e_\beta)(e_\beta - e_\gamma)(e_\gamma - e_\alpha)$. Ce dernier n'est pas altéré quand on altère les demi-périodes ellesmêmes. Il en résulte donc que tous les changements des demi-périodes laissent inaltéré le produit $\varepsilon V(e_\alpha - e_\beta)(e_\beta - e_\gamma)(e_\gamma - e_\alpha)$. On sait que ce produit est égal à $-i$ quand on prend pour ω_α la demi-période réelle et pour ω_β la demi-période purement imaginaire. On a donc dans tous les cas

$$(34) \qquad U_\alpha^2 U_\beta^2 U_\gamma^2 = \frac{\varepsilon i}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\beta - e_\gamma)(e_\gamma - e_\alpha)}.$$

Examinons maintenant l'argument u. Par l'expression (32) de $\cos^2 az$, nous voyons que pu est réel. Multipliant entre elles les expressions des trois cosinus de az, bz, cz, et observant l'égalité (34), nous trouvons

$$(35) \quad (e_\alpha - e_\beta)(e_\beta - e_\gamma)(e_\gamma - e_\alpha)\cos az \cos bz \cos cz = -\frac{\varepsilon}{4} p'u \frac{p'v}{i},$$

et nous en concluons que $p'u$ est réel. Par conséquent, pu est supérieur à e_1, ou compris entre e_3 et e_2. Mais, dans le premier cas, les trois quantités $\wp u - e_\alpha$ seraient positives, tandis que $\wp(v - \omega_1) - e_1$ est une quantité négative. Donc un des cosinus de az, bz, cz serait imaginaire (32). Donc enfin $\wp u$ est entre e_3 et e_2; l'argument u, *diminué d'un multiple impair de la demi-période purement imaginaire*, est réel.

Cela étant, on vérifiera sans peine que les cosinus sont bien tous réels et, en valeur absolue, inférieurs à l'unité; les formules représentent bien un mouvement à la Poinsot.

En ce qui concerne la généralité des formules, on doit établir inversement qu'on peut déterminer les fonctions elliptiques et les arguments quand on donne les éléments géométriques du mouvement, c'est-à-dire la surface du second degré, la distance h, la constante n.

Tout d'abord, en multipliant deux à deux les relations (33) membre à membre, nous avons trois égalités, telles que celle-ci :

$$\frac{(a^2-h^2)(b^2-h^2)}{n^2h^2} = -\left(\frac{\mu}{n}\right)^2 \frac{\wp'^2 v}{4(\wp v - e_\alpha)(\wp v - e_\beta)}.$$

Comme on a

$$(36) \qquad \wp'^2 v = 4(\wp v - e_1)(\wp v - e_2)(\wp v - e_3),$$

il s'ensuit

$$(37) \qquad \left(\frac{\mu}{n}\right)^2 (e_\gamma - \wp v) = \frac{(a^2-h^2)(b^2-h^2)}{n^2h^2};$$

d'où, en tenant compte de ce que la somme $e_\alpha + e_\beta + e_\gamma$ est nulle,

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\mu}{n}\right)^2 e_\gamma = \frac{1}{3}\Bigg[&\frac{(b^2-h^2)(c^2-h^2)}{n^2h^2} + \frac{(c^2-h^2)(a^2-h^2)}{n^2h^2} \\ &- 2\,\frac{(a^2-h^2)(b^2-h^2)}{n^2h^2}\Bigg], \end{aligned} \right.$$

et de même pour e_α, e_β par permutation des lettres. Voici donc déterminées les fonctions elliptiques à employer, l'arbitraire $\frac{\mu}{n}$ étant choisie à volonté.

Multipliant, membre à membre, les trois égalités (33), on conclut encore, à cause de la relation (36),

$$(39) \qquad \frac{(a^2-h^2)(b^2-h^2)(c^2-h^2)}{n^3h^3} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\mu}{n}\right)^3 \frac{\wp' v}{i}.$$

Par la relation (37) est déterminé $\wp v$, par cette dernière $\frac{\wp' v}{i}$; l'argument v est déterminé entièrement, à des multiples près des périodes.

D'après l'égalité (37), on a

$$\left(\frac{\mu}{n}\right)^2(e_\alpha - e_\beta) = -\frac{(c^2-h^2)(a^2-b^2)}{n^2h^2},$$

et, par conséquent, suivant (39),

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\mu}{n}\right)^6 (e_\alpha - e_\beta)(e_\beta - e_\gamma)(e_\gamma - e_\alpha) \\ &\quad = -\frac{(a^2-h^2)(b^2-h^2)(c^2-h^2)}{n^3h^3}\,\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{n^3h^3} \\ &\quad = -\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{n^3h^3}\,\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\mu}{n}\right)^3\frac{\wp' v}{i}. \end{aligned} \right.$$

Examinons maintenant comment l'argument variable u est déterminé par les éléments géométriques variables du mouvement.

D'après (40), l'égalité (35) donne celle-ci

$$(41) \quad \frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{n^3h^3}\cos az \cos bz \cos cz = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{n}\right)^3 \wp' u;$$

d'autre part, l'expression (32) de $\cos^2 az$ fournit maintenant pour $\wp u$ la formule

$$(42) \qquad \left(\frac{\mu}{n}\right)^2 (e_\alpha - \wp u) = \frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{n^2h^2}\cos^2 az.$$

Ainsi que l'argument constant v, l'argument variable u est déterminé entièrement, sauf des multiples des périodes.

Il y a cependant encore une observation à faire au sujet de la détermination des arguments u et v. On voit aisément qu'en les déterminant comme il vient d'être dit, on assure la concordance des trois cosinus de az, bz, cz avec les expressions elliptiques, au signe près seulement. Il convient donc de revenir encore sur ce sujet pour assurer la concordance complète.

D'après la formule (41), il suffit d'assurer cette concordance pour deux de ces cosinus; elle aura lieu, en même temps pour le troisième.

Supposons deux périodes quelconques $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$; changeons u et v en $u+2\tilde{\omega}$, $v+2\tilde{\omega}'$. Par ce changement, $\cos az$ et $\cos bz$ se reproduisent respectivement multipliés par

$$e^{2\eta_\alpha(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')-2\omega_\alpha(\tilde{\eta}+\tilde{\eta}')} \quad \text{et} \quad e^{2\eta_\beta(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')-2\omega_\beta(\tilde{\eta}+\tilde{\eta}')}.$$

Soient, *à des périodes près* (f et g étant des nombres entiers),

$$\tilde{\omega}+\tilde{\omega}' \equiv f\omega_\alpha + g\omega_\beta.$$

Les deux facteurs par lesquels se multiplient $\cos az$ et $\cos bz$ peuvent se représenter par $(-1)^g$ et $(-1)^f$. On peut donc disposer de la parité des entiers f et g de manière à donner des signes *ad libitum* aux expressions des deux cosinus. Donc, en résumé, *l'accord complet des formules avec un mouvement à la Poinsot entièrement défini exige que la somme des arguments u et v soit déterminée à une double période près.*

Ce dernier fait s'explique fort naturellement par une circonstance du mouvement. Pour l'axe z, ce mouvement est périodique; sa période, relativement à l'argument u, n'est pas la période réelle 2ω, mais le double 4ω. La période de temps est $4\omega\frac{n}{\mu}$.

Pour la parfaite intelligence de l'application que j'ai en vue, il importe de bien préciser, en résumant, la détermination des éléments elliptiques au moyen des données géométriques ou des données numériques qui en tiennent lieu.

Je suppose donnés :

1° Deux systèmes d'axes rectangulaires (de même origine) a, b, c et x, y, z;

2° Trois nombres $\left(\frac{a}{n}\right)^2$, $\left(\frac{b}{n}\right)^2$, $\left(\frac{c}{n}\right)^2$, positifs ou négatifs.

Je considère un ellipsoïde ou hyperboloïde dont les axes de symétrie coïncident avec les axes de coordonnées a, b, c, et aient leurs carrés proportionnels aux trois nombres donnés. Soient a^2, b^2, c^2 ces trois carrés obtenus en multipliant les trois nombres par un nombre positif arbitraire n^2.

J'envisage les plans tangents perpendiculaires à l'axe z; soit h la distance du centre à l'un ou l'autre de ces plans. Je considère encore le nombre $\frac{h}{n}$ obtenu en divisant cette distance par la racine carrée de n^2, *avec un signe arbitraire,* et je prends ce nombre $\frac{h}{n}$, positif ou négatif, pour une donnée complémentaire.

Ceci posé, un mouvement à la Poinsot est entièrement déterminé avec une position de la figure mobile, comme il suit :

1° Les trois formules

$$\cos az = \frac{ha'}{a^2}, \qquad \cos bz = \frac{hb'}{b^2}, \qquad \cos cz = \frac{hc'}{c^2}$$

déterminent a', b', c' en fonction des données et des éléments choisis pour construire la figure. Ce sont les coordonnées du point de contact du plan roulant dans une de ses positions. On a donc une position de la figure mobile.

2° Ces mêmes formules, étant écrites ainsi

$$\cos az = \left(\frac{n}{a}\right)^2 \frac{h}{a} \frac{a'}{n}, \qquad \dots,$$

déterminent, en fonction des données, les composantes $\frac{a'}{n}$, $\frac{b'}{n}$, $\frac{c'}{n}$ de la rotation instantanée pour la position ci-dessus de la figure mobile.

Le mouvement est donc bien déterminé, sans aucune ambiguïté.

Pour représenter ce mouvement au moyen des formules elliptiques, on emploiera des fonctions elliptiques à discriminant positif. La détermination de ces fonctions elliptiques comporte, en premier lieu, l'introduction d'une constante arbitraire d'homogénéité, réelle et dénotée par $\frac{\mu}{n}$. Les trois racines e_1, e_2, e_3 sont alors données par les trois formules telles que la formule (38). Comme on doit avoir $e_1 > e_2 > e_3$, les indices α, β, γ reproduisent 1, 2, 3 dans un ordre qui n'a rien d'arbitraire. Les demi-périodes ω_α, ω_β, ω_γ sont alors déterminées à des périodes près. On peut achever de les déterminer *ad libitum*, mais ce choix doit cependant être fait de telle sorte que la quantité ε ait le signe qui lui est assigné par les données : elle doit être positive ou négative, suivant que les deux systèmes d'axes sont congruents ou non.

L'argument elliptique constant v est déterminé à des périodes près par les formules (37) et (39), en sorte que les quantités $\left(\frac{\mu}{n}\right)^2 \wp v$, $\left(\frac{\mu}{n}\right)^3 \wp' v$ peuvent être envisagées comme des données.

L'argument elliptique variable diminué d'un multiple impair de la période purement imaginaire est dans le rapport $\frac{\mu}{n}$ avec le temps. Mais, avec les données que j'ai prises, il faut le préciser davantage et dire la valeur de cet argument pour la position donnée de la figure mobile. A cet effet, on doit prendre les formules (42) et (41) qui déterminent $\wp u$ et $\wp' u$, et par lesquelles on voit que $\left(\frac{\mu}{n}\right)^2 \wp u$ et $\left(\frac{\mu}{n}\right)^3 \wp' u$ peuvent être envisagés comme des données. Par là, l'argument u, qui correspond à la position donnée de la figure mobile, est déterminé à des périodes près. Toutefois, si l'on prend arbitrairement l'une quelconque des déterminations de u et de v, les formules reproduiront les cosinus de az, bz, cz en valeur absolue seulement. Pour qu'elles reproduisent ces cosinus eux-mêmes, il faudra ajouter à $u + v$ une période déterminée, sauf des multiples de doubles périodes.

Telle est, en résumé, la manière de représenter par les formules elliptiques un mouvement à la Poinsot géométriquement donné.

V. — Sur la concordance de deux mouvements a la Poinsot.

Considérons deux mouvements à la Poinsot, qui donnent lieu aux mêmes fonctions elliptiques, c'est-à-dire à des fonctions ayant un même invariant absolu.

Nous distinguerons ces deux mouvements par les indices 0 et 1 ; l'indice 0 affectera les lettres relatives à l'un, l'indice 1 les lettres correspondantes et relatives à l'autre mouvement.

Comme les deux constantes d'homogénéité μ_0, μ_1 sont *ad libitum*, on peut supposer que les quantités e_1, e_2, e_3 sont les mêmes dans les formules relatives à l'un ou l'autre des mouvements. Grâce aux arbitraires μ_0, μ_1, on peut donc exprimer la condition de coïncidence des invariants en disant que les trois différences, telles que

$$\frac{(a_0^2-h_0^2)(b_0^2-h_0^2)}{\mu_0^2 h_0^2} - \frac{(a_1^2-h_1^2)(b_1^2-h_1^2)}{\mu_1^2 h_1^2},$$

sont égales entre elles.

Supposons maintenant les deux mouvements *isochrones*, c'est-à-dire ayant une même période de temps. Il faudra alors que les deux rapports $\frac{\mu_0}{n_0}$, $\frac{\mu_1}{n_1}$ soient égaux entre eux, en valeur absolue. On pourra dès lors remplacer μ_0^2, μ_1^2 par n_0^2, n_1^2 dans les différences précédentes.

Deux mouvements à la Poinsot, au même invariant et isochrones seront dits concordants. La condition de concordance s'exprime, on le voit, par la double égalité des trois différences, telles que

$$(43) \qquad \frac{(a_0^2-h_0^2)(b_0^2-h_0^2)}{n_0^2 h_0^2} - \frac{(a_1^2-h_1^2)(b_1^2-h_1^2)}{n_1^2 h_1^2}.$$

Considérant ainsi deux mouvements concordants, il nous faut trouver les relations qui existent entre les positions des deux figures mobiles, prises en un même instant quelconque. Dans la solution de cette question, il entre une constante arbitraire nouvelle; on peut supposer, en effet, que l'une des figures occupe une quelconque de ses positions en un instant initial, où l'autre figure occupe une position déterminée. Cette supposition faite, la correspondance entre les positions des deux figures sera complètement établie.

Les deux figures mobiles sont les deux systèmes d'axes x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1. Je ferai intervenir dans la notation un seul système d'axes fixes a, b, c, comme si les deux surfaces du second degré avaient les mêmes plans de symétrie. C'est, au reste, la supposition même que j'aurai à faire plus loin.

Les différentielles des arguments variables du_0, du_1 étant égales à $\frac{\mu_0}{n_0}dt$, $\frac{\mu_1}{n_1}dt$, sont égales entre elles, en valeur absolue; $u_0 \pm u_1$ est une constante. Il est indifférent de supposer constante la somme ou la différence, attendu que les formules (1) restent inaltérées par le changement des u, v, C en $-u$, $-v$, $-$C. Je supposerai la somme constante, et poserai

$$(44)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mu_1}{n_1} = -\dfrac{\mu_0}{n_0} = \tau, \\ u_0 + u_1 = v. \end{cases}$$

La relation entre les éléments *elliptiques* variables des deux mouvements est ainsi trouvée. C'est à l'addition des arguments qu'il faut maintenant demander les relations entre les éléments *géométriques*.

Pour ce but, on devra considérer les quantités suivantes :

$$(45)\qquad \begin{cases} \tau^2 \wp u_0 = -\dfrac{1}{3n_0^2h_0^2}\sum (a_0^2 - b_0^2)(a_0^2 - c_0^2)\cos^2 az_0, \\ \tau^2 \wp u_1 = -\dfrac{1}{3n_1^2h_1^2}\sum (a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 - c_1^2)\cos^2 az_1, \\ -\tau^3 \wp' u_0 = \dfrac{2}{n_0^3h_0^3}(a_0^2 - b_0^2)(b_0^2 - c_0^2)(c_0^2 - a_0^2)\cos az_0 \cos bz_0 \cos cz_0, \\ \tau^3 \wp' u_1 = \dfrac{2}{n_1^3h_1^3}(a_1^2 - b_1^2)(b_1^2 - c_1^2)(c_1^2 - a_1^2)\cos az_1 \cos bz_0 \cos cz_1. \end{cases}$$

Ces quantités ont effectivement la signification elliptique que la notation leur attribue, comme on voit par les formules (41, 42 et 44).

Pour deux mouvements concordants, il existe deux constantes $\tau^2\wp v$, $\tau^3\wp' v$, donnant lieu aux deux relations

$$(46)\qquad \frac{\tau^3\wp' u_0 + \tau^3\wp' v}{\tau^2\wp u_0 - \tau^2\wp v} = \frac{\tau^3\wp' u_1 + \tau^3\wp' v}{\tau^2\wp u_1 - \tau^2\wp v},$$

$$(47)\qquad \tau^2\wp u_0 + \tau^2\wp u_1 + \tau^2\wp v = \left(\frac{1}{2}\,\frac{\tau^3\wp' u_0 + \tau^3\wp' v}{\tau^2\wp u_0 - \tau^2\wp v}\right)^2.$$

Ces deux relations ne sont pas indépendantes; les deux constantes $\tau^2\wp v$, $\tau^3\wp' v$ ne sont pas toutes deux arbitraires. Cette circonstance, on va le voir, constitue un avantage, et nous allons, pour préciser entièrement, envisager encore d'autres relations.

Considérons l'angle que font entre eux les deux axes mobiles z_0, z_1.

Son cosinus est donné par la formule (21). En y mettant v au lieu de $u_0 + u_1$, j'obtiens

$$(48)\qquad \cos z_0 z_1 = \frac{2\zeta u_0 + 2\zeta u_1 - \sum \zeta \frac{v \pm v_1 \pm v_0}{2}}{\sum \zeta \frac{v \pm (v_0 - v_1)}{2} - \sum \zeta \frac{v \pm (v_0 + v_1)}{2}}.$$

Par le théorème d'addition des fonctions ζ, on a

$$(49)\qquad \zeta u_0 + \zeta u_1 - \zeta v = -\frac{1}{2} \frac{\wp' u_0 - \wp' u_1}{\wp u_0 - \wp u_1}.$$

Le second membre peut être exprimé par le moyen des quantités (45), comme il suit. Posons (42)

$$(50)\qquad \begin{cases} \Lambda = \dfrac{(a_0^2 - b_0^2)(a_0^2 - c_0^2)}{n_0^2 h_0^2} \cos^2 a z_0 - \dfrac{(a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 - c_1^2)}{n_1^2 h_1^2} \cos^2 a z_1 \\ \quad = \tau^2 (\wp u_1 - \wp u_0), \end{cases}$$

en observant que cette quantité variable Λ ne change pas par le changement des lettres a, b, c; puis,

$$\begin{aligned} N = \frac{1}{\Lambda} \Bigg[& \frac{(a_0^2 - b_0^2)(b_0^2 - c_0^2)(c_0^2 - a_0^2)}{n_0^3 h_0^3} \cos a z_0 \cos b z_0 \cos c z_0 \\ & + \frac{(a_1^2 - b_1^2)(b_1^2 - c_1^2)(c_1^2 - a_1^2)}{n_1^3 h_1^3} \cos a z_1 \cos b z_1 \cos c z_1 \Bigg] \\ = \frac{1}{2} \tau & \frac{\wp' u_0 - \wp' u_1}{\wp u_0 - \wp u_1}. \end{aligned}$$

Désignons encore par A et B les deux constantes

$$(51)\qquad \begin{cases} A = \tau \left[\sum \zeta \dfrac{v \pm (v_0 - v_1)}{2} - \sum \zeta \dfrac{v \pm (v_0 + v_1)}{2} \right], \\ B = \tau \left[\sum \zeta \dfrac{v \pm v_0 \pm v_1}{2} - 2\zeta v \right]. \end{cases}$$

L'égalité (49) nous fournit la relation

$$(52)\qquad A(\cos a z_0 \cos a z_1 + \cos b z_0 \cos b z_1 + \cos c z_0 \cos c z_1) + 2N + B = 0.$$

En différentiant, nous allons avoir une nouvelle relation contenant la seule constante A. Pour faire cette différentiation, on a d'abord (44)

$$\frac{d}{dt}(\zeta u_1 + \zeta u_0) = \tau\left(\frac{d\zeta u_1}{du_1} - \frac{d\zeta u_0}{du_0}\right) = \tau(\mathfrak{p} u_0 - \mathfrak{p} u_1) = -\frac{\Lambda}{\tau};$$

d'où résulte, d'après (49),

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda.$$

D'autre part, suivant (27),

$$\frac{d\cos a z_0}{dt} = \frac{(b_0^2 - c_0^2)}{n_0^2 h_0^2} \cos b z_0 \cos c z_0, \qquad \ldots.$$

La relation (52) donne donc, par différentiation,

$$(53) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A \sum \left(\frac{b_0^2 - c_0^2}{n_0^2 h_0^2} \cos b z_0 \cos c z_0 \cos a z_1 \right. \\ & \qquad \left. + \frac{b_1^2 - c_1^2}{n_1^2 h_1^2} \cos b z_1 \cos c z_1 \cos a z_0 \right) + 2\Lambda = 0. \end{aligned} \right.$$

Après avoir établi ces formules, envisageons la question importante de déterminer les positions correspondantes des deux figures mobiles dans deux mouvements concordants.

Ce qui justifie l'emploi des relations surabondantes (46, 47, 52, 53), c'est la nécessité de fixer les signes des cosinus.

Si l'on suppose connues les constantes $\tau^2 \mathfrak{p} v$, $\tau^3 \mathfrak{p}' v$, A, B, on peut déterminer entièrement les cosinus de $a z_1$, $b z_1$, $c z_1$, correspondant à des cosinus donnés pour $a z_0$, $b z_0$, $c z_0$. Effectivement, la relation (47) donne $\tau^2 \mathfrak{p} u_1$, par conséquent Λ (50) et les carrés des cosinus. La relation (46) donne $\tau^3 \mathfrak{p}' u_1$, et, par conséquent, N; puis l'une ou l'autre des relations (52) et (53) permet de fixer les signes des cosinus eux-mêmes.

Il n'y a d'ailleurs aucun embarras pour choisir ces constantes $\tau^2 \mathfrak{p} v$, $\tau^3 \mathfrak{p}' v$, A, B, si l'on veut composer un exemple. Ayant pris, en effet, deux mouvements à la Poinsot dont les données satisfassent aux relations de concordance (43), on peut choisir à volonté, dans ces deux mouvements, les axes z_0, z_1 pour correspondants. La valeur de Λ, pour cette position, se trouve déterminée; par la relation (53), on en conclut A; par la relation (52), B, et par les relations (47) et (46), $\tau^2 \mathrm{p} v$, $\tau^3 \mathrm{p}' v$.

On le voit donc, si l'on définit deux mouvements à la Poinsot concordants par la position des deux figures mobiles en un même instant, les constantes A, B, $\tau^2 \mathrm{p}' v$ peuvent être envisagées comme des données; de plus, pour chaque position ultérieure d'un des axes, z_0 par exemple, celle de l'autre axe z_1 est déterminée complètement par des formules explicites.

VI. — Sur une forme de l'inversion des intégrales elliptiques.

Dans l'expression (48) de $\cos z_0 z_1$, les arguments u_0 et u_1 sont seuls variables, et leur somme est constante. Si l'on prend l'un de ces arguments pour variable indépendante, $\cos z_0 z_1$ est une fonction doublement périodique à deux pôles. On sait, par la théorie générale, que le carré de sa dérivée est exprimable par un polynôme du quatrième degré, où la variable est ce cosinus lui-même. Je vais former ce polynôme, non pas sous sa forme la plus réduite, mais sous la forme la plus commode pour l'application que j'ai en vue. Au lieu de raisonner sur l'expression même de $\cos z_0 z_1$, je vais employer une expression d'apparence plus simple, en modifiant seulement les notations. Je dois avertir, en outre, que, dans ce qui va suivre, aucune supposition particulière ne doit être faite sur les fonctions elliptiques employées, tandis que précédemment elles étaient supposées à discriminant réel et positif.

La fonction doublement périodique à deux pôles qui sert de *type* est la suivante :

$$(54) \qquad z = \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'v}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v},$$

et l'on y considère u comme l'argument variable. Pour abréger l'écriture, je conviens de représenter, au moyen d'un indice, le résultat de la substitution d'un argument constant quelconque à la place de u dans cette fonction. Ainsi, je poserai

$$z_a = \zeta(a+v) - \zeta a - \zeta v.$$

Pour représenter alors une fonction doublement périodique à deux pôles et quelconque, je prendrai $(z - z_a)$ multiplié par un facteur constant arbitraire. Cette notation a l'avantage de mettre en évidence les racines de la fonction, à savoir $u = a$ et $u = -(a + v)$, sauf des périodes, et l'on peut immédiatement écrire l'expression de la fonction en produit; c'est

$$(55) \qquad z - z_a = \frac{\sigma v\, \sigma(u-a)\, \sigma(u+a+v)}{\sigma a\, \sigma(a+v) \sigma u\, \sigma(u+v)}.$$

Prenons quatre fonctions analogues en employant quatre arguments constants a, b, a_1, b_1. Partageons les facteurs, qui en proviennent suivant l'expression (55), en deux groupes, chacun de ces groupes comprenant un seul facteur de chaque espèce pris dans une même fonction. Soient ainsi Φ et Φ_1 les fonctions composées de cette manière :

$$\Phi = \frac{\sigma^2 v\, \sigma(u-a)\, \sigma(u-a_1)\, \sigma(u+b+v)\, \sigma(u+b_1+v)}{\sigma a\, \sigma a_1\, \sigma(b+v)\, \sigma(b_1+v)\, \sigma^2 u\, \sigma^2(u+v)},$$

$$\Phi_1 = \frac{\sigma^2 v\, \sigma(u-b)\, \sigma(u-b_1)\, \sigma(u+a+v)\, \sigma(u+a_1+v)}{\sigma b\, \sigma b_1\, \sigma(a+v)\, \sigma(a_1+v)\, \sigma^2 u\, \sigma^2(u+v)}.$$

Ces deux fonctions sont doublement périodiques de seconde espèce, en général. Mais elles deviennent doublement périodiques ordinaires, toutes deux en même temps, sous l'unique condition

$$(56) \qquad a + a_1 = b + b_1.$$

Supposons que cette relation entre les quatre arguments constants ait lieu effectivement. La fonction Φ est alors doublement périodique; décomposons-la en éléments simples. Il entrera, dans la décomposition, $\wp u$, $\wp(u+v)$ et $\zeta(u+v) - \zeta u$, en sorte qu'on pourra écrire la formule de décomposition sous la forme

$$\Phi = \alpha[\wp u - \wp(u+v)] - \beta[\wp u + \wp(u+v) + \wp v] - \gamma z - \delta,$$

où α, β, γ, δ sont des coefficients constants, z tenant la place de

$$\zeta(u+v) - \zeta u.$$

La fonction Φ_1 se déduit de Φ par le changement de u en $-(u+v)$, en ce qui concerne les facteurs variables. Pour ce qui regarde les facteurs constants, il faut encore multiplier par

$$\frac{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma(b+v)\,\sigma(b_1+v)}{\sigma b\,\sigma b_1\,\sigma(a+v)\,\sigma(a_1+v)}.$$

Dans le changement de u en $-(u+v)$, $pu - p(u+v)$ se reproduit changé de signe, tandis que $pu + p(u+v) + pv$ et z se reproduisent sans changement. On a donc

$$-\frac{\sigma b\,\sigma b_1\,\sigma(a+v)\,\sigma(a_1+v)}{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma(b+v)\,\sigma(b_1+v)}\Phi_1$$
$$= \alpha[pu - p(u+v)] + \beta[pu + p(u+v) + pv] + \gamma z + \delta.$$

Soit, pour abréger l'écriture,

$$(57)\qquad -\frac{\sigma b\,\sigma b_1\,\sigma(a+v)\,\sigma(a_1+v)}{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma(b+v)\,\sigma(b_1+v)} = \lambda,$$

et rappelons qu'on a, par le théorème d'addition,

$$pu + p(u+v) + pv = z^2;$$

nous pouvons écrire nos deux formules ainsi :

$$(58)\qquad \Phi = \alpha[pu - p(u+v)] - (\beta z^2 + \gamma z + \delta),$$

$$(59)\qquad \lambda\Phi_1 = \alpha[pu - p(u+v)] + (\beta z^2 + \gamma z + \delta).$$

J'en conclus

$$\Phi\Phi_1 + \frac{1}{\lambda}(\beta z^2 + \gamma z + \delta)^2 = \frac{\alpha^2}{\lambda}[pu - p(u+v)]^2.$$

En remettant, au lieu de $\Phi\Phi_1$, le produit des quatre binômes analogues à $(z - z_a)$, j'ai ainsi

$$(60)\qquad \left\{\begin{aligned}&(z - z_a)(z - z_b)(z - z_{a_1})(z - z_{b_1}) + \frac{1}{\lambda}(\beta z^2 + \gamma z + \delta)^2\\ &\quad = \frac{\alpha^2}{\lambda}[pu - p(u+v)]^2.\end{aligned}\right.$$

C'est la formule d'inversion mise sous une forme spéciale, d'une grande généralité : z est une fonction doublement périodique de u et nous avons ici un polynôme du quatrième degré en z exprimé par le carré d'une fonction doublement périodique de u; de plus, cette fonction est la dérivée de z par rapport à u; on a, en effet,

$$\frac{dz}{du} = \wp u - \wp(u+v).$$

Pour compléter ce résultat, il faut encore donner les expressions des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en fonction des arguments a, b, a_1, b_1, v. A cet effet, pour avoir α et β, envisageons la partie principale de Φ aux pôles $u = 0$ et $u = -v$. Nous aurons ainsi

$$(61) \qquad \left\{ \begin{aligned} 1 &= \alpha - \beta, \\ -\lambda &= -\alpha - \beta. \end{aligned} \right.$$

L'expression qui en résulte pour le coefficient $\frac{\alpha^2}{\lambda}$ a une forme intéressante. Pour la présenter sous un aspect symétrique, posons, conformément à la relation (56),

$$(62) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_1 &= c + a', & a &= c - a', \\ b_1 &= c + b', & b &= c - b'. \end{aligned} \right.$$

D'après l'*équation à trois termes*, on a

$$\begin{aligned} &\sigma a \sigma a_1 \sigma(b+v) \sigma(b_1+v) - \sigma b \sigma b_1 \sigma(a+v) \sigma(a_1+v) \\ &\quad = \sigma v \sigma(2c+v) \sigma(b'-a') \sigma(b'+a'), \end{aligned}$$

et il en résulte

$$\frac{\alpha^2}{\lambda} = \frac{[\sigma v \sigma(2c+v) \sigma(b'-a') \sigma(b'+a')]^2}{4 \sigma a \sigma a_1 \sigma b \sigma b_1 \sigma(a+v) \sigma(a_1+v) \sigma(b+v) \sigma(b_1+v)}.$$

Il y a aussi une expression remarquable pour $\frac{2\beta\gamma}{\lambda}$, mais ce n'est pas par cette voie qu'on la trouve le plus facilement. On l'obtient immédiatement en observant que le polynôme (60) diffère seulement par le facteur constant $\frac{\alpha^2}{\lambda}$ du polynôme ([1])

$$(63) \qquad z^4 - 6\wp v . z^2 + 4\wp' v . z + g_2 - 3\wp^2 v,$$

expression de $\left(\frac{dz}{du}\right)^2$. Le polynôme (60) manque donc du second terme et l'on a

$$\frac{2\beta\gamma}{\lambda} = z_a + z_b + z_{a_1} + z_{b_1}.$$

Cette forme de l'inversion se présente dans plusieurs applications mécaniques, mais pour des cas particuliers de la formule (60). Dans l'application que j'ai ici en vue, le coefficient β est nul. On voit par les égalités (61) qu'en ce cas λ et α se réduisent à l'unité, et la formule (60) devient simplement

$$(64) \quad \begin{cases} (z - z_a)(z - z_b)(z - z_{a_1})(z - z_{b_1}) + (\gamma z + \delta)^2 \\ \qquad = [\wp u - \wp(u + v)]^2. \end{cases}$$

La manière dont il faut choisir les arguments a, b, a_1, b_1 pour obtenir cette formule, n'apparaît pas très nettement par la relation

$$(65) \qquad z_a + z_b + z_{a_1} + z_{b_1} = 0,$$

non plus que par la relation $\lambda = 1$ avec la forme (57) de λ. Mais, en employant les notations (62) et posant, en outre,

$$(66) \qquad v = w - c,$$

on peut écrire λ ainsi

$$-\lambda = \frac{\sigma(w - a')\sigma(w + a')\sigma(c - b')\sigma(c + b')}{\sigma(w - b')\sigma(w + b')\sigma(c - a')\sigma(c + a')} = \frac{(\wp w - \wp a')(\wp c - \wp b')}{(\wp w - \wp b')(\wp c - \wp a')}.$$

([1]) *Traité des fonctions elliptiques*, p. 119.

La condition $\lambda = 1$ donne alors

$$(67)\quad (p\varpi - pa')(pc - pb') + (p\varpi - pb')(pc - pa') = 0$$

et permet de trouver sans ambiguïté la fonction p pour l'un quelconque des quatre arguments a', b', c, ϖ, étant donnés les trois autres.

VII. — Mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini en l'absence de force accélératrice.

Équations différentielles.

D'après MM. W. Thomson et Tait, M. Kirchhoff a établi, sous une forme bien connue et fort remarquable, les équations différentielles du mouvement pour un corps solide plongé dans un liquide indéfini, en l'absence de toute force accélératrice extérieure. Clebsch [1] a modifié la forme de ces équations par l'emploi de variables un peu différentes, et c'est la forme de Clebsch que j'emploierai ici. Il y a, dans ces équations, six inconnues $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$. La variable indépendante est le temps, désigné par t. La lettre T désigne la force vive du système total (solide et liquide). C'est une forme quadratique contenant les six variables x, y.

Voici les équations différentielles dont il s'agit

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_3\frac{\partial T}{\partial y_2} - x_2\frac{\partial T}{\partial y_3},\\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1\frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial y_1},\\ \frac{dx_3}{dt} &= x_2\frac{\partial T}{\partial y_1} - x_1\frac{\partial T}{\partial y_2}; \end{aligned}\right.$$

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= x_3\frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial T}{\partial x_3} + y_3\frac{\partial T}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial T}{\partial y_3},\\ \frac{dy_2}{dt} &= x_1\frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3\frac{\partial T}{\partial y_1},\\ \frac{dy_3}{dt} &= x_2\frac{\partial T}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2\frac{\partial T}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial T}{\partial y_2}, \end{aligned}\right.$$

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. III, p. 238.

Voici maintenant la signification des six variables. On considère trois axes rectangulaires, mobiles dans l'espace, fixes dans le corps. Les composantes de la vitesse de l'origine de ces axes, prises sur ces axes eux-mêmes, étant désignées par U, V, W, et les composantes de la rotation instantanée relative de l'espace par rapport au corps étant désignées par P, Q, R [1], on a

$$x_1 = \frac{\partial T}{\partial U}, \quad x_2 = \frac{\partial T}{\partial V}, \quad x_3 = \frac{\partial T}{\partial W},$$
$$y_1 = \frac{\partial T}{\partial P}, \quad y_2 = \frac{\partial T}{\partial Q}, \quad y_3 = \frac{\partial T}{\partial R},$$

quand T est exprimé par les variables U, V, W, P, Q, R. Inversement, T étant exprimé par les x, y, on a

$$(70) \qquad U = \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad V = \frac{\partial T}{\partial x_2}, \quad W = \frac{\partial T}{\partial x_3},$$

$$(71) \qquad P = \frac{\partial T}{\partial y_1}, \quad Q = \frac{\partial T}{\partial y_2}, \quad R = \frac{\partial T}{\partial y_3}.$$

Quelle que soit la forme quadratique T, les équations différentielles (68) et (69) ont trois intégrales immédiates, savoir

$$(72) \qquad 2T = \text{const.} = l,$$

$$(73) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{const.} = m,$$

$$(74) \qquad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \text{const.} = n.$$

Cas intégrable. Réduction à une intégrale elliptique.

M. Kirchhoff avait réduit à une intégrale elliptique la solution du problème dans le cas particulier où la force vive ne contient que les

---

[1] Je dis la composante de *la rotation instantanée de l'espace par rapport au corps* et non *la rotation du corps dans l'espace,* afin de rétablir le sens habituel de rotation, qui est renversé dans les équations de Clebsch. L'observation de ce détail, sans importance théorique, est cependant indispensable si l'on veut éviter une confusion dans les résultats.

carrés des variables. Clebsch, dans des recherches fort étendues sur les équations (68) et (69), a montré que la même circonstance se produit dans un cas un peu plus général, celui où T a la forme suivante :

$$(75)\quad \begin{cases} \mathrm{T} = \frac{1}{2}p(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{2}p'x_3^2 \\ \qquad + q(x_1y_1+x_2y_2)+q'x_3y_3+\frac{1}{2}r(y_1^2+y_2^2)+\frac{1}{2}r'y_3^2. \end{cases}$$

Effectivement, en ce cas, le second membre de la dernière équation (69) se réduit à zéro. Donc y_3 est une constante. Cette nouvelle intégrale assure la solution complète, comme on le sait par le principe du dernier multiplicateur. Sans donner le calcul, Clebsch dit qu'on parvient à une intégrale elliptique; c'est ce qu'en effet nous allons montrer.

Par l'intégrale (74) et la troisième équation (68), nous avons

$$(76)\qquad \begin{cases} x_1y_1+x_2y_2 = n - x_3y_3, \\ x_2y_1 - y_2x_1 = \frac{1}{r}\frac{dx_3}{dt}, \end{cases}$$

et l'identité

$$(x_1y_1+x_2y_2)^2+(x_2y_1-y_2x_1)^2=(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$$

nous permet de conclure

$$(77)\qquad \frac{1}{r^2}\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2+(n-x_3y_3)^2=(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2).$$

L'intégrale (73) donne

$$(78)\qquad x_1^2+x_2^2=m-x_3^2,$$

et l'intégrale (72) devient

$$(79)\qquad y_1^2+y_2^2=\frac{p'-p}{r}(m_1-hx_3-x_3^2),$$

avec ces notations abrégées

$$(80)\qquad \begin{cases} m_1 = \dfrac{pm + 2qn + r'y_3^2 - l}{p - p'}, \\ h = 2\dfrac{q - q'}{p - p'}y_3. \end{cases}$$

Au moyen des expressions (78) et (79) l'équation (77) devient

$$(81)\qquad \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = r(p' - p)(m_1 - hx_3 - x_3^2)(m - x_3^2) - r^2(n - y_3x_3)^2.$$

Comme y_3 est une constante, nous avons ici une équation différentielle où les variables sont séparées; le temps est exprimé au moyen d'une quadrature elliptique.

Il s'agit maintenant d'exprimer les variables x, y en fonction explicite du temps et de parvenir, par leur intermédiaire, à l'expression des quantités qui déterminent, à chaque instant, la position du corps solide.

Inversion; expression elliptique des constantes.

Pour ce but, employons la formule d'inversion (64) en assimilant le carré $-r^2(n - y_3x_3)^2$ au carré $(\gamma z + \delta)^2$. Pour identifier entre elles les premières parties des deux polynômes du quatrième degré, il faudra poser

$$(82)\qquad x_3 = -\tfrac{1}{4}h + \rho z,$$

ρ étant une constante d'homogénéité arbitraire.

Sans préciser en aucune façon les signes des radicaux, nous poserons ensuite

$$(83)\qquad \begin{cases} x_3 - \sqrt{m} = \rho(z - z_a) = -\tfrac{1}{4}h + \rho z - \sqrt{m}, \\ x_3 + \sqrt{m} = \rho(z - z_b) = -\tfrac{1}{4}h + \rho z + \sqrt{m}, \end{cases}$$

$$x_3 + \tfrac{1}{2}h - \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1} = \rho(z - z_{a_1}) = \tfrac{1}{4}h + \rho z - \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1},$$

$$x_3 + \tfrac{1}{2}h + \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1} = \rho(z - z_{b_1}) = \tfrac{1}{4}h + \rho z + \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1}$$

De là résultent d'abord ces expressions des constantes

$$(84)\qquad \begin{cases} 2\sqrt{m} = \rho(z_a - z_b), \\ 2\sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1} = \rho(z_{a_1} - z_{b_1}), \\ \tfrac{1}{2}h = \rho(z_a + z_b) = -\rho(z_{a_1} + z_{b_1}); \end{cases}$$

les deux dernières sont concordantes suivant une égalité ci-dessus (65).

Pour abréger l'écriture, posons

$$(85)\qquad s = \frac{iry_3}{\sqrt{r(p'-p)}}$$

et identifions les deux carrés dans l'un et l'autre polynôme du second degré en posant

$$(86)\qquad s\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right) = \rho^2(\gamma z + \delta).$$

Nous aurons ainsi, d'après les égalités (81) et (64)

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = \rho^4 r(p'-p)\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \rho^2 r(p'-p)\left(\frac{dx_3}{du}\right)^2,$$

et, en extrayant les racines carrées,

$$(87)\qquad du = \rho\sqrt{r(p'-p)}\,dt,$$

relation entre l'argument u et le temps t. Pour préciser, nous supposerons la racine carrée extraite de la même manière que dans l'expression (85) de s.

Pour exprimer s et $\frac{n}{y_3}$ d'après l'égalité (86), employons maintenant la relation (58) qui devient, β étant nul et $\alpha = 1$,

$$(88)\qquad \Phi = \wp u - \wp(u+v) - \frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right).$$

Semblablement, λ étant l'unité, on a, d'après (59),

$$(89)\qquad \Phi_1 = \wp u - \wp(u+v) + \frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right).$$

Prenant $u = a$ dans la première, hypothèse qui fait évanouir Φ, ou bien $u = b$ dans la seconde pour faire évanouir Φ_1, on a, suivant (83),

$$(88a) \qquad pa - p(a+v) = \frac{s}{\rho^2}\left(\sqrt{m} - \frac{n}{y_3}\right),$$

$$(89a) \qquad pb - p(b+v) = \frac{s}{\rho^2}\left(\sqrt{m} + \frac{n}{y_3}\right).$$

De là résultent

$$(90) \qquad \begin{cases} s\sqrt{m} = \frac{1}{2}\rho^2[pb + pa - p(a+v) - p(b+v)], \\ \dfrac{sn}{y_3} = \frac{1}{2}\rho^2[pb - pa + p(a+v) - p(b+v)]. \end{cases}$$

On peut aussi obtenir d'autres expressions de s si l'on décompose Φ et Φ_1 en éléments simples et que l'on prenne, dans ces décompositions, les termes en ζu.

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} s &= \quad \rho[\zeta(b+v) + \zeta(b_1+v) - \zeta a - \zeta a_1 - 2\zeta v] \\ &= -\rho[\zeta(a+v) + \zeta(a_1+v) - \zeta b - \zeta b_1 - 2\zeta v], \end{aligned}$$

expressions dont la concordance se vérifie par la relation (65).

Expression des variables par des fonctions elliptiques.

Pour la suite du calcul, j'aurai à décomposer en éléments simples la fonction

$$\varphi(u) = \frac{x_3\left(x_3 - \dfrac{n}{y_3}\right)}{x_3^2 - m},$$

et je vais faire tout d'abord cette décomposition.

Devenant infinie seulement quand le dénominateur s'évanouit, cette fonction a les seuls pôles $u = a$, $-(a+v)$, b, $-(b+v)$, comme on voit par les expressions (83) de $x_3 \pm \sqrt{m}$. Nous avons à chercher les résidus de ces pôles. Un tel résidu est la valeur prise, au pôle considéré, par l'expression

$$\frac{x_3\left(x_3-\dfrac{n}{y_3}\right)}{\dfrac{d(x_3^2-m)}{du}}=\frac{x_3-\dfrac{n}{y_3}}{2\dfrac{dx_3}{du}}=\frac{1}{2\rho}\,\frac{x_3-\dfrac{n}{y_3}}{pu-p(u+v)}.$$

Les pôles sont, tous quatre, des racines de Φ ou de Φ_1. On voit par les égalités (88) et (89) que les résidus sont $\pm\frac{\rho}{2s}$ suivant qu'il s'agit des racines de Φ ou des racines de Φ_1. Voici donc la formule de décomposition

$$\begin{aligned}\varphi(u)=\frac{\rho}{2s}[\zeta(u-a)&+\zeta(u+b+v)\\&-\zeta(u-b)-\zeta(u+a+v)+\mathrm{D}],\end{aligned}$$

avec une constante D qu'il faut encore trouver. Pour ce but, observons que l'hypothèse $u=0$ rend x_3 infini (82) et donne ainsi $\varphi(0)=1$. Donc

$$(91)\qquad -\zeta a+\zeta(b+v)+\zeta b-\zeta(a+v)+\mathrm{D}=\frac{2s}{\rho}.$$

Nous allons tout à l'heure employer cette décomposition de $\varphi(u)$, sous la forme suivante. Multipliant $\varphi(u)$ par $iry_3\,dt=\frac{s}{\rho}\,du$, nous avons

$$\begin{aligned}&\frac{irx_3(y_3x_3-n)}{x_3^2-m}\,dt\\&\quad=\tfrac{1}{2}[\zeta(u-a)+\zeta(u+b+v)-\zeta(u-b)-\zeta(u+a+v)+\mathrm{D}]\,du.\end{aligned}$$

Prenons maintenant, d'après (83), la demi-différentielle logarithmique de x_3^2-m; ce sera, en tenant compte de l'intégrale (73),

$$\begin{aligned}&\frac{x_1\,dx_1+x_2\,dx_2}{x_1^2+x_2^2}\\&\quad=\tfrac{1}{2}[\zeta(u-a)+\zeta(u+a+v)\\&\qquad\qquad+\zeta(u-b)+\zeta(u+b+v)-2\zeta u-2\zeta(u+v)]\,du,\end{aligned}$$

comme il résulte de l'expression (55) établie pour $z - z_a$ et prise aussi pour son analogue $z - z_b$.

En combinant les deux dernières égalités, j'obtiens celle-ci, qui va être employée,

$$(92)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 - irx_3(y_3x_3 - n)\,dt}{x_1^2 + x_2^2} \\ \quad = [\zeta(u+a+v) + \zeta(u-b) - \zeta(u+v) - \zeta u - \frac{1}{2}\mathrm{D}]\,du. \end{cases}$$

Arrivons maintenant à la première intégration qu'il faut effectuer. Formons d'abord, d'après les équations différentielles (68), la quantité

$$x_1\frac{dx_2}{dt} - x_2\frac{dx_1}{dt} = (x_1^2 + x_2^2)\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_3} - x_3\left(x_1\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_2}\right).$$

En mettant, pour T, son expression (75) et utilisant l'intégrale (74), nous obtenons

$$(93)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{x_1^2 + x_2^2} = \left[(q'-q)x_3 + r'y_3 - \dfrac{rx_3(n - x_3y_3)}{x_1^2 + x_2^2}\right]dt \\ \qquad = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\alpha}{\rho} + \beta z\right)du - \dfrac{rx_3(n - x_3y_3)}{x_1^2 + x_2^2}\,dt. \end{cases}$$

On a posé ici, pour abréger,

$$(94)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{s}{r}\left[r' - \dfrac{h(q'-q)}{4y_3}\right], \\ \beta = \dfrac{s(q'-q)}{ry_3} = -\dfrac{h}{2s}. \end{cases}$$

A peine est-il besoin d'observer que les quantités représentées par ces lettres α et β sont sans aucun lien avec celles qu'on a envisagées dans un paragraphe précédent, et qui ont disparu du calcul.

Les égalités (92) et (93) nous donnent

$$\begin{aligned} d\log(x_1 + ix_2) &= \frac{x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + i(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)}{x_1^2 + x_2^2} \\ &= \left[\frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{2}\mathrm{D} + \beta z + \zeta(u+a+v) + \zeta(u-b) - \zeta(u+v) - \zeta u\right]du, \end{aligned}$$

ou bien, z étant remplacé par son expression (54) en éléments simples,

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\log(x_1+ix_2) = \frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{2}\mathrm{D} + \beta[\zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v] \\ + \zeta(u+a+v) + \zeta(u-b) - \zeta(u+v) - \zeta u.\end{aligned}$$

Intégrant les deux membres et écrivant sous une forme appropriée la constante d'intégration E, nous obtenons

$$(95)\quad x_1 + ix_2 = -\rho\mathrm{E}\left[\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}e^{-u\zeta v}\right]^{\beta}\frac{\sigma v\,\sigma(u+a+v)\,\sigma(u-b)}{\sigma(b+v)\,\sigma a\,\sigma u\,\sigma(u+v)}e^{\left(\frac{\alpha}{\rho}-\frac{1}{2}\mathrm{D}\right)u}.$$

Pour en déduire la quantité conjuguée $x_1 - ix_2$, je divise par $x_1 + ix_2$ la somme des carrés $x_1^2 + x_2^2 = m - x_3^2 = -\rho^2(z - z_a)(z - z_b)$, après avoir exprimé $z - z_a$ et $z - z_b$ en produit (55). Il vient ainsi

$$(96)\quad x_1 - ix_2 = \frac{\rho}{\mathrm{E}}\left[\frac{\sigma u}{\sigma(u+v)}e^{u\zeta v}\right]^{\beta}\frac{\sigma v\,\sigma(u+b+v)\,\sigma(u-a)}{\sigma(a+v)\,\sigma b\,\sigma u\,\sigma(u+v)}e^{\left(\frac{1}{2}\mathrm{D}-\frac{\alpha}{\rho}\right)u}.$$

Les deux autres inconnues y_1 et y_2 s'obtiennent sans intégration nouvelle par le calcul suivant, où interviennent les relations (76),

$$\begin{aligned}(x_1 \pm ix_2)(y_1 \mp iy_2) &= x_1y_1 + x_2y_2 \pm i(x_2y_1 - y_2x_1) \\ &= n - x_3y_3 \pm \frac{i}{r}\frac{dx_3}{dt},\end{aligned}$$

ce qui conduit à cette formule

$$(x_1 \pm ix_2)(y_1 \mp iy_2) = \mp\frac{\rho^2 y_3}{s}\left[\wp u - \wp(u+v) \pm \frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right)\right]$$

ou enfin, d'après (88) et (89),

$$(x_1 + ix_2)(y_1 - iy_2) = -\frac{\rho^2 y_3}{s}\Phi_1,$$

$$(x_1 - ix_2)(y_1 + iy_2) = +\frac{\rho^2 y_3}{s}\Phi.$$

Les quantités $x_1 \pm ix_2$, Φ, Φ_1 ont déjà été exprimées en produits; par là on connaîtra les expressions de $y_1 \pm iy_2$ sous forme analogue; mais elles ne seront pas utiles.

Nous avons ainsi exprimé en fonction explicite de u, proportionnel au temps, les cinq inconnues x, y. Mais ces inconnues sont auxiliaires. Il s'agit d'en déduire les quantités qui fixent, à chaque instant, le lieu du corps solide dans le fluide où il est plongé.

Rotation du corps solide.

Je désignerai par X, Y, Z les axes fixes dans l'espace, par A, B, C les axes fixes dans le corps.

Les trois dérivées $\frac{\partial T}{\partial y}$ sont les composantes (71) de la rotation instantanée relative de l'espace par rapport au corps. En considérant la rotation relative de l'axe Z, on a donc, d'après la proposition de Cinématique rappelée plus haut (25),

$$\frac{d\cos AZ}{dt} = \frac{\partial T}{\partial y_2}\cos CZ - \frac{\partial T}{\partial y_3}\cos BZ,$$

avec deux équations analogues obtenues par permutation circulaire des lettres A, B, C.

Les coefficients $\frac{\partial T}{\partial y}$ sont maintenant des fonctions connues du temps t, en sorte que l'on a ainsi trois équations différentielles linéaires, sans second membre, dont les trois cosinus forment un système de solutions. La solution générale comporte trois arbitraires, dont une seulement est déterminée dans le problème actuel par la condition que la somme des carrés soit l'unité. Mais on peut, à volonté, fixer les deux autres arbitraires en choisissant la direction de l'axe Z.

En comparant les équations actuelles aux équations (68), on voit qu'il existe un système de solutions où les inconnues sont proportionnelles à x_1, x_2, x_3.

On peut prendre pour les trois cosinus un tel système et écrire ainsi, d'après (73) et (84),

$$\frac{\cos AZ}{x_1} = \frac{\cos BZ}{x_2} = \frac{\cos CZ}{x_3} = \frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{2}{\rho(z_a - z_b)} = \frac{2}{\rho}\,\frac{\sigma a\,\sigma b\,\sigma(a+v)\,\sigma(b+v)}{\sigma v\,\sigma(a-b)\,\sigma(a+b+v)}.$$

Suivant les égalités (83), (84), (95) et (96), j'en conclus donc

$$\cos \mathrm{CZ} = \frac{2z - z_a - z_b}{z_a - z_b}, \tag{97}$$

$$\tag{98} \left\{ \begin{aligned} \cos \mathrm{AZ} + i \cos \mathrm{BZ} &= -2\mathrm{E}\left[\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} e^{-u\zeta v}\right]^{\beta} \frac{\sigma b\, \sigma(a+v)\, \sigma(u+a+v)\, \sigma(u-b)}{\sigma(a-b)\, \sigma(a+b+v)\, \sigma u\, \sigma(u+v)} e^{\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{2}\mathrm{D}\right)u}, \\ \cos \mathrm{AZ} - i \cos \mathrm{BZ} &= \frac{2}{\mathrm{E}}\left[\frac{\sigma u}{\sigma(u+v)} e^{u\zeta v}\right]^{\beta} \frac{\sigma a\, \sigma(b+v)\, \sigma(u+b+v)\, \sigma(u-a)}{\sigma(a-b)\, \sigma(a+b+v)\, \sigma u\, \sigma(u+v)} e^{\left(\frac{1}{2}\mathrm{D} - \frac{\alpha}{\rho}\right)u}. \end{aligned} \right.$$

En posant, comme on l'a déjà fait pour le cas du mouvement à la Poinsot,

$$\mathfrak{S} = \cos \mathrm{CX} + i \cos \mathrm{CY},$$
$$\mathfrak{S}_0 = \cos \mathrm{CX} - i \cos \mathrm{CY},$$

et supposant les deux systèmes d'axes *congruents*, j'ai encore, ainsi qu'on l'a trouvé en l'endroit cité,

$$\mathfrak{S}_0 \frac{d\mathfrak{S}}{dt} - \mathfrak{S} \frac{d\mathfrak{S}_0}{dt} = -2i\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_1} \cos \mathrm{AZ} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_2} \cos \mathrm{BZ}\right)$$

ou, en divisant par $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_0 = 1 - \cos^2 \mathrm{CZ} = \cos^2 \mathrm{AZ} + \cos^2 \mathrm{BZ}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{S}} \frac{d\mathfrak{S}}{dt} - \frac{1}{\mathfrak{S}_0} \frac{d\mathfrak{S}_0}{dt} &= -2i\sqrt{m} \frac{x_1 \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_2}}{x_1^2 + x_2^2} \\ &= -2i\sqrt{m}\left(q + r \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{x_1^2 + x_2^2}\right), \end{aligned}$$

d'où résulte

$$\frac{1}{\mathfrak{S}} \frac{d\mathfrak{S}}{du} - \frac{1}{\mathfrak{S}_0} \frac{d\mathfrak{S}_0}{du} = -2\left[\frac{qs\sqrt{m}}{r y_3 \rho} + \frac{s\sqrt{m}}{\rho} \frac{x_3 - \frac{n}{y_3}}{x_3^2 - m}\right].$$

Pour décomposer en éléments simples le dernier terme, on a ici un calcul analogue à celui qui concernait précédemment $\varphi(u)$. Les résidus ont pour expression

$$-\frac{s\sqrt{m}}{\rho} \frac{x_3 - \frac{n}{y_3}}{x_3 \frac{dx_3}{du}} = -\frac{s\sqrt{m}}{\rho} \frac{x_3 - \frac{n}{y_3}}{x_3[\mathrm{p}u - \mathrm{p}(u+v)]}.$$

Il faut y substituer successivement, à la place de u, a et $-(b+v)$ racines de Φ, puis b et $-(a+v)$ racines de Φ_1. Pour le premier et le quatrième pôle, x_3 est égal à $\sqrt{m}$; pour le deuxième et le troisième, x_3 est égal à $-\sqrt{m}$; c'est ce qu'on voit par les équations (83). Les résidus sont donc successivement -1, $+1$, -1, $+1$. En outre, la fonction s'évanouit pour x_3 infini, c'est-à-dire pour $u = 0$. Donc

$$-\frac{2s\sqrt{m}}{\rho}\frac{x_3 - \frac{n}{y_3}}{x_3^2 - m} = \zeta(u+a+v) + \zeta(u+b+v) \\ -\zeta(u-a) - \zeta(u-b) - D_1,$$

$$D_1 = \zeta a + \zeta b + \zeta(a+v) + \zeta(b+v). \tag{99}$$

Posons encore, pour abréger,

$$\gamma = \frac{qs\sqrt{m}}{ry_3}, \tag{100}$$

et l'on aura, en intégrant,

$$\log\frac{\Theta}{\Theta_0} = -\left(\frac{2\gamma}{\rho} + D_1\right)u + \log\frac{\sigma(u+a+v)\,\sigma(u+b+v)}{\sigma(u-a)\,\sigma(u-b)} + \text{const.}$$

D'autre part, le produit $\Theta\Theta_0$ est égal au produit des facteurs

$$\cos AZ \pm i \cos BZ.$$

Prenant, pour ces derniers, leurs expressions (98), nous avons

$$\log\Theta\Theta_0 = \log\frac{\sigma(u+a+v)\,\sigma(u-b)\,\sigma(u+b+v)\,\sigma(u-a)}{\sigma^2 u\,\sigma^2(u+v)} + \text{const.}$$

De là résulte $\log\Theta^2$, et enfin Θ et Θ_0 comme il suit, en donnant une forme convenable à la constante arbitraire E_1,

$$\left\{\begin{aligned} \cos CX + i\cos CY &= 2E_1\frac{\sigma a\,\sigma b\,\sigma(u+a+v)\,\sigma(u+b+v)}{\sigma(a-b)\,\sigma(a+b+v)\,\sigma u\,\sigma(u+v)}e^{-\left(\frac{\gamma}{\rho}+\frac{1}{2}D_1\right)u},\\ \cos CX - i\cos CY &= -\frac{2}{E_1}\frac{\sigma(a+v)\,\sigma(b+v)\,\sigma(u-a)\,\sigma(u-b)}{\sigma(a-b)\,\sigma(a+b+v)\,\sigma u\,\sigma(u+v)}e^{\left(\frac{\gamma}{\rho}+\frac{1}{2}D_1\right)u}. \end{aligned}\right. \tag{101}$$

On a vu, dans le § III, que la connaissance des quantités $\cos CZ$, $\cos AZ \pm i \cos BZ$ et $\cos CX \pm i \cos CY$ détermine entièrement et sans ambiguïté la position relative des deux systèmes d'axes, quand on connaît le caractère de congruence. Ici nous avons supposé les axes congruents. La rotation du corps est donc actuellement déterminée.

Translation du corps solide.

Il faut maintenant trouver, en fonction de u, les coordonnées X, Y, Z de l'origine des axes fixes dans le corps, mobiles dans l'espace. Les deux premières coordonnées sont données explicitement en fonction des quantités précédentes, la troisième exige une intégration. Pour les deux premières (¹), on a les formules

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{m}}(y_1 \cos AY + y_2 \cos BY + y_3 \cos CY), \\ Y &= -\frac{1}{\sqrt{m}}(y_1 \cos AX + y_2 \cos BX + y_3 \cos CX). \end{aligned}$$

Par une transformation facile, fondée sur l'emploi de la relation élémentaire (8) avec l'hypothèse actuelle $\varepsilon = +1$, on conclut de là

$$\begin{aligned} &(X + iY)(\cos CX - i \cos CY) \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{m}}[y_1(\cos BZ + i \cos AZ \cos CZ) \\ &\qquad + y_2(-\cos AZ + i \cos BZ \cos CZ) - iy_3(1 - \cos^2 CZ)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(X + iY)(\cos CX - i \cos CY) \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{m}}\left[\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{\sqrt{m}} + ix_3 \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{m} - iy_3\left(1 - \frac{x_3^2}{m}\right)\right], \end{aligned}$$

ou bien encore, suivant les relations (76),

$$(X + iY)(\cos CX - i \cos CY) = \frac{1}{\sqrt{m}}\left[\frac{1}{r\sqrt{m}} \frac{dx_3}{dt} + i\left(\frac{n}{m}x_3 - y_3\right)\right].$$

(¹) KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische Physik*, p. 240.

De là enfin se conclut, en prenant aussi l'expression conjuguée,

$$(102)\quad \begin{cases} (X \pm iY)(\cos CX \mp i \cos CY) \\ \quad = \dfrac{i\rho^2 y_3}{sm}\left[\mathfrak{p} u - \mathfrak{p}(u+v) \mp \dfrac{s}{\rho^2}\left(\sqrt{m} - \dfrac{x_3}{\sqrt{m}}\dfrac{n}{y_3}\right)\right]. \end{cases}$$

Le facteur $\cos CX \mp i \cos CY$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce, tandis que le second membre est doublement périodique. Donc $X \pm iY$ est doublement périodique de seconde espèce. Les deux quantités conjuguées $\cos CX \mp i \cos CY$ ont des multiplicateurs réciproques, puisque leur produit $1 - \cos^2 CZ$ est doublement périodique. Donc $X + iY$ a les mêmes multiplicateurs que

$$\cos CX + i \cos CY.$$

Nous allons décomposer $X + iY$ en éléments simples.

L'élément simple type se déduit immédiatement de la forme (101) de $\cos CX + i \cos CY$: c'est

$$\frac{\sigma(u+a+b+v)}{\sigma u} e^{-\left(\frac{\gamma}{\rho}+\frac{1}{2}\mathfrak{p}_1\right)u}.$$

Les pôles de $X+iY$ sont $u=0$ et $u=-v$; ce sont des pôles simples, attendu qu'ils sont doubles au second membre (102), et simples dans le facteur $\cos CX - i \cos CY$. Leur résidu est $\pm \frac{i\rho^2 y_3}{sm}$, coefficient de $\mathfrak{p} u$ et $\mathfrak{p}(u+v)$ du second membre (102), divisé par le résidu de

$$\cos CX - i \cos CY.$$

Il n'y a pas d'autres pôles, comme on va voir.

Observons les valeurs du second membre (102) pour les valeurs particulières de u suivantes : a, $-(a+v)$, b, $-(b+v)$. Pour les deux premières, on a, suivant les égalités (83),

$$x_3 = \sqrt{m};$$

pour les deux autres,

$$x_3 = -\sqrt{m}.$$

Par conséquent, pour les deux premières, $\sqrt{m} - \frac{nx_3}{y_3\sqrt{m}}$ se confond avec $x_3 - \frac{n}{y_3}$; pour les deux dernières, avec $-\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right)$. D'autre part, suivant les égalités (88) et (89), $\frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right)$ est alors égal à

$$\pm[\wp u - \wp(u+v)],$$

le signe + convenant à $u = a$ et $u = -(b+v)$, le signe − à $u = b$ et à $u = -(a+v)$. Il en résulte, pour la quantité entre crochets, les valeurs suivantes :

$$u = a, \qquad \wp u - \wp(u+v) \mp \frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right) = \begin{cases} 0 \\ 2[\wp a - \wp(a+v)] \end{cases}$$

$$u = -(a+v), \qquad \wp u - \wp(u+v) \mp \frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right) = \begin{cases} 2[\wp(a+v) - \wp a] \\ 0 \end{cases}$$

$$u = b, \qquad \wp u - \wp(u+v) \pm \frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right) = \begin{cases} 0 \\ 2[\wp b - \wp(b+v)] \end{cases}$$

$$u = -(b+v), \qquad \wp u - \wp(u+v) \pm \frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right) = \begin{cases} 2[\wp(b+v) - \wp b] \\ 0 \end{cases}.$$

On voit par là que le second membre (102) s'évanouit pour $u = a$ et $u = b$, quand on prend le signe supérieur, et pour $u = -(a+v)$ ou $u = -(b+v)$, quand on prend le signe inférieur. Il en est de même pour $\cos CX \mp i \cos CY$.

Il s'ensuit que $X \pm iY$ n'a que les pôles $u = 0$ et $u = -v$, et l'on conclut

$$\frac{2sm}{i\rho^2 y_3 E_1}(X + iY)e^{\left(\frac{\Upsilon}{\rho} + \frac{1}{2}D_1\right)u}$$
$$= -\frac{\sigma(a-b)\sigma v}{\sigma(a+v)\sigma(b+v)}\left[\frac{\sigma(u+a+b+v)}{\sigma a\,\sigma b\,\sigma u} - \frac{\sigma(u+a+b+2v)}{\sigma(a+v)\sigma(b+v)\sigma(u+v)}\right],$$

$$\frac{2smE_1}{i\rho^2 y_3}(X - iY)e^{-\left(\frac{\Upsilon}{\rho} + \frac{1}{2}D_1\right)u}$$
$$= -\frac{\sigma(a-b)\sigma v}{\sigma a\,\sigma b}\left[\frac{\sigma(u-a-b-v)}{\sigma(a+v)\sigma(b+v)\sigma u} - \frac{\sigma(u-a-b)}{\sigma a\,\sigma b\,\sigma(u+v)}\right].$$

On remarquera que les seconds membres, dans ces deux égalités, se déduisent l'un de l'autre par le changement du signe, accompagné du changement de a et b en $-(a+v)$, $-(b+v)$. C'est ce dont on se rend aisément compte par les expressions de $\cos CX \pm i \cos CY$ et celles des constantes.

La coordonnée Z de l'origine des axes mobiles exige une quadrature; elle est donnée par la formule

$$\frac{dZ}{dt} = U \cos AZ + V \cos BZ + W \cos CZ.$$

Par des transformations successives, cette formule devient

$$\begin{aligned}
\frac{dZ}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{m}}[x_1(px_1+qy_1)+x_2(px_2+qy_2)+x_3(p'x_3+q'y_3)]\\
&= \frac{1}{\sqrt{m}}[(p'-p)x_3^2+(q'-q)y_3x_3+pm+qn]\\
&= \frac{1}{\sqrt{m}}[(p'-p)(x_3+\tfrac{1}{4}h)^2+pm+qn-\tfrac{1}{16}h^2(p'-p)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dZ}{du} = {} & \frac{s}{iry_3\rho\sqrt{m}}[pm+qn-\tfrac{1}{16}h^2(p'-p)]\\
& + \frac{s\rho(p'-p)}{iry_3\sqrt{m}}[\wp u+\wp(u+v)+\wp v].
\end{aligned}$$

En intégrant et figurant par δ et δ_1 les deux constantes, nous avons

$$\text{(103)} \qquad Z + \text{const.} = \delta t + \delta_1 \rho[\zeta(u+v)+\zeta u - u\wp v],$$

$$\text{(104)} \qquad \left\{\begin{aligned}
\delta &= \frac{1}{\sqrt{m}}[pm+qn-\tfrac{1}{16}h^2(p'-p)],\\
\delta_1 &= -\frac{s(p'-p)}{iry_3\sqrt{m}} = \frac{y_3}{is\sqrt{m}}.
\end{aligned}\right.$$

Nous avons, on le voit, résolu le problème qui consiste à déterminer explicitement en fonction du temps la position du solide.

Notions générales sur le mouvement du corps solide.

Indépendamment de toute discussion approfondie sur les formules que l'on vient d'établir, on peut se faire une idée sommaire du mouvement que ces formules représentent.

Soit θ le rapport de l'accroissement du temps à celui de $\frac{u}{\rho}$ (87),

$$(105) \qquad \theta = \frac{1}{\sqrt{r(p'-p)}} = \frac{s}{iry_3}, \qquad t = \theta\frac{u}{\rho} + \text{const.}$$

Nous supposons réelle la constante arbitraire ρ. L'argument u, ou du moins sa partie variable, prend des valeurs soit réelles, soit purement imaginaires suivant que θ est lui-même réel ou purement imaginaire, suivant donc que $(p'-p)$ est positif ou négatif (r est positif, car la force vive T est nécessairement représentée par une *forme positive*).

Comme les invariants sont réels, il y a une période déterminée $2\bar{\omega}$, de même espèce, réelle ou imaginaire, que les valeurs de du; il y correspond une période de temps $t_0 = \frac{2\theta\bar{\omega}}{\rho}$.

Considérons d'abord le mouvement angulaire de l'axe C ou *axe du corps*. Le cosinus de l'angle CZ (97) est une fonction doublement périodique, dont une période seule intervient. L'angle CZ reprend donc la même valeur à la fin de chaque période de temps.

Considérons maintenant l'angle ψ que l'intersection des plans AB et XY fait avec l'axe X. Cet angle est donné par la formule

$$e^{2i\psi} = -\frac{\cos CX + i\cos CY}{\cos CX - i\cos CY}.$$

On voit par là qu'à chaque période de temps l'angle ψ se reproduit, augmenté d'une constante ψ_0, de telle sorte que les fonctions doublement périodiques de seconde espèce $\cos CX \pm i\cos CY$ admettent les multiplicateurs $e^{\pm i\psi_0}$ correspondant à la période $2\bar{\omega}$.

Ces deux angles CZ et ψ définissent complètement le mouvement angulaire de l'axe C du corps. C'est, comme on voit, un mouvement varié, mais qui coïncide périodiquement avec une rotation uniforme, de vitesse $\frac{\psi_0}{t_0}$, autour de l'axe Z.

Envisageons actuellement le mouvement de l'origine des axes mobiles ou *centre du corps*. La coordonnée Z est représentée par une fonction (103) qui se reproduit, à chaque période de temps, augmentée d'une constante Z_0. Les deux quantités $X \pm iY$ se reproduisent multipliées chacune par une constante; mais, comme on l'a vu, ces fonctions ont les mêmes multiplicateurs respectivement que

$$\cos CX \pm i \cos CY,$$

c'est-à-dire $e^{\pm i\psi_0}$. Le mouvement du centre est varié, mais coïncide périodiquement avec un mouvement hélicoïdal uniforme, dont l'axe est Z et dans lequel au temps t_0 correspond une progression Z_0, parallèle à l'axe, et une rotation ψ_0 autour de cet axe.

En réunissant les circonstances relatives au mouvement angulaire de l'axe et au mouvement du centre, je conclus que le mouvement de l'axe lui-même coïncide périodiquement avec un mouvement hélicoïdal uniforme, ou mieux se compose de ce mouvement et d'un mouvement périodique.

Considérons enfin l'angle φ que l'intersection des plans AB et XY fait avec l'axe A du corps. Cet angle est donné par la formule

$$e^{2i\varphi} = -\frac{\cos AZ + i \cos BZ}{\cos AZ - i \cos BZ}.$$

Les deux fonctions $\cos AZ \pm i \cos BZ$ (98) ne sont pas, suivant l'acception ordinaire, doublement périodiques de seconde espèce, sauf si l'exposant β est un nombre entier. Mais, dans tous les cas, elles ont toujours la propriété de se reproduire, à chaque période, multipliées par des facteurs constants. L'angle φ se reproduit donc, à chaque période de temps, augmenté d'une constante φ_0. Cette circonstance, jointe aux précédentes, permet de tirer la conclusion que voici :

Le mouvement du solide se compose : 1° *d'un mouvement hélicoïdal uniforme autour de l'axe* Z; 2° *d'une rotation uniforme* $\left(\text{à vitesse } \frac{\varphi_0}{t_0}\right)$ *autour de l'axe du corps;* 3° *d'un mouvement périodique* (à période t_0).

Énumération des constantes. Homogénéité.

Dans la suite des calculs qu'on vient de parcourir, il importe de ne pas perdre de vue les constantes primitives et leur liaison avec celles qu'on a été conduit à mettre en leur place.

Les constantes données sont au nombre de dix, savoir : 1° les six coefficients de l'expression de la force vive (75) p, p', q, q', r, r'; 2° les quatre constantes d'intégration l, m, n, y_3 (72), (73) et (74).

Dans nos formules, on voit figurer *implicitement* les deux invariants des fonctions elliptiques et *explicitement* les trois arguments constants v, a, b. Les arguments a_1 et b_1 peuvent être omis comme déterminés par les précédents. Ce sont donc là cinq constantes.

La constante d'homogénéité ρ peut être omise comme entièrement arbitraire, ou bien on peut encore observer que les fonctions elliptiques interviennent, dans toutes les formules, avec la lettre ρ, de manière que l'homogénéité soit respectée : toutes les combinaisons qui s'offrent sont, à ce point de vue, du degré zéro, chaque argument étant censé, ainsi que ρ, du degré 1.

Avec ces cinq constantes elliptiques, les formules présentent cinq autres constantes que nous pouvons distinguer, savoir α, γ, θ, δ, δ_1.

Nous allons reconnaître que ce second système de dix constantes détermine complètement, et sans ambiguïté, le premier. Dans le paragraphe suivant, nous établirons le résultat inverse.

En premier lieu, au moyen des cinq constantes elliptiques, on détermine m, $\frac{n}{y_3}$, avec les constantes auxiliaires m_1, h, s, par les formules (84) et (90), que nous transcrivons ici :

$$\begin{aligned}
2\sqrt{m} &= \rho(z_a - z_b),\\
\tfrac{1}{2}h &= \rho(z_a + z_b),\\
2\sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1} &= \rho(z_{a_1} - z_{b_1}),\\
s\sqrt{m} &= \tfrac{1}{2}\rho^2[\wp b + \wp a - \wp(a+v) - \wp(b+v)],\\
\frac{sn}{y_3} &= \tfrac{1}{2}\rho^2[\wp b - \wp a + \wp(a+v) - \wp(b+v)].
\end{aligned}$$

L'exposant β, qui figure dans les formules (98), est déterminé par ces quantités, puisqu'on a (94)

$$\beta = -\frac{h}{2s}.$$

Les constantes auxiliaires m_1, n_1, s sont liées aux constantes primitives par les relations (80) et (85)

$$m_1 = \frac{pm + 2qn + r'y_3^2 - l}{p - p'},$$

$$h = 2\frac{q - q'}{p - p'}y_3,$$

$$s = \frac{iry_3}{\sqrt{r(p' - p)}}.$$

Quant aux constantes que nous avons distinguées dans les formules, voici leurs expressions (94), (100), (104) et (105)

$$\alpha = \frac{s}{r}\left[r' - \frac{h(q' - q)}{4y_3}\right] = \frac{sr'}{r} + \frac{1}{8}\frac{h^2}{2s},$$

$$\gamma = \frac{qs\sqrt{m}}{ry_3},$$

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{r(p' - p)}} = \frac{s}{iry_2},$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{m}}\left[pm + qn - \tfrac{1}{16}h^2(p' - p)\right],$$

$$\delta_1 = -\frac{s(p' - p)}{iry_3\sqrt{m}} = \frac{y_3}{is\sqrt{m}}.$$

Par les cinq premières constantes sont déterminés, nous venons de le voir, $\sqrt{m}$, $\frac{n}{y^3}$, m_1, h, s. Maintenant, au moyen de δ_1, est déterminé y_3 et, par conséquent, n. Au moyen de θ et γ, sont ensuite déterminés r et q, puis q' par la relation

$$h = 2ry_3(q' - q)\theta^2.$$

Enfin r' est déterminé au moyen de α, p et p' au moyen de s et δ, l au moyen de m_1.

Il est donc établi que la connaissance complète du mouvement du corps entraîne aussi la connaissance des constantes qui figurent dans les équations différentielles et les intégrales.

Il n'en serait pas de même si l'on connaissait seulement la rotation du corps, non sa translation.

Et d'abord, il est évident que la connaissance de la rotation ne peut entraîner la connaissance d'aucune longueur. Par conséquent, la rotation ne peut déterminer que des combinaisons de degré zéro entre les constantes, ce qui en réduit le nombre d'une unité. En outre, δ et δ_1 n'interviennent pas dans les formules de rotation. La rotation dépend donc seulement de sept constantes, et c'est ce qu'en effet on reconnaîtra plus loin.

Il est aisé de trouver, à ce point de vue, les degrés des diverses constantes.

Par rapport à l'unité de longueur, la force vive est homogène et du degré 2, les vitesses U, V, W sont du degré 1, les vitesses de rotation P, Q, R sont du degré zéro. Il en résulte pour x_1, x_2, x_3 le degré 1, pour y_1, y_2, y_3 le degré 2, pour p, p' le degré zéro, pour q, q' le degré -1, pour r, r' le degré -2. Les degrés des autres constantes en résultent, savoir

l,	m,	n,	m_1,	h,	$\frac{n}{y_3}$,	s,	θ,	δ,	δ_1,	α,	γ,	β.
2,	2,	3,	2,	1,	1,	1,	1,	1,	0,	1,	1,	0.

Si les arguments elliptiques sont considérés comme de simples nombres, ρ est une longueur.

Expression des éléments elliptiques en fonction des données.

Pour avoir plus de symétrie dans les formules, j'emploie, au lieu de m, m_1, n, h, les notations suivantes :

$$(106)\quad \tfrac{1}{4}h = \nu_1, \qquad \frac{n}{y_3} = \nu, \qquad \sqrt{m} = \mu, \qquad \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1} = \mu_1.$$

Ces quantités, ainsi que s, sont toutes des longueurs.

Par leur emploi, le polynôme (81), divisé par $r(p'-p)$, s'écrit ainsi

$$(x_3^2 + 4\nu_1 x_3 - \mu_1^2 + 4\nu_1^2)(x_3^2 - \mu^2) + s^2(x_3 - \nu)^2.$$

Pour faire disparaître le second terme, on pose $x_3 = y - \nu$; le polynôme devient

$$(y^2 + 2\nu_1 y + \nu_1^2 - \mu_1^2)(y^2 - 2\nu_1 y + \nu_1^2 - \mu^2) + s^2(y - \nu - \nu_1)^2$$

et doit être identique à cet autre (63)

$$y^4 - 6\rho^2 \wp v . y^2 + 4\rho^3 \wp' v . y + \rho^4(g_2 - 3\wp^2 v).$$

De la comparaison se tire immédiatement

$$(107) \qquad 6\rho^2 \wp v = 2\nu_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2 - s^2,$$

$$(108) \qquad 2\rho^3 \wp' v = \nu_1(\mu_1^2 - \mu^2) - s^2(\nu + \nu_1),$$

et cette combinaison, qui servira plus loin,

$$(109) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\rho^4(12\wp^2 v - g_2) \\ &\quad = \tfrac{1}{3}(2\nu_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2 - s^2)^2 \\ &\qquad - (\nu_1^2 - \mu^2)(\nu_1^2 - \mu_1^2) - s^2(\nu + \nu_1)^2. \end{aligned} \right.$$

Par le théorème d'addition, on a

$$\wp a + \wp(a + v) + \wp v = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' a - \wp' v}{\wp a - \wp v}\right)^2 = z_a^2.$$

Mais, d'après (84),

$$\rho z_a = \sqrt{m} + \tfrac{1}{4} h = \nu_1 + \mu;$$

j'ai donc, au moyen de (107),

$$\rho^2[\wp a + \wp(a + v)] = \tfrac{1}{6}[(2\nu_1 + 5\mu)(2\nu_1 + \mu) - s^2 - \mu_1^2],$$

tandis que l'égalité (88 a) donne

$$\rho^2[\wp a - \wp(a + v] = s(\mu - \nu).$$

Voici donc connus $\wp a$ et $\wp(a + v)$. Il suffit de changer les signes devant s et μ pour changer a en b. J'ai donc aussi

$$\rho^2[\wp b + \wp(b + v)] = \tfrac{1}{6}[(2\nu_1 - 5\mu)(2\nu_1 - \mu) - s^2 - \mu_1^2],$$

$$\rho^2[\wp b - \wp(b + v)] = s(\mu + \nu).$$

Par le théorème d'addition, on a

$$2z_a = \frac{p'a + p'(a+v)}{pa - p(a+v)} = \frac{p'a - p'v}{pa - pv} = \frac{p'a - p'(a+v) - 2p'v}{pa + p(a+v) - 2pv}.$$

En remplaçant ici ρz_a par $\nu_1 + \mu$, on conclut

$$\rho^3[p'a + p'(a+v)] = 2s(\mu - \nu)(\mu + \nu_1),$$
$$\rho^3[p'a - p'(a+v)] = s^2(\mu - \nu) + \mu(\mu^2 - \mu_1^2) + 4\nu_1\mu(\mu + \nu_1),$$

et semblablement

$$\rho^3[p'b + p'(b+v)] = -2s(\mu + \nu)(\mu - \nu_1),$$
$$\rho^3[p'b - p'(b+v)] = -s^2(\mu + \nu) - \mu(\mu^2 - \mu_1^2) + 4\nu_1\mu(\mu - \nu_1).$$

Des calculs tout analogues donnent les fonctions p et p' pour les arguments a_1, b_1; mais nous n'en aurons pas besoin. Il nous faudra bientôt connaître les mêmes fonctions pour les deux arguments

$$v_0 = -(a + b + v), \qquad v_1 = a - b.$$

Le calcul n'offre aucune difficulté par le moyen des formules précédentes; il donne lieu à des réductions remarquables. Je transcris seulement les résultats

$$(110)\quad \begin{cases} \dfrac{\rho}{2}\dfrac{p'(b+v) - p'a}{p(b+v) - pa} = \mu - \dfrac{1}{2}\dfrac{s\nu}{\mu}, \\[2ex] \dfrac{\rho}{2}\dfrac{p'(a+v) - p'b}{p(a+v) - pb} = -\mu - \dfrac{1}{2}\dfrac{s\nu}{\mu}, \\[2ex] \dfrac{\rho}{2}\dfrac{p'a + p'b}{pa - pb} = \mu + \dfrac{1}{2}s, \\[2ex] \dfrac{\rho}{2}\dfrac{p'(a+v) + p'(b+v)}{p(a+v) - p(b+v)} = -\mu + \dfrac{1}{2}s, \end{cases}$$

$$(111)\quad \begin{cases} \rho^2(pv_0 - pv) = -\nu_1^2 + \dfrac{1}{4}\dfrac{s^2\nu^2}{\mu^2}, \\[2ex] \rho^2(pv_1 - pv) = -\nu_1^2 + \frac{1}{4}s^2, \end{cases}$$

$$(112)\quad \rho^3 p'v_0 = \nu_1 s\left(\mu + \frac{\nu\nu_1}{\mu}\right) + \frac{1}{4}\frac{s\nu}{\mu}\left(\mu^2 - \mu_1^2 + s^2 - \frac{s^2\nu^2}{\mu^2}\right),$$

$$(113)\quad \rho^3 p'v_1 = \nu_1 s(\nu + \nu_1) + \tfrac{1}{4}s(\mu^2 - \mu_1^2).$$

Je n'ai pas calculé les invariants des fonctions elliptiques. Ils sont surabondamment déterminés par ce qui précède. En général, quand on donne les fonctions $\wp$ et $\wp'$ pour trois arguments différents, les invariants s'en déduisent au moyen de la relation

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

employée successivement pour chacun des trois arguments.

Dans le paragraphe précédent on a vu que les cinq constantes elliptiques déterminent un groupe de cinq constantes du problème, précisément s et les constantes (106) employées ici. On voit maintenant que la réciproque est également vraie. Conséquemment, les formules du mouvement, trouvées ici, sont propres à tous les cas qui peuvent se présenter.

Discussion des formules.

La discussion, que je vais faire, a pour but de préciser la nature des constantes en distinguant les divers cas qui peuvent se présenter.

Dans tous les cas, la constante m est positive et la variable x_3 ne peut acquérir que des valeurs comprises entre $-\sqrt{m}$ et $+\sqrt{m}$; c'est ce qui résulte de l'intégrale (73). D'autre part, la même variable x_3 doit prendre des valeurs qui rendent positif le polynôme (81)

$$F(x_3) = r(p' - p)(m_1 - hx_3 - x_3^2)(m - x_3^2) - r^2(n - y_3 x_3)^2,$$

tandis que les valeurs $x_3 = \pm\sqrt{m}$ rendent ce polynôme négatif. Il y a donc toujours, entre $-\sqrt{m}$ et $+\sqrt{m}$, au moins deux racines réelles de F; c'est entre ces deux racines qu'oscille la variable x_3.

Je distinguerai trois cas principaux, suivant le signe de $(p' - p)$ et du discriminant Δ.

$$\text{I.}\quad p' - p > 0.$$

D'après l'égalité (79),

$$y_1^2 + y_2^2 = \frac{p' - p}{r}(m_1 - hx_3 - x_3^2),$$

les valeurs que prend x_3 rendent négatif le polynôme f_1

$$f_1 = x_3^2 + hx_3 - m_1.$$

En effet, $p'-p$ est supposé positif et r est positif, on l'a déjà fait observer, comme étant le coefficient d'un carré dans une forme quadratique positive T, la force vive. Il en est donc de f_1 comme du polynôme f

$$f = x_3^2 - m;$$

ses racines sont réelles et comprennent entre elles les deux racines de F entre lesquelles oscille x_3.

Le coefficient de x_3^4, dans F, est positif. Le polynôme F est négatif pour les valeurs de x_3 égales aux racines de f et de f_1. Donc F a deux autres racines réelles, comprenant entre elles les quatre racines de f et de f_1. Soient x', x'', x''', x^{IV} les racines de F; on aura ainsi

$$x' < \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{m} \\ -\frac{1}{2}h - \sqrt{\frac{1}{4}h^2 + m_1} \end{array} \right\} < x'' < x''' < \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{m} \\ -\frac{1}{2}h + \sqrt{\frac{1}{4}h^2 + m_1} \end{array} \right\} < x^{\text{IV}},$$

et x_3 oscille entre les deux racines moyennes x'', x'''.

Les quatre racines de F étant réelles, le discriminant est positif. En outre (¹) ($2\omega'$ étant la période imaginaire), $u + \frac{v}{2} - \omega'$ varie d'un multiple impair à un multiple pair de la demi-période réelle ω, quand x_3 varie de x''' à x''. La relation précise entre t et u doit s'écrire

$$(114) \qquad u = \omega' - \frac{v}{2} + \frac{\rho}{0} t,$$

de manière que l'origine des temps corresponde à $x_3 = x''$. Cette indication est placée ici uniquement pour montrer comment on peut, si on le désire, préciser entièrement les arguments. Il est également permis d'ajouter à u et v des périodes à volonté; en tous cas, u est réel sauf un multiple impair de ω'. Pour mieux préciser, nous continuerons à faire les premières suppositions, qui ne nuisent en rien à la généralité.

Les arguments a et b correspondent aux racines de f (83), qui sont, l'une entre x' et x'', l'autre entre x''' et x^{IV}. Ces arguments ont donc les

(¹) *Traité des fonctions elliptiques*, p. 129.

formes ci-après [1], sous la supposition que $\sqrt{m}$ soit pris positivement dans les formules (83),

$$(115)\qquad a = -\frac{v}{2} + ia'', \qquad b = -\frac{v}{2} + \omega + ib'',$$

a'' et b'' étant réels. De même, pour a_1 et b_1,

$$(116)\qquad a_1 = -\frac{v}{2} + ia''_1, \qquad b_1 = -\frac{v}{2} + \omega + ib''_1.$$

Suivant les égalités (62) et (66), on aura

$$a'' + a''_1 = b'' + b''_1 = 2c'',$$
$$c = -\frac{v}{2} + ic'', \qquad a' = i\,\frac{a''_1 - a''}{2},$$
$$\varpi = \frac{v}{2} + ic'', \qquad b' = i\,\frac{b''_1 - b''}{2}.$$

En prenant arbitrairement les deux arguments purement imaginaires a', b', dont les fonctions p sont réelles, puis $c + \frac{v}{2}$ purement imaginaire et arbitraire, on déterminera, par la relation harmonique (67), $p\varpi$ conjugué de pc; il en résultera, pour ϖ, la forme $\frac{v}{2} + ic''$, celle de c étant $-\frac{v}{2} + ic''$. De cette manière, a, b, a_1, b_1, v auront bien les formes ci-dessus.

Résumons les caractères que nous venons de mettre en évidence et qui ne se reproduiront dans aucun des autres cas; joignons-y ce qui concerne les autres constantes, et concluons ainsi : *prenant des fonctions elliptiques à discriminant positif; v réel; u, a, b, a_1, b_1 sous les formes* (114), (115) et (116); *les constantes θ, δ, δ_1 réelles et α, γ purement imaginaires, on aura la représentation du mouvement dans l'un quelconque des cas où $(p' - p)$ est positif.*

---

[1] *Loc. cit.*

II. $p' - p < 0, \quad \Delta > 0$.

Le polynôme F, dans ce cas encore, a quatre racines réelles. Supposons ces racines dénommées, comme tout à l'heure, x', x'', x''', x^{iv} et rangées ainsi par ordre de grandeur, mais *dans l'ordre croissant ou décroissant*. La variable x_3 reste comprise entre deux des racines extrêmes, x''' et x^{iv}. Les deux quantités $\pm\sqrt{m}$ sont, l'une au delà de x^{iv}, l'autre soit entre x'' et x''', soit en deçà de x'. De là deux cas fort distincts.

Dans le premier de ces cas, f est positif quand x_3 est compris dans l'intervalle $x'x''$, intervalle où F est positif. Comme $p' - p$ est négatif, il faut que f_1 soit négatif dans cet intervalle. Il s'ensuit que les racines de f_1 sont réelles et comprises, l'une entre x'' et x''', l'autre en deçà de x'.

Dans le second cas, au contraire, celui où les deux racines de f, c'est-à-dire $\pm\sqrt{m}$, comprennent entre elles les quatre racines de F, les racines de f_1 peuvent être imaginaires. Si elles sont réelles, elles sont toutes deux, en même temps, ou bien entre x'' et x''', ou bien au-delà de x^{iv}, ou bien en deçà de x'.

Il est aisé de reconnaître comment on peut choisir les arguments a, b, a_1, b_1 pour que les formules correspondent à un quelconque de ces cas. On y parvient immédiatement au moyen d'une discussion faite dans mon *Traité des fonctions elliptiques*, p. 127-129, et d'ailleurs très facile.

En premier lieu, v est réel et u a l'une ou l'autre des deux formes suivantes (qui rentrent l'une dans l'autre si l'on altère v d'une période)

$$(117) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{v}{2} + i\frac{\rho}{\theta'}t, \\ u &= -\frac{v}{2} + \omega + i\frac{\rho}{\theta'}t, \end{aligned} \right\} \quad \left(\frac{\theta'}{i} = \theta\right),$$

où θ' est réel.

Premier cas : *L'une des deux quantités $\pm\sqrt{m}$ est dans l'intervalle* $(x''x''')$. — En ce cas, l'un des arguments a, b est réel, l'autre égal à

$\pm\,\omega'$, plus une quantité réelle; il en est de même pour a_1 et b_1. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $a + a_1 = b + b_1$ réel. Alors les arguments auxiliaires w et c (62) et (66) sont réels; a' et b', l'un réel, l'autre réel $\pm\,\omega'$. On obtient donc les formules propres à ce cas *en prenant les termes de la proportion harmonique* (67) *de telle sorte que* $\mathfrak{p}w$, $\mathfrak{p}c$ *et* $\mathfrak{p}a'$ *ou* $\mathfrak{p}b'$ *soient tous trois supérieurs à* e_1 *et que le quatrième* $\mathfrak{p}b'$ *ou* $\mathfrak{p}a'$ *soit compris entre* e_2 *et* e_3. *L'argument* u *a l'une des formes* (117), *les constantes* θ, δ, δ_1 *sont purement imaginaires,* α *et* γ *réelles.*

Deuxième cas: *Les deux quantités* $\pm\sqrt{m}$ *comprennent entre elles les quatre racines du polynôme* F. — En ce cas, les trois arguments a, b, v sont réels. Les arguments a_1 et b_1 sont des imaginaires quelconques si les racines de f_1 sont imaginaires; ils sont ou tous deux réels, ou tous deux réels $\pm\,\omega'$ si les racines de f_1 sont réelles. C'est ce qui résulte de la discussion ci-dessus, relative aux places que peuvent occuper les racines de f_1.

Il s'agit de trouver, de la manière la plus générale, les arguments a, b, a_1, b_1, v, pour satisfaire ainsi aux conditions (56) et (67). Posons, à cet effet,

$$(118)\quad \left\{\begin{aligned} u'_0 &= \tfrac{1}{2}(w - c - a' + b') = \tfrac{1}{2}(v + a - b),\\ u'_1 &= \tfrac{1}{2}(-w + c - a' + b') = \tfrac{1}{2}(-v + a - b),\\ v'_0 &= \tfrac{1}{2}(-w - c + a' + b') = \tfrac{1}{2}(-v - a - b),\\ v'_1 &= \tfrac{1}{2}(w + c + a' + b') = \tfrac{1}{2}(v + a_1 + b_1). \end{aligned}\right.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} u'_0 - v'_0 &= w - a', & u'_1 - v'_1 &= -(w + a'),\\ u'_0 + v'_0 &= -(c - b'), & u'_1 + v'_1 &= c + b',\\ u'_0 - v'_1 &= -(c + a'), & u'_1 - v'_0 &= c - a',\\ u'_0 + v'_1 &= w + b', & u'_1 + v'_0 &= -(w - b'). \end{aligned}$$

La forme sous laquelle est exprimée la quantité λ (p. 41) reste donc inaltérée si les arguments u'_0, u'_1, v'_0, v'_1 remplacent respectivement w,

c, a', b', et l'on a, entre leurs fonctions $\wp$, la relation

$$(119) \qquad (\wp u'_0 - \wp v'_0)(\wp u'_1 - \wp v'_1) + (\wp u'_0 - \wp v'_0)(\wp u'_1 - \wp v'_0) = 0.$$

Puisque a, b, v sont réels, u'_0, u'_1, v'_0 sont réels aussi. On devra donc prendre $\wp u'_0$, $\wp u'_1$, $\wp v'_0$, réels et supérieurs à e_1, quelconques d'ailleurs. Le quatrième terme $\wp v'_1$ en résulte. Il est réel. Les arguments a_1 et b_1 sont alors déterminés par les deux égalités

$$a_1 - b_1 = b - a, \qquad a_1 + b_1 = 2v'_1 - v.$$

Si $\wp v'_1$ est supérieur à e_1, v'_1 est réel, a_1 et b_1 sont réels aussi. Si $\wp v'_1$ est entre e_2 et e_1 ou inférieur à e_3, v'_1 est purement imaginaire ou purement imaginaire à une demi-période réelle près; alors a_1 et $-b_1$ sont imaginaires conjugués; si $\wp v'_1$ est entre e_3 et e_2, v'_1 est réel sauf une demi-période imaginaire et a_1, b_1 sont réels $\pm \omega'$.

On voit ainsi que les trois particularités, relatives aux racines de f_1, signalées plus haut se retrouvent nettement : *on obtient les formules propres au cas envisagé ici en supposant* a, b, a_1, b_1, v *déterminés par les arguments auxiliaires* u'_0, u'_1, v'_0, v'_1 (118), *dont les trois premiers sont réels et le quatrième déterminé par la relation* (119). *Les constantes* θ, δ, δ_1 *sont purement imaginaires,* α *et* γ *réelles;* u *a la forme* (117).

III. $p' - p < 0$, $\quad \Delta < 0$.

Le discriminant étant négatif, le polynôme F a seulement deux racines réelles x', x'', comprises toutes deux entre $\sqrt{m}$ et $-\sqrt{m}$. Le trinôme f_1 a ses racines ou imaginaires, ou bien réelles et ne comprenant pas x', x'' dans leur intervalle. Les arguments propres à ce cas se trouvent par les mêmes formules que pour le dernier cas; mais il ne faut pas oublier que le discriminant des fonctions elliptiques est négatif : les arguments u'_0, u'_1, v'_0 sont réels, leurs fonctions $\wp$ supérieures à e_2; suivant que $\wp v'_1$ est supérieur ou inférieur à e_2, les racines de f_1 sont réelles ou imaginaires. Les constantes θ, δ, δ_1 sont purement imaginaires, α et γ réelles, $u + \frac{v}{2}$ est purement imaginaire.

Ici se termine la discussion que j'avais en vue. J'ai distingué, au début, les divers cas possibles relativement aux racines de F, f, f_1, et j'ai trouvé, pour chacun de ces cas, les caractères distinctifs par rapport aux fonctions elliptiques employées dans les formules.

Décomposition de la rotation.

Dans les formules (101), (98) et (97) qui donnent

$$\cos CX \pm i \cos CY, \quad \cos AZ \pm i \cos BZ \quad \text{et} \quad \cos CZ,$$

mettons, au lieu de u, v, a, b, les notations suivantes :

$$(120) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= -u_0, \\ v &= u_1 + u_0, \\ b &= -\tfrac{1}{2}(v_0 + v_1 + u_0 + u_1), \\ a &= -\tfrac{1}{2}(v_0 - v_1 + u_0 + u_1). \end{aligned} \right.$$

On a alors les formes suivantes :

$$(121) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\cos CX + i \cos CY \\ &\quad = \frac{2 E_1}{\sigma u_0 \, \sigma v_0 \, \sigma u_1 \, \sigma v_1} \prod \sigma\left(\frac{u_0 + v_0 \pm u_1 \pm v_1}{2}\right) e^{-\left(\frac{\gamma}{\rho} + \frac{1}{2} D_1\right) u}, \\ &\cos CX - i \cos CY \\ &\quad = -\frac{2}{E_1 \, \sigma u_0 \, \sigma v_0 \, \sigma u_1 \, \sigma v_1} \prod \sigma\left(\frac{u_0 - v_0 \pm u_1 \pm v_1}{2}\right) e^{\left(\frac{\gamma}{\rho} + \frac{1}{2} D_1\right) u}, \end{aligned} \right.$$

$$(122) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\cos AZ + i \cos BZ \\ &\quad = \frac{2 E}{\sigma u_0 \, \sigma v_0 \, \sigma u_1 \, \sigma v_1} \left[\frac{\sigma(u + v)}{\sigma u} e^{-u \zeta v}\right]^\beta \prod \sigma\left(\frac{u_1 + v_1 \pm u_0 \pm v_0}{2}\right) e^{\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{2} D\right) u}, \\ &\cos AZ - i \cos BZ \\ &\quad = -\frac{2}{E \, \sigma u_0 \, \sigma v_0 \, \sigma u_1 \, \sigma v_1} \left[\frac{\sigma u}{\sigma(u + v)} e^{u \zeta v}\right]^\beta \prod \sigma\left(\frac{u_1 - v_1 \pm u_0 \pm v_0}{2}\right) e^{\left(\frac{1}{2} D - \frac{\alpha}{\rho}\right) u}; \end{aligned} \right.$$

$$(123) \qquad \cos CZ = \frac{2 \zeta u_0 + 2 \zeta u_1 - \sum \zeta \dfrac{u_0 + u_1 \pm v_0 \pm v_1}{2}}{\sum \zeta \dfrac{u_0 + u_1 \pm (v_0 - v_1)}{2} - \sum \zeta \dfrac{u_0 + u_1 \pm (v_0 + v_1)}{2}}.$$

Ces formules coïncident avec celles que l'on a vues plus haut dans la composition des trièdres. Il n'y a qu'un changement dans les notations. Si l'on met A, B, C et X, Y, Z au lieu de x_1, y_1, z_1 et x_0, y_0, z_0, qu'on pose, en outre,

$$(124) \qquad \left\{ \begin{aligned} C_1 &= E\left[\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}\, e^{-u\zeta v}\right]^{\beta} e^{\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{2}D\right)u}, \\ C_0 &= E_1 e^{-\left(\frac{\gamma}{\rho} + \frac{1}{2}D_1\right)u}, \end{aligned} \right.$$

les formules qui donnent cos CZ et cos AZ $\pm i$ cos BZ coïncident de part et d'autre (97), (98) et (21), (15), (16). Celles aussi qui donnent cos CX $\pm i$ cos CY, déduites des précédentes par le changement des indices, présentent la même coïncidence. Comme, d'autre part, les systèmes d'axes, dans les deux cas, sont congruents, la coïncidence des formules permet de conclure à la coïncidence des figures.

La rotation du corps solide est donc effectivement décomposée en deux autres plus simples M_0, M_1, représentées par des formules analogues à celles des mouvements à la Poinsot, et nous allons examiner cette décomposition.

L'argument u_0 varie proportionnellement au temps, puisqu'il diffère de u par le signe seulement (120). De plus, C_0 est une exponentielle du premier degré en u_0. Donc M_0 est précisément un mouvement à la Poinsot. Toutefois ce mouvement n'est réel que si le discriminant est positif, la variation de u_0 réelle et si v_0 est purement imaginaire à un multiple impair de la demi-période réelle. Ces conditions sont effectivement satisfaites dans un cas, le premier de ceux qui ont été discutés plus haut, celui où $(p'-p)$ est positif. Dans le cas opposé, la décomposition n'est point réelle, et c'est un fait bien digne de remarque, quoique sans intérêt cinématique, que la décomposition d'un mouvement effectif en deux mouvements imaginaires. C'est donc pour le seul cas $p'-p>0$ que nous étudierons la décomposition.

Quand la constante β est nulle, C_1 est aussi une exponentielle du premier degré en $u_1 = u+v$, et la variation de u_1 est proportionnelle au temps. En ce cas, M_1 est aussi un mouvement à la Poinsot. Mais, en général, décomposons C_1 en deux facteurs, dont l'un soit une exponentielle du premier degré. En prenant seulement ce dernier facteur, nous aurons un mouvement à la Poinsot M'_1, dans lequel les axes X_1, Y_1, Z_1, différents de A, B, C, seraient les axes mobiles, liés au plan roulant. Pour amener ces axes en coïncidence avec A, B, C, il suffira de les faire tourner autour de Z_1 d'un angle Ψ, tel que $e^{i\Psi}$ soit égal au facteur négligé dans C_1.

Soient, en effet, a, b, c les axes fixes auxquels on rapporte le mouvement de X_1, Y_1, Z_1 et ψ l'angle que l'intersection des plans ab et X_1Y_1 fait avec X_1; on a

$$(125)\qquad e^{2i\psi} = -\frac{\cos cX_1 + i\cos cY_1}{\cos cX_1 - i\cos cY_1}.$$

Soit C'_1 le facteur pris d'abord dans C_1 pour composer un mouvement à la Poinsot. D'après les formules (1) du début, changer C'_1 en C_1, c'est multiplier $\cos cX_1 + i\cos cY_1$ par $\frac{C_1}{C'_1}$ et $\cos cX_1 - i\cos cY_1$ par le facteur inverse. C'est donc, d'après la dernière formule (125), multiplier $e^{2i\psi}$ par $\left(\frac{C_1}{C'_1}\right)^2$, ou augmenter ψ d'un certain angle Ψ

$$e^{i\Psi} = \frac{C_1}{C'_1};$$

c'est donc faire tourner les axes X_1, Y_1, Z_1 autour de Z_1 d'un angle Ψ dans le sens positif.

Soit $\varkappa$ une arbitraire; prenons

$$(124a)\qquad C'_1 = E e^{\left(\frac{\varkappa+s}{\rho} - \frac{1}{2}D\right)(u_1 - v)};$$

il en résulte (124)

$$e^{i\Psi} = \left[\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} e^{-u\zeta v}\right]^{\beta} e^{\frac{\alpha-\varkappa-s}{\rho}u}$$

et, par suite,

$$i\frac{d\Psi}{du} = \beta[\zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v] + \frac{\alpha-\varkappa-s}{\rho} = \beta z + \frac{\alpha-\varkappa-s}{\rho}.$$

Exprimant z par $\cos CZ$ (123) et introduisant dt au lieu de du, j'en conclus

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\beta\rho}{i\theta}\,\frac{(z_a - z_b)\cos CZ + z_a + z_b}{2} + \frac{\alpha - \varkappa - s}{i\theta}.$$

Je mets maintenant Z_1Z au lieu de CZ, les deux axes Z_1 et C coïncidant, et j'ai, pour la vitesse de rotation considérée,

$$\frac{d\Psi}{dt} = M\cos Z_1Z + N,$$

avec cette expression des deux constantes M, N

$$M = \frac{1}{2}\,\frac{\beta\rho}{i\theta}(z_a - z_b), \tag{126}$$

$$N = \frac{1}{2}\,\frac{\beta\rho}{i\theta}(z_a + z_b) + \frac{\alpha - \varkappa - s}{i\theta}. \tag{127}$$

Il est manifeste que les deux mouvements M_0, M'_1 *concordants* sont tout à fait arbitraires. Étant donnés, ils déterminent les invariants, les arguments a, b, v et les constantes γ, $\varkappa + s$. Si l'on prenait arbitrairement M et N, les constantes β et α se trouveraient déterminées. Mais d'abord l'arbitraire $\varkappa$ n'influe pas sur le mouvement résultant et, sans restreindre la généralité, on pourra la prendre de manière à faire évanouir N. En second lieu, β ne peut être quelconque; cette constante est déterminée par les autres données. Voici donc la conclusion :

Par rapport à des axes fixes a, b, c (axes de symétrie de deux ellipsoïdes ou hyperboloïdes), deux systèmes d'axes X, Y, Z *et* X_1, Y_1, Z_1 *sont animés de deux mouvements à la Poinsot concordants. Un autre système* A, B, C, *où l'axe* C *coïncide avec* Z_1, *est animé autour de* Z_1, *et par rapport aux axes* X_1, Y_1, *d'une rotation dont la vitesse instantanée est*

$$\frac{d\Psi}{dt} = M\cos Z_1Z.$$

Si la constante M *est convenablement choisie, le mouvement relatif de* A, B, C, *par rapport à* X, Y, Z, *reproduit la rotation d'un solide dans un liquide en l'absence de toute force accélératrice,* *pour un quelconque des cas où, la force vive ayant la forme* (75), *la quantité* $(p' - p)$ *est positive.*

Tel est le théorème, analogue à celui de Jacobi sur la rotation d'un corps grave dans le vide, que l'emploi des fonctions elliptiques m'a fait trouver.

Pour mettre ce théorème sous son vrai jour, il faut maintenant dégager entièrement des fonctions elliptiques la solution des deux problèmes suivants :

1° *En supposant donnés les deux mouvements à la Poinsot, trouver les constantes de la rotation résultante ;*

2° *En supposant données, au contraire, ces dernières, trouver les mouvements composants.*

Détermination des constantes au moyen des mouvements composants.

Dans ce premier problème, on suppose donnés deux mouvements à la Poinsot concordants, comme il a été dit au § V. Les quantités suivantes, qui s'y rapportent, sont donc des données, savoir Λ, A, B, $\tau^2 p v_0$, $\tau^2 p v_1$, $\tau^3 p' v_0$, $\tau^3 p' v_1$; $\tau^2 p u_0$, $\tau^2 p u_1$, $\tau^3 p' u_0$, $\tau^3 p' u_1$; $\tau^2 p v$, $\tau^3 p' v$. Elles sont toutes définies par les éléments des deux mouvements, ainsi que je l'ai expliqué dans le paragraphe rappelé.

C'est au moyen de ces quantités que je vais trouver les expressions des constantes de la rotation résultante, envisagée comme étant celle d'un solide dans un liquide.

En premier lieu, les constantes d'homogénéité ρ et τ se ramènent l'une à l'autre aisément. Nous avons en effet (44) et (105)

$$\frac{du_1}{dt} = \tau = \frac{du}{dt} = \frac{\rho}{\theta}, \qquad \tau = \frac{\rho}{\theta}.$$

Prenons les deux quantités A, B avec leurs expressions elliptiques. D'après les égalités (120), elles fournissent deux des constantes cherchées. On a en effet (52) et (84)

$$\mathrm{A} = \frac{\rho}{\theta}[\zeta(a+v) - \zeta a - \zeta(b+v) + \zeta b] = \frac{\rho}{\theta}(z_a - z_b) = \frac{2\sqrt{m}}{\theta},$$

$$\mathrm{B} = \frac{\rho}{\theta}[\zeta(a+v) - \zeta a + \zeta(b+v) - \zeta b - 2\zeta v] = \frac{\rho}{\theta}(z_a + z_b) = \frac{1}{2}\,\frac{h}{\theta}.$$

J'ai déjà employé les notations suivantes (106) :

$$(128)\qquad \tfrac{1}{4}h = \nu_1, \qquad \frac{n}{y_3} = \nu, \qquad \sqrt{m} = \mu, \qquad \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1} = \mu_1.$$

Les rapports de deux de ces constantes à θ sont maintenant connus par les dernières formules, savoir :

$$(129)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mu}{\theta} = \tfrac{1}{2}A, \\[2ex] \dfrac{\nu_1}{\theta} = \tfrac{1}{2}B. \end{cases}$$

Les rapports des deux autres μ_1, ν et de la constante s avec θ se trouvent par le moyen des quantités connues $\tau^2 p v$, $\tau^2 p v_0$, ... Je déduis des égalités (107) et (111),

$$\mu_1^2 + \mu^2 - 2\nu_1^2 = 2\rho^2(2 p v_1 + p v),$$

et, par conséquent,

$$\frac{\mu_1^2}{\theta^2} = \tfrac{1}{4}(2B^2 - A^2) + 2(2\tau^2 p v_1 + \tau^2 p v).$$

Prenant ensuite les combinaisons des égalités (108) et (113),

$$\rho^3(s p' v_1 + 2\nu_1 p' v) = (\tfrac{1}{4}s^2 - \nu_1^2)(\mu^2 - \mu_1^2) = \rho^2(p v_1 - p v)(\mu^2 - \mu_1^2),$$
$$\rho^3(\nu_1 p' v_1 + \tfrac{1}{2}s p' v) = (\nu_1^2 - \tfrac{1}{4}s^2)(\nu + \nu_1)s = \rho^2(p v - p v_1)(\nu + \nu_1)s,$$

j'en conclus

$$(130)\qquad \frac{s}{\theta}\tau^3 p' v_1 + B\tau^3 p' v = (\tau^2 p v_1 - \tau^2 p v)\left(\frac{\mu^2}{\theta^2} - \frac{\mu_1^2}{\theta^2}\right),$$

$$(131)\qquad B\tau^3 p' v_1 + \frac{s}{\theta}\tau^3 p' v = 2(\tau^2 p v - \tau^2 p v_1)\left(\frac{\nu}{\theta} + \frac{\nu_1}{\theta}\right)\frac{s}{\theta},$$

égalités dont la première donne $\frac{s}{\theta}$ et la seconde $\frac{\nu}{\theta}$.

Voici donc déterminées déjà cinq constantes $\frac{\mu}{\theta}$, $\frac{\nu}{\theta}$, $\frac{\nu_1}{\theta}$, $\frac{s}{\theta}$ et $\left(\frac{\mu_1}{\theta}\right)^2$.

Considérons maintenant les deux exponentielles C_0 et C'_1 qui achèvent de caractériser les mouvements composants. Elles ont, on le sait, les expressions suivantes (33),

$$C_0 = k_0\, e^{\frac{1}{\tau}\left(i\varepsilon\frac{h_0}{n_0} - \tau\zeta v_0\right)u_0}, \qquad C'_1 = k_1\, e^{-\frac{1}{\tau}\left(i\varepsilon\frac{h_1}{n_1} + \tau\zeta v_1\right)u_1}.$$

Si l'on y remplace u_0 par $-u$ et u_1 par $u+v$, on voit que les coefficients de u, dans ces exponentielles, sont

$$\frac{1}{\tau}\left(-i\varepsilon\frac{h_0}{n_0} + \tau\zeta v_0\right) \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{\tau}\left(i\varepsilon\frac{h_1}{n_1} + \tau\zeta v_1\right).$$

Le premier d'entre eux, d'après l'expression (124) de C_0 et d'après celle (99) de D_1, doit être

$$-\left(\frac{\gamma}{\rho} + \frac{1}{2}D_1\right) = -\frac{1}{\tau}\left\{\frac{\gamma}{\theta} + \frac{\tau}{2}[\zeta a + \zeta b + \zeta(a+v) + \zeta(b+v)]\right\}.$$

Le second, d'après l'expression (124a) de C'_1 et d'après celle (91) de D_1, doit être

$$\frac{\varkappa + s}{\rho} - \frac{1}{2}D = \frac{1}{\tau}\left\{\frac{\varkappa}{\theta} + \frac{\tau}{2}[\zeta b - \zeta a + \zeta(b+v) - \zeta(a+v)]\right\}.$$

J'ai donc les deux égalités suivantes :

$$(132)\quad \frac{\gamma}{\theta} = i\varepsilon\frac{h_0}{n_0} - \frac{\tau}{2}[\zeta a + \zeta b + \zeta(a+v) + \zeta(b+v) + 2\zeta v_0],$$

$$(133)\quad \frac{\varkappa}{\theta} = -i\varepsilon\frac{h_1}{n_1} - \frac{\tau}{2}[\zeta b - \zeta a + \zeta(b+v) - \zeta(a+v) + 2\zeta v_1].$$

Les arguments a, $b+v$, v_0 ont zéro pour somme (120); de même aussi, zéro est la somme des arguments b, $a+v$, v_0. D'après le théorème d'addition des fonctions ζ, on a donc, au moyen des égalités (110),

$$\zeta a+\zeta(b+v)+\zeta v_0=-\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{p}'(b+v)-\mathfrak{p}'a}{\mathfrak{p}(b+v)-\mathfrak{p}a}$$
$$=-\frac{1}{\rho}\left(\mu-\frac{1}{2}\frac{s\nu}{\mu}\right)=-\frac{1}{\tau}\left(\frac{\mu}{\theta}-\frac{1}{2}\frac{s\nu}{\theta\mu}\right),$$
$$\zeta b+\zeta(a+v)+\zeta v_0=-\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{p}'(a+v)-\mathfrak{p}'b}{\mathfrak{p}(a+v)-\mathfrak{p}b}$$
$$=\frac{1}{\rho}\left(\mu+\frac{1}{2}\frac{s\nu}{\mu}\right)=\frac{1}{\tau}\left(\frac{\mu}{\theta}+\frac{1}{2}\frac{s\nu}{\theta\mu}\right).$$

L'égalité (132) devient ainsi

$$\frac{\gamma}{\theta}+\frac{1}{2}\frac{s\nu}{\theta\mu}=i\varepsilon\frac{h_0}{n_0}. \tag{134}$$

En considérant de même b, $-a$, v_1, dont la somme est nulle, et $b+v$, $-(a+v)$, v_1, dont la somme est nulle aussi, j'ai

$$\zeta b-\zeta a+\zeta v_1=-\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{p}'b+\mathfrak{p}'a}{\mathfrak{p}b-\mathfrak{p}a}=\frac{1}{\rho}(\mu+\tfrac{1}{2}s)=\frac{1}{\tau}\left(\frac{\mu}{\theta}+\frac{1}{2}\frac{s}{\theta}\right),$$
$$\zeta(b+v)-\zeta(a+v)+\zeta v_1=-\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{p}'(b+v)+\mathfrak{p}'(a+v)}{\mathfrak{p}(b+v)-\mathfrak{p}(a+v)}$$
$$=\frac{1}{\rho}(-\mu+\tfrac{1}{2}s)=\frac{1}{\tau}\left(-\frac{\mu}{\theta}+\frac{1}{2}\frac{s}{\theta}\right),$$

et l'égalité (133) devient

$$\frac{\alpha}{\theta}+\frac{1}{2}\frac{s}{\theta}=-i\varepsilon\frac{h_1}{n_1}. \tag{135}$$

Il reste enfin à faire intervenir le troisième mouvement composant, la rotation autour de l'axe Z_1. En premier lieu, l'égalité (126) donne

$$M=\frac{1}{2}\frac{\beta}{i}A.$$

Mais β n'est autre que $-\frac{h}{2s}$ (94) ou $-\frac{B\theta}{s}$ (129). La constante M du troisième mouvement est donc fournie par l'égalité

$$M=\tfrac{1}{2}AB\frac{i\theta}{s}.$$

Prenant enfin l'égalité (127) et y supposant $N = 0$, j'ai, au moyen de (129),

$$\frac{\alpha - \varkappa - s}{i\theta} = -\tfrac{1}{2}B^2\frac{i\theta}{s}.$$

Cette dernière, avec (135), donne

$$\frac{\varkappa - \frac{1}{2}s}{i\theta} = -\varepsilon\frac{h_1}{n_1} - \tfrac{1}{2}B^2\frac{i\theta}{s}, \tag{136}$$

à quoi il faut joindre

$$\beta = -B\frac{\theta}{s}.$$

Par les égalités (134) et (136) sont déterminées les constantes purement imaginaires $\frac{\gamma}{\theta}$, $\frac{\varkappa}{\theta}$, en fonction des données et de la constante purement imaginaire $\frac{s}{\theta}$. Cette dernière est fournie par l'équation (130). Les cinq constantes trouvées en premier lieu et ces deux dernières $\frac{\gamma}{\theta}$, $\frac{\varkappa}{\theta}$ constituent le système de sept constantes relatives à la rotation, qui a été prévu plus haut.

Détermination des mouvements composants au moyen du mouvement composé.

Des égalités (30) appliquées successivement aux deux mouvements à la Poinsot, je conclus en remplaçant $\frac{\mu_0}{n_0}$ et $\frac{\mu_1}{n_1}$ par $-\tau$ et τ, puis τ par $\frac{\rho}{\theta}$,

$$\frac{h_0^2 - a_0^2}{n_0 h_0}(\rho^2 e_\alpha - \rho^2 p v_0) = \frac{\varepsilon}{\theta}\frac{\rho^3 p' v_0}{2i},$$

$$\frac{h_1^2 - a_1^2}{n_1 h_1}(\rho^2 e_\alpha - \rho^2 p v_1) = -\frac{\varepsilon}{\theta}\frac{\rho^3 p' v_1}{2i}.$$

J'écris ces égalités sous la forme suivante :

$$\frac{h_0^2 - a_0^2}{n_0 h_0}[\rho^2(e_\alpha - p v) - \rho^2(p v_0 - p v)] = \frac{\varepsilon}{\theta}\frac{\rho^3 p' v_0}{2i}, \tag{137}$$

$$\frac{h_1^2 - a_1^2}{n_1 h_1}[\rho^2(e_\alpha - p v) - \rho^2(p v_1 - p v)] = -\frac{\varepsilon}{\theta}\frac{\rho^3 p' v_1}{2i}, \tag{138}$$

et j'observe d'abord que les trois quantités $\rho^2(e_\alpha - \wp v)$ sont racines de l'équation

$$4(X + \rho^2\wp v)^3 - \rho^4 g_2(X + \rho^2\wp v) - \rho^6 g_3 = 0,$$

c'est-à-dire

$$4X^3 + 12\rho^2\wp v . X^2 + \rho^4(12\wp^2 v - g_2)X + \rho^6\wp'^2 v = 0.$$

J'ai calculé plus haut (107), (108) et (109) les coefficients de cette équation, en sorte que j'obtiens immédiatement l'équation résolvante

$$\begin{aligned}4X^3 &+ 2(2\nu_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2 - s^2)X^2 \\ &+ [\tfrac{1}{4}(2\nu_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2 - s^2)^2 - (\nu_1^2 - \mu^2)(\nu_1^2 - \mu_1^2) - s^2(\nu + \nu_1)^2]X \\ &\qquad + \tfrac{1}{4}[\nu_1(\mu_1^2 - \mu^2) - s^2(\nu + \nu_1)]^2 = 0.\end{aligned}$$

Remplaçant $\rho^2(\wp v_0 - \wp v)$ et $\rho^3\wp' v_0$ par leurs expressions (111) et (112) dans l'égalité (137) et posant, pour abréger,

$$\xi_0 = \nu_1^2 - \frac{1}{4}\frac{s^2\nu^2}{\mu^2},$$

je conclus la détermination du mouvement composant M_0 comme il suit :

Soient X_α, X_β, X_γ les racines de l'équation résolvante; on aura

$$\begin{aligned}(X_\alpha + \xi_0)\frac{h_0^2 - a_0^2}{n_0 h_0} &= (X_\beta + \xi_0)\frac{h_0^2 - b_0^2}{n_0 h_0} = (X_\gamma + \xi_0)\frac{h_0^2 - c_0^2}{n_0 h_0} \\ &= \frac{\varepsilon s}{2i\theta}\left[\nu_1\left(\mu + \frac{\nu\nu_1}{\mu}\right) + \frac{1}{4}\frac{\nu}{\mu}\left(\mu^2 - \mu_1^2 + s^2 - \frac{s^2\nu^2}{\mu^2}\right)\right],\end{aligned}$$

à quoi il faut joindre l'égalité (134)

$$\frac{h_0}{n_0} = \varepsilon\left(\frac{\gamma}{i\theta} + \frac{1}{2}\frac{s\nu}{i\theta\mu}\right).$$

Par un calcul tout pareil et en posant

$$\xi_1 = \nu_1^2 - \tfrac{1}{4}s^2,$$

je détermine le mouvement composant M'_1 au moyen des égalités

$$(X_\alpha + \xi_1)\frac{h_1^2 - a_1^2}{n_1 h_1} = (X_\beta + \xi_1)\frac{h_1^2 - b_1^2}{n_1 h_1} = (X_\gamma + \xi_1)\frac{h_1^2 - c_1^2}{n_1 h_1}$$
$$= -\frac{\varepsilon s}{2i\theta}\left[\nu_1(\nu + \nu_1) + \tfrac{1}{4}(\mu^2 - \mu_1^2)\right],$$
$$\frac{h_1}{n_1} = -\varepsilon\frac{\alpha - \frac{1}{2}s + \beta\nu_1}{i\theta}.$$

En outre, la concordance des deux mouvements M_0 et M'_1 comporte la détermination des constantes A, B, $\tau^2\wp v$, $\tau^3\wp' v$ dont voici les expressions (129), (107) et (108),

$$A = 2\frac{\mu}{\theta}, \qquad B = 2\frac{\nu_1}{\theta},$$
$$\tau^2\wp v = \frac{1}{6}\,\frac{2\nu_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2 - s^2}{\theta^2}, \qquad \tau^3\wp' v = \frac{1}{2}\,\frac{\nu(\mu_1^2 - \mu^2) - s^2(\nu + \nu_1)}{\theta^3}.$$

Enfin la constante du troisième mouvement composant est donnée par l'égalité

$$M = \frac{\beta\mu}{i\theta} = 2\frac{\mu\nu_1 i}{s\theta}.$$

Cas où le corps solide est de révolution.

Le troisième mouvement composant disparaît quand la constante M est nulle. Cette circonstance se produit moyennant l'évanouissement de $\nu_1 = \frac{1}{4}h$, c'est-à-dire de $q - q'$ (80).

Le plus intéressant de ces cas est celui où les deux coefficients q et q' sont nuls. On peut voir dans l'Ouvrage de M. Kirchhoff que cette hypothèse se réalise pour un solide de révolution.

Voici donc un cas très nettement défini, où la rotation du solide dans le liquide se ramène à deux mouvements à la Poinsot seulement, celui où le solide est un corps homogène et de révolution.