JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Sur quelques propriétés des aires sphériques

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 4 (1888), p. 313-348.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4__313_0>

Sur quelques propriétés des aires sphériques;

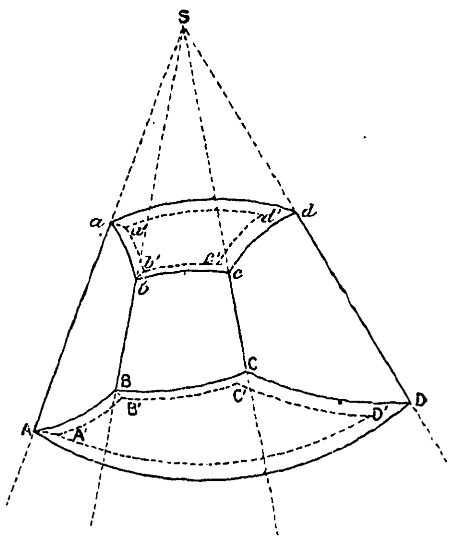
PAR M. G. HUMBERT.

---

1. L'objet du présent Mémoire est l'extension à la sphère de la propriété si simple et si remarquable que présente la circonférence de cercle pour la mesure des angles situés d'une manière quelconque dans son plan, et qu'on peut énoncer ainsi : la différence (ou la somme) des arcs interceptés par les deux côtés d'un angle α sur une circonférence de rayon R est égale à $2R\alpha$. Dans l'espace, ce théorème n'est pas applicable sans modification à la différence des aires que découpe sur une sphère un cône rencontrant cette surface suivant deux courbes fermées; nous montrerons que cette différence ne dépend pas seulement du rayon de la sphère et de la forme du cône, ce qui serait la généralisation directe de la proposition sur la mesure des angles plans, mais qu'il suffit, pour l'exprimer, d'introduire un nouvel élément, à savoir la distance du centre de la sphère à un plan passant par le sommet du cône et lié invariablement à ce cône. Nous verrons également que cette propriété s'étend aux surfaces développables et, en général, aux surfaces réglées; dans le cas spécial des surfaces réglées, à plan directeur, on retrouve même la propriété de l'angle plan, c'est-à-dire que la différence des aires découpées sur une sphère par une telle surface ne dépend pas de la position de la sphère dans l'espace. Enfin, les formules relatives au cône nous permettront d'évaluer la différence des aires découpées sur une sphère par une quadrique, dans le cas où l'intersection se compose de deux courbes fermées, et d'établir, relativement à cette différence, quelques propositions curieuses parmi lesquelles nous signalerons celles qui concernent le paraboloïde elliptique.

2. Proposons-nous d'évaluer d'abord la différence des aires découpées sur une sphère de rayon R par un angle polyèdre convexe, dont toutes les arêtes rencontrent la sphère, et dont le sommet, pour fixer les idées, est supposé extérieur à la sphère (*fig.* 1). Nous ferons le raisonnement dans le cas d'un angle à quatre faces; la théorie s'étend sans changement au cas d'un angle solide convexe quelconque.

Fig. 1.



L'expression à évaluer est la différence ABCD − *abcd*; cherchons la variation que subit cette différence quand l'angle polyèdre S se déplace d'une manière quelconque dans l'espace.

Tout déplacement de cet angle peut s'obtenir : 1° par une translation; 2° par une rotation autour d'un axe qu'on peut supposer passer par le centre de la sphère. Une telle rotation n'altérant pas les aires découpées par l'angle polyèdre sur la sphère, il suffit, pour étudier la variation de la différence de ces aires, de considérer le cas d'une translation infiniment petite de l'angle polyèdre.

Soient ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 les déplacements des faces AB, BC, CD, DA, comptés normalement à ces faces; les aires découpées sur la sphère deviennent A'B'C'D' et $a'b'c'd'$; la figure convient au cas où les faces de l'angle polyèdre se sont déplacées vers l'intérieur de cet angle. Joignons par des lignes quelconques les points voisins a et a', ...; A et A', ...; appelons σ_2 l'aire ABCD, σ_1 l'aire $abcd$; on aura

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = -[\mathrm{AA'B'B} - aa'b'b] - \ldots.$$

Or AA'B'B est une portion de zone sphérique, de hauteur ε_1, et, si ρ_1 est le rayon de la circonférence à laquelle appartiennent les arcs ab et AB, on a évidemment

$$\mathrm{AA'B'B} = 2\pi\mathrm{R}\varepsilon_1 \frac{\operatorname{arc}\mathrm{AB}}{2\pi\rho_1}, \qquad aa'b'b = 2\pi\mathrm{R}\varepsilon_1 \frac{\operatorname{arc} ab}{2\pi\rho_1},$$

d'où

$$\mathrm{AA'B'B} - aa'b'b = \mathrm{R}\varepsilon_1 \frac{\operatorname{arc}\mathrm{AB} - \operatorname{arc} ab}{\rho_1}.$$

L'expression $\frac{\operatorname{arc}\mathrm{AB} - \operatorname{arc} ab}{2\rho}$ est égale, d'après le théorème sur la mesure des angles plans, à l'angle α_1 des droites Aa et Bb, c'est-à-dire à une des faces de l'angle polyèdre. On a donc, α_2, α_3, α_4 étant les autres faces,

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = -2\varepsilon_1\alpha_1 - 2\varepsilon_2\alpha_2 - 2\varepsilon_3\alpha_3 - 2\varepsilon_4\alpha_4.$$

Si le déplacement d'une des faces, telle que SAB, s'était effectué vers l'extérieur de l'angle polyèdre, on aurait eu à remplacer dans cette formule $-\varepsilon_1$ par ε_1, de sorte que l'on peut écrire la formule

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = 2\mathrm{R}(\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \ldots),$$

en convenant de donner le signe + aux déplacements dirigés vers l'extérieur de l'angle solide et le signe − aux déplacements dirigés vers l'intérieur.

Si l'on suppose le sommet de l'angle situé à l'intérieur de la sphère, on aura une formule analogue, exprimant toujours la *différence* des aires découpées par l'angle sur la sphère et non leur somme, comme on pourrait le penser, par analogie avec le théorème de la mesure des angles plans; cette formule est

$$\frac{1}{2R}(d\sigma_2 - d\sigma_1) = \varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \ldots,$$

en convenant de donner le signe + aux déplacements dirigés vers l'extérieur de l'aire σ_2, et le signe − aux déplacements dirigés vers l'intérieur de cette aire. Cette règle comprend la précédente si l'on ajoute que, dans le cas où le sommet est extérieur à la sphère, σ_2 désigne la plus grande des deux aires.

Cela posé, observons qu'en nommant $h_1, h_2, \ldots$ les distances des faces de l'angle au centre de la sphère, on a

$$\varepsilon_1 = dh_1,$$

si la face SAB, en se déplaçant vers l'extérieur de l'aire σ_2, s'éloigne du centre de la sphère, c'est-à-dire si le centre est situé, par rapport à cette face, du même côté que l'aire σ_2, et qu'on a

$$\varepsilon_1 = -dh_1$$

dans le cas contraire.

La formule peut donc s'écrire

$$\frac{1}{2R}(d\sigma_2 - d\sigma_1) = \pm\alpha_1 dh_1 \pm \alpha_2 dh_2 \pm \ldots,$$

avec la convention suivante :

On prendra le signe + pour la face α si le centre de la sphère est, par rapport à cette face, du même côté que l'aire σ_2; et le signe − dans le cas contraire.

On tire de là

$$\frac{1}{2R}(\sigma_2 - \sigma_1) = \pm\alpha_1 h_1 \pm \alpha_2 h_2 \pm \ldots + \text{const.}$$

La constante est nulle, puisque, si le sommet de l'angle est au centre de la sphère, h_1, h_2, ... sont nuls, et σ_2 égal à σ_1. Il reste donc

$$(1) \qquad \frac{1}{2R}(\sigma_2 - \sigma_1) = \pm \alpha_1 h_1 \pm \alpha_2 h_2 \pm \ldots,$$

les signes étant choisis comme il vient d'être dit.

Nous avons ainsi *l'expression de la différence des aires découpées sur une sphère de rayon* R *par un angle polyèdre dont toutes les arêtes coupent réellement la sphère.* Rappelons que, dans cette formule, α_1, α_2, ... sont les angles des faces et h_1, h_2, ... les distances de ces faces au centre de la sphère.

3. *Remarque.* — Il importe d'observer que, dans l'évaluation de la différence $d\sigma_2 - d\sigma_1$, nous n'avons nullement supposé que les quatre arêtes Aa, Bb, Cc, Dd concouraient en un même point, mais seulement que chacune d'elles rencontrait la précédente et la suivante. On en conclut sans difficulté que la différence des aires découpées sur la sphère par un solide ainsi défini est encore donnée par la formule

$$(1\ bis) \qquad \frac{1}{2R}(\sigma_2 - \sigma_1) = \pm a_1 h_1 \pm \alpha_2 h_2 \pm \ldots,$$

α_1, h_1, ... ayant la même signification que plus haut.

4. Arrivons maintenant au cas où l'angle polyèdre considéré deviendrait un cône.

Prenons le sommet de ce cône pour origine des coordonnées; soient a, b, c les coordonnées du centre de la sphère. Il est clair d'abord que le double signe de la formule (1) devra disparaître en raison de la continuité : les quantités $\pm \alpha_1 h_1$ deviennent en effet $\pm h\, d\theta$, en désignant par $d\theta$ l'angle d'une génératrice du cône avec la génératrice voisine, et par h la distance du centre de la sphère au plan tangent correspondant. Or, si l'on doit prendre le signe $+$ pour une génératrice, on aura également le signe $+$ pour la suivante, et cela jusqu'au moment où h sera nul, c'est-à-dire où le plan tangent passera par le centre de la sphère, et, à partir de ce moment, d'après la règle donnée plus haut, on devra prendre la distance de ce centre au plan tangent avec le signe —. Mais h est une fonction continue du paramètre qui détermine la génératrice, et cette fonction change généralement de signe en passant par zéro; il en résulte que la formule définitive est

$$\frac{1}{2R}(\sigma_2-\sigma_1)=\int h\,d\theta,$$

h étant exprimé en fonction du paramètre qui détermine la génératrice correspondante.

Le calcul permet aisément d'évaluer $h\,d\theta$, et l'on trouve une expression sans radical.

On a en effet, $f(x, y, z)=0$ étant l'équation du cône,

$$h=\frac{af'_x+bf'_y+cf'_z}{\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+f'^2_z}}.$$

En désignant par $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ un point du cône voisin du point (x, y, z), on a

$$\begin{aligned} f'_x x+\ f'_y y+\ f'_z z&=0,\\ f'_x\,dx+f'_y\,dy+f'_z\,dz&=0, \end{aligned}$$

d'où

$$h=\frac{a[y\,dz-z\,dy]+b[z\,dx-x\,dz]+c[x\,dy-y\,dx]}{\sqrt{(y\,dz-z\,dy)^2+(z\,dx-x\,dz)^2+(x\,dy-y\,dx)^2}}.$$

Quant à $d\theta$, angle des directions x, y, z et $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, il est donné par la formule connue

$$d\theta=\frac{\sqrt{(y\,dz-z\,dy)^2+(z\,dx-x\,dz)^2+(x\,dy-y\,dx)^2}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Donc enfin

$$\frac{1}{2R}(\sigma_2-\sigma_1)=\int\frac{a(y\,dz-z\,dy)+b(z\,dx-x\,dz)+c(x\,dy-y\,dx)}{x^2+y^2+z^2},$$

l'intégrale étant prise le long du contour du cône.

En posant

$$\lambda = \int \frac{y\,dz - z\,dy}{x^2+y^2+z^2},$$
$$\mu = \int \frac{z\,dx - x\,dz}{x^2+y^2+z^2},$$
$$\nu = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2+z^2},$$

ces intégrales étant toujours prises le long du contour du cône, on aura

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2R[\lambda a + \mu b + \nu c].$$

Si donc on désigne par *plan d'orientation* du cône le plan

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$

dont la position, par rapport au cône, comme on le voit aisément, est indépendante du choix des axes de coordonnées, et par *module* du cône la quantité

$$\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2},$$

on arrive au résultat suivant :

Théorème. — *Soit un cône, de module ρ, rencontrant une sphère de rayon* R *suivant deux courbes fermées, et de telle sorte que toutes les génératrices réelles du cône coupent réellement la sphère; désignons par d la distance du centre de la sphère au plan d'orientation du cône : la différence des deux aires que le cône découpe sur la sphère est égale à* $2\rho R d$.

5. La remarque du n° **3** permet d'étendre ce théorème aux surfaces développables.

En effet, à la limite, la figure considérée dans cette remarque, formée de droites, telles que chacune d'elles rencontre la précédente et la suivante, devient une surface développable.

Soit alors $ux + vy + wz + p = 0$ l'équation du plan tangent de cette développable, u, v, w et p étant des fonctions d'un paramètre t; on a

$$h\,d\theta = \frac{au + bv + cw + p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\,d\theta,$$

et, d'après (1 *bis*), *la formule qui donne la différence des aires découpées par la développable sur une sphère de centre* (a, b, c) *et de rayon* R *est*

$$\frac{1}{2R}(\sigma_2 - \sigma_1) = \int \frac{au + bv + cw + p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\,d\theta,$$

l'intégrale s'étendant à tout le contour de la développable.

Or les intégrales $\displaystyle\int \frac{u\,d\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$, $\displaystyle\int \frac{v\,d\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$, $\displaystyle\int \frac{w\,d\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$ sont égales aux intégrales λ, μ, ν relatives au cône directeur de la développable; il en résulte qu'on peut écrire

$$\frac{1}{2R}(\sigma_2 - \sigma_1) = \lambda a + \mu b + \nu c + \varpi,$$

et, par suite :

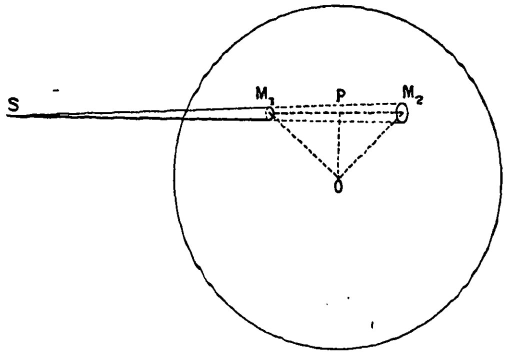
Si une développable rencontre une sphère de rayon R *suivant deux courbes fermées, et de telle sorte que toutes les génératrices réelles coupent réellement cette surface, la différence des deux aires qu'elle découpe sur la sphère est égale à* $2\rho R d$, ρ *désignant le module du cône directeur de la développable, et* d *la distance du centre de la sphère à un plan lié à la développable et parallèle au plan d'orientation du cône directeur.*

Ce plan peut être appelé *plan d'orientation de la développable.*

6. Avant de faire quelques applications des résultats qui précèdent, nous ferons connaître une autre méthode pour l'évaluation de la différence des aires dans le cas du cône. Cette méthode, qui nous a été indiquée par M. Darboux, donne une définition géométrique simple du plan d'orientation du cône; nous avons cru toutefois utile, malgré la simplicité de la nouvelle démonstration, de faire connaître celle qui est exposée précédemment, parce qu'elle s'applique aux surfaces développables et qu'elle donne, sous une forme plus commode et plus précise, la différence des aires découpées par un angle polyèdre.

Considérons (*fig.* 2) une sphère de rayon R et de centre O, et un

Fig. 2.



cône de sommet S : un pinceau conique très petit, de sommet S et d'ouverture $d\omega$, découpe sur la sphère deux aires $d\sigma_2$ et $d\sigma_1$. On a

$$d\sigma_2 = d\omega \frac{\mathrm{SM}_2^2}{\cos \mathrm{SM}_2\mathrm{O}},$$

$$d\sigma_1 = d\omega \frac{\mathrm{SM}_1^2}{\cos \mathrm{SM}_1\mathrm{O}}.$$

Or les angles $\mathrm{SM}_2\mathrm{O}$ et $\mathrm{SM}_1\mathrm{O}$ étant égaux, il vient

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = d\omega \frac{\overline{\mathrm{SM}}_2^2 - \overline{\mathrm{SM}}_1^2}{\cos \mathrm{SM}_1\mathrm{O}}.$$

D'ailleurs

$$\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 = 2\mathrm{R}\cos \mathrm{SM}_1\mathrm{O},$$

et, par suite,

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = 2\mathrm{R}\, d\omega \frac{\overline{\mathrm{SM}}_2^2 - \overline{\mathrm{SM}}_1^2}{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} = 2\mathrm{R}\, d\omega \frac{\overline{\mathrm{SM}}_2^2 - \overline{\mathrm{SM}}_1^2}{\mathrm{SM}_2 - \mathrm{SM}_1},$$

c'est-à-dire

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = 4\mathrm{R}\, d\omega\, \overline{\mathrm{SP}},$$

P désignant le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$.

Si l'on prend le point S pour origine, en désignant toujours par a,

b, c les coordonnées du centre de la sphère, il vient, x, y, z étant les coordonnées d'un point de SM_1,

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = 4R\,d\omega\,\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

d'où, en intégrant

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 4R\int\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,d\omega,$$

l'intégrale étant prise cette fois dans l'intérieur du cône.

Or, si l'on désigne par ω l'aire sphérique interceptée par le cône sur une sphère concentrique de rayon un, par X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité de cette aire, on a évidemment

$$X\omega = \int\frac{x\,d\omega}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

et deux expressions analogues pour Y et Z, les intégrales étant toujours prises dans l'intérieur du cône.

L'expression cherchée peut donc s'écrire

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 4R(aX+bY+cZ)\omega.$$

Si l'on compare cette formule à celle qui a été trouvée par la première méthode, à savoir

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2R(\lambda a + \mu b + \nu c),$$

on en conclut

$$(2) \qquad \lambda = 2\omega X, \qquad \mu = 2\omega Y, \qquad \nu = 2\omega Z;$$

et, par suite :

Le plan d'orientation d'un cône est le plan mené par le sommet normalement à la droite qui joint les centres de gravité des deux aires que découpe le cône sur une sphère concentrique de rayon *égal à l'unité; le module du cône est égal au produit de la distance de ces deux centres de gravité par la valeur de l'angle conique.*

On peut dire aussi que le module est égal au moment, par rapport au sommet, des aires découpées par le cône sur une sphère concentrique de rayon un.

7. Il est facile de vérifier directement les formules (2).

En effet, l'expression $\frac{x\,d\omega}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ est la projection de l'élément $d\omega$, de la sphère concentrique au cône, sur le plan des yz; il en résulte que l'intégrale $\int \frac{x\,d\omega}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, prise dans l'intérieur du cône, représente l'aire de la projection sur le plan des yz de l'une des aires découpées par le cône sur la sphère concentrique de rayon un.

Or, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point du contour de l'aire sphérique, la projection de cette aire sera représentée par l'intégrale $\frac{1}{2}\int (y\,dz - z\,dy)$, prise le long de son contour, ou, si l'on veut, par l'intégrale $\frac{1}{2}\int \frac{y\,dz - z\,dy}{x^2+y^2+z^2}$, prise le long du contour du cône. Cette dernière intégrale étant égale à $\frac{1}{2}\lambda$, on a bien

$$\lambda = 2\omega X,$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

8. Nous allons faire maintenant quelques applications des formules qui viennent d'être démontrées.

Observons, en premier lieu, que le théorème fondamental sur la différence des aires sphériques découpées par un cône, et sur l'évaluation de cette différence en fonction du module et du plan d'orientation du cône, s'applique non seulement aux cônes algébriques ou aux cônes transcendants ayant une équation déterminée, mais encore à toute surface conique composée de portions de cônes algébriques ou transcendants juxtaposées suivant les génératrices.

En particulier, un angle polyèdre possède un plan d'orientation et un module, qu'on peut définir comme dans le cas général, soit analytiquement, soit géométriquement.

Cela étant entendu, on peut de la formule

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2\rho R d$$

déduire les conséquences immédiates suivantes :

Le lieu des centres des sphères de rayon constant sur lesquelles une surface conique fixe découpe deux aires de différence donnée est un système de deux plans parallèles au plan d'orientation du cône et symétriques par rapport à ce plan.

En particulier :

Les sphères sur lesquelles un cône fixe découpe deux aires égales sont celles qui ont leur centre dans le plan d'orientation du cône.

Remarquons que, si l'on fait tourner un cône autour d'une droite perpendiculaire à son plan d'orientation, ce plan, qui est lié invariablement au cône, ne fait que glisser sur lui-même, et, en réalité, il ne change pas de position dans l'espace : la distance d du centre de la sphère à ce plan demeure ainsi constante, et la formule fondamentale montre qu'il en est de même de la différence $\sigma_2 - \sigma_1$. On arrive donc à ce théorème curieux :

La différence des aires que découpe un cône sur une sphère fixe reste constante quand on fait tourner ce cône autour d'une droite quelconque perpendiculaire à son plan d'orientation.

La propriété de l'angle inscrit dans une circonférence peut se généraliser dans l'espace comme il suit :

Un cône qui se déplace d'une manière quelconque, de telle façon que son sommet reste sur une sphère et que son plan d'orientation demeure tangent à la sphère, découpe sur cette surface une aire de grandeur constante.

La valeur de cette aire est donnée par la formule générale où l'on fait $d = R$; elle est donc égale à $2\rho R^2$, ρ *étant toujours le module du cône.*

On voit, en particulier, que les cônes dont le module est égal à π découperont ainsi une aire égale à la moitié de la surface totale de la sphère.

Plus généralement :

Un cône qui se déplace d'une manière quelconque, de telle façon que son sommet reste sur une sphère et que son plan d'orientation demeure tangent à une sphère concentrique à la première, découpe sur celle-ci une aire de grandeur constante.

La valeur de cette aire est $2\rho R^2 \cos\theta$, en appelant θ l'angle constant sous lequel le plan d'orientation coupe la sphère primitive.

Dans tous ces énoncés, on suppose toujours que toutes les génératrices réelles du cône coupent réellement la sphère.

9. *Remarque.* — Lorsque le sommet du cône est sur la sphère, la courbe commune peut être une courbe fermée sans point double, ou une courbe composée de deux boucles avec un point double au sommet du cône : dans ce dernier cas, l'aire d'une des boucles doit être prise positivement, et celle de l'autre négativement.

Il peut se faire que la courbe commune à un cône et à une sphère que rencontrent toutes les génératrices réelles du cône se compose d'une seule boucle fermée : c'est ce qui se présente, par exemple, quand le cône est du troisième ordre et que son sommet est intérieur à la sphère. Les formules et les théorèmes précédents s'appliquent alors à la différence des deux aires sphériques comprises l'une à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de cette boucle.

10. Nous n'insisterons pas plus longtemps sur les conséquences immédiates de la formule fondamentale, ni sur celles qu'on pourrait déduire de la formule établie pour les surfaces développables : nous y reviendrons plus loin, à l'occasion des surfaces réglées de nature quelconque; mais, auparavant, nous donnerons quelques exemples de la détermination du module et du plan d'orientation d'une surface conique.

Trièdre. — Soit un trièdre ayant son sommet à l'origine des coordonnées; appelons α_1, α_2, α_3 les angles des faces, et h_1, h_2, h_3 les distances de ces faces au centre d'une sphère de centre (a, b, c) et de rayon R. Si le point (a, b, c) est dans l'intérieur du trièdre, et si le sommet du trièdre est extérieur à la sphère, on aura, pour la différence des aires découpées,

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2\mathrm{R}(h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + h_3\alpha_3).$$

D'après la formule générale relative aux cônes, on a aussi, en désignant par ρ le module du trièdre, et par d la distance du point (a, b, c) au plan d'orientation

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2\rho\mathrm{R}d,$$

d'où

$$h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + h_3\alpha_3 = \rho d.$$

Si l'équation de la face α_i est

$$\mathrm{A}_i x + \mathrm{B}_i y + \mathrm{C}_i z = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et si $\lambda' x + \mu' y + \nu' z = 0$ est l'équation du plan d'orientation du trièdre, on aura donc

$$\sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i \frac{\mathrm{A}_i a + \mathrm{B}_i b + \mathrm{C}_i c}{\sqrt{\mathrm{A}_i^2 + \mathrm{B}_i^2 + \mathrm{C}_i^2}} = \rho \frac{\lambda' a + \mu' b + \nu' c}{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}};$$

d'où l'on tire, puisque (a, b, c) est un point arbitraire,

$$\sum \alpha_i \frac{\mathrm{A}_i}{\sqrt{\mathrm{A}_i^2 + \mathrm{B}_i^2 + \mathrm{C}_i^2}} = \frac{\rho\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}},$$

et deux autres équations analogues.

En désignant par l_i, m_i, n_i les angles que fait avec les trois axes la normale à la face α_i, et par p, q, r ceux que fait avec les axes la normale au plan d'orientation, ces équations peuvent s'écrire :

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} \alpha_1 \cos l_1 + \alpha_2 \cos l_2 + \alpha_3 \cos l_3 = \rho \cos p, \\ \alpha_1 \cos m_1 + \alpha_2 \cos m_2 + \alpha_3 \cos m_3 = \rho \cos q, \\ \alpha_1 \cos n_1 + \alpha_2 \cos n_2 + \alpha_3 \cos n_3 = \rho \cos r. \end{cases}$$

Ces trois équations déterminent $\cos p$, $\cos q$, $\cos r$ et ρ, c'est-à-dire le plan d'orientation et le module du trièdre; en même temps, elles mettent en évidence la construction géométrique suivante :

Par le sommet d'un trièdre, élevons sur chacune des faces une normale dirigée vers l'extérieur du trièdre, et portons sur cette normale, à partir du sommet, une longueur égale à l'angle de la face : si l'on compose comme des forces les trois longueurs ainsi définies, la résultante obtenue est égale au module du trièdre et perpendiculaire à son plan d'orientation.

Nous avons appelé extérieur du trièdre par rapport à une face la portion de l'espace qui n'est pas située du même côté de cette face que l'arête opposée.

Le module du trièdre peut se calculer aisément en fonction des angles des faces.

Ajoutons, en effet, membre à membre, les équations (E) élevées au carré; il vient

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\\ &\quad + 2\alpha_1\alpha_2(\cos l_1 \cos l_2 + \cos m_1 \cos m_2 + \cos n_1 \cos n_2) + \ldots.\end{aligned}$$

Or, si l'on désigne par A_{12} l'angle du trièdre compris entre les faces α_1 et α_2, on a

$$-\cos A_{12} = \cos l_1 \cos l_2 + \cos m_1 \cos m_2 + \cos n_1 \cos n_2,$$

d'où

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\rho^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\\ &\quad - 2\alpha_1\alpha_2 \cos A_{12} - 2\alpha_1\alpha_3 \cos A_{13} - 2\alpha_2\alpha_3 \cos A_{23}.\end{aligned}\right.$$

Cette formule donne le module du trièdre en fonction des faces α_1, α_2, α_3 du trièdre et des angles A_{12}, A_{13}, A_{23} qu'elles comprennent; on peut, si l'on veut, exprimer tout en fonction de α_1, α_2, α_3 par les formules

$$\cos\alpha_3 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos A_{12},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

11. *Exemples.* — 1° Pour un *trièdre trirectangle*, le plan d'orientation est normal à la droite qui est l'intersection des plans bissecteurs des trois trièdres, et que, pour abréger, nous appellerons *axe* du trièdre; le module est donné par la formule (3), où

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = A_{12} = \ldots = \frac{\pi}{2};$$

on a ainsi

$$\rho = \frac{\pi}{2}\sqrt{3}.$$

On peut maintenant appliquer à ce cas particulier la formule générale; nous nous contenterons d'énoncer le résultat suivant :

Un trièdre trirectangle dont le sommet est sur une sphère de rayon R, *et dont l'axe passe par le centre de la sphère, découpe sur cette surface une aire égale à* $\pi R^2 \sqrt{3}$.

Cette aire est donc incommensurable avec celle de la sphère.

2° Pour un trièdre ayant ses trois faces égales, le plan d'orientation est encore normal à l'*axe*, le mot *axe* ayant la même signification que tout à l'heure; appelons α l'angle commun des faces, A l'angle dièdre compris entre deux faces; on a

$$\rho = \alpha\sqrt{3 - 6\cos A}.$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$, le trièdre est l'angle solide d'un tétraèdre régulier et

$$\cos A = \tfrac{1}{3};$$

par suite,

$$\rho = \frac{\pi}{3}.$$

De là cette conséquence intéressante :

Si un trièdre, dont les faces sont de 60°, *a son sommet sur une sphère, et si son axe passe par le centre, il découpe sur la sphère une aire égale au sixième de l'aire totale de cette surface.*

12. Il serait aisé de multiplier ces exemples; mais nous préférons, pour ne pas lasser l'attention du lecteur, arriver à une application plus importante de nos formules.

Nous allons montrer qu'elles permettent de déterminer, sur la sphère, la *valeur d'une aire quelconque limitée par des arcs de petits cercles*.

Désignons, en effet, par P le polygone qui limite cette aire; si nous faisons passer un grand cercle par deux sommets consécutifs du polygone, nous obtenons un nouveau polygone P′, limité par des arcs de grand cercle dont on sait calculer l'aire, et, pour déduire l'aire de P de celle de P′, il suffira de savoir évaluer *la surface de la lunule comprise entre un grand cercle et un petit cercle.*

Or c'est là une application immédiate de la formule qui donne l'aire découpée sur une sphère par un trièdre dont le sommet est sur cette surface; car le trièdre dont le sommet est à l'une des extrémités de la lunule, et dont les arêtes sont la corde de cette lunule, la tangente au grand cercle et la tangente au petit cercle, découpe précisément sur la sphère l'aire de la lunule.

Si donc on appelle

α l'angle de la tangente au grand cercle et de la tangente au petit cercle à l'une des extrémités de la lunule, ces tangentes étant supposées dirigées vers la lunule;

β l'angle de la tangente considérée au petit cercle et de la corde de la lunule, cette corde étant supposée dirigée vers la seconde extrémité de la lunule;

h la distance du centre de la sphère au plan du petit cercle;

l'aire σ de la lunule sera, d'après (1),

$$\sigma = 2R[R\alpha \pm h\beta].$$

On prendra le signe + si le centre de la sphère est, par rapport au plan du petit cercle, du même côté que la lunule, et le signe − dans le cas contraire.

On peut donner une formule tout à fait pareille pour l'*aire σ de la lunule comprise entre deux petits cercles* B *et* C.

Si l'on appelle

α l'angle des tangentes aux deux cercles à l'une des extrémités de la lunule, ces tangentes étant dirigées vers la lunule;
β l'angle de la tangente considérée au petit cercle B et de la corde de la lunule;
γ l'angle analogue de la tangente au cercle C et de la corde de la lunule;
h et k les distances du centre de la sphère aux plans des cercles B et C;

on aura

$$\sigma = 2R[R\alpha \pm h\beta \pm k\gamma].$$

On prendra le signe + devant h (ou k) si le centre de la sphère est, par rapport au plan du cercle B (ou C), du même côté que la lunule, et le signe − dans le cas contraire.

13. *Angle polyèdre.* — On a, pour déterminer le plan d'orientation et le module d'un angle polyèdre convexe quelconque, des formules analogues à celles qu'on a établies pour le trièdre, et en particulier une construction géométrique de ces deux éléments identique à celle du n° **10**.

14. *Cône du second ordre.* — Il est clair que, pour un cône du second ordre, le plan d'orientation est le plan mené par le sommet normalement à l'axe de symétrie intérieur ou principal, car une sphère ayant son centre dans ce plan est coupée par le cône suivant deux courbes fermées symétriques l'une de l'autre, et comprenant des aires égales.

Cela posé, supposons que le cône soit rapporté à son sommet et à ses axes, l'axe principal étant celui des z, son équation sera

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0,$$

A, B, C étant positifs.

Le plan d'orientation étant le plan des xy, les intégrales que nous avons appelées λ et μ au n° **4** seront nulles, et le module ρ du cône est égal à la valeur absolue de l'intégrale

$$\nu = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2 + z^2},$$

prise le long du contour du cône. Si l'on pose $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\varphi$ et si l'on remplace z^2 par sa valeur tirée de l'équation du cône, il vient

$$\nu = \int_0^{2\pi} \frac{C\,d\varphi}{C + A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi}$$

ou

$$\nu = C\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(A+C)\cos^2\varphi + (B+C)\sin^2\varphi},$$

et, d'après une formule connue ([1]),

$$\rho = C\,\frac{2\pi}{\sqrt{(A+C)(B+C)}}.$$

Si maintenant on appelle α et β les angles que fait l'axe principal avec les génératrices du cône situées dans les plans principaux qui passent par cet axe, il vient

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A+C}}, \qquad \sin\beta = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{B+C}}$$

et, par suite,

$$\rho = 2\pi\sin\alpha\sin\beta.$$

D'après cela, la différence des deux aires que découpe le cône considéré sur une sphère de rayon R que rencontrent toutes ses génératrices réelles a pour valeur $4\pi R d \sin\alpha\sin\beta$, d étant la distance du centre de la sphère au plan principal normal à l'axe intérieur du cône.

15. *Quadriques.* — On peut faire une application de ces résultats à l'évaluation de la différence des aires découpées sur une sphère par une surface du second ordre, qui rencontre la sphère suivant deux courbes fermées.

([1]) Voir, par exemple, le *Cours d'Analyse* de M. Hermite, p. 396.

Soient

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

et

$$F=Mx^2+Ny^2+Pz^2+2mx+2ny+2pz+q=0$$

les équations de la sphère et de la quadrique F, les axes de coordonnées étant parallèles à ceux de F.

Si F coupe la sphère suivant deux courbes fermées, il est clair que l'un des deux cônes réels qui passent par l'intersection des deux surfaces aura son centre à l'intérieur de la sphère. Les axes de ce cône sont d'ailleurs parallèles à ceux de F; nous supposerons que son axe intérieur est parallèle à Oz.

Cela posé, l'équation du cône est de la forme

$$F+\theta(x^2+y^2+z^2-R^2)=0,$$

θ étant une constante convenablement choisie; son sommet est à une distance d du plan xOy donnée par la relation

$$F'_d+2\theta d=0,$$

c'est-à-dire

$$d=-\frac{p}{P+\theta}.$$

Quant au module ρ du cône, il s'obtient en calculant, d'après la formule donnée plus haut, le module du cône qui lui est parallèle et dont le sommet est à l'origine; ce dernier cône ayant pour équation

$$Mx^2+Ny^2+Pz^2+\theta(x^2+y^2+z^2)=0,$$

on aura

$$\rho=\operatorname{mod} 2\pi\frac{P+\theta}{\sqrt{(M-P)(N-P)}}.$$

La différence des deux aires découpées sur la sphère par la quadrique F, ou, ce qui revient au même, par le cône considéré, sera donc, d'après la formule générale,

$$(4)\qquad \sigma_2-\sigma_1=2\rho R d=2\pi R\frac{\operatorname{mod} p}{\sqrt{(M-P)(N-P)}}.$$

Cette formule met en évidence plusieurs propriétés curieuses des surfaces du second ordre.

Si on la met sous la forme

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \operatorname{mod} 2\pi R\left(\frac{-p}{P}\right)\frac{P}{\sqrt{(M-P)(N-P)}},$$

on voit que la différence des deux aires découpées par une quadrique sur une sphère est égale au produit du rayon de la sphère par la distance de son centre à *l'un* des plans principaux de la quadrique, le tout étant multiplié par un coefficient numérique, ou module, qui ne dépend que de la forme de la surface du second ordre, et nullement de sa position dans l'espace.

C'est donc une relation tout à fait analogue à celle qu'on a trouvée dans le cas des surfaces coniques; seulement, ici se présente cette circonstance remarquable que les quadriques n'ont pas seulement un, mais deux modules, le module à choisir pour l'application de la formule dépendant des positions respectives de la sphère et de la quadrique.

Pour mettre ce fait en lumière, supposons par exemple que la quadrique soit un ellipsoïde : M, N et P sont alors positifs.

Le cône ayant pour sommet l'origine qui est parallèle au cône passant par l'intersection de l'ellipsoïde et de la sphère, et dont le sommet est intérieur à la sphère, a pour équation

$$(M+\theta)x^2 + (N+\theta)y^2 + (P+\theta)z^2 = 0.$$

Nous avons supposé que l'axe principal de ce cône était Oz; on a donc

$$M+\theta > 0, \qquad N+\theta > 0, \qquad P+\theta < 0,$$

ou

$$M+\theta < 0, \qquad N+\theta < 0, \qquad P+\theta > 0,$$

ce qui exige que P soit plus grand que M et N ou plus petit que ces deux quantités; en d'autres termes, l'axe de l'ellipsoïde dirigé suivant Oz sera le plus grand ou le plus petit axe de la surface.

Ce résultat peut encore s'énoncer ainsi :

L'axe principal du cône qui passe par l'intersection d'un ellipsoïde et d'une sphère, et dont le sommet est intérieur à la sphère, est parallèle soit au grand axe, soit au petit axe de l'ellipsoïde.

Imaginons qu'il soit d'abord parallèle au grand axe, et désignons par a, b, $c\,[a > b > c]$ les trois demi-axes de l'ellipsoïde; P sera alors inférieur à M et N, et l'on aura

$$\frac{P}{\left(\frac{1}{a^2}\right)} = \frac{M}{\left(\frac{1}{b^2}\right)} = \frac{N}{\left(\frac{1}{c^2}\right)}.$$

Le plan principal de l'ellipsoïde dont la distance au centre de la sphère intervient dans la formule (4) est le plan du petit et du moyen axe; le module correspondant a pour valeur

$$\rho_1 = \frac{2\pi P}{\sqrt{(M-P)(N-P)}} = 2\pi \frac{\frac{1}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)}}.$$

Si, au contraire, l'axe principal du cône considéré plus haut est parallèle au petit axe de l'ellipsoïde, le plan principal de cet ellipsoïde, dont la distance au centre de la sphère intervient dans la formule, est celui du grand et du moyen axe; le module correspondant a pour valeur

$$\rho_2 = 2\pi \frac{\frac{1}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)}}.$$

On aurait des résultats analogues pour l'hyperboloïde à une nappe ou l'hyperboloïde à deux nappes.

16. Toute cette discussion peut se résumer dans les termes suivants :

Soit $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = K$ *l'équation d'une quadrique rapportée à son centre et à ses axes*; *appelons* module correspondant au plan principal $z = 0$ *la valeur absolue de la quantité*

$$\frac{2\pi P}{\sqrt{(M-P)(N-P)}},$$

et modules correspondant aux autres plans principaux *les quantités analogues obtenues en permutant* M, N *et* P. *Deux de ces modules sont réels, le troisième est imaginaire.*

Cela posé, admettons que la quadrique coupe une sphère de rayon R *suivant deux courbes fermées; le cône du second ordre qui passe par cette intersection, et dont le sommet est intérieur à la sphère, a son axe intérieur normal à l'un des plans principaux de la quadrique; soit* Π *ce plan.*

La différence des deux aires découpées par la quadrique sur la sphère est égale à $2R\rho d$, ρ *désignant le module correspondant au plan* Π, *et* d *la distance du centre de la sphère à ce plan* (1).

Cette formule n'introduit jamais celui des modules qui est imaginaire, parce que le plan Π ne peut pas coïncider avec le plan principal correspondant à ce module, si l'on suppose que la quadrique coupe la sphère suivant deux courbes fermées.

De là résulte immédiatement cette conséquence :

*La différence des deux aires que découpe une quadrique sur une sphère ne varie pas quand on fait tourner la quadrique autour d'*UN *de ses axes, ou de toute autre droite parallèle à cet axe.*

L'axe dont il s'agit est celui qui est normal au plan Π défini plus haut.

Si l'on remarque que les modules de la quadrique ne dépendent que des rapports $\frac{M}{P}$ et $\frac{N}{P}$, on voit également que :

La différence des deux aires que découpe une quadrique sur une sphère ne varie pas quand la quadrique se déforme en restant concentrique et homothétique à elle-même;

ou, si l'on veut :

Les deux aires annulaires découpées sur une sphère par le solide

---

(1) Il est à remarquer que ce théorème s'applique à la différence des deux aires découpées sur une sphère par un cône du second ordre, *même quand toutes les génératrices réelles du cône ne rencontrent pas la sphère.* Il suffit que l'intersection se compose de deux boucles fermées.

compris entre deux quadriques homothétiques et concentriques sont égales.

17. Dans le cas où la *quadrique* est *de révolution*, il est aisé de voir, d'après ce qui précède, que le plan Π est toujours normal à l'axe de révolution; si cet axe est l'axe des z, on aura

$$M = N,$$

et le module correspondant sera

$$\rho = 2\pi \bmod \frac{P}{M-P}.$$

18. *Paraboloïde.* — Ces résultats s'appliquent aux paraboloïdes, mais avec une modification importante dans le cas où, le paraboloïde étant elliptique, le plan Π est normal à l'axe de cette surface.

Soient, en effet,

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

et

$$F = Mx^2+Ny^2+2mx+2ny+2pz+q=0$$

les équations d'une sphère et d'un paraboloïde, dont l'axe est parallèle à l'axe des z.

Supposons que le paraboloïde coupe la sphère suivant deux courbes fermées, et que le cône qui passe par ces courbes et dont le sommet est intérieur à la sphère, ait son axe principal parallèle à l'axe du paraboloïde; on aura alors, pour la différence des deux aires découpées sur la sphère,

$$(5) \qquad \sigma_2-\sigma_1 = 2\pi R\frac{p}{\sqrt{MN}},$$

en faisant simplement $P=0$ dans la formule (4) [1].

Il résulte de là que, si l'on imprime au paraboloïde une translation quelconque, la différence $\sigma_2-\sigma_1$ reste constante, car les coefficients

[1] Cette formule montre que M et N doivent être de même signe, c'est-à-dire que le paraboloïde est elliptique.

M, N et p ne varient pas quand on remplace x, y, z par $x+h, y+k, z+l$ dans l'équation du paraboloïde.

Comme on peut également, sans changer σ_2 et σ_1, faire tourner le paraboloïde autour d'un diamètre de la sphère, on voit que la différence $\sigma_2 - \sigma_1$ restera invariable pour tout déplacement du paraboloïde dans l'espace.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soit un paraboloïde elliptique coupant une sphère suivant deux courbes fermées; le cône du second ordre qui passe par ces courbes, et dont le sommet est intérieur à la sphère, a son axe intérieur parallèle à l'une des directions principales du paraboloïde : supposons-le parallèle à l'axe de cette surface.

La différence des deux aires que découpe le paraboloïde sur la sphère reste constante quand le paraboloïde se déplace d'une manière quelconque dans l'espace, la condition précédente étant toujours supposée remplie.

Si, au contraire, l'axe intérieur du cône dont il vient d'être question était normal à l'axe du paraboloïde, la différence des deux aires aurait la même expression que dans le cas des quadriques à centre.

Si le paraboloïde est de révolution, le cône dont il s'agit a toujours son axe intérieur parallèle à celui de la surface; le théorème s'énonce alors plus simplement et d'une manière tout à fait générale :

La différence des deux aires que découpe sur une sphère un paraboloïde de révolution est indépendante des positions respectives des deux surfaces dans l'espace.

D'après la formule (5), elle est égale à $4\pi R\varpi$, ϖ désignant le paramètre de la parabole méridienne.

Le paraboloïde elliptique nous présente ainsi le premier exemple d'une surface pouvant découper sur une sphère deux aires dont la différence ne dépend que de la forme des deux surfaces : c'est une généralisation directe de la propriété de l'angle plan et de la circonférence; nous indiquerons, à la fin de ce travail, une infinité d'autres généralisations de même nature, mais le paraboloïde est la surface la plus simple à laquelle s'appliquent ces extensions si curieuses.

Pinceaux de droites. — Nous terminerons ce Mémoire en étendant aux *surfaces réglées* la propriété établie pour le cône et pour les surfaces développables ; quelques remarques relatives aux aires découpées par *un pinceau de droites* sur un plan et sur une sphère serviront de base à cette extension.

Soit $d\omega$ l'aire infiniment petite que découpe un pinceau de droites sur un plan normal à l'axe du pinceau en un point M : il est clair que l'aire $d\sigma$ découpée sur un plan passant par M et faisant avec le premier un angle θ sera donnée par la formule

$$d\omega = d\sigma \cos\theta,$$

car l'aire $d\omega$ peut être considérée comme la projection de l'aire $d\sigma$.

Cela posé, cherchons comment varie l'aire découpée par le pinceau sur un plan qui se déplace en restant parallèle à lui-même.

Soient

$$(6) \qquad \begin{cases} x = \alpha z + p, \\ y = \beta z + q \end{cases}$$

les équations d'une droite : si l'on imagine que α et β soient fonctions de p et q, et si l'on donne à p et q des valeurs voisines de deux quantités p_0 et q_0, on obtient, par les équations précédentes, une infinité de droites appartenant à un pinceau infiniment délié.

L'aire découpée par ce pinceau sur un plan $z =$ const. sera

$$d\sigma' = \operatorname{mod}\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial p}\right) dp\, dq,$$

x et y étant des fonctions de p et q définies par les équations (6), où z est une constante. On a ainsi

$$d\sigma' = \operatorname{mod}(A z^2 + B z + 1)\, dp\, dq,$$

étant posé

$$A = \frac{\partial\alpha}{\partial p}\frac{\partial\beta}{\partial q} - \frac{\partial\alpha}{\partial q}\frac{\partial\beta}{\partial p}, \qquad B = \frac{\partial\alpha}{\partial p} + \frac{\partial\beta}{\partial q}.$$

Ces formules permettent d'évaluer l'aire découpée par le pinceau sur un plan quelconque P.

Soient en effet

z l'ordonnée du point M où le plan P rencontre l'axe du pinceau;
θ l'angle de la normale à ce plan avec l'axe du pinceau;
θ' l'angle de ce même axe avec Oz;
$d\sigma$ et $d\sigma'$ les aires découpées par le pinceau sur le plan P et sur le plan horizontal mené par M.

On a

$$d\sigma \cos\theta = d\sigma' \cos\theta',$$

car chacun des deux membres est égal à l'aire découpée par le pinceau sur le plan normal à son axe au point M.

On en conclut

$$d\sigma = \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \operatorname{mod}(Az^2 + Bz + 1)\, dp\, dq.$$

On sait que toutes les droites du pinceau rencontrent deux mêmes droites; si le plan sécant passe par l'un des points où ces droites coupent l'axe du pinceau, l'aire découpée sur ce plan est nulle; on voit ainsi que les deux racines de l'équation $Az^2 + Bz + 1 = 0$ sont les ordonnées des deux *points focaux* du pinceau.

20. Cela posé, soit une sphère de rayon R

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + k = 0.$$

Proposons-nous de calculer les deux aires que le pinceau (6) découpe sur cette surface : on peut évidemment substituer à la sphère son plan tangent en chacun des points M_1 et M_2 où elle est rencontrée par l'axe du pinceau.

Si donc on désigne par θ l'angle que fait l'axe du pinceau avec chacun des deux rayons de la sphère qui aboutissent aux points M_1 et M_2; par θ' l'angle de ce même axe avec Oz; par z_1 et z_2 les ordonnées de M_1 et M_2, on aura

$$d\sigma_1 = \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \operatorname{mod}(Az_1^2 + Bz_1 + 1)\, dp\, dq,$$

$$d\sigma_2 = \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \operatorname{mod}(Az_2^2 + Bz_2 + 1)\, dp\, dq.$$

Deux cas sont maintenant à distinguer.

Si les deux points focaux du pinceau sont tous deux à l'intérieur, ou tous deux à l'extérieur de la sphère, les trinômes $Az_1^2+Bz_1+1$ et $Az_2^2+Bz_2+1$ sont de même signe, et l'on a

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = \frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\,\mathrm{mod}\left[A(z_2^2-z_1^2)+B(z_2-z_1)\right]dp\,dq.$$

Si au contraire les deux points focaux sont l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de la sphère, on aura

$$d\sigma_2 + d\sigma_1 = \frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\,\mathrm{mod}\left[A(z_2^2-z_1^2)+B(z_2-z_1)\right]dp\,dq.$$

Or on peut écrire

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\,\frac{M_1M_2}{R} = \frac{1}{2R}\,\frac{z_2-z_1}{\cos\theta'}$$

et, par suite,

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = 2R\cos^2\theta'\,\mathrm{mod}\left[\frac{A(z_2^2-z_1^2)+B(z_2-z_1)}{z_2-z_1}\right]dp\,dq,$$

c'est-à-dire

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = \frac{2R}{\alpha^2+\beta^2+1}\,\mathrm{mod}\left[A(z_2+z_1)+B\right]dp\,dq.$$

En cherchant les z des points d'intersection de la droite

$$x=\alpha z+p,\qquad y=\beta z+q$$

avec la sphère, on trouve

$$z_1+z_2=\frac{2(a\alpha+b\beta+c-\alpha p-\beta q)}{\alpha^2+\beta^2+1};$$

donc enfin

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = \frac{4R}{(\alpha^2+\beta^2+1)^2}\left[A(a\alpha+b\beta+c-\alpha p-\beta q)+B(\alpha^2+\beta^2+1)\right]dp\,dq,$$

en prenant la valeur absolue du second membre.

Cette formule peut être interprétée géométriquement d'une manière très simple.

Le plan mené normalement à l'axe du pinceau par le milieu du segment que déterminent les deux points focaux a pour équation

$$\alpha(x - \alpha\zeta - p) + \beta(y - \beta\zeta - q) + z - \zeta = 0,$$

ζ désignant l'ordonnée de ce point milieu; or, d'après ce qui a été dit, on a

$$\zeta = -\frac{B}{A},$$

et l'équation du plan devient

$$A\alpha x + B\beta y + Az - A(\alpha p + \beta q) + B(\alpha^2 + \beta^2 + 1) = 0.$$

La distance δ du centre de la sphère à ce plan est donc

$$\delta = \frac{A(a\alpha + b\beta + c - \alpha p - \beta q) + B(\alpha^2 + \beta^2 + 1)}{A\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}$$

et, par suite,

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = \frac{4R\delta}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} A\, dp\, dq.$$

Or, si l'on fait un changement de variables en prenant pour variables indépendantes α et β à la place de p et q, il faut remplacer dans cette formule $A\, dp\, dq$ par $d\alpha\, d\beta$, puisque A est le jacobien de α et β, considérés comme fonctions de p et q. Il vient donc

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = \frac{4R\delta}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} d\alpha\, d\beta.$$

La quantité $\dfrac{d\alpha\, d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$ a une signification géométrique simple; elle représente l'aire découpée sur une sphère de rayon un par le faisceau des droites menées du centre de la sphère parallèlement aux droites du pinceau.

Désignons par $\frac{\omega}{2}$ cette aire, qu'on peut appeler l'*ouverture du pin-*

ceau, on a finalement

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = 2 R \delta \omega.$$

On peut donc énoncer ce théorème :

La somme algébrique des deux aires découpées sur une sphère par un pinceau de droites est égale au double produit du rayon de la sphère par l'ouverture du pinceau et par la distance du centre de la sphère au plan de symétrie des deux points focaux du pinceau.

Ce plan est toujours réel, même si les points focaux sont imaginaires.

La *somme algébrique* dont il s'agit sera la différence des deux aires si les points focaux sont simultanément à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère; ce sera la somme des aires si l'un seulement des points focaux est intérieur à la sphère.

21. Le résultat qui précède devient illusoire si ω est nul, c'est-à-dire si les droites du pinceau sont parallèles à un même plan : en ce cas, un des points focaux est à l'infini, A est nul, et le raisonnement n'est plus applicable.

Supposons donc que A soit nul; la formule qui donne l'aire découpée par le pinceau sur un plan sera

$$d\sigma = \frac{\cos\theta'}{\cos\theta}(B\varsigma + 1)\, dp\, dq$$

et la somme algébrique des deux aires découpées sur une sphère devient

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = \frac{2R}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)} B\, dp\, dq.$$

On prendra le signe + si le point focal à distance finie est intérieur à la sphère, et le signe − s'il est extérieur.

Cette formule ne renferme que le rayon de la sphère et ne contient pas les coordonnées du centre. Ainsi :

La somme algébrique des deux aires découpées sur une sphère *par un pinceau de droites, toutes parallèles à un même plan, est égale au produit du rayon de la sphère par un coefficient constant, qui ne dépend que de la nature du pinceau. Cette somme reste donc constante quand le pinceau se déplace dans l'espace d'une manière quelconque.*

La somme algébrique qui intervient dans ce théorème est la différence des deux aires, si le point focal du pinceau situé à une distance finie se trouve à l'extérieur de la sphère; elle est la somme des deux aires dans le cas contraire.

22. On peut, en s'appuyant sur ces propositions, démontrer quelques résultats simples relatifs aux surfaces réglées.

En raison de la variété des formes que peuvent présenter ces surfaces, il ne paraît pas possible d'énoncer des théorèmes généraux sur la somme ou la différence des aires que découpe une telle surface sur une sphère; nous nous bornerons, dans ce qui suit, à traiter quelques cas spéciaux, très étendus d'ailleurs, qui offrent de l'intérêt par eux-mêmes, et dont la discussion montrera comment la question peut être abordée dans chaque exemple particulier.

23. *Surfaces réglées à plan directeur.* — Considérons, pour commencer, une surface Σ, à plan directeur et à deux directrices, dont l'une est une droite D et l'autre une courbe plane C, située dans un plan parallèle à D : on peut toujours supposer que cette courbe n'a pas de point double; sinon, on la décomposerait en deux ou plusieurs courbes fermées, sans point double.

La surface Σ est un *conoïde*, composé de deux nappes, qui se croisent le long de la directrice D; pour distinguer ces nappes, nous appellerons *nappe antérieure* celle qui est décrite par les génératrices rectilignes, prolongées à partir de la droite D, du côté de la courbe C, et *nappe postérieure* celle qui est décrite par les génératrices prolongées dans l'autre sens.

Remarquons maintenant que le solide compris à l'intérieur du conoïde Σ peut être décomposé en éléments de volume infiniment petits par des plans parallèles au plan directeur et des plans passant par la droite D : deux couples de ces plans, deux à deux infiniment voisins, limitent une sorte de coin infiniment délié; les coins ainsi obtenus remplissent une et une seule fois l'intérieur du conoïde, car ils n'empiètent pas les uns sur les autres. Pour évaluer l'aire découpée par le conoïde sur une surface, il suffit donc de faire la somme des aires découpées par les tranches élémentaires.

Or chacune de ces tranches peut être considérée comme un pinceau de droites, toutes parallèles au plan directeur, et dont le point focal à distance finie est sur la droite D; la somme algébrique des aires découpées par ce pinceau sur une sphère est, comme on l'a vu, égale à $R\,d\varpi$, $d\varpi$ étant un coefficient infiniment petit, indépendant de la position de la sphère; il en résulte que la somme algébrique des aires découpées sur la sphère par le conoïde est égale à $R\int d\varpi$, et qu'elle ne dépend par conséquent pas des positions respectives de la sphère et du conoïde, pourvu, bien entendu, que toutes les génératrices réelles de la seconde surface rencontrent réellement la première.

Pour déterminer le signe à attribuer aux aires sphériques, il suffit d'appliquer à chacune des tranches élémentaires la règle qui a été donnée plus haut : soient alors A et B deux courbes fermées suivant lesquelles le conoïde coupe la sphère; admettons pour plus de généralité que chacune de ces courbes soit tracée en partie sur la nappe antérieure et en partie sur la nappe postérieure du cône. On donnera le signe + aux aires qui correspondent aux portions de A situées sur la nappe antérieure, le signe — à celles qui correspondent aux portions de A sur la nappe postérieure, et pour la courbe B, on prendra les signes inverses.

Si, par exemple, les courbes A et B sont situées sur une même nappe du conoïde, c'est la différence des aires qui intervient; c'est la somme si A et B sont sur deux nappes différentes.

24. On peut énoncer maintenant le théorème suivant :

La somme algébrique des aires découpées sur une sphère par un conoïde dont toutes les génératrices réelles rencontrent la sphère est égale au produit du rayon par un coefficient qui ne dépend que de la forme du conoïde.

Cette somme reste donc constante quand la sphère se déplace *d'une manière quelconque dans l'espace, sans cesser de rencontrer toutes les génératrices réelles de la surface réglée.*

Ce théorème s'applique non seulement aux conoïdes, mais *à toutes les surfaces réglées à plan directeur, ou à toutes les portions continues de ces surfaces, qui n'admettent qu'une seule directrice multiple,* parce que, dans ce cas, on peut toujours décomposer le solide intérieur à la surface en coins infiniment déliés, ayant leurs sommets sur la directrice multiple, et n'empiétant pas les uns sur les autres, ainsi qu'on l'a fait dans le cas du conoïde.

Nous avons ainsi une infinité de surfaces, jouissant par rapport à la sphère de la même propriété que l'angle plan par rapport à la circonférence; à ces surfaces, il convient d'ajouter, comme on l'a vu plus haut, le paraboloïde elliptique, qui est d'ailleurs une surface réglée à plan directeur, mais à génératrices imaginaires.

Comme exemple de surfaces auxquelles le théorème précédent s'applique simplement, on doit citer le conoïde droit connu sous le nom de *coin de Wallis;* la détermination du signe à donner aux aires sphériques se fait en ce cas sans aucune difficulté.

25. *Surfaces réglées.* — La formule générale donnée au n° **20** pour les pinceaux de droites peut être appliquée comme il suit aux surfaces réglées.

Soit, par exemple, une surface réglée Σ définie par deux directrices rectilignes, D_1 et D_2, et une troisième directrice plane, C, fermée et sans point double. Décomposons l'aire comprise à l'intérieur de C en éléments infiniment petits, n'empiétant pas les uns sur les autres, et considérons le pinceau des droites qui s'appuient sur D_1, D_2 et rencontrent le plan de C à l'intérieur de l'un des éléments : il est clair que les pinceaux ainsi obtenus rempliront l'intérieur du solide compris dans la surface Σ, et n'empiéteront pas les uns sur les autres. Pour calculer la différence des aires découpées par Σ sur une sphère, il suffit donc de faire la somme des différences analogues pour les pinceaux introduits, et d'appliquer à cet effet les formules du n° **20**, en observant que les points focaux de l'un quelconque des pinceaux sont sur D et D_1.

La somme algébrique des aires découpées par un pinceau sur une sphère de centre a, b, c et de rayon R est de la forme

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = 2R(\lambda' a + \mu' b + \nu' c + \varpi')\,d\omega',$$

λ', μ', ν', ϖ' et $d\omega'$ étant des coefficients qui dépendent seulement de la nature du pinceau; il résulte de là que la somme algébrique des aires découpées sur la sphère par Σ sera de la même forme

$$\sigma_2 \pm \sigma_1 = 2R(\lambda a + \mu b + \nu c + \varpi),$$

λ, μ, ν, ϖ étant des coefficients qui dépendent des éléments définissant la surface Σ.

Cette expression est analogue à celle qui a été trouvée dans le cas des cônes et des surfaces développables; on peut l'écrire, en posant

$$\rho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2},$$
$$\sigma_2 \pm \sigma_1 = 2R\rho d,$$

formule où d désigne la distance du centre de la sphère au plan

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \varpi = 0,$$

qu'on peut appeler *plan d'orientation* de la surface réglée; nous appellerons de même la constante ρ *module* de la surface.

On peut démontrer que le module de la surface réglée est généralement égal à celui du cône directeur, et que son plan d'orientation est parallèle à celui de ce cône.

Reprenons à cet effet les formules du n° **20**, en supposant que le plan de la courbe directrice C soit celui des xy. On a, pour la somme algébrique des aires découpées sur une sphère de rayon R et de centre a, b, c par le pinceau des droites infiniment voisines de la droite

$$x = \alpha z + p, \qquad y = \beta z + q;$$

la formule

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = \frac{4R}{(\alpha^2+\beta^2+1)^2}\left[A(a\alpha + b\beta + c - \alpha p - \beta q) + B(\alpha^2 + \beta^2 + 1)\right] dp\,dq;$$

d'où

$$\sigma_2 \pm \sigma_1 = 2R \iint \frac{2A(a\alpha + b\beta + c - \alpha p - \beta q) + 2B(\alpha^2 + \beta^2 + 1)}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2} \, dp\, dq,$$

l'intégrale étant prise à l'intérieur de la courbe C.

On a donc

$$\lambda = \iint \frac{2A\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2} \, dp\, dq,$$

$$\mu = \iint \frac{2A\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2} \, dp\, dq,$$

$$\nu = \iint \frac{2A}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2} \, dp\, dq.$$

Si l'on prend comme variables α et β à la place de p et de q, on aura, puisque A est égal à $\frac{\partial \alpha}{\partial p}\frac{\partial \beta}{\partial q} - \frac{\partial \alpha}{\partial q}\frac{\partial \beta}{\partial p}$,

$$\lambda = \iint \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2} \, d\alpha\, d\beta,$$

$$\mu = \iint \frac{2\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2} \, d\alpha\, d\beta,$$

$$\nu = \iint \frac{2}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2} \, d\alpha\, d\beta,$$

les intégrales étant prises cette fois à l'intérieur du cône directeur de la surface réglée, puisque, si le point p, q est sur la courbe C, le point α, β, 1 est un point du cône formé par les parallèles qu'on peut mener de l'origine aux génératrices de la surface.

Les variables p et q ont ainsi disparu; il en résulte que les quantités λ, μ et ν ont les mêmes valeurs pour toutes les surfaces réglées qui ont même cône directeur, et en particulier qu'elles ont, pour une de ces surfaces, les mêmes valeurs que pour le cône directeur, ce qui démontre la proposition à établir. On peut d'ailleurs la vérifier directement comme il suit.

L'expression $\frac{d\alpha\, d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$ est l'aire infiniment petite $d\omega$, que découpe un pinceau conique ayant pour axe la direction α, β, 1, et compris à l'intérieur du cône directeur, sur une sphère concentrique de rayon un; on a, d'après cela, en désignant par x, y, z les coordonnées d'un point de cette sphère,

$$\lambda = \int\int \frac{2x\,d\omega}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\mu = \int\int \frac{2y\,d\omega}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\nu = \int\int \frac{2z\,d\omega}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

les intégrales étant prises à l'intérieur du cône directeur : ce sont précisément les formules établies aux n^{os} **6** et **7** dans le cas du cône.

26. On peut donc énoncer le théorème suivant :

La somme algébrique des aires découpées sur une sphère de rayon R *par une surface réglée, à deux directrices rectilignes, dont toutes les génératrices réelles rencontrent la sphère, est égale à* $2\rho R d$, ρ *désignant le module du cône directeur de la surface et d la distance du centre de la sphère à un plan, lié à la surface réglée, et parallèle au plan d'orientation du cône directeur.*

Ce théorème s'étend évidemment à toutes les surfaces réglées, ou à toutes les portions de surfaces réglées, telles qu'on puisse décomposer le solide qu'elles renferment en pinceaux rectilignes n'empiétant pas les uns sur les autres.

On peut déduire de la proposition précédente des conclusions analogues à celles qui ont été établies pour les cônes; ainsi, la somme algébrique des aires découpées reste constante quand la surface réglée tourne autour d'un axe normal au plan d'orientation du cône directeur.