JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE LÉVY

Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 4 (1888), p. 257-312.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4__257_0>

Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel;

Par M. Maurice LÉVY,
Membre de l'Institut.

FORME DES ÉQUATIONS DE LA DOUBLE RÉFRACTION.

1. Quelque idée que l'on se fasse de la lumière polarisée dans un plan, qu'on la regarde comme l'effet d'un dérangement élastique ou diélectrique ou magnétique, qu'elle résulte de vibrations rectilignes ou de rotations moyennes (*vortices*) ou de toute autre cause, ce qui est certain, comme l'a déjà observé Maxwell, c'est que cette cause est mesurable par une grandeur qui est de la nature d'un vecteur. Nous appellerons ce vecteur le *vecteur lumineux*. Ce peut être une vibration ou une force, l'axe d'un *vortex* ou celui d'un moment magnétique, ou toute autre chose, et il s'agit, sans idée préconçue sur sa nature, d'en chercher l'expression la plus générale compatible avec la surface de l'onde.

2. Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point du milieu qui produit la lumière et, à l'instant t, par u, v, w les composantes du vecteur lumineux en ce point, en sorte que u, v, w sont trois fonctions inconnues des quatre variables indépendantes x, y, z, t.

Quelque théorie que l'on adopte, la continuité supposée du milieu où se produit la lumière conduira toujours à un système d'équations aux différences partielles auquel devront satisfaire ces fonctions.

Le fait de l'interférence de la lumière montre que ces équations doivent être linéaires; et, si l'on fait d'abord abstraction de la dispersion et de la polarisation rotatoire, ces équations doivent être homogènes. Elles ne peuvent pas être du premier ordre, et parce qu'elles ne vérifieraient pas les lois expérimentales, et parce qu'elles doivent nécessairement contenir des forces accélératrices. On doit donc les regarder comme du second ordre.

D'ailleurs, toute onde plane paraît se propager avec la même vitesse dans les deux sens opposés qu'on peut attribuer à sa normale.

Ceci exige que les équations différentielles qui régissent u, v, w ne renferment que des dérivées d'ordre pair par rapport au temps, et, comme elles sont du second ordre, il n'y peut entrer, relativement au temps, que les trois dérivées

$$D_t^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad D_t^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad D_t^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Ces dérivées y entrent, d'ailleurs, nécessairement toutes les trois, puisque rien ne distingue les quantités u, v, w; si donc l'une d'elles manquait, elles devraient manquer toutes les trois, ce qui est impossible. Nous pouvons donc supposer les équations différentielles résolues par rapport à ces trois dérivées, et les écrire ainsi :

$$(1) \qquad \begin{cases} D_t^2 u = A u + H v + G' w \\ D_t^2 v = H' u + B v + F w, \\ D_t^2 w = G u + F' v + C w, \end{cases}$$

A, B, C; F, G, H; F′, G′, H′ étant trois fonctions symboliques homogènes et du second degré des trois symboles de dérivation D_x, D_y, D_z.

Les coefficients qui entrent dans ces équations peuvent, s'il s'agit de la propagation d'une onde lumineuse à travers un cristal, être des constantes ou des fonctions périodiques à courtes périodes de x, y, z. Mais, dans ce dernier cas, comme l'ont montré Cauchy, et depuis plus complètement MM. Sarrau et Potier, les valeurs moyennes que l'on cherche pour u, v, w obéissent toujours à un système d'équations différentielles à coefficients constants.

Équations aux vitesses et aux vecteurs des ondes planes.

3. A présent, si
$$l, \quad m, \quad n$$
désignent les cosinus directeurs de la normale à une onde plane, en sorte que
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$
et que ω soit sa vitesse de propagation, on sait que, pour obtenir l'équation qui fournit cette vitesse, il suffit :

1° De remplacer, dans les équations ci-dessus, les symboles
$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t$$
respectivement par
$$l, \quad m, \quad n, \quad -\omega,$$
ce qui fournit trois équations homogènes et linéaires en u, v, w; ces équations déterminent la direction du vecteur;

2° D'égaler à zéro le déterminant de ces équations.

Ainsi la direction du vecteur est fournie par les équations
$$(1\ bis) \qquad \begin{cases} (A - \omega^2)u + Hv + G'w = 0, \\ H'u + (B - \omega^2)v + Fw = 0, \\ Gu + F'v + (C - \omega^2)w = 0, \end{cases}$$
où A, B, C; F, G, H; F', G', H' sont, à présent, neuf fonctions homogènes et du second degré, à coefficients constants, des trois cosinus l, m, n.

Et, si l'on pose
$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A - \omega^2 & H & G' \\ H' & B - \omega^2 & F \\ G & F' & C - \omega^2 \end{vmatrix},$$

l'équation aux vitesses des ondes planes dans la direction caractérisée par les cosinus l, m, n est

$$(2\ bis) \qquad \Delta = 0,$$

équation du troisième degré en ω^2, qui montre qu'il se produit trois ondes en avant se propageant, en général, avec des vitesses différentes; et trois ondes en arrière se propageant respectivement avec les mêmes vitesses, et qu'il est par conséquent inutile d'envisager dans la discussion de l'équation.

Conditions générales de compatibilité avec la surface de l'onde de Fresnel.

4. Ce qui précède est vrai, quels que soient les axes de coordonnées; si l'on fait coïncider ces axes avec les axes d'élasticité d'un cristal à deux axes optiques, qu'on désigne par a, b, c les inverses de ses indices principaux de réfraction que je suppose essentiellement différents ([1]), et qu'on pose

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta = {} & (b^2 - \omega^2)(c^2 - \omega^2) l^2 \\ & + (c^2 - \omega^2)(a^2 - \omega^2) m^2 + (a^2 - \omega^2)(b^2 - \omega^2) n^2, \end{aligned} \right.$$

l'équation aux vitesses des ondes planes de Fresnel est

$$(3\ bis) \qquad \delta = 0,$$

équation du second degré en ω^2 qui fournit les vitesses des deux seules ondes produisant des rayons lumineux.

([1]) Nous supposons ici que a, b, c sont essentiellement différents. Nous cherchons, en effet, les lois applicables à tous les cristaux, celles applicables aux cristaux à un axe ($a = b$) ou aux corps isotropes ($a = b = c$) devant être des conséquences de ces lois générales. Mais, des équations qui ne conviendraient qu'aux cristaux à un axe ou aux corps isotropes sans être comprises comme cas particuliers dans les équations générales relatives aux cristaux à deux axes ne pourraient pas représenter des lois naturelles. Elles seraient comme des solutions singulières n'ayant ici aucun intérêt.

La troisième onde, celle qui répond à la troisième racine de l'équation en ω^2, sera appelée, d'après Cauchy, l'*onde obscure*.

Les neuf fonctions A, B, C; F, G, H; F', G', H' renferment 54 coefficients indéterminés. Le problème posé, envisagé dans toute sa généralité, consisterait à considérer ces 54 coefficients comme autant de fonctions inconnues des trois paramètres a^2, b^2, c^2, et à déterminer les expressions les plus générales possible de ces fonctions, pour lesquelles l'équation du troisième degré $\Delta = 0$ comprend les deux racines de l'équation $\delta = 0$, et cela quels que soient l, m, n, sous la seule réserve

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

ou, ce qui revient au même, les expressions les plus générales des cinquante-quatre fonctions inconnues pour lesquelles le polynôme Δ du troisième degré en ω^2 est divisible par celui du second degré δ, et cela quels que soient l, m, n, sous la seule réserve indiquée.

Car, si l'équation $\Delta = 0$ renferme les deux racines de l'équation $\delta = 0$, la surface de l'onde correspondant à la première de ces équations se décomposera en deux parties : l'une formée par la surface de Fresnel, l'autre répondant à l'onde obscure.

Théorème I. — *Pour que les équations différentielles* (1) *soient compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel, il est nécessaire que le polynôme homogène du sixième degré en l, m, n,*

$$\begin{vmatrix} A & H & G' \\ H' & B & F \\ G & F' & C \end{vmatrix},$$

où l, m, n sont regardés comme des grandeurs entièrement arbitraires, soit exactement divisible par le trinôme $l^2 + m^2 + n^2$.

En effet, nous avons dit que le polynôme Δ du troisième degré en ω^2 doit être divisible par celui du second δ, quels que soient l, m, n, sous la réserve $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Pour faire disparaître cette réserve, remplaçons, dans Δ, ω^2 par son égal $\omega^2(l^2+m^2+n^2)$. Alors, ce déterminant devient homogène en l, m, n, et les trois racines ω^2 de l'équation

$$\Delta = 0$$

ne dépendent plus que des rapports $l:m:n$.

Posons, pour abréger,

$$\omega'^2 = \omega^2(l^2+m^2+n^2),$$

et appelons Δ' ce que devient Δ, si l'on y remplace ω^2 par ω'^2, de sorte que

$$(3') \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} A-\omega'^2 & H & G' \\ H' & B-\omega'^2 & F \\ G & F' & C-\omega'^2 \end{vmatrix}.$$

A présent, si nous multiplions δ par $l^2+m^2+n^2$, il se trouve que le produit ne renferme plus que ω'^2. En posant

$$\delta' = \delta(l^2+m^2+n^2),$$

on a

$$(3'') \quad \delta' = \left\{ \begin{aligned} &\omega'^4 - [(b^2+c^2)l^2+(c^2+a^2)m^2+(a^2+b^2)n^2]\,\omega'^2 \\ &\quad + (b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2)(l^2+m^2+n^2), \end{aligned} \right.$$

et les deux racines ω'^2 de l'équation $\delta = 0$, écrite sous la forme $\delta' = 0$, ne dépendent aussi que des rapports $l:m:n$.

Comme ces rapports sont entièrement arbitraires, il faut que Δ' soit exactement divisible par δ', quelles que soient les grandeurs l, m, n considérées comme des variables absolument indépendantes.

Ceci exige que le terme indépendant de ω^2 dans Δ' soit divisible par le terme analogue dans δ', et, par suite, qu'il soit divisible par

$$l^2+m^2+n^2.$$

Remarque. — Il faut que le déterminant désigné au théorème I soit aussi divisible par

$$b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2,$$

quels que soient l, m, n.

Théorème II. — *Si les équations* (1) *sont compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel, le carré de la vitesse de l'onde obscure, dont la normale est définie par les cosinus l, m, n, est fourni par l'expression*

$$(4)\quad \omega^2 = A + B + C - (b^2 + c^2)l^2 - (c^2 + a^2)m^2 - (a^2 + b^2)n^2.$$

En effet, l'équation $\Delta' = 0$ doit, d'après ce qui précède, comprendre les deux racines de $\delta' = 0$, quels que soient l, m, n, sans avoir égard à la relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Or la somme des trois racines ω'^2 de Δ' est

$$\frac{A + B + C}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

La somme des deux racines de $\delta' = 0$ est

$$\frac{(b^2 + c^2)l^2 + (c^2 + a^2)m^2 + (a^2 + b^2)n^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Par suite, la troisième racine de Δ est la différence de ces deux expressions; d'où, pour cette troisième racine, la valeur

$$\begin{aligned}\omega'^2 &= A + B + C - (b^2 + c^2)l^2 - (c^2 + a^2)m^2 - (a^2 + b^2)n^2\\ &= \omega^2(l^2 + m^2 + n^2).\end{aligned}$$

Cette expression de ω^2 ne renferme, comme cela doit être, que les rapports $l : m : n$. Elle est vraie, que l, m, n soient égaux ou simplement proportionnels aux cosinus directeurs de la normale au plan de l'onde.

Dans la première hypothèse, l'expression de ω^2 est celle annoncée dans le théorème que nous voulions établir.

Corollaire. — *La surface de l'onde obscure est toujours du second degré.*

On appelle surface d'une onde l'enveloppe du plan mobile

$$lx + my + nz = \omega$$

ou

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

et où ω est la vitesse de l'onde.

Si cette vitesse est donnée par l'expression ci-dessus, on voit de suite que l'enveloppe cherchée est une surface du second degré.

Théorème III. — *Pour que les équations* (1) *soient compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel, il faut et il suffit que les neuf fonctions homogènes et du second degré en* l, m, n,

$$A, B, C; \quad F, G, H; \quad F', G', H'$$

satisfassent aux deux équations suivantes :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &FF' + GG' + HH' \\ &\quad = AB + BC + CA - (A + B + C) \\ &\qquad \times [(b^2 + c^2) l^2 + (c^2 + a^2) m^2 + (a^2 + b^2)] \\ &\qquad + [(b^2 + c^2) l^2 + (c^2 + a^2) m^2 + (a^2 + b^2) n^2]^2 \\ &\qquad - (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2)(l^2 + m^2 + n^2), \\ &FGH + F'G'H' \\ &\quad = AFF' + BGG' + CHH' - ABC \\ &\qquad + [A + B + C - (b^2 + c^2) l^2 - (c^2 + a^2) m^2 - (a^2 + b^2) n^2] \\ &\qquad \times (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2)(l^2 + m^2 + n^2). \end{aligned} \right.$$

En effet, pour avoir toutes les conditions cherchées, il faut et il suffit d'exprimer que Δ' est identique au produit

$$\delta'[A + B + C - (b^2 + c^2) l - (c^2 + a^2) m^2 - (a^2 + b^2) n^2].$$

Les coefficients de ω'^6 et de ω'^4 étant déjà les mêmes dans les deux expressions, leur identité n'exige que deux équations de condition qui sont précisément celles indiquées.

Remarque. — La première (5), qui a lieu entre les polynômes homogènes du quatrième degré, fournit entre les 54 coefficients qui entrent dans les équations

$$\frac{5\times 6}{2} = 15 \text{ conditions.}$$

La seconde, qui a lieu entre des polynômes du sixième degré, fournit

$$\frac{7\times 8}{2} = 28 \text{ conditions,}$$

soit en tout 43 conditions. La solution la plus générale comporterait, d'après cela, 11 constantes arbitraires. Mais, les équations de condition n'étant pas linéaires, on voit que le problème peut comporter beaucoup de solutions ayant chacune des arbitraires.

Applications aux équations symétriques.

5. On sait que, au point de vue optique, les cristaux, même ceux qui n'appartiennent pas au système terbinaire, se comportent comme s'ils possédaient trois plans de symétrie, et toutes les théories mathématiques de la double réfraction proposées jusqu'ici ont conduit à des équations différentielles symétriques par rapport à ces plans. Quoique, comme nous le verrons plus loin, la symétrie dans les équations différentielles ne soit pas, si l'on se place au point de vue purement mathématique, une conséquence toujours nécessaire de la symétrie des phénomènes optiques, la recherche des équations symétriques les plus générales possibles offre évidemment un intérêt tout particulier et fera l'objet principal de ces recherches. Il est naturel, en effet, d'admettre que le vecteur, quelle qu'en soit la nature, cause d'un phénomène symétrique par rapport à trois plans, doit lui-même être symétrique par rapport à ces plans.

Dans cette hypothèse, les 54 coefficients qui entrent dans les équations générales se réduisent à 15. En effet, les équations devant rester inaltérées, si l'on change de signes simultanément, soit u et x, soit v et y, soit w et z, sont nécessairement de la forme suivante :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathbf{a}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathbf{h}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathbf{g}'\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \gamma'\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \beta'\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mathbf{h}'\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mathbf{b}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mathbf{f}\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \gamma\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + \alpha\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mathbf{g}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mathbf{f}'\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mathbf{c}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \beta\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \alpha'\dfrac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}, \end{cases}$$

où $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$; $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$; $\mathbf{f}', \mathbf{g}', \mathbf{h}'$; α, β, γ ; α', β', γ' sont les quinze coefficients à déterminer en fonction de a^2, b^2, c^2.

Le déterminant Δ, si l'on y remplace, comme il a été dit plus haut, ω^2 par $\omega^2(l^2 + m^2 + n^2)$, devient

$$(6\,bis)\quad \Delta' = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}-\omega^2)l^2 + (\mathbf{h}-\omega^2)m^2 + (\mathbf{g}'-\omega^2)n^2 & \gamma lm & \beta' ln \\ \gamma' ml & (\mathbf{h}'-\omega^2)l^2 + (\mathbf{b}-\omega^2)m^2 + (\mathbf{f}-\omega^2)n^2 & \alpha mn \\ \beta nl & \alpha' nm & (\mathbf{g}-\omega^2)l^2 + (\mathbf{f}'-\omega^2)m^2 + (\mathbf{c}-\omega^2)n^2 \end{vmatrix}.$$

Par suite, les neuf fonctions A, B, C, F, G, H, F′, G′, H′ deviennent ici

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = \mathbf{a}l^2 + \mathbf{h}m^2 + \mathbf{g}'n^2, \\ \mathrm{B} = \mathbf{h}'l^2 + \mathbf{b}m^2 + \mathbf{f}n^2, \\ \mathrm{C} = \mathbf{g}l^2 + \mathbf{f}'m^2 + \mathbf{c}n^2, \\ \mathrm{F} = \alpha mn, \qquad \mathrm{F}' = \alpha' mn, \\ \mathrm{G} = \beta nl, \qquad \mathrm{G}' = \beta' nl, \\ \mathrm{H} = \gamma lm, \qquad \mathrm{H}' = \gamma' lm. \end{cases}$$

La vitesse de la troisième onde est donnée, en vertu du théorème I, par

$$(7\,bis)\quad \begin{cases} \omega^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{h}' + \mathbf{g} - b^2 - c^2)l^2 + (\mathbf{h} + \mathbf{b} + \mathbf{f}' - c^2 - a^2)m^2 \\ \qquad + (\mathbf{g}' + \mathbf{f} + \mathbf{c} - a^2 - b^2)n^2. \end{cases}$$

Il suffirait de porter les expressions (7) dans (5) pour obtenir les relations cherchées entre les quinze coefficients.

Mais la discussion se simplifie beaucoup en procédant dans un ordre un peu différent.

Premières conditions à remplir.
(216 solutions possibles.)

6. Pour que le polynôme Δ' (6 *bis*) soit divisible par δ' et, par suite, par

$$\begin{aligned}\delta = &(b^2-\omega^2)(c^2-\omega^2)l^2\\ &+(c^2-\omega^2)(a^2-\omega^2)m^2+(a^2-\omega^2)(b^2-\omega^2),\end{aligned}$$

il faut d'abord que le coefficient de l^6 dans le dividende, c'est-à-dire

$$(\mathbf{a}-\omega^2)(\mathbf{h}'-\omega^2)(\mathbf{g}-\omega^2),$$

soit divisible par le coefficient de l^2 dans le diviseur, c'est-à-dire par

$$(b^2-\omega^2)(c^2-\omega^2).$$

Ceci ne peut avoir lieu que de six manières, à savoir pour les valeurs

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{ll}\mathbf{g}=b^2, & \mathbf{h}'=c^2\\ \mathbf{g}=c^2, & \mathbf{h}'=b^2\end{array}\right\} & \mathbf{a}' \text{ arbitraire},\\ \left.\begin{array}{ll}\mathbf{a}=b^2, & \mathbf{g}=c^2\\ \mathbf{a}=c^2, & \mathbf{g}=b^2\end{array}\right\} & \mathbf{h}' \text{ arbitraire},\\ \left.\begin{array}{ll}\mathbf{a}=b^2, & \mathbf{h}'=c^2\\ \mathbf{a}=c^2, & \mathbf{h}'=b^2\end{array}\right\} & \mathbf{g} \text{ arbitraire}.\end{array}\right.$$

Si l'on exprime de même que le coefficient de m^6 dans Δ' est divisible par

$$(c^2-\omega^2)(a^2-\omega^2),$$

on obtient six paires d'équations analogues, à savoir

$$(8')\quad \left\{\begin{array}{lll} \mathbf{h}=c^2, & \mathbf{f}=a^2 & \multirow{2}{*}{$\Big\}\ \mathbf{b}$ arbitraire,} \\ \mathbf{h}=a^2, & \mathbf{f}'=c^2 & \\ \mathbf{b}=c^2, & \mathbf{h}=a^2 & \Big\}\ \mathbf{f}' \text{ arbitraire,} \\ \mathbf{b}=a^2, & \mathbf{h}=c^2 & \\ \mathbf{b}=c^2, & \mathbf{f}'=a^2 & \Big\}\ \mathbf{h} \text{ arbitraire,} \\ \mathbf{b}=a^2, & \mathbf{f}=c^2 & \end{array}\right.$$

et enfin, si l'on exprime que le coefficient de n^6 est divisible par

$$(a^2-\omega^2)(b^2-\omega^2),$$

on obtient de même les six systèmes de valeurs

$$(8'')\quad \left\{\begin{array}{lll} \mathbf{f}=a^2, & \mathbf{g}'=b^2 & \Big\}\ \mathbf{c} \text{ arbitraire,} \\ \mathbf{f}=b^2, & \mathbf{g}=a^2 & \\ \mathbf{c}=a^2, & \mathbf{f}=b^2 & \Big\}\ \mathbf{g}' \text{ arbitraire,} \\ \mathbf{c}=b^2, & \mathbf{f}=a^2 & \\ \mathbf{c}=a^2, & \mathbf{g}'=b^2 & \Big\}\ \mathbf{f} \text{ arbitraire.} \\ \mathbf{c}=b^2, & \mathbf{g}'=a^2 & \end{array}\right.$$

On satisfera à la triple condition de la divisibilité des coefficients de l^6, m^6, n^6 dans le dividende respectivement par ceux de l^2, m^2, n^2 dans le diviseur, en prenant simultanément l'un quelconque des six systèmes de valeurs (8) avec l'un de ceux de (8') et l'un de ceux de (8''), ce qui fournit $6^3 = 216$ solutions.

Théorème IV. — *Les deux cent seize solutions se divisent en vingt-sept groupes, dont chacun fournit une seule expression pour la vitesse de l'onde obscure.*

Chacune des deux cent seize solutions détermine six des neuf constantes

$$\mathbf{a},\quad \mathbf{b},\quad \mathbf{c};\quad \mathbf{f},\quad \mathbf{g},\quad \mathbf{h};\quad \mathbf{f}',\quad \mathbf{g}',\quad \mathbf{h}',$$

et laisse les trois autres *entièrement arbitraires*.

Les trois coefficients restant arbitraires sont nécessairement groupés ainsi : un de ceux $\mathbf{a}$, $\mathbf{h}'$, $\mathbf{g}$ indiqués comme arbitraires dans (8); un de ceux $\mathbf{b}$, $\mathbf{f}'$, $\mathbf{h}$ indiqués comme arbitraires dans (8′), et enfin un de ceux indiqués comme arbitraires dans (8″).

Si l'on écrit

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{a}, & \mathbf{h}', & \mathbf{g}, \\ \mathbf{h}, & \mathbf{b}, & \mathbf{f}', \\ \mathbf{g}', & \mathbf{f}, & \mathbf{c}, \end{array}$$

il y a vingt-sept groupes de trois lettres prises chacune dans l'une des lignes horizontales. Ce sont les vingt-sept groupes composés chacun de huit solutions comprenant les mêmes trois arbitraires.

Si, par exemple, on laisse $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ arbitraires, on peut combiner de huit manières les deux premières lignes d'équations fournies respectivement par (8), (8′), (8″); et de même pour chaque groupe donné d'arbitraires. Mais quelle que soit celle des huit solutions qu'on choisit dans un groupe, il se trouve que l'équation (7 *bis*) fournit la même vitesse pour la troisième onde. Si on laisse $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ arbitraires, quelle que soit celle des huit solutions correspondantes que l'on adopte, on trouve

$$\omega^2 = \mathbf{a}l^2 + \mathbf{b}m^2 + \mathbf{c}n^2$$

et généralement, si α_1, α_2, α_3 sont les trois coefficients laissés arbitraires (α_1 étant $\mathbf{a}$, $\mathbf{h}'$, ou $\mathbf{g}$; α_2 étant $\mathbf{b}$, $\mathbf{f}'$, ou $\mathbf{h}$; α_3 étant $\mathbf{c}$, $\mathbf{g}'$, ou $\mathbf{f}$), la vitesse de la troisième onde sera

$$\omega^2 = \alpha_1 l^2 + \alpha_2 m^2 + \alpha_3 n^3.$$

Il n'y a donc que vingt-sept expressions distinctes possibles pour cette vitesse, chaque expression convenant à huit solutions.

Six seulement des deux cent seize solutions précédentes, physiquement admissibles.

7. Au point de vue purement analytique, les deux cent seize solutions dont il vient d'être parlé seraient toutes admissibles. Il n'en est pas de même au point de vue physique. Rien, en effet, ne distingue les trois indices de réfraction $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ du cristal. Par suite, les équations différentielles doivent présenter une composition symétrique par rapport aux trois plans coordonnés. A ce point de vue, les quinze coefficients se divisent en cinq groupes, à savoir :

$$(1^\circ)\qquad \mathbf{a},\quad \mathbf{b},\quad \mathbf{c};$$
$$(2^\circ)\qquad \mathbf{f},\quad \mathbf{g},\quad \mathbf{h};$$
$$(3^\circ)\qquad \mathbf{f}',\quad \mathbf{g}',\quad \mathbf{h}';$$
$$(4^\circ)\qquad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma;$$
$$(5^\circ)\qquad \alpha',\quad \beta',\quad \gamma'.$$

Dans chaque groupe on passe d'un coefficient aux deux autres par une permutation tournante des axes, et comme rien ne distingue les trois axes, le premier coefficient de chaque groupe étant une certaine fonction de a^2, b^2, c^2, les deux autres s'en déduisent par des permutations de ces lettres.

De là résulte que, dès que l'on a choisi une des six solutions du premier de l'un des trois groupes d'équations de condition écrites plus haut, la solution correspondante à adopter dans chacun des deux autres groupes s'ensuit, de sorte qu'au point de vue physique les 6^3 solutions trouvées se réduisent à six, savoir :

Solution A.

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{f}' = a^2 \\ \mathbf{g} &= \mathbf{g}' = b^2 \\ \mathbf{h} &= \mathbf{h}' = c^2 \end{aligned}\right\}\ \mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}\ \text{arbitraires.}$$

(9)

Solution B.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{h}' = b^2 \\ \mathbf{g} &= \mathbf{f}' = c^2 \\ \mathbf{h} &= \mathbf{g}' = a^2 \end{aligned}\right\} \ \mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c} \text{ arbitraires.}$$

Solution C.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{f} = b^2 \\ \mathbf{b} &= \mathbf{g} = c^2 \\ \mathbf{c} &= \mathbf{h} = a^2 \end{aligned}\right\} \ \mathbf{f}',\ \mathbf{g}',\ \mathbf{h}' \text{ arbitraires.}$$

Solution D.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{h} = c^2 \\ \mathbf{b} &= \mathbf{f} = a^2 \\ \mathbf{c} &= \mathbf{g} = b^2 \end{aligned}\right\} \ \mathbf{f}',\ \mathbf{g}',\ \mathbf{h}' \text{ arbitraires.}$$

Solution E.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{f}' = c^2 \\ \mathbf{b} &= \mathbf{g}' = a^2 \\ \mathbf{c} &= \mathbf{h}' = b^3 \end{aligned}\right\} \ \mathbf{f},\ \mathbf{g},\ \mathbf{h} \text{ arbitraires.}$$

Solution F.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{g}' = b^2 \\ \mathbf{b} &= \mathbf{h}' = c^2 \\ \mathbf{c} &= \mathbf{f}' = a^2 \end{aligned}\right\} \ \mathbf{f},\ \mathbf{g},\ \mathbf{h} \text{ arbitraires.}$$

La vitesse de l'onde obscure, d'après (7 *bis*), est, à savoir :

(10)

Solutions A *et* B.

$$\omega^2 = \mathbf{a}\, l^2 + \mathbf{b}\, m^2 + \mathbf{c}\, n^2.$$

Solutions C *et* D.

$$\omega^2 = \mathbf{h}'\, l^2 + \mathbf{f}'\, m^2 + \mathbf{g}'\, n^2.$$

Solutions E *et* F.

$$\omega^2 = \mathbf{g}\, l^2 + \mathbf{h}\, m^2 + \mathbf{f}\, n^2.$$

Conditions restant à remplir.

8. Les conditions précédentes déterminent six des quinze coefficients entrant dans les équations différentielles (6) qu'il s'agit de constituer.

Les neuf autres, à savoir

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma;\quad \alpha',\quad \beta',\quad \gamma',$$

et les trois restés arbitraires dans les expressions (9) doivent encore satisfaire aux conditions (5).

Ces conditions, en appelant ω^2 la vitesse de la troisième onde et en vertu de (7 *bis*), peuvent s'écrire

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha\alpha' m^2 n^2 + \beta\beta' n^2 l^2 + \gamma\gamma' l^2 m^2 \\ &\quad = \left\{ \begin{aligned} &AB + BC + CA \\ &- \omega^2[(b^2+c^2)l^2 + (c^2+a^2)m^2 + (a^2+b^2)n^2] \\ &- (b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2)(l^2+m^2+n^2), \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma')l^2m^2n^2 \\ &\quad = \left\{ \begin{aligned} &A\alpha\alpha' m^2n^2 + B\beta\beta' n^2l^2 + C\gamma\gamma' l^2m^2 - ABC \\ &\quad + \omega^2(b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2)(l^2+m^2+n^2). \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Il reste, dans ces équations, à remplacer A, B, C et ω^2 par leurs valeurs (7), (9) et (10). Ces valeurs changent avec les solutions.

Solution A.

(Elle fournit $2\times\infty^5$ manières d'obtenir la surface de l'onde de Fresnel.)

9. Les équations (7) et (9) donnent

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{a}l^2 + c^2m^2 + b^2n^2, \\ B &= c^2l^2 + \mathbf{b}m^2 + a^2n^2, \\ C &= b^2l^2 + a^2m^2 + \mathbf{c}n^2. \end{aligned}$$

Et, en ayant égard à la première expression (10) de ω^2, on voit de suite que dans la première des équations (11) les termes de l^4, m^4, n^4 disparaissent d'eux-mêmes et que le coefficient de $m^2 n^2$ dans le second membre se réduit à

$$(\mathbf{b} - a^2)(\mathbf{c} - a^2),$$

d'où l'on déduit la première des équations suivantes, les autres étant symétriques,

$$(13)\qquad \begin{cases} \alpha\alpha' = (\mathbf{b} - a^2)(\mathbf{c} - a^2), \\ \beta\beta' = (\mathbf{c} - b^2)(\mathbf{a} - b^2), \\ \gamma\gamma' = (\mathbf{a} - c^2)(\mathbf{b} - c^2), \end{cases}$$

comme nécessaires et suffisantes pour satisfaire à l'équation (11).

Si l'on porte ces valeurs et celles de A, B, C, ω^2 dans l'équation (12), on vérifie de suite que les termes en l^6 et $l^4 m^2$ se détruisent et que, par suite, il en est de même, par symétrie, de tous les autres, sauf celui en $l^2 m^2 n^2$. Le coefficient de ce dernier devient, après quelques réductions et groupements de termes,

$$(\mathbf{a} - b^2)(\mathbf{b} - c^2)(\mathbf{c} - a^2) + (\mathbf{a} - c^2)(\mathbf{b} - a^2)(\mathbf{c} - b^2).$$

Donc l'équation (12) est satisfaite par la seule condition

$$(14)\qquad \begin{cases} \alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma' \\ \qquad = (\mathbf{a} - b^2)(\mathbf{b} - c^2)(\mathbf{c} - a^2) + (\mathbf{a} - c^2)(\mathbf{b} - a^2)(\mathbf{c} - b^2). \end{cases}$$

Nous avons ainsi satisfait à toutes les conditions du problème, et la solution A :

1° Détermine entièrement six des quinze coefficients qui entrent dans les équations différentielles, à savoir

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}' = a^2,$$
$$\mathbf{g} = \mathbf{g}' = b^2,$$
$$\mathbf{h} = \mathbf{h}' = c^2;$$

2° Laisse entièrement arbitraires trois autres coefficients, à savoir

$$\mathbf{a},\quad \mathbf{b},\quad \mathbf{c};$$

3° Établit entre les six coefficients restants α, β, γ; α', β', γ' quatre relations, à savoir, celles (13) et (14). Ces quatre équations permettent d'exprimer les six coefficients dont il s'agit en fonction de deux constantes arbitraires, de sorte que cette première solution comporte en tout cinq constantes arbitraires. Il y a plus, on peut satisfaire aux équations (13) et (14) de deux manières. En effet, les équations (13) donnent

$$\begin{aligned}&\alpha\beta\gamma \times \alpha'\beta'\gamma'\\ &\quad=(\mathbf{a}-b^2)(\mathbf{b}-c^2)(\mathbf{c}-a^2)\times(\mathbf{a}-c^2)(\mathbf{b}-a^2)(\mathbf{c}-b^2).\end{aligned}$$

Cette équation combinée avec l'équation (14) donne les deux solutions

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}\alpha'\beta'\gamma' &= (\mathbf{a}-c^2)(\mathbf{b}-a^2)(\mathbf{c}-b^2)\\ \alpha\beta\gamma &= (\mathbf{a}-b^2)(\mathbf{b}-c^2)(\mathbf{c}-b^2)\end{aligned}\right.$$

ou

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned}\alpha'\beta'\gamma' &= (\mathbf{a}-b^2)(\mathbf{b}-c^2)(\mathbf{c}-a^2).\\ \alpha\beta\gamma &= (\mathbf{a}-c^2)(\mathbf{b}-a^2)(\mathbf{c}-b^2),\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, si λ, μ, ν sont trois constantes arbitraires, on tire de (15) et (13)

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned}\alpha &= \frac{\lambda}{\mu}(c^2-a^2), &\qquad \alpha' &= \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{b}-a^2),\\ \beta &= \frac{\mu}{\nu}(\mathbf{a}-b^2), & \beta' &= \frac{\mu}{\lambda}(\mathbf{c}-b^2),\\ \gamma &= \frac{\nu}{\lambda}(\mathbf{b}-c^2), & \gamma' &= \frac{\nu}{\lambda}(\mathbf{a}-c^2);\end{aligned}\right.$$

de (16) et (13),

$$(17\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned}\alpha &= \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{b}-a^2), &\qquad \alpha' &= \frac{\lambda}{\nu}(\mathbf{c}-a^2),\\ \beta &= \frac{\mu}{\nu}(\mathbf{c}-b^2), & \beta' &= \frac{\mu}{\lambda}(\mathbf{a}-b^2),\\ \gamma &= \frac{\nu}{\lambda}(\mathbf{a}-c^2), & \gamma' &= \frac{\nu}{\mu}(\mathbf{b}-c^2).\end{aligned}\right.$$

La solution A se dédouble ainsi d'après les valeurs (17) et (17 *bis*) des six constantes α, β, γ; α', β', γ'.

Les valeurs de $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{f}'$, $\mathbf{g}'$, $\mathbf{h}'$ sont communes aux deux solutions, et celles $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ restent arbitraires dans l'une et l'autre. Nous désignerons par A_1 et A_2 les deux solutions résultant respectivement des valeurs (17) et (17 *bis*), et alors les équations différentielles cherchées deviennent définitivement:

Solution A_1.

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mathbf{a}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathbf{b} - c^2)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\mu}{\lambda}(\mathbf{c} - b^2)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mathbf{b}\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\mu}(\mathbf{a} - c^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{c} - a^2)\,\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial y} + \mathbf{c}\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\mu}{\nu}(\mathbf{a} - b^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \frac{\lambda}{\nu}(\mathbf{b} - a^2)\,\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}.
\end{aligned}\right.$$

Solution A_2.

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mathbf{a}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathbf{a} - c^2)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\mu}{\lambda}(\mathbf{a} - b^2)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mathbf{b}\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\mu}(\mathbf{b} - c^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{b} - a^2)\,\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial y},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mathbf{c}\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\mu}{\nu}(\mathbf{c} - b^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \frac{\lambda}{\nu}(\mathbf{c} - a^2)\,\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}.
\end{aligned}\right.$$

D'après l'expression (10) de la vitesse de la troisième onde, on voit donc que sur, les cinq constantes arbitraires $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; $\lambda:\mu:\nu$ entrant dans les deux solutions obtenues, celles $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ servent à caractériser la troisième onde. Elles sont nulles si l'on suppose la vitesse de cette onde nulle; les deux solutions deviennent alors identiques.

Cette troisième onde n'a jamais été observée. Il ne s'ensuit pas toutefois qu'on puisse d'emblée faire $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 0$; si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sont négatifs, la valeur (20) de ω est imaginaire et la troisième onde n'existe pas.

Quant aux deux rapports $\lambda:\mu:\nu$, ils influent évidemment sur la direction du vecteur lumineux (vibration lumineuse dans la théorie ordinaire) et montre qu'*il n'y a pas que des vibrations situées dans le* *plan de polarisation ou perpendiculaires à ce plan qui fournissent la surface de l'onde de Fresnel, mais des infinités d'autres directions.*

Nous reviendrons plus loin, d'une façon spéciale, sur la direction du vecteur, sur laquelle il peut se faire qu'influent non seulement les constantes λ, μ, ν, mais aussi celles $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Les premières n'influent pas sur la vitesse de l'onde obscure; d'ailleurs aucune des cinq n'influe sur la vitesse des ondes lumineuses : c'est par cette condition qu'elles sont obtenues; mais il arrive parfois que toutes les cinq influent sur la direction des vecteurs.

Solution B.

(Elle fournit aussi $2 \times \infty^5$ manières d'arriver à la surface de l'onde de Fresnel.)

10. Les équations (9) déterminent les mêmes coefficients $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$; $\mathbf{f}'$, $\mathbf{g}'$, $\mathbf{h}'$ que dans les solutions précédentes, mais par des valeurs différentes, à savoir

$$(20) \qquad \begin{cases} \mathbf{f}' = \mathbf{g} = c^2, \\ \mathbf{g}' = \mathbf{h} = a^2, \\ \mathbf{h}' = \quad = b^2. \end{cases}$$

Les équations (7) donnent par suite

$$(21) \qquad \begin{cases} \mathrm{A} = \mathbf{a}l^2 + a^2(m^2 + n^2), \\ \mathrm{B} = \mathbf{b}m^2 + b^2(n^2 + l^2), \\ \mathrm{C} = \mathbf{c}n^2 + c^2(l^2 + m^2). \end{cases}$$

En portant ces valeurs et celle de ω^2 donnée par la première (10) dans (11), on reconnaît que, pour y satisfaire, il faut et il suffit que

$$(22) \qquad \begin{cases} \alpha\alpha' = (\mathbf{a} - b^2)(\mathbf{b} - a^2), \\ \beta\beta' = (\mathbf{b} - c^2)(\mathbf{c} - b^2), \\ \gamma\gamma' = (\mathbf{c} - a^2)(\mathbf{a} - c^2). \end{cases}$$

En portant ces valeurs et celles ci-dessus dans (12), on reconnaît de même que, pour la satisfaire, il faut et il suffit que

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned}\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma' = &(\mathbf{a} - b^2)(\mathbf{b} - c^2)(\mathbf{c} - a^2)\\ &+ (\mathbf{a} - c^2)(\mathbf{b} - a^2)(\mathbf{c} - b^2),\end{aligned}\right.$$

et de là on tirera, comme précédemment, λ, μ, ν étant trois constantes arbitraires, soit

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}&\alpha = \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{c} - b^2), && \alpha' = \frac{\lambda}{\nu}(\mathbf{b} - c^2),\\ &\beta = \frac{\mu}{\nu}(\mathbf{a} - c^2), && \beta' = \frac{\mu}{\lambda}(\mathbf{c} - a^2),\\ &\gamma = \frac{\nu}{\lambda}(\mathbf{b} - a^2), && \gamma' = \frac{\nu}{\mu}(\mathbf{a} - b^2)\end{aligned}\right.$$

ou

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned}&\alpha = \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{b} - c^2), && \alpha' = \frac{\lambda}{\nu}(\mathbf{c} - b^2),\\ &\beta = \frac{\mu}{\nu}(\mathbf{c} - a^2), && \beta' = \frac{\mu}{\lambda}(\mathbf{a} - c^2),\\ &\gamma = \frac{\nu}{\lambda}(\mathbf{a} - b^2), && \gamma' = \frac{\nu}{\mu}(\mathbf{b} - a^2).\end{aligned}\right.$$

On arrive ainsi à deux solutions B, que nous appellerons les *solutions* B_1 et B_2, et qui, comme les solutions A_1 et A_2, comportent chacune cinq constantes arbitraires.

Solution B_1.

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mathbf{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{\lambda}(\mathbf{b} - a^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\mu}{\lambda}(\mathbf{c} - a^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mathbf{b}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{c} - b^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} + \frac{\nu}{\mu}(\mathbf{a} - b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mathbf{c}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\mu}{\nu}(\mathbf{a} - c^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \frac{\lambda}{\nu}(\mathbf{b} - c^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}.\end{aligned}\right.$$

Solution B_2.

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mathbf{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{\lambda}(\mathbf{a} - b^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\mu}{\lambda}(\mathbf{a} - c^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mathbf{b}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{b} - c^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} + \frac{\nu}{\mu}(\mathbf{b} - a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mathbf{c}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\mu}{\nu}(\mathbf{c} - a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \frac{\lambda}{\nu}(\mathbf{c} - b^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}.\end{aligned}\right.$$

La troisième onde a, comme dans la solution précédente, la vitesse

$$\omega^2 = \mathbf{a}l^2 + \mathbf{b}m^2 + \mathbf{c}n^2;$$

mais ici les deux solutions restent distinctes, même si l'on suppose la vitesse de la troisième onde nulle.

Solution C.

(Elle comprend $2 \times \infty^2$ manières d'arriver à la surface de l'onde.)

11. La solution C laisse indéterminées les constantes $\mathbf{f}'$, $\mathbf{g}'$, $\mathbf{h}'$ et détermine, par les formules (9), les six constantes

$$(28) \qquad \begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{f} = b^2, \\ \mathbf{b} = \mathbf{g} = c^2, \\ \mathbf{c} = \mathbf{h} = a^2. \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs dans les expressions (17), on aura

$$\begin{aligned} A &= b^2 l^2 + a^2 m^2 + \mathbf{g}' n^2, \\ B &= \mathbf{h}' l^2 + c^2 m^2 + b^2 n^2, \\ C &= c^2 l^2 + \mathbf{f}' m^2 + a^2 n^2. \end{aligned}$$

D'ailleurs, en vertu de (10),

$$\omega^2 = \mathbf{h}' l^2 + \mathbf{f}' m^2 + \mathbf{g}' n^2.$$

Portant ces valeurs dans (11), on reconnaît que le second membre devient identiquement nul, pourvu que

$$(29) \qquad \begin{cases} \alpha\alpha' = (\mathbf{f}' - a^2)(\mathbf{g}' - a^2), \\ \beta\beta' = (\mathbf{g}' - b^2)(\mathbf{h}' - b^2), \\ \gamma\gamma' = (\mathbf{h}' - c^2)(\mathbf{f}' - c^2). \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs dans le second membre de (12), on reconnaît que les termes en l^4, m^4, n^4 sont nuls. Celui en $l^4 m^2$ se réduit à

$$(c^2 - b^2)(\mathbf{f}' - c^2)(\mathbf{h}' - c^2),$$

qui ne peut être nul que pour $\mathbf{f}' = c^2$ ou $\mathbf{h}' = c^2$. La première de ces valeurs entraîne, par symétrie, $\mathbf{g}' = a^2$, $\mathbf{f}' = b^2$; mais ces valeurs de $\mathbf{f}'$, $\mathbf{g}'$, $\mathbf{h}'$, jointes à celles (28) de $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$, montrent que la solution ainsi obtenue rentrerait, comme cas particulier, dans celle B.

Reste, pour satisfaire à l'équation ci-dessus, la première des équations suivantes, les autres en étant déduites par symétrie,

$$\mathbf{h}' = c^2, \qquad \mathbf{f}' = a^2, \qquad \mathbf{g}' = b^2. \tag{30}$$

Par suite, les équations (29) deviennent

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' = 0. \tag{31}$$

Moyennant les valeurs (30) et (31), tous les termes du second membre de (12) disparaissent, sauf celui en $l^2 m^2 n^2$, et l'on trouve définitivement que cette équation est aussi satisfaite, pourvu que

$$\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma' = (a^2 - c^2)(b^2 - a^2)(c^2 - b^2). \tag{32}$$

Les équations (31) et (32) donnent, en désignant toujours par λ, μ, ν trois constantes arbitraires, l'une des deux solutions suivantes :

$$\tag{33} \left\{\begin{aligned} \alpha &= \beta = \gamma = 0, \\ \alpha' &= \frac{\mu}{\nu}(a^2 - c^2), \\ \beta' &= \frac{\nu}{\lambda}(b^2 - a^2), \\ \gamma' &= \frac{\lambda}{\mu}(c^2 - b^2), \end{aligned}\right.$$

ou

$$\tag{33 bis} \left\{\begin{aligned} \alpha' &= \beta' = \gamma' = 0, \\ \alpha &= \frac{\lambda}{\mu}(b^2 - a^2), \\ \beta &= \frac{\mu}{\nu}(c^2 - b^2), \\ \gamma &= \frac{\mu}{\lambda}(a^2 - c^2). \end{aligned}\right.$$

Avec les valeurs (28), (30), (33), (33 *bis*), la solution C, se dédoublant comme les précédentes, fournit, pour les équations différentielles (6), les deux systèmes suivants :

Solution C_1.

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\nu}{\lambda}(b^2-a^2)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \dfrac{\lambda}{\mu}(c^2-b^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \dfrac{\mu}{\nu}(a^2-c^2)\dfrac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}. \end{cases}$$

Solution C_2.

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\mu}{\lambda}(a^2-c^2)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \dfrac{\nu}{\mu}(b^2-a^2)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \dfrac{\lambda}{\nu}(c^2-b^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}, \end{cases}$$

qui, au lieu de renfermer chacune cinq constantes arbitraires, comme les solutions A_1, A_2, B_1, B_2, n'en renferment que deux, à savoir les rapports $\lambda:\mu:\nu$.

La vitesse de la troisième onde devient, à cause de (30),

$$(36)\qquad \omega^2 = c^2 l^2 + a^2 m^2 + b^2 n^2.$$

Solution D.

(Elle comprend $2\times\infty^2$ manières d'arriver à la surface de l'onde.)

12. Si l'on opère exactement de la même manière sur les valeurs (9) relatives à la solution D, on trouve de même deux solutions à deux constantes arbitraires, à savoir :

Solution D_1.

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\nu}{\lambda}(a^2-b^2)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + b^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\lambda}{\mu}(b^2-c^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + c^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\mu}{\nu}(c^2-a^2)\dfrac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}. \end{cases}$$

Solution D_2.

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\mu}{\lambda}(c^2 - a^2)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + b^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\nu}{\mu}(a^2 - b^2)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + c^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\lambda}{\nu}(b^2 - c^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}. \end{cases}$$

Les coefficients $\mathbf{f}'$, $\mathbf{g}'$, $\mathbf{h}'$ qui entrent dans l'équation de la vitesse de la troisième onde prennent des valeurs déterminées, en sorte que le carré de cette vitesse est

$$\omega^2 = b^2 l^2 + c^2 m^2 + a^2 n^2.$$

Solutions E *et* F.

(Elles ne donnent rien de nouveau.)

13. Les valeurs trouvées par $\mathbf{f}'$, $\mathbf{g}'$, $\mathbf{h}'$ dans les solutions C et D sont respectivement celles que donnent les équations (9) pour les solutions F et E. Il en résulte que celles-ci fourniraient pour $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ les mêmes valeurs que celles-là et conduiraient, par suite, aux mêmes équations différentielles. Ainsi les solutions E et F coïncident nécessairement avec celles C et D.

Exclusion des solutions C_1, C_2; D_1, D_2.

14. Les solutions C_1, C_2; D_1, D_2 elles-mêmes sont physiquement inadmissibles. En effet, dans la première des équations différentielles, (34) par exemple (*solution* C), il n'y a pas de raison pour que le terme en $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$ manque plutôt que celui $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}$; ils devraient manquer l'un et l'autre ou y être tous deux.

De même, il n'est pas admissible que, dans cette équation, le coefficient de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ne soit pas une fonction symétrique des deux quantités b^2 et c^2.

L'expression

$$\omega^2 = c^2 l^2 + a^2 m^2 + b^2 n^2$$

de la vitesse de la troisième onde est également inadmissible, comme dissymétriquement constituée.

On conçoit que les coefficients qui expriment cette vitesse restent arbitraires comme dans les solutions A_1, A_2; B_1, B_2; mais, s'ils sont déterminés en fonction de a^2, b^2, c^2, il faut que celui de l^2 soit symétrique en b^2 et c^2; celui de m^2 en c^2, a^2; celui de n^2 en a^2, b^2. C'est ce qui n'a pas lieu.

Les mêmes motifs de rejet existent à l'égard des solutions C_2, D_1 et D_2.

Solutions définitives.

15. Il ne reste, en définitive, comme physiquement admissibles, que les quatre solutions A_1, A_2; B_1, B_2 fournissant ensemble $4 \times \infty^5$ manières différentes d'obtenir la surface de l'onde, puisque chacune d'elles comporte les cinq constantes arbitraires $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; λ, μ, ν.

Les vitesses des trois ondes ont les mêmes valeurs dans toutes ces solutions. Cela est évident pour les deux ondes de Fresnel, puisque les équations ont été établies par cette condition; mais la troisième onde se trouve avoir aussi, dans toutes ces solutions, l'expression

$$\omega^2 = \mathbf{a} l^2 + \mathbf{b} m^2 + \mathbf{c} n^2. \tag{39}$$

Deux quelconques des $4 \times \infty^5$ solutions peuvent donc différer :

1° Soit par les valeurs de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, c'est-à-dire par la vitesse de propagation de l'onde invisible;

2° Par les rapports $\lambda : \mu : \nu$, c'est-à-dire par la direction du vecteur lumineux (vibration lumineuse dans la théorie ordinaire), c'est-à-dire par des choses sur lesquelles l'observation n'a eu jusqu'ici aucune prise.

La surface de l'onde obscure, c'est-à-dire l'enveloppe du plan

$$lx + my + nz = \omega, \tag{40}$$

où ω est donné par l'équation (29) et où

$$(41)\qquad \begin{gathered} l^2+m^2+n^2=1,\\ \omega^2=\mathbf{a}l^2+\mathbf{b}m^2+\mathbf{c}n^2, \end{gathered}$$

est, comme il est aisé de le reconnaître, la surface du second degré

$$(42)\qquad \frac{x^2}{\mathbf{a}}+\frac{y^2}{\mathbf{b}}+\frac{z^2}{\mathbf{c}}=1:$$

1° Si l'on prend les trois constantes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ positives, la surface de l'onde obscure est un ellipsoïde, et les vibrations obscures pourront se propager dans toutes les directions.

2° Si une ou deux de ces constantes sont négatives, la surface de l'onde est un hyperboloïde à une ou deux nappes, et les vibrations obscures ne pourront se propager que dans les directions situées à l'extérieur ou à l'intérieur du cône asymptote.

3° Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sont négatifs, la surface sera imaginaire et les vibrations obscures ne pourront se propager dans aucune direction. Il en est de même en particulier si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sont supposés nuls.

On appelle, comme on sait, rayon répondant à une onde plane la droite qui va du centre de la surface de l'onde au point de contact avec l'onde plane. Ici, on vérifie facilement que les équations du rayon relatif à l'onde obscure sont

$$(43)\qquad \frac{x}{l\mathbf{a}}=\frac{y}{m\mathbf{b}}=\frac{z}{n\mathbf{c}}=\omega.$$

Onde lumineuse. Rappel de quelques formules.

16. Pour avoir la surface de l'onde lumineuse, il faut prendre l'enveloppe du plan (40) en supposant que ω satisfasse à l'équation (7) de Fresnel $\delta=0$, c'est-à-dire

$$(44)\qquad \frac{l^2}{\omega^2-a^2}+\frac{m^2}{\omega^2-b^2}+\frac{n^2}{\omega^2-c^2}=0.$$

On retrouvera ainsi, par des méthodes données dans tous les

Traités, la surface de Fresnel

$$(45)\qquad \frac{x^2}{r^2-a^2}+\frac{y^2}{r^2-b^2}+\frac{z^2}{r^2-c^2}=1,$$

où

$$(46)\qquad r^2=x^2+y^2+z^2.$$

Les équations bien connues du rayon lumineux, répondant à une onde dont la vitesse de propagation est ω, sont

$$(47)\qquad \begin{cases} x = l\omega - \psi\dfrac{l}{a^2-\omega^2}, \\ y = m\omega - \psi\dfrac{m}{b^2-\omega^2}, \\ z = n\omega - \psi\dfrac{n}{c^2-\omega^2}, \end{cases}$$

où

$$(47\ bis)\qquad \psi=\omega(\omega^2-r^2).$$

A chacune des deux racines de l'équation (44) répond ainsi un rayon.

Les cosinus de direction de la projection du rayon lumineux sur le plan de l'onde sont proportionnels aux trois quantités

$$(47\ ter)\qquad \frac{l}{a^2-\omega^2},\quad \frac{m}{b^2-\omega^2},\quad \frac{n}{c^2-\omega^2}.$$

Les cosinus de direction d'une droite perpendiculaire au rayon et située dans le plan de l'onde sont proportionnels à

$$(48)\qquad \frac{c^2-b^2}{\dfrac{l}{\omega^2-a^2}},\quad \frac{a^2-c^2}{\dfrac{m}{\omega^2-b^2}},\quad \frac{b^2-a^2}{\dfrac{n}{\omega^2-c^2}}.$$

La normale au plan de l'onde et les deux directions définies par (47 *ter*) et (48) forment un système d'axes rectangulaires, comme on le vérifie aisément.

Nous ajouterons la formule suivante :

$$(48\ bis)\qquad \frac{l^2}{(a^2-\omega^2)^2}+\frac{m^2}{(b^2-\omega^2)^2}+\frac{n^2}{(c^2-\omega^2)^2}=\frac{1}{\omega^2(r^2-\omega^2)}.$$

Plans de polarisation (de Fresnel). Plan de polarisation radial. Plan normal.

17. On sait que Fresnel appelle *plan de polarisation* le plan mené par la normale à l'onde perpendiculairement à celui qui projette le rayon lumineux sur le plan de l'onde.

C'est donc le plan mené par la normale à l'onde et la direction (48).

Nous appellerons ce plan le plan de polarisation *de Fresnel* ou simplement le *plan de polarisation,* et nous appellerons *plan de polarisation radial* le plan mené par le rayon lumineux perpendiculairement à celui qui projette ce rayon sur le plan de l'onde, c'est-à-dire le plan défini par les directions (47) et (48).

Les cosinus de direction de la normale à ce plan sont proportionnels à

$$(48\ ter)\qquad \frac{a^2 l}{\omega^2-a^2},\quad \frac{b^2 m}{\omega^2-b^2},\quad \frac{c^2 n}{\omega^2-c^2},$$

comme on le vérifie aisément à l'aide des expressions précédentes et de l'équation aux vitesses des ondes (44).

Nous appellerons *plan normal* (plan de *normalisation* de M. Cornu) le plan perpendiculaire aux deux plans de polarisation, c'est-à-dire le plan déterminé par le rayon lumineux et la normale à l'onde.

Nous rappellerons que :

1° Selon Fresnel, la vibration lumineuse est perpendiculaire à son plan de polarisation. Elle coïncide donc avec la projection (47 *ter*) du rayon lumineux sur le plan de l'onde.

2° Selon Mac Cullagh, Newmann, Lamé (Cauchy dans partie de ses Mémoires), M. Massieu et généralement dans toutes les théories où l'on regarde l'éther comme un milieu élastique homogène et hétérotrope, la vibration est dans le plan de l'onde, mais à angle droit sur celle de Fresnel, c'est-à-dire suivant la direction (48), intersection des deux plans de polarisation.

3° Selon Maxwell (Théorie électromagnétique) et selon M. Sarrau qui fait la théorie élastique en supposant l'éther isotrope, mais périodiquement hétérogène, la vibration est perpendiculaire au plan de polarisation radial, au lieu de l'être au plan de polarisation de Fresnel, c'est-à-dire qu'elle a la direction (48 *ter*).

Cette direction est, en général, très voisine de celle de Fresnel, les trois indices de réfraction des cristaux étant, en général, peu différents.

M. Boussinesq arrive approximativement au même résultat en regardant l'éther comme homogène et isotrope, la matière pondérable étant censée participer au mouvement qui détermine la lumière.

Vecteur principal; vecteurs dérivés.

18. On obtient, comme nous l'avons dit en commençant, des grandeurs u, v, w proportionnelles aux cosinus de direction du vecteur répondant à une onde plane qui se propage avec une vitesse ω, dans la direction définie par les cosinus l, m, n, en remplaçant dans les équations différentielles les symboles

$$(a)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2},\quad \dfrac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \dfrac{\partial^2}{\partial z^2},\quad \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \\ \text{respectivement par} \\ \quad l^2,\quad m^2,\quad n^2,\quad \omega^2. \end{array}\right.$$

D'ailleurs, si, dans les équations différentielles (18) et (19) du n° **7** et celles (26) et (27) du n° **9**, répondant respectivement aux quatre solutions A_1, A_2, B_1, B_2, on pose

$$(49)\qquad u = \frac{1}{\lambda}U,\qquad v = \frac{1}{\mu}V,\qquad w = \frac{1}{\nu}W,$$

les coefficients λ, μ, ν disparaîtront.

Nous appelons le vecteur auxiliaire, dont les projections sur les axes de coordonnées sont U, V, W, le *vecteur principal,* et ceux dont les projections sont u, v, w pour diverses valeurs des constantes arbitraires λ, μ, ν, *les vecteurs dérivés* du vecteur principal.

Il suffit d'ailleurs d'étudier, pour chaque onde, la direction du vecteur principal; car, à chaque direction de ce vecteur répond, pour tout système de valeurs des constantes λ, μ, ν, une direction correspondante de vecteur dérivée. Si l'on considère la surface du second degré

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = \text{const.},$$

il suffit, par le centre de cette surface, de mener une parallèle au vecteur principal jusqu'à son intersection avec cette surface, et le vecteur dérivé sera normal à la surface au point ainsi obtenu.

Ceci posé, remplaçons dans les équations différentielles U, V, W par les expressions (49).

En posant, pour simplifier,

$$(50)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z} = \Theta, \\ \mathbf{a}\dfrac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{b}\dfrac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{c}\dfrac{\partial W}{\partial z} = \Psi, \end{cases}$$

on aura, pour les équations différentielles relatives au vecteur principal :

Solution A_1.

$$(51)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} + c^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\right) - b^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} + a^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial y}\right) - c^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} + b^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial z}\right) - a^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Solution A_2.

$$(52)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \mathbf{a}\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + c^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\right) - b^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \mathbf{b}\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + a^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial U}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial y}\right) - c^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \mathbf{c}\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + b^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial z}\right) - a^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Solution B_1.

$$(53)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} + a^2\left(\Delta_2 U - \dfrac{\partial \theta}{\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} + b^2\left(\Delta_2 V - \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\right), \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} + c^2\left(\Delta_2 W - \dfrac{\partial \theta}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Solution B_2.

$$(54)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \mathbf{a}\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + a^2\Delta_2 U - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a^2\dfrac{\partial U}{\partial x} + b^2\dfrac{\partial V}{\partial y} + c^2\dfrac{\partial W}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \mathbf{b}\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + b^2\Delta_2 V - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(a^2\dfrac{\partial U}{\partial x} + b^2\dfrac{\partial V}{\partial y} + c^2\dfrac{\partial W}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \mathbf{c}\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + c^2\Delta_2 W - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(a^2\dfrac{\partial U}{\partial x} + b^2\dfrac{\partial W}{\partial y} + c^2\dfrac{\partial W}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Et, si l'on fait les substitutions (a) du § **18** pour obtenir la direction du vecteur lumineux, il viendra d'abord

$$(55)\quad \begin{cases} \Theta = \quad lU + \quad mV + nW, \\ \Psi = \mathbf{a}lU + \mathbf{b}mV + \mathbf{c}nW; \end{cases}$$

puis, en posant encore

$$(56)\quad P = nV - mW, \qquad Q = lW - nU, \qquad R = mU - lV:$$

Solution A_1.

$$(57)\quad \begin{cases} \omega^2 U = \ l\Psi + c^2 mR - b^2 nQ, \\ \omega^2 V = m\Psi + a^2 nP - c^2 lR, \\ \omega^2 W = \ n\Psi + b^2 lQ - a^2 m. \end{cases}$$

Solution A_2.

$$(58)\quad \begin{cases} \omega^2 U = \mathbf{a}l\Theta + c^2 mR - b^2 nQ, \\ \omega^2 V = b^2 m\Theta + a^2 nP - c^2 lR, \\ \omega^2 W = \mathbf{c}n\Theta + b^2 lQ - a^2 mP. \end{cases}$$

Solution B_1.

$$(59)\quad \begin{cases} (\omega^2-a^2)U = l\,(\Psi-a^2\Theta),\\ (\omega^2-b^2)V = m(\Psi-b^2\Theta),\\ (\omega^2-c^2)W = n\,(\Psi-c^2\Theta). \end{cases}$$

Solution B_2.

$$(60)\quad \begin{cases} (\omega^2-a^2)U = l\,[\mathbf{a}\Theta-(a^2lU+b^2mV+c^2W)],\\ (\omega^2-b^2)V = m[\mathbf{b}\Theta-(a^2lU+b^2mV+c^2W)],\\ (\omega^2-c^2)W = n\,[\mathbf{c}\Theta-(a^2lU+b^2mV+c^2W)]. \end{cases}$$

Nous allons à présent rechercher les directions possibles du vecteur dans chaque solution, en commençant par cette dernière.

Remarque. — Pour les ondes parallèles aux plans, deux des trois composantes U, V, W sont toujours nulles, c'est-à-dire que le vecteur principal est toujours dans le plan de l'onde. Il en résulte que, pour ces trois espèces d'onde, tous les vecteurs dérivés coïncident avec le vecteur principal.

Solution $\mathbf{B}_2$.

(Elle comprend les équations de Fresnel et celle de Maxwell-Sarrau comme cas particuliers.)

19. Si l'on ajoute les équations (60) multipliées par l, m, n, il vient

$$\Theta(\omega^2-\mathbf{a}l^2-\mathbf{b}m^2-\mathbf{c}n^2)=0.$$

Nous retrouvons ainsi l'expression

$$\omega^2=\mathbf{a}l^2+\mathbf{b}m^2+\mathbf{c}n^2$$

de la vitesse de l'onde obscure.

Laissant de côté cette onde, on satisfait encore à l'équation ci-dessus par

$$\Theta=lU+mV+nW=0,$$

qui prouve que le vecteur principal est dans le plan de l'onde.

Faisant donc $\Theta = 0$ dans les équations (60), on en tire

$$(61)\quad \frac{U}{\frac{l}{\omega^2 - a^2}} = \frac{V}{\frac{m}{\omega^2 - b^2}} = \frac{W}{\frac{n}{\omega^2 - c^3}} = -(a^2 l U + b^2 m V + c^2 n W),$$

et de là on conclut

$$\frac{a^2 l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{b^2 m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{c^2 n^2}{\omega^2 - c^2} = -1$$

ou

$$\frac{l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{n^2}{\omega^2 - c^2} = 0,$$

ce qui vérifie que nous reproduisons comme cela doit être l'équation de la vitesse des ondes.

D'ailleurs, les équations (61) montrent que le vecteur principal est la projection du rayon lumineux sur le plan de l'onde, ce qui est conforme à l'hypothèse de Fresnel.

Si l'on supprime l'onde obscure, le système reproduit donc complètement les résultats de la théorie de Fresnel. Ainsi les équations différentielles reproduisant exactement les résultats de Fresnel sont celles (27) du § **9**, particularisées ainsi :

$$\mathsf{a} = \mathsf{b} = \mathsf{c} = 0, \qquad \lambda = \mu = \nu.$$

Mais les équations (27) renferment une quintuple infinité d'autres solutions pour lesquelles le vecteur n'est ni dans le plan de l'onde, ni dans le plan de polarisation, ni dans un plan perpendiculaire. Les cosinus de direction sont proportionnels à

$$\frac{1}{\lambda}\frac{l}{\omega^2 - a^2}, \quad \frac{1}{\mu}\frac{m}{\omega^2 - b^2}, \quad \frac{1}{\nu}\frac{n}{\omega^2 - c^2},$$

λ, μ, ν étant des constantes arbitraires.

PROBLÈME.

20. Parmi les directions en nombre illimité du vecteur que donne chacune de nos solutions, il en est qui méritent un examen particulier.

En effet, le phénomène lumineux est symétrique par rapport au plan que (**17**) nous avons appelé *normal*, c'est-à-dire celui qui contient à la fois la normale au plan de l'onde et le rayon lumineux. Il n'y a donc pas de raison pour que le vecteur, quelle qu'en soit la nature, cause de ce phénomène, soit, relativement à ce plan, dans une position plutôt que dans la position symétrique. Il doit, par suite, être ou normal à ce plan ou dans ce plan. La première direction est unique : c'est celle (**17**) de Newmann, Mac Cullagh, Cauchy, Lamé; celle qu'on obtient en regardant l'éther contenu dans un cristal comme élastique, homogène et hétérotrope.

La seconde peut être quelconque dans le plan normal. Il n'y a pas de raison, en effet, pour qu'elle soit (**17**) normale au plan de polarisation, suivant les hypothèses de Fresnel, plutôt qu'au plan de polarisation radial, suivant les hypothèses de M. Sarrau et celles résultant de la théorie électromagnétique de Maxwell, ou pour qu'elle occupe une autre position quelconque, cette position étant une fonction des directions de la normale au plan de l'onde et du rayon. Cette fonction, *a priori* inconnue, nos équations doivent nécessairement en donner l'expression la plus générale. Les constantes arbitraires qui peuvent y entrer n'ont à satisfaire qu'à une seule condition : c'est que, dans les milieux isotropes où le rayon lumineux et la normale au plan de l'onde coïncident, le vecteur doit être perpendiculaire à leur direction commune.

Ainsi, pour chacune de nos solutions, il y a intérêt à poser ce problème : peut-elle fournir un vecteur ou perpendiculaire au plan normal ou situé dans ce plan?

Il est facile de voir que la solution B_2 ne peut pas, pour une onde quelconque, fournir de vecteur de la première de ces deux espèces; car le vecteur principal qu'elle donne est toujours (**19**) dans le plan normal. Or, pour les ondes parallèles aux plans principaux, les vecteurs dérivés coïncident suivant la remarque de la fin du § **18** avec le vecteur principal, quelles que soient les constantes λ, μ, ν. On ne peut donc pas disposer de ces constantes de façon à obtenir la direction du vecteur dont il s'agit pour des ondes parallèles aux plans coordonnés.

La solution B_2 fournit, au contraire, au moins un vecteur situé dans le plan normal, à savoir son vecteur principal. Il s'agit de savoir si elle en peut fournir d'autres.

Pour qu'un vecteur ayant pour composantes u, v, w soit dans un même plan avec la normale à l'onde dont les cosinus directeurs sont

$$l, \quad m, \quad n,$$

et la projection du rayon lumineux sur le plan de l'onde dont les cosinus directeurs sont (**17**) proportionnels à

$$\frac{l}{\omega^2 - a^2}, \quad \frac{m}{\omega^2 - b^2}, \quad \frac{n}{\omega^2 - c^2},$$

il faut et il suffit que le déterminant

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ l & m & n \\ \frac{l}{\omega^2 - a^2} & \frac{m}{\omega^2 - b^2} & \frac{n}{\omega^2 - c^2} \end{vmatrix}$$

soit nul, ou que

$$(61\ bis) \qquad \frac{u\,(b^2 - c^2)}{\dfrac{l}{\omega^2 - a^2}} + \frac{v\,(c^2 - a^2)}{\dfrac{m}{\omega^2 - b^2}} + \frac{w\,(a^2 - b^2)}{\dfrac{n}{\omega^2 - c^2}} = 0,$$

ou comme

$$u = \frac{\mathrm{U}}{\lambda}, \qquad v = \frac{\mathrm{V}}{\mu}, \qquad w = \frac{\mathrm{W}}{\nu},$$

$$\frac{(b^2 - c^2)\,\mathrm{U}}{\lambda\,\dfrac{l}{\omega^2 - a^2}} + \frac{(c^2 - a^2)\,\mathrm{V}}{\mu\,\dfrac{m}{\omega^2 - b^2}} + \frac{(a^2 - b^2)\,\mathrm{W}}{\nu\,\dfrac{n}{\omega^2 - c^2}} = 0,$$

ou simplement, à cause de (61),

$$(62) \qquad \frac{b^2 - c^2}{\lambda} + \frac{c^2 - a^2}{\mu} + \frac{a^2 - b^2}{\nu} = 0.$$

Ainsi, nous arrivons à cette proposition remarquable qu'*il existe une infinité de solutions autres que celles de Fresnel, pour lesquelles le vecteur (vibration ou autre) est dans un plan perpendiculaire au plan de polarisation.*

En désignant par h et k deux constantes arbitraires dont le rapport seul interviendra, on tire de l'équation (62)

$$\frac{1}{\lambda} = h + ka^2,$$

$$\frac{1}{\mu} = h + kb^2,$$

$$\frac{1}{\nu} = h + kc^2,$$

et, par suite, les équations différentielles les plus générales fournies par la solution B_2, et satisfaisant à la condition de donner un vecteur situé dans le plan normal, sont

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2\Delta_2 u + (h + ka^2)\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{a}\Theta - \Theta'), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2\Delta_2 v + (h + kb^2)\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{b}\,\Theta - \Theta'), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c^2\Delta_2 w + (h + kc^2)\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{c}\,\Theta - \Theta'). \end{aligned}\right.$$

En posant

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta' &= \frac{1}{h + ka^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{h + kb^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{h + kc^2}\frac{\partial w}{\partial z}, \\ \Theta' &= \frac{a^2}{h + ka^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b^2}{h + kb^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{c^2}{h + kc^2}\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

La direction du vecteur est donnée, à l'aide des équations (60), par

$$(65)\quad \frac{u}{(h + ka^2)\dfrac{l}{a^2 - \omega^2}} = \frac{v}{(h + kb^2)\dfrac{m}{b^2 - \omega^2}} = \frac{w}{(h + kc^2)\dfrac{n}{c^2 - \omega^2}}.$$

Le cosinus de l'angle qu'elle fait avec la normale au plan de l'onde, ou le sinus de son inclinaison sur ce plan, a pour expression

$$\frac{1}{\mathrm{R}}\left[(h + ka^2)\frac{l^2}{a^2 - \omega^2} + (h + kb^2)\frac{m^2}{b^2 - \omega^2} + (h + kc^2)\frac{n^2}{c^2 - \omega^2}\right],$$

en posant, pour abréger,

$$R = \sqrt{(h+ka^2)^2 \frac{l^2}{(a^2-\omega^2)^2} + (h+kb^2)^2 \frac{m^2}{(b^2-\omega^2)^2} + (h+kc^2)^2 \frac{n^2}{(c^2-\omega^2)^2}}.$$

En écrivant partout

$$h + k\omega^2 - k\omega^2$$

au lieu de h, ayant égard à l'équation aux vitesses des ondes

$$\frac{l^2}{a^2-\omega^2} + \frac{m^2}{b^2-\omega^2} + \frac{n^2}{c^2-\omega^2} = 0$$

et à la formule (48 *bis*),

$$\frac{l^2}{(a^2-\omega^2)^2} + \frac{m^2}{(b^2-\omega^2)^2} + \frac{n^2}{(c^2-\omega^2)^2} = \frac{1}{\omega^2(r^2-\omega^2)},$$

r étant le rayon vecteur de la surface de l'onde de Fresnel coïncidant avec le rayon lumineux, on a

$$R = \sqrt{\frac{h^2 + 2hk\omega^2 - k^2r^2\omega^2}{\omega^2(r^2-\omega^2)}},$$

et pour le sinus de l'inclinaison du vecteur sur le plan de l'onde,

$$(65\ bis)\qquad \frac{k}{R} = \frac{k\omega\sqrt{r^2-\omega^2}}{\sqrt{h^2+2hk\omega^2+k^2r^2\omega^2}}.$$

Dans le cas des milieux isotropes, on a

$$\omega^2 = r^2,$$

qui montre que, alors, la vibration est transversale, quel que soit le rapport $k:h$. Donc la solution obtenue satisfait à toutes les conditions de symétrie qu'il est permis de poser *a priori*, en sorte que rien, *a priori*, n'empêche de donner au rapport $\frac{h}{k}$ une valeur absolument arbitraire.

Discussion du problème précédent.

(La solution B_2 comprend aussi les équations Maxwell-Sarrau.)

21. Pour $\frac{h}{k} = \infty$ ou $k = 0$, la vibration est dans le plan de l'onde; on retrouve la direction de Fresnel.

Au contraire, pour $\frac{h}{k} = 0$, le cosinus de l'inclinaison du vecteur sur la normale à l'onde est

$$\frac{1}{r}\sqrt{r^2 - \omega^2}.$$

Mais, si l'on abaisse du centre de la surface de l'onde une perpendiculaire sur un plan tangent parallèle au plan de l'onde et que l'on considère le triangle rectangle ayant pour sommets les extrémités de cette perpendiculaire et le point de contact, le rayon r de la surface de l'onde sera l'hypoténuse de ce triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit sont ω et $\sqrt{r^2 - \omega^2}$, ce qui montre que, dans ce cas, le vecteur est normal au plan de la polarisation radial.

C'est la direction qu'ont trouvée, par des voies absolument différentes, Maxwell et M. Sarrau.

On obtiendra les équations Maxwell-Sarrau en faisant, dans (63) et (64),

$$h = 1, \qquad k = -1, \qquad \mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 0.$$

Mais nos équations donnent encore le même vecteur lumineux en y laissant $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ arbitraires, pourvu qu'on fasse $h = 0$, $k = 1$. Il y a donc ∞^3 solutions donnant une vibration lumineuse normale au plan de polarisation radial.

Leurs équations sont

$$(66) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2\left[\Delta_2 u - \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}\Theta - \Theta')\right], \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2\left[\Delta_2 v - \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{b}\Theta - \Theta')\right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c^2\left[\Delta_2 w - \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{c}\Theta - \Theta')\right], \end{aligned}\right.$$

où

$$(67)\quad \begin{cases} \Theta = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial w}{\partial z}, \\ \Theta' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Celles de Maxwell-Sarrau sont

$$(68)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\Delta_2 u - \Theta'), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = b^2(\Delta_2 v - \Theta'), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2(\Delta_2 w - \Theta'). \end{cases}$$

Suite de la discussion.

(Possibilité de vibrations lumineuses longitudinales.)

22. Si le rapport $\frac{h}{k}$ varie de $+\infty$ à o, le vecteur varie depuis la direction normale au plan de polarisation de Fresnel (**17**) jusqu'à celle de la normale au plan de polarisation radial. Dans la plupart des cristaux, cette variation est très faible, le rayon lumineux restant toujours très voisin de la normale au plan de l'onde.

La vitesse, tant que $\frac{h}{k}$ est positif, reste donc toujours quasi transversale au rayon lumineux.

Mais, si $\frac{h}{k}$ est négatif et qu'on pose

$$\frac{h}{k} = -\omega_0^2,$$

l'expression (65 *bis*) du sinus de l'inclinaison du vecteur sur le plan de l'onde devient

$$(65\ ter)\quad \frac{\omega\sqrt{r^2-\omega^2}}{\sqrt{\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + r^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{\omega^2(r^2-\omega^2)}}}.$$

Donc, si l'on suppose au rapport arbitraire $\frac{h}{k}$ une valeur négative comparable au carré de la vitesse de la lumière, le sinus dont il s'agit peut devenir égal à l'unité pour l'onde particulière qui se propagerait avec la vitesse ω_0, et serait très voisin de l'unité pour d'autres ondes. Ainsi :

Il est possible de satisfaire à toutes les lois générales de la propagation de la lumière par des vibrations longitudinales pour une onde, et quasi longitudinales pour certaines ondes [1].

Solution B_1.

(Elle contient aussi les équations Maxwell-Sarrau comme cas particulier.)

23. Les équations (53) donnent, pour les composantes U, V, W du vecteur principal, les expressions

$$(69)\qquad \begin{cases} (\omega^2-a^2)U = l\,(\Psi - a^2\Theta), \\ (\omega^2-b^2)V = m(\Psi - b^2\Theta), \\ (\omega^2-c^2)W = n\,(\Psi - c^2\Theta), \end{cases}$$

où Θ et Ψ ont les valeurs (55).

On tire de là, à cause de

$$lU + mV + mW = \Theta,$$

$$\Theta = \Psi\left(\frac{l^2}{\omega^2-a^2} + \frac{m^2}{\omega^2-b^2} + \frac{n^2}{\omega^2-c^2}\right) - \Theta\left(\frac{a^2 l^2}{\omega^2-a^2} + \frac{b^2 m^2}{\omega^2-b^2} + \frac{c^2 n^2}{\omega^2-c^2}\right),$$

---

[1] Nous ne prétendons pas, bien entendu, qu'une telle direction soit dans les probabilités; mais, jusqu'à plus ample informé à fournir par l'expérience, elle ne peut pas être réputée impossible.

ou, en multipliant le premier membre par $l^2 + m^2 + n^2$,

$$(\Theta\omega^2 - \Psi)\left(\frac{l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{n^2}{\omega^2 - c^2}\right),$$

qui se décompose en

$$\frac{l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{n^2}{\omega^2 - c^2} = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{\Psi}{\Theta}.$$

La première est bien l'équation de Fresnel, qui se trouve ainsi vérifiée.

La seconde se rapporte à l'onde obscure.

Si l'on porte la valeur de ω^2 qu'elle fournit dans les équations (66), celles-ci se réduisent à

$$\frac{U}{l} = \frac{V}{m} = \frac{W}{n},$$

qui prouvent que le vecteur, se rapportant à l'onde obscure, est ici normal à cette onde.

Ces valeurs de U, V, W donnent d'ailleurs

$$\omega^2 = \frac{\Psi}{\Theta} = \mathbf{a}l^2 + \mathbf{b}m^2 + \mathbf{c}n^2,$$

qui est bien la valeur précédemment trouvée pour la vitesse de l'onde obscure.

Théorème. — *Le vecteur principal relatif à la solution* B_1 *est toujours dans le plan qui projette le rayon lumineux sur le plan de l'onde. Si la vitesse de l'onde obscure est nulle, elle est perpendiculaire au rayon lumineux et fournit à nouveau les équations Maxwell-Sarrau.*

Ce dernier point est évident; car, si l'on fait $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 0$, les équations (53) reviennent à celles de Maxwell-Sarrau, qui viennent d'être trouvées.

Mais je dis que toujours le vecteur donné par (66) est dans le plan indiqué; car la condition (61 *bis*), soit

$$\frac{\frac{\mathrm{U}(b^2-c^2)}{l}}{\omega^2-a^2}+\frac{\frac{\mathrm{V}(c^2-a^2)}{m}}{\omega^2-b^2}+\frac{\frac{\mathrm{W}(a^2-b^2)}{n}}{\omega^2-c^2},$$

est évidemment remplie, quels que soient Ψ et Θ.

24. Problème. — *Cette solution fournit-elle des vecteurs autres que son vecteur principal situé dans le plan normal?*

Peut-elle fournir des vecteurs perpendiculaires à ce plan?

La dernière question se résout par la négative, comme au paragraphe précédent, pour la solution B_2.

Occupons-nous de la première.

Soient

$$u=\frac{\mathrm{U}}{\lambda},\qquad v=\frac{\mathrm{V}}{\mu},\qquad w=\frac{\mathrm{W}}{\nu}$$

les composantes d'un vecteur dérivé supposé situé dans le plan indiqué, de sorte que l'on ait

$$\frac{\frac{\mathrm{U}(b^2-c^2)}{l}}{\lambda\frac{}{\omega^2-a^2}}+\frac{\frac{\mathrm{V}(c^2-a^2)}{m}}{\mu\frac{}{\omega^2-b^2}}+\frac{\frac{\mathrm{W}(a^2-b^2)}{n}}{\nu\frac{}{\omega^2-c^2}}=0$$

ou, à cause des valeurs de U, V, W,

$$\frac{(\Psi-a^2\Theta)(b^2-c^2)}{\lambda}+\frac{(\Psi-b^2\Theta)(c^2-a^2)}{\mu}+\frac{(\Psi-c^2\Theta)(a^2-b^2)}{\nu}=0.$$

On tire de là

$$\frac{\Psi}{\Theta}=\frac{\frac{a^2(b^2-c^2)}{\lambda}+\frac{b^2(c^2-a^2)}{\mu}+\frac{c^2(a^2-b^2)}{\nu}}{\frac{b^2-c^2}{\lambda}+\frac{c^2-a^2}{\mu}+\frac{a^2-b^2}{\nu}}=\mathrm{C},$$

C étant une même constante pour toutes les directions d'ondes.

Mais des équations (69) et à cause de

$$\Psi=\mathrm{a}l\mathrm{U}+\mathrm{b}m\mathrm{V}+\mathrm{c}n\mathrm{W},$$

on tire cette autre valeur de $\frac{\Psi}{\Theta}$

$$(69\ bis)\qquad \frac{\Psi}{\Theta}=\frac{\dfrac{\mathbf{a}a^2l^2}{\omega^2-a^2}+\dfrac{\mathbf{b}b^2m^2}{\omega^2-b^2}+\dfrac{\mathbf{c}c^2m^2}{\omega^2-c^2}}{-1+\dfrac{\mathbf{a}l^2}{\omega^2-a^2}+\dfrac{\mathbf{b}m^2}{\omega^2-b^2}+\dfrac{\mathbf{c}n^2}{\omega^2-c^2}}=\mathrm{C},$$

qui doit être identique à l'équation aux vitesses des ondes.

Ceci exige que $\mathrm{C}=0$, puisque l'équation aux vitesses des ondes doit se réduire au second degré.

Puis on doit avoir

$$\mathbf{a}a^2=\mathbf{b}b^2=\mathbf{c}c^2=\sigma,$$

en désignant par σ la valeur commune des trois membres.

D'ailleurs la condition $\mathrm{C}=0$ donne

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{h}{a^2}+k,$$

$$\frac{1}{\mu}=\frac{h}{b^2}+k,$$

$$\frac{1}{\nu}=\frac{h}{c^2}+k.$$

Portant ces valeurs de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, λ, μ, ν dans la solution B_1, elle donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta_2 u+(h+ka^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Psi}{a^2}-\Theta'\right),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=b^2\Delta_2 v+(h+kb^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Psi}{b^2}-b^2\Theta'\right),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\Delta_2 w+(h+kc^2)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Psi}{c^2}-\Theta'\right),$$

où

$$\Theta'=\frac{a^2\dfrac{\partial u}{\partial x}}{h+ka^2}+\frac{b^2\dfrac{\partial v}{\partial y}}{h+kb^2}+\frac{c^2\dfrac{\partial w}{\partial z}}{h+kc^2},$$

$$\Psi'=\sigma\left(\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{h+ka^2}+\frac{\dfrac{\partial v}{\partial y}}{h+kb^2}+\frac{\dfrac{\partial w}{\partial z}}{h+kc^2}\right).$$

Mais on voit aisément que ces équations, où Ψ'' est égal, au facteur σ près, à la valeur Θ' donnée par les équations (64), rentrent dans la solution (63), précédemment obtenue.

Ainsi, en résumé :

1° La solution B_1, comme celle B_2, ne peut pas donner de vecteur perpendiculaire au plan normal.

2° Elle fournit deux systèmes de vecteurs situés dans ce plan.

L'un d'eux est compris dans le système analogue fourni par la solution B_2; l'autre est nouveau. Il est obtenu en faisant $\lambda = \mu = \nu$ dans les équations différentielles de la solution B_1 et comprend donc les trois constantes arbitraires **a**, **b**, **c**.

Cherchons le sinus de l'inclinaison de son vecteur sur le plan de l'onde; en désignant par φ cet angle, on a

$$\sin\varphi = \frac{l\mathrm{U} + m\mathrm{V} + n\mathrm{W}}{\sqrt{\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + \mathrm{W}^2}}$$

ou

$$\sin\varphi = \frac{\theta}{\sqrt{\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + \mathrm{W}^2}}.$$

Mais des équations (69), en mettant partout $\Psi - \omega^2\Theta + \omega^2\Theta$ à la place de Ψ et ayant égard à ce que

$$\frac{l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{n^2}{\omega^2 - c^2} = 0,$$

$$\frac{l^2}{(\omega^2 - a^2)^2} + \frac{m^2}{(\omega^2 - b^2)^2} + \frac{n^2}{(\omega^2 - c^2)^2} = \frac{1}{\omega^2(r^2 - \omega^2)},$$

on tire

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Psi}{\Theta} - \omega^2\right)^2}}.$$

D'ailleurs $\frac{\Psi}{\Theta}$ est égal au second membre de (69 *bis*).

On voit donc qu'ici la direction de la vibration dépend de **a**, **b**, **c**, c'est-à-dire qu'elle est liée à l'existence ou à la non-existence de l'onde obscure.

Il est clair que, en disposant convenablement $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ pour une onde donnée, le rapport $\frac{\Psi}{\Theta}$ peut prendre toutes les valeurs. Il en résulte que cette solution peut fournir aussi des vecteurs de toute inclinaison.

1° Si l'on suppose la vitesse de l'onde obscure nulle, soit $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{c}=0$, on aura $\Psi=0$, d'où

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{r^2-\omega^2}}} = \frac{\sqrt{r^2-\omega^2}}{r},$$

ce qui prouve que le vecteur est perpendiculaire au rayon lumineux. Cela était aisé à prévoir. Dans ce cas, en effet, la solution coïncide avec les équations Maxwell-Sarrau.

2° Si l'on suppose $\mathbf{a}=-a^2$, $\mathbf{b}=-b^2$, $\mathbf{c}=-c^2$, ce qui supprime aussi la troisième onde, en en rendant la vitesse imaginaire, on a

$$\frac{\Psi}{\Theta}=\infty \quad \text{ou} \quad \Theta=0, \quad \sin\varphi=0.$$

Le vecteur coïncide avec la vibration de Fresnel.

Les équations différentielles correspondantes, c'est-à-dire celles obtenues en faisant dans la solution B_1

$$\lambda=\mu=\nu, \qquad \mathbf{a}=-a^2, \qquad \mathbf{b}=-b^2, \qquad \mathbf{c}=-c^2,$$

sont

$$(70) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\Delta_2 U - \frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(a^2\frac{\partial U}{\partial x} + b^2\frac{\partial^2 V}{\partial y} + c^2\frac{\partial^2 W}{\partial z}\right)$$

et les deux symétriques. Elles diffèrent de celles précédemment obtenues pour la solution de Fresnel par les termes $-a^2\frac{\partial\Theta}{\partial x}$ et ses analogues; mais, comme le vecteur est transversal, on a ici $\Theta=0$, de sorte que le résultat, au point de vue des vecteurs lumineux, est le même que si les termes contenant Θ n'existaient pas.

3° Si l'on fait $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{c}=\omega_0^2$, ω_0 étant une vitesse arbitraire, on aura

$$\frac{\Psi}{\Theta} = \omega_0^2;$$

d'où

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \dfrac{1}{\omega^2(r^2 - \omega^2)}}}.$$

Si donc on prend ω_0 égal à la vitesse d'une onde particulière, pour cette onde, on aura

$$\sin\varphi = 1;$$

les vibrations seront longitudinales et, pour les ondes voisines, elles seront quasi longitudinales.

Solution A_2.

(Elle comprend les équations de Lamé.)

25. Les équations (52) donnent, pour la direction du vecteur, les équations

$$(71)\quad \begin{cases} \omega^2 U = \mathbf{a} l\Theta + c^2 m(mU - lV) - b^2 n(lW - nU), \\ \omega^2 V = \mathbf{b} m\Theta + a^2 n(nV - mW) - c^2 l\,(mU - lV), \\ \omega^2 W = \mathbf{c} n\Theta + b^2 l\,(lW - nU) - a^2 m(nV - mW). \end{cases}$$

En les ajoutant après les avoir multipliées par l, m, n, on obtient, à cause de $\Theta = lU + mV + nW$,

$$(\omega^2 - \mathbf{a} l^2 - \mathbf{b} m^2 - \mathbf{c} n^2)\Theta = 0,$$

d'où

$$\omega^2 = \mathbf{a} l^2 + \mathbf{b} m^2 + \mathbf{c} n^2$$

pour la vitesse de l'onde obscure, comme cela doit être.

Pour les ondes visibles, on a

$$\Theta = 0,$$

qui montre que le vecteur est dans le plan de l'onde.

Si l'on ajoute les deux dernières (71) multipliées respectivement par n et $-m$ et qu'on pose, pour abréger,

$$(72) \qquad \begin{cases} nV - mW = P, \\ lW - nU = Q, \\ mU - lV = R, \end{cases}$$

il vient, à cause de $\Theta = 0$,

$$(73) \qquad \begin{cases} (a^2 - \omega^2)P = l(a^2 lP + b^2 mQ + c^2 nR), \\ (b^2 - \omega^2)Q = m(a^2 lP + b^2 mQ + c^2 nR), \\ (c^2 - \omega^2)R = n(a^2 lP + b^2 mQ + c^2 nR), \end{cases}$$

d'où l'on déduit, comme pour les équations (60), que le vecteur, dont les composantes sont P, Q, R, est dirigé suivant la projection du rayon lumineux sur le plan de l'onde. Par suite, *le vecteur principal, dont les composantes sont* U, V, W, *est situé dans le plan de l'onde dans une direction perpendiculaire à la précédente*, c'est-à-dire qu'*il est dans le plan de l'onde et dans le plan de polarisation.*

Si l'on fait $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 0$ dans les équations (52), on a précisément celles de Lamé; mais celles (52) donnent la même direction des vecteurs, quels que soient $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Il est évident, d'après cela, qu'aucun des vecteurs dérivés de la solution A_2 ne peut avoir cette même direction, quelle que soit l'onde considérée, et qu'aucun ne peut non plus être constamment perpendiculaire à cette direction, c'est-à-dire situé dans le plan normal, parce qu'aucun vecteur dérivé, d'après la construction du § 18, ne peut avoir constamment la même direction que le vecteur principal dont il provient, ni lui être constamment perpendiculaire.

Solution A_1.

26. Les équations (51) donnent, pour le vecteur principal, les équations

$$(74) \quad \begin{cases} \omega^2 U = l\Psi + c^2 mR - b^2 nQ, \\ \omega^2 V = m\Psi + a^2 nP - c^2 lR, \\ \omega^2 W = n\Psi + b^2 lQ - a^2 mP, \end{cases}$$

où

$$\Psi = \mathbf{a}lU + \mathbf{b}mV + \mathbf{c}nW$$

et P, Q, R sont définis par les expressions (57).

On y satisfait par

$$\frac{U}{l} = \frac{V}{m} = \frac{W}{n},$$

$$\omega^2 = \mathbf{a}l^2 + \mathbf{b}m^2 + \mathbf{c}n^2,$$

qui donnent la vitesse de propagation et le vecteur de l'onde obscure.

Si l'on ajoute les deux dernières multipliées respectivement par n et $-m$, on retrouve les équations (73), qui prouvent que le vecteur, dont les composantes sont P, Q, R, est encore dirigé suivant la projection du rayon lumineux sur le plan de l'onde. Par suite, le vecteur principal est *situé dans le plan de polarisation*, mais il n'est plus dans le plan de l'onde, comme dans la solution précédente, à moins que $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 0$, d'où $\Psi = 0$; mais alors la solution B_1 rentre dans celle B_2.

Existe-t-il des vibrations dérivées qui remplissent cette dernière condition, quelle que soit l'onde? Il est facile de vérifier que non. Il faudrait en effet, pour cela, que l'on eût

$$lu + mv + nw = 0$$

ou

$$\frac{\lambda}{l}U + \frac{m}{\mu}V + \frac{n}{\nu}W = 0;$$

d'où, à cause de (74),

$$\left(\frac{l^2}{\lambda}+\frac{m^2}{\mu}+\frac{n^2}{\nu}\right)\Psi + c^2\,lm\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}\right)R$$
$$+a^2\,mn\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}\right)P + b^2\,nl\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\lambda}\right)Q = 0.$$

Pour $m = n = 0$, il faut que $\Psi = 0$; de même pour $m = 0$ et $n = 0$. Il faut, par suite, que Ψ soit nul, c'est-à-dire que l'onde obscure disparaisse, et alors l'équation ne peut être satisfaite que pour $\lambda = \mu = \nu$, ce qui rentre dans la solution précédente.

Existe-t-il des vibrations dérivées de la solution A_1 situées dans le plan normal? Il est aisé de voir aussi que non; car, pour une onde parallèle à l'un des plans coordonnés, tous les vecteurs dérivés coïncident avec le vecteur principal. Or ce dernier est perpendiculaire au plan normal et non dans ce plan.

Équations non symétriques.

27. Les coefficients des équations différentielles qui définissent $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^3}$ sont des fonctions des inverses a^2, b^2, c^2 des trois indices de réfraction du cristal que l'on considère.

Si certains de ces coefficients restent arbitraires, on doit les regarder comme des fonctions arbitraires de a^2, b^2, c^2.

Comme rien ne distingue les quantités a^2, b^2, c^2, deux des équations différentielles doivent se déduire de la troisième par une double permutation du groupe de lettres u, x, a^2; v, y, b^2 et w, z, c^2, de sorte que le déterminant Δ soit symétrique en a^2, b^2, c^2.

Or, si le cristal que l'on considère admet un seul plan de symétrie, si on le prend pour plan des x, y, les équations ne devront pas changer si l'on change simultanément w et z en $-w$ et $-z$; mais alors, d'après ce qui vient d'être dit relativement à leur composition, elles ne changeront pas non plus si l'on change simultanément les signes de u et x ou de v et y, c'est-à-dire que les équations auront nécessairement la forme (9) et feront, par suite, nécessairement partie des solutions qui précèdent.

Or tous les cristaux ont au moins un plan de symétrie, sauf ceux du système asymétrique. Les solutions qui précèdent doivent donc être considérées comme les plus générales physiquement admissibles pour tous les cristaux, sauf peut-être ceux de ce dernier système.

Pour celui-ci, même si tous les phénomènes observés subsistent symétriques, par rapport à trois plans, il ne s'ensuit pas nécessairement que les équations différentielles doivent être elles-mêmes symétriques. En effet, la surface de l'onde ne dépend que du déterminant des équations qui définissent u, v, w, et il suffit que ce déterminant se décompose en deux facteurs dont l'un soit le premier membre de l'équation aux vitesses des ondes de Fresnel pour que deux des trois ondes reproduisent la surface de l'onde.

L'équation de la troisième onde peut donc contenir des puissances impaires de l, m, n; du moins il n'y a pas, *a priori*, de raison pour qu'il n'en soit pas ainsi, ce qui exigera que les équations différentielles ne soient plus de la forme symétrique (9).

Il y a plus : même si la troisième onde ne contient que des puissances paires en l, m, n, les équations différentielles peuvent, malgré cela, ne pas être de la forme indiquée. C'est ce qu'il est aisé de comprendre.

Étant donné un système d'équations différentielles fournissant la surface de l'onde de Fresnel, si l'on y remplace u, v, w par des fonctions linéaires quelconques de ces trois quantités, on obtiendra un nouveau système d'équations différentielles qui la fournira aussi; car le déterminant du nouveau système ne différera que par un facteur constant du déterminant de l'ancien.

Or, si celui-ci restait invariable par les changements de sens de l'un quelconque des axes de coordonnées, ce qui est le caractère des équations (9), le nouveau système ne remplirait plus cette condition. Nous pourrons donc, des quatre solutions que nous avons trouvées en partant des équations (9), déduire des équations n'ayant plus cette forme symétrique et n'en reproduisant pas moins tous les phénomènes observés.

Posons

$$(75)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= \lambda u + \lambda' v + \lambda'' w,\\ V &= \mu u + \mu' v + \mu'' w,\\ W &= \nu u + \nu' v + \nu'' v;\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(76)\qquad \begin{cases} u = \lambda_1 U + \lambda'_1 V + \lambda''_1 W, \\ v = \mu_1 U + \mu'_1 V + \mu''_1 W, \\ w = \nu_1 U + \nu'_1 V + \nu''_1 W, \end{cases}$$

où, en appelant D_1 le déterminant,

$$(77)\qquad \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix},$$

on a

$$(78)\qquad \lambda_1 = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \lambda}, \qquad \lambda'_1 = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \lambda'}, \qquad \ldots;$$

par suite

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \lambda'_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \lambda''_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.$$

Prenons, par exemple, les équations (54) de la solution B_2. Elle donne

$$(79)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \mathrm{a}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a^2\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + (\mathrm{a} - b^2)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + (\mathrm{a} - c^2)\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \mathrm{b}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + b^2\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + (\mathrm{b} - c^2)\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z} + (\mathrm{b} - a^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \mathrm{c}\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2} + c^2\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + (\mathrm{c} - a^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} + (\mathrm{c} - b^2)\dfrac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}, \end{cases}$$

d'où

$$(80)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda_1 \mathrm{a}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \lambda_1 a^2\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + \lambda'_1(\mathrm{b} - a^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} + \lambda''_1(\mathrm{c} - a^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} \\ \qquad + \lambda'_1 \mathrm{b}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda'_1 b^2\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + \lambda_1(\mathrm{a} - b^2)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + \lambda''_1(\mathrm{c} - b^2)\dfrac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y} \\ \qquad + \lambda''_1 \mathrm{c}\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \lambda''_1 c^2\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + \lambda_1(\mathrm{a} - c^2)\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z} + \lambda'_1(\mathrm{b} - c^2)\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}, \end{cases}$$

ou, en remplaçant U, V, W par leurs valeurs en u, v, w,

$$
(81)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & + (\lambda_1 \lambda \mathbf{a} + \lambda'_1 \mu b^2 + \lambda''_1 \nu c^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& + (\lambda_1 \lambda a^2 + \lambda'_1 \mathbf{b} \mu + \lambda''_1 c^2 \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
& + (\lambda_1 a^2 \lambda + \lambda'_1 b^2 \mu + \lambda''_1 \mathbf{c} \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
& + [\lambda'_1 (\mathbf{b} - a^2) \lambda + \lambda_1 (\mathbf{a} - b^2) \mu] \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} \\
& + [\lambda''_1 (\mathbf{c} - b^2) \mu + \lambda'_1 (\mathbf{b} - c^2) \nu] \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} \\
& + [\lambda'_1 (\mathbf{b} - a^2) \lambda + \lambda_1 (\mathbf{a} - b^2) \mu] \frac{\partial u}{\partial z\, \partial x} \\
& + (\lambda_1 \mathbf{a} \lambda' + \lambda'_1 b^2 \mu + \lambda''_1 c^2 \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
& + (\lambda_1 a^2 \lambda' + \lambda'_1 \mathbf{b} \mu + \lambda''_1 c^2 \nu^2) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
& + (\lambda_1 a^2 \lambda' + \lambda_1 b^2 \mu' + \lambda''_1 \mathbf{c} \nu') \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
& + [\lambda'_1 (\mathbf{b} - a^2) \lambda' + \lambda_1 (\mathbf{a} - b^2) \mu'] \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} \\
& + [\lambda''_1 (\mathbf{c} - b^2) \mu + \lambda'_1 (\mathbf{b} - c^2) \nu^2] \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} \\
& + [\lambda'_1 (\mathbf{b} - a^2) \lambda' + \lambda_1 (\mathbf{a} - b^2) \mu'] \frac{\partial^2 v}{\partial z\, \partial x} \\
& + (\lambda_1 \mathbf{a} \lambda'' + \lambda'_1 b^2 \mu'' + \lambda''_1 c^2 \nu'') \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
& + (\lambda_1 a^2 \lambda'' + \lambda'_1 \mathbf{b} \mu + \lambda''_1 c^2 \nu'') \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
& + (\lambda_1 a^2 \lambda'' + \lambda'_1 b^2 \mu'' + \lambda''_1 \mathbf{c} \nu'') \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
& + [\lambda' (\mathbf{b} - a^2) \lambda'' + \lambda_1 (\mathbf{a} - b^2) \mu'') \frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial y} \\
& + [\lambda''_1 (\mathbf{c} - b^2) \mu'' + \lambda'_1 (\mathbf{b} - c^2) \nu''] \frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial x} \\
& + [\lambda'_1 (\mathbf{b} - a^2) \lambda'' + \lambda_1 (\mathbf{a} - b^2) \mu''] \frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial x}.
\end{aligned}
\right.
$$

On obtiendra respectivement $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, en remplaçant dans le second membre de l'équation ci-dessus $\lambda_1, \lambda'_1, \lambda''_1$ respectivement par μ, μ'_1, μ''_1 et $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ en les remplaçant par ν_1, ν'_1, ν''_1.

Et l'on déduirait de même des solutions B_2, A_2, A_1 de nouvelles solutions renfermant chacune douze constantes arbitraires, à savoir

$$\mathbf{a},\quad \mathbf{b},\quad \mathbf{c},$$
$$\lambda,\quad \mu,\quad \nu;\quad \lambda',\quad \mu',\quad \nu';\quad \lambda'',\quad \mu'',\quad \nu'',$$

dont les neuf dernières n'entrent que pour leurs rapports à l'une d'elles. Si l'on fait

$$\lambda' = \mu' = \nu' = \lambda'' = \mu'' = \nu'' = 0,$$

on retombe sur les solutions précédentes ne changeant pas par le changement de sens de l'un quelconque des axes.

28. *Résumé.* — En résumé :

1° Si l'on écarte les cristaux asymétriques, pour tous les autres, les équations différentielles les plus générales, physiquement admissibles, du vecteur lumineux (vibration ou autre), fournissant la surface de l'onde de Fresnel, forment quatre solutions A_1, A_2, B_1, B_2 représentées par les équations (18) et (19) du n° **7**, (26) et (27) du n° **9**.

2° Chacune de ces solutions comporte cinq constantes arbitraires, à savoir : $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et les rapports $\lambda : \mu : \nu$.

3° Les trois premières définissent la vitesse de l'onde obscure, qui est la même dans les quatre solutions et donnée par l'équation

$$\omega^2 = \mathbf{a}l^2 + \mathbf{b}m^2 + \mathbf{c}n^2,$$

pour l'onde dont la normale a les cosinus de direction l, m, n.

Les trois autres influent sur la direction du vecteur.

4° Il n'est nullement nécessaire pour obtenir la surface de l'onde de supposer des vibrations ou plus généralement le vecteur lumineux, soit dans le plan de polarisation, soit dans un plan perpendiculaire.

En donnant aux constantes λ, μ, ν toutes les valeurs, on obtient des vibrations de toute inclinaison sur ce plan, et même des vibrations pouvant, pour certaines ondes particulières, être *longitudinales*.

5° Nous appelons *vecteur principal* d'une solution celui qu'on obtient en supposant $\lambda = \mu = \nu$, et ***vecteurs dérivés*** tous les autres.

Les équations différentielles qui donnent les composantes U, V, W du vecteur principal sont celles (51), (52), (53) et (54) du n° **18**.

La direction de ce vecteur pour une onde plane donnée est définie par les équations (57), (58), (59) et (60) du même numéro.

Les vecteurs dérivés s'en déduisent par les équations.

$$\lambda u = U, \qquad \mu v = V, \qquad \nu w = W.$$

6° Parmi tous les vecteurs possibles, les plus intéressants sont :

(a). Celui qui est à la fois dans le plan de polarisation et dans le plan de l'onde, c'est-à-dire perpendiculaire au plan normal;

(b). Ceux qui sont situés dans ce dernier plan.

En effet, à cause de la symétrie du phénomène lumineux relativement à ce plan, ces vecteurs paraissent seuls pouvoir se produire.

7° Le système d'équations le plus général possible fournissant la direction (a) s'obtient en faisant dans les équations (19) $\lambda = \mu = \nu$, ce qui donne le vecteur principal de la solution A_2. Sa direction est, par suite, définie par les équations (58). La solution renferme donc les trois constantes arbitraires **a, b, c**.

Si l'on y fait $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 0$, ce qui supprime l'onde obscure, ces équations coïncident avec celles de Lamé et reproduisent ainsi sa théorie, obtenue aussi avec quelques variantes, par d'autres auteurs, par Cauchy, dans certains de ses Mémoires, par Mac Cullagh, Newmann et aussi par M. Massieu.

C'est la direction à laquelle on arrive quand on suppose l'éther placé dans un cristal, homogène et hétérotrope.

8° Pour les directions (b) qui sont en nombre illimité, il existe deux solutions : l'une s'obtient en faisant, dans les équations de la solution B_2,

$$\frac{1}{\lambda} = h + ka^2,$$

$$\frac{1}{\mu} = h + kb^2,$$

$$\frac{1}{\nu} = h + kc^2,$$

h, k étant deux constantes arbitraires; de sorte que cette solution comporte quatre constantes arbitraires **a**, **b**, **c** et le rapport $k : a$. On obtient ainsi les équations (63), (64) et (65).

L'inclinaison du vecteur est donnée par l'équation (65 *bis*).

Cet angle peut prendre toutes les valeurs, même celles de 90° pour certaines ondes particulières, si l'on dispose convenablement le rapport $\frac{k}{h}$.

9° Si l'on prend $k = 0$, $h = 1$, le vecteur est perpendiculaire au plan de polarisation, c'est-à-dire coïncide avec la projection du rayon lumineux sur le plan de l'onde. C'est la direction de Fresnel.

Si, en outre, on fait $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 0$, les équations obtenues reproduisent toute la théorie de Fresnel.

10° Si l'on fait, au contraire, $h = 0$, $k = 1$, le vecteur est perpendiculaire au rayon lumineux suivant les résultats de MM. Maxwell-Sarrau et de M. Boussinesq.

Si l'on fait en outre $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 0$, on aura les équations mêmes dues à ces savants.

11° La seconde des solutions fournissant un vecteur situé dans le plan normal, vecteur pouvant aussi, comme le précédent, prendre toutes les directions, même la direction longitudinale pour certaines ondes, sans cesser de reproduire la surface de l'onde, est fournie par les équations de la solution B_1, où l'on fait $\lambda = \mu = \nu$ ou, si l'on veut, les équations (53) et (59) du n° **18**, en sorte qu'elle comporte trois constantes arbitraires **a**, **b**, **c**.

12° De toutes les solutions obtenues, la plus probable paraît devoir être comprise dans les équations (63), (64) et (65), pour lesquelles le vecteur est dans le plan normal. C'est ce que nous nous réservons de montrer en appliquant ces diverses solutions à la réflexion cristalline et éliminant celles qui ne satisferont pas aux lois les mieux établies de ce phénomène.