JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DAVID HILBERT

Lettre adressée à M. Hermite

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 4 (1888), p. 249-256.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4__249_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Lettre adressée à M. Hermite;

Par M. David HILBERT.

Pendant mon séjour à Paris, l'année dernière, vous avez eu la bonté de diriger mon attention sur l'analogie remarquable qui existe entre la théorie des invariants des formes binaires du quatrième, du cinquième degré, etc., et respectivement celle des formes cubiques ternaires, quaternaires, etc. Pour la forme binaire biquadratique et la forme ternaire cubique, cette analogie saute aux yeux le plus distinctement, aussitôt que nous nous servons pour la discussion de ces formes d'une certaine proposition générale que j'ai expliquée dans un travail dans les *Mathematische Annalen*, vol. XXVIII, p. 381.

Dans ce qui suit j'ai l'honneur de vous communiquer, en peu de mots, comment la théorie de ces formes se montre sous ce point de vue.

Soit

$$f = a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4 = a_x^4$$

la forme primitive binaire et biquadratique. Premièrement cherchons toutes les formes quadratiques

$$\varphi = \alpha_0 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 = \alpha_x^2,$$

pour lesquelles, par un choix convenable de la constante λ, on a la relation

$$(a\alpha)^2 a_x^2 = \lambda \alpha_x^2.$$

Après une élimination facile, nous sommes menés à l'équation cubique en λ

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - \lambda \\ a_1 & a_2 + \frac{\lambda}{2} & a_3 \\ a_2 - \lambda & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda^3 - i\lambda - 2j = 0,$$

et, si nous employons le déterminant muni d'un bord

$$\Delta(x, y, \lambda) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - \lambda & y_2^2 \\ a_1 & a_2 + \frac{\lambda}{2} & a_3 & -y_1 y_2 \\ a_2 - \lambda & a_3 & a_4 & y_1^2 \\ x_2^2 & -x_1 x_2 & x_1^2 & 0 \end{vmatrix},$$

nous avons, pour fixer les formes cherchées,

$$\Delta(x, y, \lambda^{(1)}) = \varphi^{(1)}(x)\varphi^{(1)}(y),$$
$$\Delta(x, y, \lambda^{(2)}) = \varphi^{(2)}(x)\varphi^{(2)}(y),$$
$$\Delta(x, y, \lambda^{(3)}) = \varphi^{(3)}(x)\varphi^{(3)}(y),$$

ou, après l'identification des variables x_1, x_2 et y_1, y_2,

$$-\frac{\lambda^{(1)}}{2} f - h = \varphi^{(1)^2},$$

$$-\frac{\lambda^{(2)}}{2} f - h = \varphi^{(2)^2},$$

$$-\frac{\lambda^{(3)}}{2} f - h = \varphi^{(3)^2},$$

où $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ sont les trois racines de l'équation cubique et h est le hessien de la forme biquadratique. Puis, si nous désignons les symboles des formes $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$ respectivement avec les indices (1), (2), (3), nous avons, à cause de

$$(a\alpha^{(i)})a_x^2 = \lambda^{(i)}\alpha_x^{(i)^2},$$
$$(a\alpha^{(k)})a_x^2 = \lambda^{(k)}\alpha_x^{(k)^2},$$

les relations suivantes

$$(a\alpha^{(i)})^2(a\alpha^{(k)})^2 = \lambda^{(i)}(\alpha^{(i)}\alpha^{(k)})^2,$$
$$(a\alpha^{(k)})^2(a\alpha^{(i)})^2 = \lambda^{(k)}(\alpha^{(i)}\alpha^{(k)})^2$$

et par conséquent, pour $i \neq k$,

$$(\alpha^{(i)}\alpha^{(k)})^2 = 0,$$

c'est-à-dire que les invariants bilinéaires des formes $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$ s'évanouissent, tandis que leurs discriminants prennent les valeurs

$$(\alpha^{(1)}\alpha^{(1)})^2 = \frac{\partial\Delta(\lambda^{(1)})}{\partial\lambda^{(1)}} = -\tfrac{1}{2}(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})(\lambda^{(1)} - \lambda^{(3)}),$$
$$(\alpha^{(2)}\alpha^{(2)})^2 = \frac{\partial\Delta(\lambda^{(2)})}{\partial\lambda^{(2)}} = -\tfrac{1}{2}(\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)})(\lambda^{(2)} - \lambda^{(3)}),$$
$$(\alpha^{(3)}\alpha^{(3)})^2 = \frac{\partial\Delta(\lambda^{(3)})}{\partial\lambda^{(3)}} = -\tfrac{1}{2}(\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)})(\lambda^{(3)} - \lambda^{(2)}).$$

D'autre part, en cherchant toutes les formes binaires cubiques φ qui remplissent identiquement la relation

$$(f, \varphi)_2 = \lambda\varphi,$$

on arrive facilement aux résultats suivants. A chacune des deux valeurs

$$\lambda^{(1)} = +\sqrt{\frac{i}{3}} \qquad \text{et} \qquad \lambda^{(2)} = -\sqrt{\frac{i}{3}}$$

appartient un faisceau de formes cubiques $\varphi^{(1)}$ et $\varphi^{(2)}$, et ces deux faisceaux cubiques sont en même temps ceux qui ont la même forme biquadratique f comme jacobien. Du reste, de la même manière qu'auparavant, on obtient la valeur zéro pour l'invariant bilinéaire

$$(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})_3.$$

Voilà les résultats principaux et essentiellement connus de la théorie d'une forme binaire biquadratique, qui mènent facilement à la décomposition de la forme biquadratique et, d'autre part, à l'étude des dégénérations possibles de la forme biquadratique. Comme on le voit, ces résultats ont été déduits seulement au moyen d'un principe général, c'est-à-dire en cherchant toutes les formes qui se reproduisent par un certain mode d'opération invariantive. Dans ce qui suit je voudrais montrer que ce même point de vue suffit pour la résolution élégante de questions analogues dans la théorie d'une forme ternaire cubique.

Soit

$$f = a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2 x_2 + \ldots + a_{333}x_3^3 = a_x^3$$

la forme primitive proposée. Premièrement, considérons des formes bilinéaires

$$\varphi = \alpha_{11}x_1 u_1 + \alpha_{12}x_1 u_2 + \ldots + \alpha_{33}x_3 u_3 = \alpha_x u_\beta$$

avec une série de variables x_1, x_2, x_3 et une autre série de variables u_1, u_2, u_3 transformée par des substitutions inverses, et cherchons toutes ces formes φ pour lesquelles, par un choix convenable de λ, on a la relation identique

$$(a\alpha u) a_\beta a_x = \lambda \alpha_x u_\beta.$$

En comparant les coefficients des produits des variables x_1, x_2, x_3 et u_1, u_2, u_3, on obtient neuf équations qui permettent l'élimination des neuf grandeurs α_{11}, α_{12}, ..., α_{33}, d'où découle l'équation du neuvième degré pour λ

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix}
-\lambda & -a_{113} & a_{112} & 0 & -a_{123} & a_{122} & 0 & -a_{133} & a_{123} \\
a_{113} & 0 & -a_{111} & a_{123}-\lambda & 0 & -a_{112} & -a_{133} & 0 & -a_{113} \\
-a_{112} & a_{111} & 0 & -a_{122} & a_{112} & 0 & -a_{123}-\lambda & a_{113} & 0 \\
0 & -a_{223}-\lambda & a_{122} & 0 & -a_{223} & a_{222} & 0 & -a_{233} & a_{123} \\
a_{123} & 0 & -a_{112} & a_{223} & -\lambda & -a_{122} & a_{233} & 0 & -a_{123} \\
-a_{122} & a_{112} & 0 & -a_{123} & a_{122} & 0 & -a_{223} & a_{123}-\lambda & 0 \\
0 & -a_{133} & a_{133}-\lambda & 0 & -a_{233} & a_{223} & 0 & -a_{333} & a_{133} \\
a_{133} & 0 & -a_{113} & a_{233} & 0 & -a_{123}-\lambda & a_{333} & 0 & -a_{133} \\
-a_{123} & a_{113} & 0 & -a_{223} & a_{122} & 0 & -a_{233} & a_{133} & -\lambda
\end{vmatrix} = 0,$$

ou, si nous calculons le déterminant et exprimons les coefficients des puissances de λ par les invariants fondamentaux S et T de la forme ternaire cubique,

$$\lambda\{\lambda^8 - 6S\lambda^4 - T\lambda^2 - 3S^2\} = 0.$$

A chacune des neuf racines de cette équation

$$\lambda = 0, \quad \lambda^{(1)}, \quad \lambda^{(2)}, \quad \lambda^{(3)}, \quad \lambda^{(4)}, \quad -\lambda^{(1)}, \quad -\lambda^{(2)}, \quad -\lambda^{(3)}, \quad -\lambda^{(4)},$$

appartient toujours une forme bilinéaire

$$\varphi = u_x, \quad \varphi^{(1)}, \quad \varphi^{(2)}, \quad \varphi^{(3)}, \quad \varphi^{(4)}, \quad \overline{\varphi}^{(1)}, \quad \overline{\varphi}^{(2)}, \quad \overline{\varphi}^{(3)}, \quad \overline{\varphi}^{(4)}.$$

Alors, si nous munissons le déterminant d'un bord à droite avec

$$y_1 v_1, \quad y_2 v_1, \quad y_3 v_1, \quad y_1 v_2, \quad y_2 v_2, \quad y_3 v_2, \quad y_1 v_3, \quad y_2 v_3, \quad y_3 v_3$$

et en bas avec

$$x_1 u_1, \quad x_2 u_1, \quad x_2 u_1, \quad x_1 u_2, \quad x_2 u_2, \quad x_3 u_2, \quad x_1 u_3, \quad x_2 u_3, \quad x_3 u_3,$$

nous serons en état de fixer les quatre paires de formes bilinéaires selon la formule

$$\Delta\begin{pmatrix} x, & u \\ y, & v \end{pmatrix} \lambda^{(i)} = \varphi^{(i)}(x, u)\overline{\varphi}^{(i)}(y, v), \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Du reste, par la même méthode qu'auparavant dans la discussion de la forme binaire biquadratique, nous obtenons les résultats

$$\alpha^{(i)}_{\beta(i)} = 0, \qquad \overline{\alpha}^{(i)}_{\overline{\beta}(i)} = 0,$$
$$\alpha^{(i)}_{\beta(k)}\alpha^{(k)}_{\beta(i)} = 0, \qquad \overline{\alpha}^{(i)}_{\overline{\beta}(k)}\overline{\alpha}^{(k)}_{\overline{\beta}(i)} = 0, \qquad \alpha^{(i)}_{\overline{\beta}(k)}\overline{\alpha}^{(k)}_{\beta(i)} = 0,$$

c'est-à-dire que tous les invariants linéaires et bilinéaires des formes φ et $\overline{\varphi}$ s'évanouissent, excepté les quatre suivants :

$$\alpha^{(i)}_{\overline{\beta}(i)}\overline{\alpha}^{(i)}_{\beta(i)} = \frac{\partial\Delta(\lambda^{(i)})}{\partial\lambda^{(i)}}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Pour nous rapprocher des résultats connus, nous transformons une des huit formes bilinéaires par une substitution linéaire dans la forme spéciale pour laquelle seulement les trois coefficients α_{11}, α_{22}, α_{33} demeurent finis. Alors la forme primitive f prend en même temps la forme canonique de Hesse et, abstraction faite de facteurs indifférents, nous avons les formules plus précises

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= u_1 x_1 + \varepsilon\, u_2 x_2 + \varepsilon^2 u_3 x_3\\ \bar\varphi &= u_1 x_1 + \varepsilon^2 u_2 x_2 + \varepsilon\, u_3 x_3\end{aligned}\right\}\ \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

$$(\beta\bar\beta x)\alpha_x\bar\alpha_x = (\lambda^2 f - 3h) = x_1 x_2 x_3,$$

dans lesquelles nous reconnaissons la théorie des quatre triangles avec les neuf points d'inflexion.

D'autre part, si nous écrivons la forme primitive ternaire et cubique symboliquement

$$f = a_x^3 = b_x^3,$$

nous pouvons chercher toutes les formes ternaires quadratiques

$$\varphi = \alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + 2\alpha_{13} x_1 x_3 + \ldots + \alpha_{33} x_3^2 = \alpha_x^2,$$

qui remplissent identiquement la relation

$$(ab\alpha)^2 a_x b_x = \lambda \alpha_x^2.$$

On arrive à deux valeurs pour λ

$$\lambda^{(1)} = +\, 2\sqrt{S} \qquad \text{et} \qquad \lambda^{(2)} = -\, 2\sqrt{S},$$

dont chacune appartient à un certain système deux fois infini de coniques $\varphi^{(1)}$ et $\varphi^{(2)}$.

Comme on le voit, le principe expliqué mène à la construction d'invariants et covariants irrationnels et procure au moyen de ceux-ci une connaissance du sens propre et de la connexion analytique des formes invariantives rationnelles, quand même, comme il arrive dans des cas plus compliqués, le véritable calcul de tous les invariants et covariants résultants n'est plus praticable.

Mais nous pouvons modifier notre principe en divers sens, par exemple, si nous cherchons une forme binaire φ du degré r de telle nature que le covariant simultané $(f, \varphi)_i$ de celle-ci et d'une forme binaire donnée f du degré n contient la forme φ comme facteur. Dans le cas spécial $n = 2r - 2$ et $i = 2$, on obtient pour φ les formes de tous les faisceaux qui ont la même forme f comme jacobien et, pour $r = 4$, ce dernier problème a été traité sous un autre point de vue par MM. Brill (*Mathematische Annalen*, vol. XX, p. 330) et Stephanos (*Comptes rendus*, t. XCIII, p. 994).

Du reste, on peut spécialiser ladite méthode en cherchant simplement toutes les formes φ qui donnent un résultat s'annulant après une certaine opération invariantive sur la forme proposée f. Dans la discussion d'une forme binaire f du degré $n = 2r - 1$, on profite de cette méthode pour obtenir une forme φ du degré r dont les facteurs linéaires conduisent à la forme canonique. Mais je voudrais expliquer par un exemple que le même principe suffit pour établir la possibilité d'une forme canonique pour des formes à plusieurs variables.

Soit représentée la forme canonique d'une forme quaternaire cubique par

$$f = a_x^3 = l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 + l_4^3 + l_5^3,$$

où l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 sont des formes linéaires dont les coefficients, regardés comme des coordonnées homogènes, peuvent définir cinq points p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 dans l'espace. Si nous cherchons ensuite toutes les formes quaternaires quadratiques $\varphi = u_\alpha^2$ avec des variables inverses u_1, u_2, u_3, u_4 qui remplissent la relation

$$a_\alpha^2 a_x = 0,$$

nous trouvons un certain système de formes cinq fois infini. Mais, d'autre part, nous savons, à cause de la forme canonique supposée, que cette condition est remplie par toutes les surfaces quadratiques ψ contenant les cinq points p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. Pour m'expliquer plus brièvement, je nomme un système spécial de formes dont chacune contient un certain nombre de points fondamentaux un *système naturel avec ces points fondamentaux*. Alors le problème de la représentation canonique d'une forme quaternaire cubique est le même que de trouver un système naturel ψ, quatre fois infini, qui est contenu dans un système proposé φ cinq fois infini de formes quaternaires et quadratiques. Mais maintenant il est facile de montrer que la représentation canonique n'est possible que d'une seule manière; car, si

$$f = l_1'^3 + l_2'^3 + l_3'^3 + l_4'^3 + l_5'^3$$

était une autre expression canonique où les coefficients des formes linéaires l_1', l_2', l_3', l_4', l_5' donnent les cinq points p_1', p_2', p_3', p_4', p_5' dans l'espace, il serait nécessaire que le même système φ cinq fois infini de surfaces quadratiques contînt deux systèmes naturels, quatre fois infinis : premièrement le système de formes ψ avec les points fondamentaux p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et secondement le système de formes ψ' avec les points fondamentaux p_1', p_2', p_3', p_4', p_5'. Par conséquent, il devrait exister quatre relations linéaires entre les formes ψ et ψ', c'est-à-dire que les dix points p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_1', p_2', p_3', p_4', p_5' seraient nécessairement situés de telle sorte qu'on puisse faire passer une surface quadratique par ces dix points et en même temps par trois points arbitraires de l'espace. Si nous supposons ces trois points dans le plan des points p_1', p_2', p_3', on voit que les sept autres points p_4', p_5' et p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 seraient tous situés dans un autre plan, ce qui est exclu comme insignifiant. En même temps nous apprenons que la susdite expression canonique est susceptible de représenter toute forme donnée quaternaire et cubique dans toute sa généralité; car elle contient le nombre convenable de constantes indépendantes et une représentation indéterminée est inadmissible selon les réflexions que je viens de faire.

Voilà une démonstration simple du théorème fondamental dans la théorie de la forme quaternaire cubique; mais cette méthode est susceptible de généralisation pour d'autres formes. Par exemple, on trouve au moyen des mêmes considérations, comme auparavant, que toute forme ternaire du cinquième degré se laisse exprimer toujours d'une manière et d'une seule manière comme une somme de sept puissances de formes linéaires.

Ainsi l'on voit que divers problèmes de la théorie des formes peuvent se traiter pareillement, si l'on se place sous le point de vue que nous venons d'exposer.