JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. KLEIN

Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 4 (1888), p. 169-176.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4__169_0>

Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique;

PAR M. F. KLEIN (DE GOETTINGUE).

Extrait d'une Lettre adressée à M. C. JORDAN.

.... Lors de mon dernier séjour à Paris, je vous ai raconté que je venais de résoudre affirmativement une question que vous m'aviez posée autrefois à plusieurs reprises. L'équation des 27 droites d'une surface cubique et la trisection des fonctions hyperelliptiques du premier ordre ayant le même groupe, il s'agissait de réduire, s'il était possible, le premier problème au second. J'ai donné là-dessus déjà quelques développements dans une séance de la Société mathématique de France ([1]). Permettez-moi d'y revenir aujourd'hui, et d'exposer mes raisonnements d'une manière plus complète. Sans doute, les explications que je vais donner paraîtront encore un peu vagues, comme je n'écris pas des formules détaillées, mais j'espère pourtant qu'elles pourront avoir quelque intérêt.

Qu'il me soit permis d'abord de rappeler, en peu de mots, la forme que j'ai donnée autrefois à la résolution des équations du cinquième

([1]) 13 avril 1887.

degré par les fonctions elliptiques. Dans ce but, je dois vous parler de deux choses : d'abord de la forme normale que j'ai donnée à l'équation modulaire pour la transformation du cinquième ordre des fonctions elliptiques, ensuite de la réduction de l'équation générale du cinquième degré à cette forme normale.

Quant au premier point, considérons les expressions suivantes, dans lesquelles ρ signifie un facteur indéterminé

$$(1) \qquad \rho z_1 = e^{\frac{i\pi\tau}{5}} \vartheta_1(\tau, 5\tau), \qquad \rho z_2 = e^{\frac{4i\pi\tau}{5}} \vartheta_1(2\tau, 5\tau),$$

τ étant le quotient des périodes, suivant la notation de M. Weierstrass. Il est facile de démontrer que, pour une transformation linéaire quelconque de τ, le quotient $z_1 : z_2$ subit des substitutions linéaires (fractionnaires) à coefficients constants ([1]). Ces substitutions étant les mêmes pour deux transformations linéaires qui sont congruentes suivant le module 5, leur nombre devient égal à 60, et la détermination de $z_1 : z_2$ comme fonction des invariants rationnels g_2, g_3 de l'intégrale elliptique équivaut à la résolution complète de l'équation modulaire correspondant à la transformation du cinquième ordre. Maintenant, les substitutions de $z_1 : z_2$ ne sont autre chose que les substitutions bien connues aujourd'hui de l'*icosaèdre*. Soit, comme dans mon Livre ([2]),

$$(2) \quad \begin{cases} f(z_1, z_2) = z_1^{11} z_2 + 11 z_1^6 z_2^6 - z_1 z_2^{11}, \\ \mathrm{H}(z_1, z_2) = -(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228(z_1^{10} - z_2^{10}) z_1^5 z_2^5 - 494 z_1^{10} z_2^{10} : \end{cases}$$

$z_1 : z_2$ dépend de l'équation icosaédrique

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{H}(z_1, z_2)^3}{1728 f(z_1, z_2)^5} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2},$$

([1]) Voir, par exemple, mon Mémoire *Sur les courbes elliptiques normales du $n^{ième}$ ordre*, etc. (*Mémoires mathématiques de la Société scientifique de Leipzig*, t. XII).

([2]) *Leçons sur l'icosaèdre et la résolution des équations du cinquième degré.* Leipzig, 1884 (Teubner).

et c'est cette équation icosaédrique que je considère ici comme *la forme normale* de l'équation modulaire pour la transformation du cinquième ordre. Faisons encore la remarque suivante. Au lieu des substitutions du quotient $z_1 : z_2$, on peut considérer les substitutions correspondantes unimodulaires des deux variables homogènes z_1, z_2. Comme le déterminant d'une substitution binaire est du deuxième degré dans les coefficients, le nombre de ces substitutions homogènes devient égal à 120. Mais on peut se demander s'il n'est pas possible de trouver parmi elles 60, qui forment elles seules un groupe isomorphe holoédriquement aux substitutions fractionnaires de $z_1 : z_2$. Or, j'ai démontré que c'est impossible. Je reviendrai immédiatement à ce théorème.

Passons maintenant à la résolution des équations du cinquième degré, ou plutôt à leur réduction à la forme icosaédrique que je viens de donner. Sans doute la possibilité de cette réduction dépend en première ligne de ce fait, que le groupe alterné d'une équation du cinquième degré est holoédriquement isomorphe au groupe de l'icosaèdre, mais la réduction elle-même ne repose pas, suivant mes points de vue, sur la considération des groupes : elle appartient plutôt à la Géométrie analytique, ou, si l'on veut, à la théorie des fonctions algébriques. Je ne veux pas répéter ici les détails de cette réduction, que j'ai donnés dans mon Livre, avec tous les développements nécessaires. C'est un seul point fondamental sur lequel je dois insister ici. Je viens de dire que le nombre des substitutions de l'icosaèdre est nécessairement doublé quand on passe du quotient $z_1 : z_2$ aux quantités homogènes z_1, z_2. C'est pour cela, comme je l'ai démontré, qu'il devient impossible d'opérer la réduction à la forme icosaédrique d'une manière purement rationnelle. La réduction doit donc contenir quelque irrationnalité. Cette irrationnalité n'abaissant pas le groupe de l'équation, je l'appelle une *irrationnalité accessoire*. Du reste, cette irrationnalité peut être choisie de différentes manières, par exemple comme la racine carrée d'une fonction rationnelle bien simple des coefficients de l'équation du cinquième degré.

Ceci étant bien conçu, pour venir au but que je me suis proposé ici, j'aurais à faire des considérations tout à fait analogues sur les fonctions hyperelliptiques (du premier ordre) et les équations du vingt-septième degré.

En première ligne donc j'aurai à construire une forme normale pour l'équation modulaire de la transformation du troisième ordre des fonctions hyperelliptiques. Qu'il me soit permis de m'appuyer ici sur les recherches de deux de mes élèves, M. Witting et M. Maschke. M. Witting s'est occupé de généraliser, pour les fonctions hyperelliptiques, ce que j'avais fait pour les fonctions elliptiques dans ma *Théorie des courbes normales supérieures* (¹). Voici le détail que je dois emprunter à ses recherches. Soit

$$(5) \qquad \vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

une fonction thêta hyperelliptique impaire quelconque; ρ un facteur indéterminé. Considérons les quatre fonctions

$$(6) \quad \rho z_{\alpha\beta} = e^{\frac{i\pi}{3}(\tau_{11}\alpha^2 + 2\tau_{12}\alpha\beta + \tau_{22}\beta^2)} \vartheta(\alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12}, \alpha\tau_{21} + \beta\tau_{22}; 3\tau_{11}, 3\tau_{12}, 3\tau_{22}),$$
$$\alpha, \beta = 0, 1; \quad 0, 1; \quad 1, 0; \quad 1, 1; \quad 1, 2.$$

Ces quatre fonctions doivent être considérées comme étant strictement analogues aux fonctions z_1, z_2 de l'équation (2). Nous constatons d'abord que les quotients de ces quatre fonctions auront la propriété *de subir des substitutions linéaires à coefficients constants* pour chaque transformation linéaire des τ_{ik}, qui laisse inaltérée la caractéristique de la fonction ϑ. Nous voyons ensuite que les substitutions correspondant de cette façon à deux transformations linéaires congruentes suivant le module 3 seront les mêmes. C'est pourquoi le nombre total des substitutions des quotients des z devient égal à un nombre que vous avez déterminé dans votre *Traité des substitutions*, c'est-à-dire à $\frac{(3^4-1)3^3(3^2-1)3}{1} = 25920$. Nous considérons ensuite les substitutions homogènes unimodulaires de quatre variables z correspondant aux substitutions fractionnaires des quotients. Le déterminant d'une substitution quaternaire étant du quatrième ordre dans les coefficients, le nombre total de ces substitutions homogènes se trouve égal

(¹) WITTING, *Mathematische Annalen*, t. 29 (*Schlömilch's Zeitschrift*, Bd. 32).

à 4.25920 ; mais on démontre qu'il suffit de considérer la moitié seulement, c'est-à-dire 2.25920 substitutions formant à elles seules un groupe isomorphe au groupe des substitutions fractionnaires. L'analogie avec les z_1, z_2 se trouve ici encore une fois conservée, car on a le théorème trouvé par M. Maschke, qu'il est impossible de construire avec ces 2.25920 substitutions quelque sous-groupe qui soit également isomorphe au groupe donné. Il s'agira maintenant de chercher les équations par lesquelles les rapports des z sont liés aux modules algébriques des intégrales hyperelliptiques, équations que nous considérerons dans la suite comme cette *forme normale* de l'équation modulaire de la transformation du troisième ordre qu'il fallait construire. Mais, auparavant, il faut faire une remarque essentielle qui n'était pas nécessaire dans le cas des fonctions elliptiques. Pour obtenir les substitutions linéaires des quotients des z, nous avons dû considérer seulement ces transformations linéaires des τ_{ik}, qui laissaient inaltérée la caractéristique de la fonction (5). C'est pourquoi nous ne devons pas considérer ici comme modules algébriques des intégrales hyperelliptiques les invariants *rationnels* de cette forme binaire du sixième degré qui se trouve sous le signe radical, mais certains invariants *irrationnels* correspondant à la caractéristique de la fonction ϑ. Notre fonction ϑ étant impaire, elle est associée à une décomposition déterminée de la forme sextique en un facteur linéaire et un facteur du cinquième degré. Or, suivant les idées de M. Weierstrass, une forme ainsi décomposée peut être changée rationnellement dans celle-ci :

$$(7) \qquad f = x_2(4x_1^5 - g_2 x_1^3 x_2^2 - g_3 x_1^2 x_2^3 - g_4 x_1 x_2^4 - g_5 x_2^5).$$

Ce sont ces coefficients g_2, g_3, g_4, g_5 qui sont les invariants irrationnels que nous devons employer dans notre étude des quantités z. Quant aux équations explicites, par lesquelles ils sont liés aux z, c'est la recherche dans laquelle M. Maschke se trouve engagé. Les calculs n'étant pas encore achevés, il suffira d'indiquer ici que les résultats seront publiés prochainement dans les *Mathematische Annalen*.

Considérons maintenant l'équation du vingt-septième degré des droites d'une surface cubique. Comme vous l'avez prouvé dans votre Traité, le groupe de cette équation, après l'adjonction d'une racine carrée (¹), se trouve isomorphe sans mériédrie au groupe des 25920 substitutions fractionnaires des quotients des z. Or je ne considérerai pas quelques autres qualités spéciales de cette équation, mais je m'occuperai, dans ce qui suit, de toutes les équations du vingt-septième degré ayant le même groupe. Est-il possible de réduire ces équations *rationnellement* au problème des z, que nous avons défini? D'après les indications données pour les équations du cinquième degré, cela dépend des substitutions homogènes unimodulaires, correspondant aux substitutions fractionnaires des quotients des z. Si le groupe de ces substitutions homogènes se trouvait holoédriquement isomorphe au groupe des substitutions fractionnaires, la réduction rationnelle s'opérerait facilement par un procédé que j'ai donné dans le tome XV des *Mathematische Annalen* (²) et sur lequel je reviendrai tout à l'heure. Mais, comme le groupe des substitutions homogènes des z est nécessairement deux fois plus grand que le groupe des substitutions fractionnaires, la réduction rationnelle devient impossible; il faut donc introduire quelque irrationnalité accessoire.

Voici maintenant une méthode facile de réduction. Je la donne sous la même forme géométrique sous laquelle elle s'est présentée à mon esprit, en relation intime, comme vous le verrez, avec mes anciennes recherches sur l'espace réglé.

Le groupe des substitutions homogènes des z n'étant pas holoédriquement isomorphe au groupe de l'équation proposée, la première chose à faire consiste à en déduire un autre groupe de substitutions homogènes qui le soit. Dans ce but il suffit évidemment de considérer les substitutions des déterminants $p_{ik} = z_i z'_k - z'_i z_k$, formées de deux séries de variables cogrédientes z, z', ou bien les coefficients a_{ik} d'une forme linéaire des p_{ik}

$$\sum a_{ik} p_{ik},$$

c'est-à-dire *les coordonnées d'un complexe linéaire*.

(¹) Quant à cette racine carrée, j'ai démontré qu'elle se rapporte au discriminant de la surface cubique, c'est-à-dire à cette expression, qui, égalée à zéro, donne la condition pour l'existence d'un point double.

(²) *Mémoire sur la résolution de certaines équations du septième et du huitième degré.*

Maintenant, par le procédé donné au tome XV des *Mathematische Annalen,* nous sommes en état de construire six fonctions rationnelles des vingt-sept racines x de l'équation proposée, qui soient des a_{ik}, c'est-à-dire qui se substituent comme les a_{ik}, quand on effectue d'une part sur les x les substitutions du groupe de l'équation et d'autre part sur les z les substitutions linéaires correspondantes. Nous disons, suivant l'expression employée dans mon Livre, que nous avons coordonné d'une manière *covariante* aux racines x un certain complexe linéaire de l'espace des z.

Tout ce qui reste à faire maintenant est de coordonner à ce complexe linéaire d'une manière covariante un point z. Or c'est le même problème duquel je me suis occupé récemment dans mes recherches sur la résolution des équations générales du sixième et du septième degré (¹). On commence à coordonner au complexe a_{ik} d'une manière covariante et rationnelle trois autres complexes a'_{ik}, a''_{ik}, a'''_{ik} et l'on cherche ensuite, suivant les règles connues, deux combinaisons linéaires de ces complexes, qui représentent des lignes droites, se coupant en un point. C'est cette dernière opération qui introduit une irrationnalité accessoire, composée de deux racines carrées. Mais nous voilà parvenus au but que nous nous sommes posé; car le point d'intersection des deux droites, c'est bien le point z qu'il fallait construire.

En effet, les coordonnées z du point, que nous venons de déterminer, dépendront des racines x de l'équation proposée, de telle sorte qu'elles peuvent être définies par un *problème normal,* dans lequel g_2, g_3, g_4, g_5 ont été remplacés par des fonctions des coefficients de l'équation du vingt-septième degré rationnellement connues. En calculant ensuite les z par les formules hyperelliptiques (6), nous avons résolu l'équation du vingt-septième degré.

Je ne saurais finir sans vous annoncer dès aujourd'hui une publication de mon ancien élève, M. Cole, agrégé à l'Université de Boston (Harvard College). Vous savez bien que j'ai eu toujours un intérêt tout particulier pour cette question de la réduction des équations quelconques à des équations normales du même groupe. Or, pendant l'hiver passé, dans un Cours spécial, j'ai fait de mes études un en-

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XXVIII.

semble, sans pourtant aller jusqu'aux développements que je viens de donner dans cette Lettre. Maintenant M. Cole s'est engagé à faire une rédaction de ce Cours, qui doit être imprimé dans l'*American Journal* ou quelque autre part. Ce sera, pour ainsi dire, une continuation de mon Livre sur l'icosaèdre.

Göttingue, le 22 septembre 1887.