JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Sur les courbes cycliques de direction

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 4 (1888), p. 129-131.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4__129_0>

Sur les courbes cycliques de direction;

PAR M. G. HUMBERT.

Dans notre Mémoire sur le théorème d'Abel, publié dans le tome III (4^e série) de ce Journal, nous avons énoncé, relativement aux courbes cycliques de direction, la proposition suivante [1] :

La somme des arcs interceptés sur une courbe cyclique de direction, à branches cycliques distinctes, par deux courbes quelconques de même degré, est égale à la somme des arcs interceptés par ces mêmes courbes sur les cercles qui osculent à l'infini les branches de la courbe primitive.

Pour démontrer ce théorème, nous avons admis qu'un *même* cercle réel osculait à l'infini deux branches conjuguées de la courbe primitive; mais, en général, une courbe cyclique n'admet pas de tels cercles biosculateurs, et le théorème précédent doit subir, pour s'appliquer à tous les cas, une légère modification.

Parmi les cercles qui ont pour centre un foyer singulier réel d'une courbe réelle, et qui touchent tous, en chacun des points cycliques I et J, une branche de cette courbe, il en est un qui oscule la branche correspondant au point I, et un autre, imaginaire conjugué du premier, qui oscule la branche correspondant au point J. Si ces deux

(1) Page 390; n° 54.

cercles coïncident, on est en présence d'un cercle biosculateur; s'il en est autrement, désignons par $R + R'i$ et $R - R'i$ leurs rayons, et appelons *cercle focal* le cercle, concentrique aux précédents, et de rayon R. On arrive alors sans grande difficulté, en appliquant les principes établis dans le Mémoire sur le théorème d'Abel, au résultat suivant :

La somme des arcs interceptés sur une courbe cyclique de direction réelle, à branches cycliques distinctes, par deux courbes quelconques de même degré, est égale à la somme des arcs interceptés par ces mêmes courbes sur les cercles focaux de la courbe primitive.

La même modification doit être introduite dans le théorème VI du n° **62**.

A cette occasion, nous compléterons les résultats que nous avons donnés, relativement aux courbes cycliques de direction à branches cycliques distinctes, et ne touchant pas la droite de l'infini, par les remarques suivantes :

Si l'on considère la somme algébrique des arcs interceptés sur une de ces courbes par les deux côtés d'un angle α, elle sera égale, d'après le théorème précédent, en appelant R_1, R_2, ... les rayons des cercles focaux, à $\alpha \Sigma R_1$, les rayons étant affectés de signes convenables, déterminés par le sens dans lequel sont décrits les cercles focaux. On voit que cette somme est indépendante des positions respectives de la courbe et de l'angle, et l'on généralise ainsi la propriété bien connue du cercle relative à la mesure des angles :

La somme des arcs interceptés sur une courbe cyclique de direction réelle, à branches cycliques distinctes, par les deux côtés d'un angle, est proportionnelle à la valeur de cet angle, et indépendante de sa position dans le plan.

La somme des arcs interceptés sur une courbe cyclique de direction par deux courbes asymptotiques étant toujours nulle (**50**), on voit également que :

La somme des arcs interceptés sur une courbe cyclique de direc-

tion réelle, à branches cycliques distinctes, par deux courbes quelconques de même degré, est indépendante de la position de la courbe cyclique par rapport aux deux courbes sécantes.

Car on peut remplacer chacune de ces dernières par le faisceau des droites menées d'un point parallèlement aux directions asymptotiques.

Ce théorème s'applique, en particulier, au cercle.