JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

APPELL

**Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta F = 0$**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série*, tome 3 (1887), p. 5-52.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1887_4_3__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

# *Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta F = 0$;*

Par M. APPELL.

Soit $F(x, y, z)$ une fonction de trois variables réelles $x, y, z$ que nous considérons comme les coordonnées rectilignes rectangulaires d'un point M; supposons que cette fonction vérifie l'équation

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

et admette par rapport à $x$ la période $2\alpha$, c'est-à-dire remplisse la condition

$$F(x + 2\alpha, y, z) = F(x, y, z).$$

Il résulte du développement en série de Fourier que, si cette fonction est régulière en tous les points de l'espace situés à l'intérieur d'un cylindre parallèle à l'axe des coordonnées $x$, elle est, ainsi que toutes ses dérivées partielles, développable en une série trigonométrique de la forme

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left( A_\nu \cos \frac{\nu\pi x}{\alpha} + B_\nu \sin \frac{\nu\pi x}{\alpha} \right),$$

convergente en tous les points de l'intérieur du cylindre : les coefficients $A_\nu$ et $B_\nu$ sont des fonctions de $y$ et $z$ vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\nu^2 \pi^2}{\alpha^2} V = 0.$$

Si la fonction $F(x, y, z)$ admet la période $2\alpha$ par rapport à $x$ et la période $2\beta$ par rapport à $y$,

$$F(x + 2\alpha, y, z) = F(x, y + 2\beta, z) = F(x, y, z);$$

et, si elle est régulière en tous les points de l'espace situés entre deux plans parallèles au plan $xOy$, cette fonction, ainsi que ses dérivées, est développable en une double série de la forme

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} \Big( & A_{\mu,\nu} \cos \frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos \frac{\nu\pi y}{\beta} + B_{\mu,\nu} \cos \frac{\mu\pi x}{\alpha} \sin \frac{\nu\pi y}{\beta} \\ & + C_{\mu,\nu} \sin \frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos \frac{\nu\pi y}{\beta} + D_{\mu,\nu} \sin \frac{\mu\pi x}{\alpha} \sin \frac{\nu\pi y}{\beta} \Big), \end{aligned}$$

convergente en tous les points considérés; les coefficients $A_{\mu,\nu}$, $B_{\mu,\nu}$, $C_{\mu,\nu}$, $D_{\mu,\nu}$ sont des fonctions de $z$ vérifiant l'équation différentielle

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \pi^2 \left( \frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2} \right) U = 0.$$

Je me suis proposé d'appliquer ces propositions générales, qui sont bien connues, aux fonctions les plus simples satisfaisant aux conditions précédentes. De même que, dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, les fonctions périodiques les plus simples, après les fonctions périodiques holomorphes, sont celles qui admettent une infinité de pôles distribués régulièrement dans le plan comme $\cot z$ ou $\operatorname{sn} z$; dans la théorie des fonctions de trois variables $x, y, z$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$, les fonctions périodiques les plus simples, après les fonctions périodiques régulières en tous les points à distance finie, sont celles qui admettent une infinité de pôles distribués régulièrement dans l'espace, le mot *pôle* étant employé ici dans le sens que nous lui avons donné précédemment (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 5 février 1883, et *Acta Mathematica,* t. IV, p. 313). Ces fonctions périodiques se présentent dans la résolution de différentes questions de Physique mathématique, ainsi qu'il résulte d'une remarque de Riemann [1], de plusieurs Notes présentées à l'Académie des Sciences par MM. Boussinesq [2], de Saint-Venant, Flamant [3] et Chervet [4]; ces applications, avec quelques autres que j'ai eu l'honneur d'indiquer dans une Note présentée à l'Académie le 28 janvier 1884, se trouvent résumées dans un Mémoire *Sur quelques applications de la fonction* $Z(x, y, z)$ *à la Physique mathématique,* publié dans les *Acta mathematica,* t. VIII, p. 265.

Les développements en séries trigonométriques obtenus dans le présent Mémoire se prêtent facilement au calcul numérique. Comme on le verra, ces développements présentent une analogie intéressante avec ceux des fonctions simplement et doublement périodiques et, en particulier, des fonctions

$$\log \sin(x + yi) \sin(x - yi),$$
$$\log \theta(x + yi)\, \theta(x - yi)$$

qui satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Les principaux résultats contenus dans ce Mémoire ont été indiqués dans une Note présentée à l'Académie le 21 juin 1886.

---

(1) *Schwere, Electricität und Magnetismus,* bearbeitet von Hattendorff, p. 84.
(2) 3, 31 janvier, 30 mai 1870.
(3) 3, 10, 24 avril 1882; 12, 19 novembre 1883.
(4) 24 septembre 1883; 11 février 1884.

**1.** Soit $\mathfrak{S}_1(x, y, z; a)$ la fonction définie par la série

$$(1)\quad \mathfrak{S}_1(x,y,z;a) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sum{}' \left[\frac{1}{\sqrt{(x-ma)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{m^2a^2}}\right],$$

où tous les radicaux sont pris positivement, la sommation désignée par $\Sigma'$ s'étendant à toutes les valeurs entières de $m$ positives et négatives, zéro excepté.

Cette fonction $\mathfrak{S}_1$ satisfait à l'équation différentielle

$$\Delta\mathfrak{S}_1 = \frac{\partial^2\mathfrak{S}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{S}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{S}_1}{\partial z^2} = 0;$$

elle est finie et continue, ainsi que toutes ses dérivées, en tous les points de l'espace, à l'exception des points ayant pour coordonnées

$$(2)\qquad x = ma, \qquad y = 0, \qquad z = 0$$

$m$ prenant toutes les valeurs entières, zéro compris; enfin elle ne change pas quand on augmente $x$ de la constante $a$ :

$$\mathfrak{S}_1(x+a, y, z; a) = \mathfrak{S}_1(x, y, z; a).$$

Cette dernière propriété résulte immédiatement de ce que la différence

$$\mathfrak{S}_1(x+a, y, z) - \mathfrak{S}_1(x, y, z)$$

peut s'écrire

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{[x-(m-1)a]^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-ma)^2+y^2+z^2}}\right],$$

série dont la somme est évidemment nulle, puisque les termes se détruisent deux à deux.

En employant la terminologie que nous avons introduite dans un Mémoire *Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle* $\Delta F = 0$ (*Acta mathematica*, t. IV, p. 313), nous dirons que cette fonction $\mathfrak{S}_1$ est régulière en tous les points à distance finie, à l'exception des points (2), qui sont des pôles de résidu $+1$, qu'elle a un point singulier essentiel à l'infini, et qu'elle admet le groupe de périodes $(a, 0, 0)$.

J'ajoute qu'à l'aide de cette fonction on peut exprimer le *potentiel d'une masse liquide limitée par deux plans parallèles* et traversée par un flux d'électricité à l'état permanent, comme il résulte d'une Note présentée à l'Académie des Sciences, dans la séance du 24 septembre 1883, par M. A. Chervet.

En tous les points de l'espace autres que les points de l'axe $Ox$, cette fonction $\mathfrak{S}_1$ et toutes ses dérivées pourront être développées en séries trigonométriques procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi x}{a}$. En particulier, on aura, en tous ces points,

$$\mathfrak{S}_1(x, y, z; a) = A_0 + A_1 \cos\frac{2\pi x}{a} + \ldots + A_\nu \cos\frac{2\nu\pi x}{a} + \ldots,$$

développement qui ne contient que des cosinus, car la fonction $\mathfrak{S}_1$ est *paire* en $x$.

Les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$ de ce développement sont des fonctions de $y$ et $z$ que nous allons déterminer.

En posant, pour simplifier,

$$(3) \qquad y^2 + z^2 = u,$$

on a

$$(4) \qquad \mathfrak{S}_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+u}} + \sum' \left[\frac{1}{\sqrt{(x-ma)^2+u}} - \frac{1}{\sqrt{m^2a^2}}\right],$$

ce qui montre que les coefficients cherchés $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$ dépendent uniquement de $u$ et de $a$. Au lieu de calculer directement ces coefficients, il est plus simple de déterminer leurs dérivées, par rapport à $u$,

$$\frac{dA_0}{du}, \quad \frac{dA_1}{du}, \quad \ldots, \quad \frac{dA_\nu}{du}.$$

En différentiant les développements précédents par rapport à $u$, on obtient

$$(5) \qquad \frac{d\mathfrak{S}_1}{du} = \frac{dA_0}{du} + \frac{dA_1}{du}\cos\frac{2\pi x}{a} + \ldots + \frac{dA_\nu}{du}\cos\frac{2\nu\pi x}{a} + \ldots,$$

puis, d'après (4),

$$\frac{d\Theta_1}{du} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+u)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\sum{}' \frac{1}{[(x-ma)^2+u]^{\frac{3}{2}}},$$

ou, plus simplement,

$$(6) \qquad \frac{d\Theta_1}{du} = -\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{[(x-ma)^2+u]^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour calculer les coefficients $\frac{dA_\nu}{du}$, nous emploierons une transformation indiquée par Riemann (*Schwere Electricität und Magnetismus*, bearbeitet von Hattendorff, p. 88), qui nous a été signalée par M^me de Kowaleski.

Soit N une quantité positive, l'équation

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donne

$$\int_0^\infty \sqrt{s}\,.\,e^{-s}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ou, en posant $s = Nt$,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{t}\,.\,e^{-Nt}\,dt = \frac{1}{2}\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc, en faisant

$$N = (x-ma)^2 + u,$$

on a

$$\frac{1}{2}\frac{1}{[(x-ma)^2+u]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{t}\,e^{-t(x-ma)^2-tu}\,dt,$$

et, d'après (6),

$$(7) \qquad \frac{d\Theta_1}{du} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{t}\,.\,e^{-t(u+x^2)} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{2mtax-m^2ta^2}\,dt.$$

Or, si l'on fait, en suivant les notations de MM. Briot et Bouquet dans leur *Théorie des fonctions elliptiques*,

$$\theta_3(x, \omega, \omega') = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2mx+m^2\omega')},$$

on voit, en posant

$$\omega = \frac{\pi i}{at}, \qquad \omega' = -a,$$

que la série qui figure sous le signe $\int$ dans la formule (7) est

$$\theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right).$$

On peut donc écrire

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{du} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{t}.e^{-t(u+x^2)}\,\theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right) dt. \tag{8}$$

Si, d'autre part, on fait

$$p = e^{-\frac{\pi\omega i}{\omega'}} = e^{-\frac{\pi^2}{a^2 t}}$$

et

$$\mathfrak{S}_3(x) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} p^{\nu^2}\cos\frac{2\nu\pi x}{a},$$

on sait que l'on a (Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 320)

$$\mathfrak{S}_3(x) = \sqrt{\frac{\omega'}{\omega i}}\,e^{\frac{\pi x^2 i}{\omega\omega'}}\,\theta_3(x, \omega, \omega'),$$

c'est-à-dire, dans le cas actuel,

$$\mathfrak{S}_3(x) = a\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-tx^2}\,\theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right);$$

d'où

$$e^{-tx^2}\theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\,\mathfrak{S}_3(x).$$

Substituant dans l'équation (8), on obtient

$$\frac{d\Theta_1}{du} = -\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-tu}\Im_3(x)\,dt.$$

Enfin, en mettant, pour $\Im_3(x)$, son développement en série trigonométrique

$$\Im_3(x) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2 t}}\cos\frac{2\nu\pi x}{a},$$

on obtient

$$\frac{d\Theta_1}{du} = -\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-tu}\,dt - \frac{2}{a}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\int_0^\infty e^{-tu-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2 t}}\,dt\cos\frac{2\nu\pi x}{a}.$$

On a ainsi le développement de $\frac{d\Theta_1}{du}$ en série trigonométrique. Les coefficients

$$\frac{dA_0}{du},\quad \frac{dA_1}{du},\quad \ldots,\quad \frac{dA_\nu}{du}$$

de ce développement sont

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dA_0}{du} &= -\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-tu}\,dt = -\frac{1}{au},\\ \frac{dA_\nu}{du} &= -\frac{2}{a}\int_0^\infty e^{-tu-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2 t}}\,dt. \end{aligned}\right.$$

En intégrant ces expressions par rapport à $u$, on a

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} A_0 &= -\frac{1}{a}\log u + B_0,\\ A_\nu &= \frac{2}{a}\int_0^\infty e^{-tu-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2 t}}\frac{dt}{t} + B_\nu, \end{aligned}\right.$$

où $B_0$ et $B_\nu$ sont des constantes indépendantes de $u$. Nous allons montrer que toutes ces constantes $B_\nu$ sont *nulles*, sauf $B_0$ qui est égale à

$$\frac{2}{a}(\log 2a - C),$$

C désignant la constante d'Euler 0,577215....

La fonction

$$\mathfrak{S}_1 = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu \cos\frac{2\nu\pi x}{a}$$

vérifie l'équation $\Delta\mathfrak{S}_1 = 0$; or, $A_\nu$ étant une fonction de $u = y^2 + z^2$, on a

$$\frac{\partial^2\mathfrak{S}_1}{\partial x^2} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{4\nu^2\pi^2}{a^2} A_\nu \cos\frac{2\nu\pi x}{a},$$

$$\frac{\partial^2\mathfrak{S}_1}{\partial y^2} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left(2\frac{dA_\nu}{du} + 4y^2\frac{d^2A_\nu}{du^2}\right)\cos\frac{2\nu\pi x}{a},$$

$$\frac{\partial^2\mathfrak{S}_1}{\partial z^2} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left(2\frac{dA_\nu}{du} + 4z^2\frac{d^2A_\nu}{du^2}\right)\cos\frac{2\nu\pi x}{a};$$

la somme de ces dérivées étant *nulle*, on doit avoir

$$u\frac{d^2A_\nu}{du^2} + \frac{dA_\nu}{du} - \frac{\nu^2\pi^2}{a^2}A_\nu = 0. \tag{11}$$

On vérifie sans peine que l'intégrale définie

$$I_\nu = \frac{2}{a}\int_0^\infty e^{-tu - \frac{\pi^2\nu^2}{a^2 t}}\frac{dt}{t}$$

est une intégrale particulière de l'équation différentielle (11), c'est-à-dire que l'on a

$$u\frac{d^2I_\nu}{du^2} + \frac{dI_\nu}{du} - \frac{\nu^2\pi^2}{a^2}I_\nu = 0. \tag{12}$$

D'après les valeurs (10) trouvées pour les coefficients $A_\nu$, on aurait

$$A_\nu = I_\nu + B_\nu,$$

$B_\nu$ étant indépendant de $u$. En substituant cette valeur de $A_\nu$ dans l'équation (11) et tenant compte de l'équation (12), on trouve

$$\frac{\nu^2\pi^2}{a^2}B_\nu = 0,$$

ce qui donne $B_\nu = 0$ pour toutes les valeurs de $\nu$ autres que zéro. Pour vérifier la relation (12), il suffit de partir de l'identité

$$d\left(te^{-tu-\frac{\nu^2\pi^2}{a^2t}}\right) = e^{-tu-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2t}}\left(1 - tu + \frac{\pi^2\nu^2}{a^2t}\right)dt,$$

et d'intégrer les deux membres entre les limites o et $\infty$, en remarquant que l'intégrale du premier membre s'annule aux limites.

Il nous reste donc à déterminer $B_0$. Pour cela, nous calculerons directement le premier coefficient $A_0$ du développement de $\mathcal{E}_1$.

La formule

$$\mathcal{E}_1 = A_0 + A_1\cos\frac{2\pi x}{a} + \ldots + A_\nu\cos\frac{2\nu\pi x}{a} + \ldots$$

donne, en effet, d'après Fourier,

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a \mathcal{E}_1\,dx.$$

Prenons, dans la série (1) qui définit $\mathcal{E}_1$, les termes correspondant aux valeurs de $m$ comprises entre $-k$ et $+k$, $k$ étant un entier positif; et soit

$$S_k = \frac{1}{\sqrt{x^2+u}} + \sum_{m=1}^{m=k}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-ma)^2+u}} + \frac{1}{\sqrt{(x+ma)^2+u}} - \frac{2}{ma}\right]$$

la somme ainsi obtenue : cette somme tendra vers $\mathcal{E}_1$ quand on fera augmenter $k$ indéfiniment.

Or on a

$$\begin{aligned}\int_0^a S_k\,dx = \log\frac{a+\sqrt{a^2+u}}{\sqrt{u}} &+ \sum_{m=1}^{m=k}\left[\log\frac{(1-m)a+\sqrt{(1-m)^2a^2+u}}{-ma+\sqrt{m^2a^2+u}}\right.\\ &\left. + \log\frac{(1+m)a+\sqrt{(1+m)^2a^2+u}}{ma+\sqrt{m^2a^2+u}} - \frac{2}{m}\right].\end{aligned}$$

Si, dans le second membre, on remplace la somme des logarithmes par le logarithme du produit, on voit que les mêmes facteurs, sauf deux, se retrouvent au numérateur et au dénominateur, et l'on obtient

$$\int_0^a S_k\,dx = \log\frac{(k+1)a+\sqrt{(k+1)^2a^2+u}}{-ka+\sqrt{k^2a^2+u}} - 2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right).$$

Comme l'on a

$$\frac{1}{-ka+\sqrt{k^2a^2+u}} = \frac{ka+\sqrt{k^2a^2+u}}{u},$$

on peut écrire, en ajoutant et retranchant $2\log k$,

$$\int_0^a S_k\,dx = \log\frac{\left[(k+1)a+\sqrt{(k+1)^2a^2+u}\right]\left(ka+\sqrt{k^2a^2+u}\right)}{k^2u}$$
$$-2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}-\log k\right).$$

Si $k$ augmente indéfiniment, $S_k$ tend vers $\mathfrak{S}_1$, et l'on a

$$\int_0^a \mathfrak{S}_1\,dx = \log\frac{4a^2}{u} - 2C,$$

C désignant la constante d'Euler,

$$C = \lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}-\log k\right)$$

pour $k$ infini : cette constante, que Gauss désigne par $-\Psi(0)$, a pour valeur, d'après Gauss (*Werke*, III Band, p. 154),

$$C = -\Psi(0) = 0{,}5772156\ldots;$$

donc, enfin,

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a \mathfrak{S}_1\,dx = -\frac{1}{a}\log u + \frac{2}{a}(\log 2a - C).$$

En résumé, si l'on fait

$$\mathfrak{S}_1(x, y, z; a) = A_0 + A_1\cos\frac{2\pi x}{a} + \ldots + A_\nu\cos\frac{2\nu\pi x}{a} + \ldots,$$

les coefficients ont pour valeurs

$$(13)\qquad \begin{cases} A_0 = -\frac{1}{a}\log u + \frac{2}{a}(\log 2a - C), \\ A_\nu = \frac{2}{a}\int_0^\infty e^{-tu-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2 t}}\frac{dt}{t}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty), \end{cases}$$

$u$ désignant la quantité $y^2 + z^2$.

**2.** En remplaçant $t$ par une nouvelle variable $\tau$ liée à $t$ par la relation

$$t = \frac{\pi\nu}{a\sqrt{u}}\tau,$$

il vient

$$A_\nu = \frac{2}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{\pi\nu\sqrt{u}}{a}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}\frac{d\tau}{\tau};$$

si donc on désigne par $f(\varepsilon)$ l'intégrale définie suivante, qui dépend du seul paramètre $\varepsilon$ supposé positif,

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}\frac{d\tau}{\tau},$$

on pourra écrire

$$(13')\qquad A_\nu = \frac{4}{a}f\left(\frac{\pi\nu\sqrt{u}}{a}\right) = \frac{4}{a}f\left(\frac{\pi\nu\sqrt{y^2+z^2}}{a}\right).$$

Nous avons vu que ce coefficient $A_\nu$ vérifie l'équation différentielle (11),

$$u\frac{d^2A_\nu}{du^2} + \frac{dA_\nu}{du} - \frac{\nu^2\pi^2}{a^2}A_\nu = 0;$$

introduisons dans cette équation la variable indépendante $\varepsilon$ liée à $u$ par la relation

$$\varepsilon = \frac{\pi\nu\sqrt{u}}{a}, \qquad u = \frac{a^2\varepsilon^2}{\pi^2\nu^2};$$

l'équation différentielle deviendra

$$(14)\qquad \varepsilon\frac{d^2A_\nu}{d\varepsilon^2} + \frac{dA_\nu}{d\varepsilon} - 4\varepsilon A_\nu = 0.$$

Il serait d'ailleurs facile de vérifier directement que l'intégrale définie

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}\frac{d\tau}{\tau}$$

satisfait à cette équation. Il suffirait de partir de l'identité

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(\tau-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}\right] = \left[-\frac{\varepsilon}{\tau}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)^2 + \frac{4\varepsilon}{\tau} + \frac{1}{\tau}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)\right]e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}$$

et d'intégrer les deux membres entre les limites o et $\infty$, en remarquant que l'intégrale du premier membre s'annule aux limites.

Si, dans l'équation différentielle (14), on fait

$$\varepsilon = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\eta,$$

elle devient

$$\eta\frac{d^2A_\nu}{d\eta^2} + \frac{d^2A_\nu}{d\eta} + \eta A_\nu = 0,$$

ce qui est l'équation différentielle bien connue à laquelle satisfait la fonction de Fourier

$$J_0(\eta) = 1 - \frac{\eta^2}{2^2} + \frac{\eta^4}{2^2 4^2} - \frac{\eta^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots,$$

qui est un cas particulier des fonctions de Bessel (*voir*, par exemple, le Traité de Todhunter : *The Functions of Laplace, Lamé and Bessel*, Chap. XXXII).

Une seconde intégrale particulière de l'équation différentielle est fournie par la fonction complémentaire $Y_0$ introduite par Neumann : *Theorie der Bessel'schen Functionen*, Leipzig, 1867, § 17). L'intégrale $f'(\varepsilon)$ est donc de la forme

$$f(\varepsilon) = AJ_0(2\varepsilon\sqrt{-1}) + BY_0(2\varepsilon\sqrt{-1}),$$

A et B désignant des constantes numériques [1].

Cette intégrale

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau}e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}$$

---

[1] *Voyez* un Mémoire de M. H. WEBER, *Journal de Crelle*, t. 75.

a été employée par Riemann dans la solution d'une question de Physique mathématique : *Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe* (¹).
En écrivant

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\tau}{\tau} e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)} + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}$$

et remplaçant, dans la première intégrale, $\tau$ par $\frac{1}{\tau}$, on voit qu'elle devient identique à la seconde; donc

$$f(\varepsilon) = \int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\varepsilon\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}.$$

Faisant alors

$$\tau + \frac{1}{\tau} = 2t,$$

$$\tau = t + \sqrt{t^2 - 1},$$

on trouve

$$f(\varepsilon) = \int_1^\infty \frac{e^{-2\varepsilon t}\, dt}{\sqrt{t^2 - 1}},$$

ce qui est l'intégrale considérée par Riemann à la page 58 du Mémoire cité. D'après ce grand géomètre, la fonction $f(\varepsilon)$ est développable en série sous la forme suivante

$$f(\varepsilon) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\varepsilon^{2m}}{(1.2\ldots m)^2}\left[\Psi(m) - \log\varepsilon\right],$$

$\Psi(m)$ désignant, suivant la notation de Gauss, la fonction

$$\frac{d\log\Gamma(m+1)}{dm}.$$

Cette même intégrale a été développée en série semi-convergente par M. Stieltjes dans une thèse soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris, le 30 juin 1886 (²).

---

(¹) *Riemann's Gesammelte mathematische Werke*, p. 54.

(²) *Voyez* également un Mémoire de M. Lipschitz, *Journal de Crelle*, t. 56.

Dans le Mémoire de Riemann : *Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe,* cette fonction $f(\varepsilon)$ est introduite pour calculer les coefficients du développement en série trigonométrique de la fonction

$$U = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2m\beta - \alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2m\beta + \alpha)^2}} \right],$$

où

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Or, d'après les notations que nous employons dans le présent Mémoire, on a

$$\mathfrak{S}_1(z, x, y; 4\beta) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2 + x^2}} + \sum{}' \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 4n\beta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{16n^2\beta^2}} \right];$$

la fonction U de Riemann est donc

$$\begin{aligned} U = {} & \mathfrak{S}_1(z - \alpha, x, y; 4\beta) - \mathfrak{S}_1(z - \alpha + 2\beta, x, y; 4\beta) \\ & - \mathfrak{S}_1(z + \alpha, x, y; 4\beta) + \mathfrak{S}_1(z + \alpha + 2\beta, x, y; 4\beta). \end{aligned}$$

En remplaçant la fonction $\mathfrak{S}_1$ par les développements qui résultent des formules (13) et (13′), on retrouverait l'expression de U donnée par Riemann,

$$U = \sum \sin \frac{n\pi}{2\beta} z \, \frac{4 \sin \frac{n\pi}{2\beta} \alpha}{\beta} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{n\pi}{2\beta} r t}}{\sqrt{t^2 - 1}} \, dt,$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs *entières positives et impaires* de $n$.

En se reportant à la Note de M. Chervet (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 24 septembre 1883), on voit que le potentiel déterminé par M. Chervet est, à un facteur constant près,

$$\mathfrak{S}_1(x, y, z; 2\pi) - \mathfrak{S}_1(x + \pi, y, z; 2\pi),$$

c'est-à-dire, d'après le développement que nous avons trouvé,

$$\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}[1-(-1)^\nu]f\left(\tfrac{1}{2}\nu\sqrt{y^2+z^2}\right)\cos\nu x$$

ou, plus simplement,

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}f\left[\left(\tfrac{1}{2}2n+1\right)\sqrt{y^2+z^2}\right]\cos(2n+1)x.$$

**5.** Voici maintenant un développement analogue au précédent, relatif à une fonction qui admet deux groupes de périodes.

Désignons par $a$ et $b$ deux quantités positives, par $m$ et $n$ deux nombres entiers, et faisons

$$r_{m,n}=\sqrt{(x-ma)^2+(y-nb)^2+z^2},$$
$$\rho_{m,n}=\sqrt{m^2a^2+n^2b^2}.$$

La fonction dont il s'agit est définie par la série

$$(15)\quad \mathfrak{S}_2(x,y,z;a,b)=\frac{1}{r_{0,0}}+\sum{}'\left(\frac{1}{r_{m,n}}-\frac{1}{\rho_{m,n}}-\frac{amx+bny}{\rho^3_{m,n}}\right),$$

la somme $\sum{}'$ étant étendue à toutes les valeurs entières, positives, négatives et nulles de $m$ et $n$, la combinaison $m=n=0$ étant seule exceptée. Cette fonction $\mathfrak{S}_2$ vérifie l'équation $\Delta\mathfrak{S}_2=0$; elle a pour pôles de résidus $+1$ tous les points de coordonnées

$$x=ma,\qquad y=nb,\qquad z=0,$$

$m$ et $n$ prenant toutes les valeurs entières, positives, négatives et nulles; elle est régulière en tous les autres points de l'espace situés à distance finie. La fonction $\mathfrak{S}_2$ ne change pas quand on ajoute $a$ à $x$ ou $b$ à $y$ : en d'autres termes, on a

$$\mathfrak{S}_2(x+a,y,z)=\mathfrak{S}_2(x,y+b,z)=\mathfrak{S}_2(x,y,z);$$

c'est ce que l'on vérifie immédiatement sur la série (15) en formant la différence

$$\mathfrak{S}_2(x+a, y, z) - \mathfrak{S}_2(x, y, z),$$

et groupant ensemble les termes qui correspondent à des valeurs de $m$ égales et de signes contraires : on reconnaît alors que cette différence est nulle. Enfin la fonction $\mathfrak{S}_2$ est paire par rapport à chacune des variables $x, y$ et $z$.

Cette fonction se présente dans différentes questions de Physique, notamment dans la détermination du potentiel en un point d'une masse fluide indéfinie, ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle, traversée par un flux d'électricité ([1]), ou dans l'évaluation des vitesses aux différents points d'un liquide qui s'écoule par le fond d'un vase prismatique à base rectangle ([2]), enfin dans la détermination de la fonction de Green pour un prisme droit indéfini à base rectangle.

Dans tout l'espace situé d'un même côté du plan des coordonnées $xy$, par exemple pour toutes les valeurs positives de $z$, cette fonction et toutes ses dérivées sont développables en séries trigonométriques procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi x}{a}$ et $\frac{2\pi y}{b}$. En particulier, pour toutes les valeurs de $z$ plus grandes que zéro, la fonction $\mathfrak{S}_2(x, y, z; a, b)$ est développable en une double série de la forme

$$(16) \qquad \mathfrak{S}_2 = \sum_{\mu=0,\, \nu=0}^{\mu=\infty,\, \nu=\infty} A_{\mu,\nu} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

ne contenant que des cosinus, puisque la fonction $\mathfrak{S}_2$ est *paire* par rapport à chacune des variables $x$ et $y$. La connaissance de ce développement est importante pour le calcul numérique de la fonction $\mathfrak{S}_2$.

Les coefficients $A_{\mu,\nu}$ sont des fonctions de $z$; en procédant comme précédemment pour la fonction $\mathfrak{S}_1$, nous calculerons d'abord les dérivées $\frac{dA_{\mu,\nu}}{dz}$ de ces coefficients par rapport à $z$.

---

(1) *Voir* une Note présentée par MM. Chervet et Appell (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCVIII, p. 359.

(2) *Voir* différentes Notes de M. Boussinesq (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances des 3 et 31 janvier, 30 mai 1870.

D'après les développements ci-dessus (15) et (16), on a, en différentiant par rapport à $z$,

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Theta_2}{\partial z} = -\dfrac{z}{r_{0,0}^3} - {\sum}' \dfrac{z}{r_{m,n}^3} = -z \displaystyle\sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} \frac{1}{r_{m,n}^3}, \\ \dfrac{\partial \Theta_2}{\partial z} = \displaystyle\sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} \frac{dA_{\mu,\nu}}{dz} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b}. \end{cases}$$

Voici comment on peut calculer les coefficients $\frac{dA_{\mu,\nu}}{dz}$ de ce dernier développement.

D'après l'équation de la page 10,

$$\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{t}\, e^{-Nt}\, dt,$$

dans laquelle on fait

$$N = r_{m,n}^2 = (x - ma)^2 + (y - nb)^2 + z^2,$$

on a

$$\frac{1}{r_{m,n}^3} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{t}\, dt . e^{-t[(x-ma)^2 + (y-nb)^2 + z^2]};$$

donc

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial z} = -\frac{2z}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{t}\, dt . e^{-t(x^2+y^2+z^2)} \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} e^{-t(m^2a^2 - 2max + n^2b^2 - 2nby)}.$$

Or, en suivant les mêmes notations que plus haut, on a

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{-t(m^2a^2 - 2max)} = \theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-t(n^2b^2 - 2nby)} = \theta_3\left(y, \frac{\pi i}{bt}, -b\right),$$

et, par suite,

$$(18)\quad \frac{\partial \Theta_2}{\partial z} = -\frac{2z}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{t}\, dt . e^{-t(x^2+y^2+z^2)} \theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right) \theta_3\left(y, \frac{\pi i}{bt}, -b\right).$$

D'autre part, d'après la transformation des fonctions $\theta_3$ en fonctions $\vartheta_3$, rappelée précédemment (p. 11), on a

$$e^{-tx^2}\theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\left(1 + 2\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} e^{-\frac{\pi^2\mu^2}{a^2 t}} \cos\frac{2\mu\pi x}{a}\right),$$

$$e^{-ty^2}\theta_3\left(y, \frac{\pi i}{bt}, -b\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{b\sqrt{t}}\left(1 + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{b^2 t}} \cos\frac{2\nu\pi y}{b}\right),$$

et, en multipliant membre à membre, on peut écrire

$$e^{-t(x^2+y^2)}\theta_3\left(x, \frac{\pi i}{at}, -a\right)\theta_3\left(y, \frac{\pi i}{bt}, -b\right)$$
$$= \frac{\pi}{abt}\sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} 4 e^{-\frac{\pi^2}{t}\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}\right)} \cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

*avec cette convention* que le coefficient 4 du terme général doit être remplacé par 2 quand l'un des entiers $\mu$ ou $\nu$ est nul, et par 1 quand les deux entiers $\mu$ et $\nu$ sont nuls. En substituant dans l'expression (18) de $\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial z}$, on trouve pour $\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial z}$ un développement de la forme cherchée

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} \frac{dA_{\mu,\nu}}{dz}\cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

dans lequel des coefficients ont pour valeurs

$$(19) \qquad \frac{dA_{\mu,\nu}}{dz} = -\frac{8z\sqrt{\pi}}{ab}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\, e^{-tz^2-\frac{\pi^2}{t}\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}\right)},$$

où le facteur 8 doit être remplacé par 4, lorsque l'un des entiers $\mu$, $\nu$ est nul, et par 2 quand ces entiers sont nuls tous deux.

L'intégrale définie à laquelle on est ainsi conduit est connue : elle a été donnée par Legendre dans ses *Exercices de Calcul intégral*, t. I$^{\text{er}}$, § IX. Legendre démontre, en effet, que l'on a

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}dx\, e^{-\frac{1+x^2}{2nx}} = \sqrt{2n\pi}\, e^{-\frac{1}{n}}.$$

Or, l'intégrale qui figure dans l'équation (19) est de la forme

$$\psi(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-\alpha^2 t - \frac{\beta^2}{t}};$$

en y faisant

$$t = \frac{\beta}{\alpha} x,$$

on obtient

$$\psi(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} dx\, e^{\frac{-\alpha\beta(x^2+1)}{x}},$$

ce qui est l'intégrale de Legendre, dans laquelle $n = \frac{1}{2\alpha\beta}$; on a donc

$$\psi(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\beta}} e^{-2\alpha\beta} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-2\alpha\beta}.$$

Donc enfin, en faisant $\alpha = z$, $\beta = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}$,

$$(20) \qquad \frac{dA_{\mu,\nu}}{dz} = -\frac{8z\sqrt{\pi}}{ab}\psi\left(z, \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}\right) = -\frac{8\pi}{ab} e^{-2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}.$$

Tels sont les coefficients du développement de $\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{dz}$. Pour avoir les coefficients $A_{\mu,\nu}$ du développement de $\mathfrak{S}_2$, il faut intégrer les expressions (20) que nous venons de trouver.

Tout d'abord, en supposant $\mu = \nu = 0$ et se souvenant que le facteur 8 doit alors être remplacé par 2, on a

$$\frac{dA_{0,0}}{dz} = -\frac{2\pi}{ab},$$

d'où

$$A_{0,0} = -\frac{2\pi z}{ab} + B_{0,0},$$

$B_{0,0}$ étant une constante indépendante de $x$, $y$, $z$. Puis, en supposant l'un au moins des entiers $\mu$ et $\nu$ différent de zéro, on a

$$(21) \qquad A_{\mu,\nu} = \frac{4}{ab\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}} e^{-2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}} + B_{\mu,\nu},$$

où le facteur 4 doit être réduit à 2 quand l'un des entiers $\mu$ ou $\nu$ est nul, et où $B_{\mu,\nu}$ désigne une constante. Il est facile de voir que toutes les constantes $B_{\mu,\nu}$, à l'exception de $B_{0,0}$ sont *nulles*. En effet, si l'on exprime que la fonction

$$\mathcal{E}_2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} A_{\mu,\nu} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b}$$

vérifie l'équation $\Delta\mathcal{E}_2 = \frac{\partial^2\mathcal{E}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathcal{E}_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathcal{E}_2}{\partial z^2} = 0$, il vient

$$\frac{d^2 A_{\mu,\nu}}{dz^2} - 4\pi^2\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}\right) A_{\mu,\nu} = 0;$$

si l'on substitue dans cette équation la valeur (21) de $A_{\mu,\nu}$, dans laquelle $B_{\mu,\nu}$ est une constante indépendante de $z$, on trouve immédiatement

$$\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}\right) B_{\mu,\nu} = 0,$$

ce qui donne $B_{\mu,\nu} = 0$ tant que $\mu$ et $\nu$ ne sont pas nuls tous deux.

En résumé, on a, pour la fonction $\mathcal{E}_2(x, y, z; a, b)$, le développement suivant

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{E}_2(x, y\, z; a, b) = & -\frac{2\pi z}{ab} + B_{0,0} \\ & + \sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty}{}' \frac{4e^{-2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}}{ab\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b}, \end{aligned}\right.$$

où, dans la somme $\sum'$, il faut laisser de côté la combinaison $\mu = \nu = 0$, et où le facteur 4 doit être remplacé par 2 quand l'un des entiers $\mu$ ou $\nu$ est nul. Il ne restera plus qu'à déterminer la constante $B_{0,0}$, qui dépend de $a$ et $b$.

On pourra déterminer cette constante en attribuant à $x, y, z$ des valeurs particulières : par exemple, si l'on fait $x = y = 0$, on a

$$B_{0,0} = \mathcal{E}_2(0, 0, z; a, b) + \frac{2\pi z}{ab} - \sum{}' \frac{4e^{-2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}}{ab\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}},$$

formule dans laquelle $z$ a une valeur positive quelconque.

D'après une Note *Sur la distribution du potentiel dans l'intérieur d'une masse liquide ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle,* que nous avons présentée à l'Académie des Sciences, M. Chervet et moi ([1]), ce potentiel s'exprime par la formule

$$\frac{V}{V_0} = \mathfrak{S}_2(x, y, z; a, b) - \mathfrak{S}_2\left(x, y + \frac{b}{2}, z; a, b\right),$$

car la fonction appelée dans la Note $\varphi(x, y, z)$ est $\mathfrak{S}_2(x, y, z; a, b)$. On a donc, en vertu du développement (22) que nous venons de trouver,

$$\frac{V}{V_0} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty}{}' \frac{4}{ab} \frac{e^{-2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}} [1 - (-1)^\nu] \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b}$$

ou, plus simplement,

$$\frac{V}{V_0} = \sum_{\mu,\rho} \frac{8}{ab} \frac{e^{-2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\rho^2}{b^2}}}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\rho^2}{b^2}}} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\rho\pi y}{b},$$

l'entier $\mu$ prenant toutes les valeurs de $0$ à $+\infty$, et l'entier $\rho$ toutes les valeurs *impaires* de $1$ à $+\infty$; le coefficient $8$ du terme général devra être remplacé par $4$ dans tous les termes dans lesquels $\mu = 0$.

Il est intéressant de rapprocher le développement (22) de la fonction $\mathfrak{S}_2$ du développement en série trigonométrique de la fonction de deux variables réelles $x$ et $y$

$$w = \log \sin\frac{x+yi}{2} \sin\frac{x-yi}{2},$$

qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Comme

$$\sin\frac{x+yi}{2} \sin\frac{x-yi}{2} = \frac{e^{\frac{xi-y}{2}} - e^{\frac{-xi+y}{2}}}{2i} \cdot \frac{e^{\frac{xi+y}{2}} - e^{\frac{-xi-y}{2}}}{2i}$$

$$= \frac{e^y}{4}(1 - e^{xi-y})(1 - e^{-xi-y}),$$

([1]) Séance du 11 février 1884.

on a

$$w = y - 2\log 2 + \log(1 - e^{xi-y}) + \log(1 - e^{-xi-y});$$

d'où, pour toutes les valeurs positives de $y$,

$$w = y - 2\log 2 - 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{e^{-\nu y}}{\nu} \cos \nu x;$$

nous obtenons ainsi un développement dont l'analogie avec la série (22) s'aperçoit immédiatement.

4. On peut obtenir le développement de la fonction $\mathfrak{S}_2$ par une autre méthode qui nous fournira une vérification des résultats précédents.

Donnons à $z$ une valeur positive $c$ : alors la fonction $\mathfrak{S}_2$ et sa dérivée $\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial c}$ seront développables en séries trigonométriques

$$\mathfrak{S}_2(x, y, c;\ a, b) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} \mathrm{A}_{\mu,\nu} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_2(x, y, c;\ a, b)}{\partial c} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} \frac{d\mathrm{A}_{\mu,\nu}}{dc} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

et l'on aura

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}_{\mu,\nu} &= \frac{4}{ab}\int_{x_0}^{x_0+a} dx \int_{y_0}^{y_0+b} \mathfrak{S}_2(x, y, c) \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b}\, dy, \\ \frac{d\mathrm{A}_{\mu,\nu}}{dc} &= \frac{4}{ab}\int_{x_0}^{x_0+a} dx \int_{y_0}^{y_0+b} \frac{\partial \mathfrak{S}_2(x, y, c)}{\partial c} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b}\, dy, \end{aligned} \right.$$

où le facteur 4 doit être remplacé par 2 si $\mu$ ou $\nu$ est nul, et par 1 si $\mu$ et $\nu$ sont nuls.

Pour calculer ces intégrales, nous emploierons une méthode analogue à celle de M. Hermite pour le calcul des coefficients du développement d'une fonction doublement périodique en série trigonométrique.

Considérons le parallélépipède rectangle P dont les faces ont pour équations

$$x = \pm\frac{a}{2}, \qquad y = \pm\frac{b}{2}, \qquad z = \pm c,$$

$c$ étant une constante positive quelconque. Dans l'intérieur de ce parallélépipède, la fonction $\mathfrak{S}_2(x, y, z)$ a un seul point singulier, à savoir l'origine qui est un pôle simple de résidu $+1$; en d'autres termes, la différence

$$U = \mathfrak{S}_2(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

est régulière en tous les points du parallélépipède P. D'autre part, la fonction

$$\psi(x, y, z) = e^{2\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}} \cos\frac{2\mu\pi x}{a} \cos\frac{2\nu\pi y}{b}$$

vérifie l'équation $\Delta\psi = 0$ et est régulière en tous les points à distance finie. Les deux fonctions $\mathfrak{S}_2(x, y, z)$ et $\psi(x, y, z)$ admettant les groupes de périodes $(a, 0, 0)$, et $(0, b, 0)$ reprennent les mêmes valeurs aux points correspondants des faces $x = \pm\frac{a}{2}$, $y = \pm\frac{b}{2}$, que nous appellerons les faces latérales du parallélépipède P; il en est de même de leurs dérivées partielles. On peut remarquer que les dérivées partielles

$$\frac{\partial\mathfrak{S}_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\mathfrak{S}_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

s'annulent, les deux premières sur les faces latérales $x = \pm\frac{a}{2}$ et les deux dernières sur les faces $y = \pm\frac{b}{2}$. Cela résulte immédiatement de ce que l'équation

$$\frac{\partial\mathfrak{S}_2(x+a, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial\mathfrak{S}_2(x, y, z)}{\partial x},$$

dans laquelle on fait $x = -\frac{a}{2}$, donne

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{S}_2}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = \left(\frac{\partial\mathfrak{S}_2}{\partial x}\right)_{\left(x=-\frac{a}{2}\right)};$$

d'un autre côté, la fonction $\mathfrak{S}_2(x, y, z)$ étant paire en $x$, sa dérivée

$\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial x}$ est impaire et l'on a aussi

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial x}\right)_{x=-\frac{a}{2}};$$

donc, en ajoutant et retranchant,

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial x}\right)_{x=-\frac{a}{2}} = 0.$$

Il en serait de même de $\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial y}$ sur les faces $y = \pm \frac{b}{2}$. Pour ce qui est des dérivées $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, la proposition est évidente.

Enfin, la fonction $\mathfrak{S}_2$ étant paire en $z$, on a

$$\mathfrak{S}_2(x, y, -c) = \mathfrak{S}_2(x, y, c), \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial z}\right)_{z=-c} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial z}\right)_{z=c}.$$

Cela posé, décrivons autour de l'origine comme centre une sphère $s$ de rayon $r$ assez petit pour que la sphère soit comprise dans l'intérieur du parallélépipède P. Dans l'espace E compris entre la surface de cette sphère $s$ et la surface du parallélépipède P, les deux fonctions $\mathfrak{S}_2$ et $\psi$ sont régulières; on a donc, en appliquant le théorème de Green à cet espace,

$$\int\int\left(\mathfrak{S}_2 \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial n}\right) d\sigma = \int\int\int(\mathfrak{S}_2 \Delta\psi - \psi \Delta \mathfrak{S}_2)\, dx\, dy\, dz = 0,$$

l'intégrale double étant étendue à la surface qui limite l'espace E et l'intégrale triple à l'espace E lui-même; cette intégrale triple est évidemment *nulle*. L'intégrale double peut être partagée en deux parties : l'une relative à la surface du parallélépipède P, l'autre à celle de la sphère $s$; on aura donc

$$(24) \qquad \int\int_{\mathrm{P}}\left(\mathfrak{S}_2 \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial n}\right) d\sigma + \int\int_{s}\left(\mathfrak{S}_2 \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial n}\right) d\sigma = 0,$$

les dérivées $\frac{\partial \psi}{\partial n}$, $\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial n}$ étant prises suivant la normale vers l'extérieur de l'espace E, c'est-à-dire pour la première intégrale vers l'extérieur du parallélépipède et pour la seconde vers l'intérieur de la sphère $s$. Cette seconde intégrale

$$(25) \qquad \int\int_s \left(\mathfrak{S}_2 \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\mathfrak{S}_2}{\partial n}\right) d\sigma$$

est égale à $-4\pi$. En effet, comme la normale à la sphère est le rayon $r$, on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad \frac{\partial\mathfrak{S}_2}{\partial n} = -\frac{\partial\mathfrak{S}_2}{\partial r};$$

dans l'intérieur et sur la surface de la sphère $s$, on peut écrire

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{1}{r} + \mathrm{U},$$

U étant une fonction régulière : alors l'intégrale (25) devient

$$-\int\int_s \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\psi\right) d\sigma - \int\int_s \left(\mathrm{U}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial r}\right) d\sigma;$$

la seconde intégrale est nulle, car les fonctions U et $\psi$ sont régulières dans l'intérieur de la sphère $s$; quant à la première, comme l'élément superficiel de la sphère $s$ est $d\sigma = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, elle s'écrit

$$-\int\int \left[r\frac{\partial\psi}{\partial r} + \psi(x, y, z)\right] \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

et, en supposant que $r$ tende vers zéro,

$$-\int\int \psi(0, 0, 0) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

c'est-à-dire $-4\pi$; car $\psi(0, 0, 0) = 1$.

L'intégrale (25) étant égale à $-4\pi$, la relation (24) s'écrit

$$(26) \qquad \int\int_{\mathrm{P}} \left(\mathfrak{S}_2 \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\mathfrak{S}_2}{\partial n}\right) d\sigma = 4\pi,$$

l'intégrale étant étendue à la surface du parallélépipède P et les dérivées $\frac{\partial\psi}{\partial n}$, $\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial n}$ étant prises normalement aux faces vers l'extérieur. Les parties de cette intégrale relatives aux faces latérales sont *nulles*. En effet, sur la face $x = \frac{a}{2}$, par exemple, on a

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial n} = \frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

et nous avons vu que les dérivées $\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{dx}$ s'annulent pour $x = \pm\frac{a}{2}$. Donc sur les faces latérales tous les éléments de l'intégrale (26) sont nuls, et il ne reste plus qu'à évaluer les parties de cette intégrale relatives aux faces supérieure et inférieure du parallélépipède $z = \pm c$. Sur la face supérieure on a

$$\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2(x, y, c),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial n} = \frac{\partial \mathfrak{S}_2(x, y, c)}{\partial c},$$

$$\psi = e^{2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}} \cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial c} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}\, e^{2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}} \cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

$$d\sigma = dx\,dy;$$

d'après les valeurs (23) des coefficients $A_{\mu,\nu}$ et $\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}$, la valeur de l'intégrale (26) étendue à la face supérieure $z = c$ est donc

$$\frac{ab}{4}\left(2\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}\, A_{\mu,\nu} - \frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}\right) e^{2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}.$$

De même, sur la face inférieure $z = -c$, on a

$$\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2(x, y, -c) = \mathfrak{S}_2(x, y, c),$$

$$\psi = e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}} \cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial n} = \frac{\partial \mathfrak{S}_2(x, y, -c)}{\partial c} = \frac{\partial \mathfrak{S}_2(x, y, c)}{\partial c},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial c} = -2\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}\, e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}} \cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b},$$

car, actuellement, $dn = -dz = dc$; de plus

$$d\sigma = dx\,dy.$$

La valeur de l'intégrale (26) étendue à la face inférieure est donc

$$\frac{ab}{4}\left(-2\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}\,A_{\mu,\nu}-\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}\right)e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}.$$

Donc, enfin, l'équation (26) s'écrit

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}&2\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}\left(e^{2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}-e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}\right)A_{\mu,\nu}\\&\qquad-\left(e^{2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}+e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}\right)\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}=\frac{16\pi}{ab}.\end{aligned}\right.$$

On a ainsi une équation différentielle linéaire du premier ordre définissant $A_{\mu,\nu}$ comme fonction de $c$. En intégrant cette équation, on trouve immédiatement, dans la supposition que $\mu$ et $\nu$ ne sont pas nuls tous deux,

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}A_{\mu,\nu}=&\frac{4}{ab\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}\\&+C_{\mu,\nu}\left(e^{2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}+e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}\right),\end{aligned}\right.$$

$C_{\mu,\nu}$ désignant une constante d'intégration indépendante de $c$. Il est aisé de voir que cette constante $C_{\mu,\nu}$ est nulle, en s'appuyant sur ce que la valeur de $\frac{1}{c}\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}$ reste finie quand $c$ augmente indéfiniment. En effet, on a

$$\frac{1}{c}\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}=\frac{4}{ab}\int_{x_0}^{x_0+a}dx\int_{y_0}^{y_0+b}\frac{1}{c}\frac{\partial\Theta_2(x,y,c)}{\partial c}\cos\frac{2\mu\pi x}{a}\cos\frac{2\nu\pi y}{b}\,dy;$$

comme

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Theta_2}{\partial c}=-\sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty}\frac{1}{[(x-ma)^2+(y-nb)^2+c^2]^{\frac{3}{2}}},$$

la valeur absolue de $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial c}$ va en diminuant quand $c$ augmente; la quantité $\frac{1}{c}\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}$ reste donc finie quand $c$ augmente indéfiniment. Or il n'en serait pas ainsi si, dans la valeur (28) de $A_{\mu,\nu}$, la constante $C_{\mu,\nu}$ n'était pas nulle. On a donc

$$A_{\mu,\nu} = \frac{4e^{-2\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}}}{ab\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}}},$$

expression identique à celle que nous avons trouvée précédemment, puisque $z = c$. Pour ce qui est de $A_{0,0}$, l'équation (27), dans laquelle on fait $\mu = \nu = 0$ et dans laquelle, d'après des conventions antérieures, on réduit le second membre au quart de sa valeur, nous donne

$$\frac{dA_{0,0}}{dc} = -\frac{2\pi}{ab};$$

d'où

$$A_{0,0} = -\frac{2\pi c}{ab} + B_{0,0},$$

expression identique à l'expression déjà trouvée.

5 Les fonctions $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ dont nous venons de former les développements en série trigonométrique possèdent un ou deux groupes de périodes. Nous allons maintenant nous occuper des développements en série trigonométrique des fonctions uniformes satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ et admettant trois groupes de périodes, c'est-à-dire le nombre maximum de groupes de périodes que puisse posséder une fonction uniforme de trois variables réelles. J'ai démontré (*Acta mathematica*, t. IV, p. 347 et suiv.) que celles de ces fonctions qui n'ont que des pôles peuvent s'exprimer linéairement à l'aide d'une fonction $Z(x, y, z)$ et de ses dérivées, par une formule analogue à celle de M. Hermite pour la décomposition des fonctions doublement périodiques en éléments simples.

Les fonctions de $x, y, z$ qui admettent trois groupes de périodes reprennent les mêmes valeurs aux points homologues d'un réseau de parallélépipèdes; en me plaçant dans le cas le plus simple, je supposerai ici ces parallélépipèdes *rectangles*. Alors, en prenant des axes de coordonnées parallèles aux arêtes de ces parallélépipèdes et appelant $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ les dimensions des parallélépipèdes, on aura, pour les coordonnées des sommets du réseau,

$$x = 2m\alpha, \qquad y = 2n\beta, \qquad z = 2p\gamma,$$

$m$, $n$ et $p$ désignant des entiers qui prennent toutes les valeurs positives, négatives et nulles.

Voici quel est l'élément simple à l'aide duquel on peut exprimer toutes les fonctions F qui satisfont à l'équation $\Delta F = 0$, qui n'ont d'autres singularités que des pôles et qui reprennent les mêmes valeurs aux points homologues de ce réseau de parallélépipèdes. Faisons

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \rho = \sqrt{4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2 + 4p^2\gamma^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{2m\alpha x + 2n\beta y + 2p\gamma z}{r\rho},$$

$$R = \sqrt{(x - 2m\alpha)^2 + (y - 2n\beta)^2 + (z - 2p\gamma)^2} = \sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2};$$

l'élément simple est défini par la série suivante

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & Z(x, y, z;\, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma) \\ & \quad = \frac{1}{r} + \sum{}' \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r}{\rho^2} P_1(\cos\varphi) - \frac{r^2}{\rho^3} P_2(\cos\varphi) \right], \end{aligned} \right.$$

où le signe $\Sigma'$ indique une sommation étendue à toutes les valeurs entières, positives, négatives et nulles de $m$, $n$, $p$, la combinaison $m = n = p = 0$ étant seule exceptée, et où $P_1(\cos\varphi)$, $P_2(\cos\varphi)$ sont les deux premiers polynômes de Legendre

$$P_1(\cos\varphi) = \cos\varphi, \qquad P_2(\cos\varphi) = \tfrac{3}{2}(\cos^2\varphi - \tfrac{1}{3}).$$

Cette fonction particulière (29), relative au cas où les parallélépipèdes élémentaires sont *rectangles*, s'obtient en faisant, dans les formules générales établies dans le tome IV des *Acta mathematica*,

$$a = 2\alpha, \qquad b' = 2\beta, \qquad c'' = 2\gamma,$$

$$b = c = a' = c' = a'' = b'' = 0;$$

les simplifications qui se présentent alors dans les formules générales ont été indiquées dans un Mémoire paru récemment dans les *Acta mathematica* (t. VIII, Cahier III, p. 271).

La fonction Z définie par la série (29) vérifie l'équation $\Delta Z = 0$; elle a pour pôles de résidus $+1$ tous les points de coordonnées

$$x = 2m\alpha, \qquad y = 2n\beta, \qquad z = 2p\gamma,$$

$m$, $n$ et $p$ prenant toutes les valeurs entières, positives, négatives et nulles; elle est régulière en tous les autres points de l'espace situés à distance finie. Cette fonction est paire par rapport à chacune des variables $x, y, z$; elle vérifie les relations suivantes :

$$(30)\qquad \begin{cases} Z(x+2\alpha, y, z) = Z(x, y, z) + Ax + E, \\ Z(x, y+2\beta, z) = Z(x, y, z) + B'y + E', \\ Z(x, y, z+2\gamma) = Z(x, y, z) + C''z + E''. \end{cases}$$

où A, B', C'', E, E', E'' sont des constantes ayant pour valeurs

$$A = 2Z'_x(\alpha, 0, 0), \qquad B' = 2Z'_y(0, \beta, 0), \qquad C'' = 2Z'_z(0, 0, \gamma),$$
$$E = A\alpha, \qquad E' = B'\beta, \qquad E'' = C''\gamma,$$

comme on le voit, en faisant dans les équations (30) et celles qu'on en déduit par la différentiation $x = -\alpha$, $y = 0$, $z = 0$ ou $x = 0$, $y = -\beta$, $z = 0$, ou enfin $x = 0, y = 0, z = -\gamma$ (voir *Acta mathematica*, t. VIII, Cahier III). Cette fonction $Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$ se présente dans différentes questions de Physique mathématique, notamment dans la détermination de la fonction de Green pour un parallélépipède rectangle (*Acta mathematica, loc. cit.*). La fonction $Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$ n'est, d'après les relations (30), périodique par rapport à aucune des variables $x$, $y$, $z$; mais il est facile de la modifier légèrement, de façon qu'elle devienne périodique par rapport à deux des variables, $x$ et $y$ par exemple, sans cesser de vérifier l'équation $\Delta F = 0$. Après cette modification, on aura une fonction développable en série trigonométrique; il est important de déterminer les coefficients de ce développement pour le calcul numérique de la fonction. C'est ce que nous allons faire, en suivant une méthode analogue à la seconde méthode que nous venons d'employer pour le développement de la fonction $\mathfrak{S}_2$.

**6.** Désignons par $\Psi(x,y,z)$ la fonction

$$(31)\quad \Psi(x,y,z)=Z(x,y,z;\,2\alpha,2\beta,2\gamma)-\frac{Ax^2}{4\alpha}-\frac{B'y^2}{4\beta}+\left(\frac{A}{4\alpha}+\frac{B'}{4\beta}\right)z^2,$$

les constantes A et B′ étant celles qui figurent dans les relations fondamentales (30) relatives à la fonction Z. Cette fonction $\Psi$, ne différant de Z que par un polynôme qui satisfait à l'équation $\Delta F = 0$, satisfait à cette même équation et possède les mêmes pôles que Z avec les mêmes résidus. Les relations fondamentales (30) montrent immédiatement que l'on a

$$(32)\quad \begin{cases} \Psi(x+2\alpha,y,z)=\Psi(x,y,z), \\ \Psi(x,y+2\beta,z)=\Psi(x,y,z), \\ \Psi(x,y,z+2\gamma)=\Psi(x,y,z)+\gamma\left(\dfrac{A}{\alpha}+\dfrac{B'}{\beta}+\dfrac{C''}{\gamma}\right)(z+\gamma) \\ \qquad\qquad\qquad\quad =\Psi(x,y,z)-\dfrac{\pi}{\alpha\beta}(z+\gamma). \end{cases}$$

En effet, la différence $\Psi(x+2\alpha,y,z)-\Psi(x,y,z)$ est

$$Z(x+2\alpha,y,z)-Z(x,y,z)-\frac{A}{4\alpha}[(x+2\alpha)^2-x^2],$$

c'est-à-dire zéro, puisque la différence $Z(x+2\alpha,y,z)-Z(x,y,z)$ est égale à $Ax+E$ ou $A(x+\alpha)$, d'après la valeur de E qui est égale à $A\alpha$. On démontre de même la seconde des relations (32). Quant à la troisième, elle résulte de ce que la différence

$$\Psi(x,y,z+2\gamma)-\Psi(x,y,z)$$

est égale à

$$C''(z+\gamma)+\left(\frac{A}{4\alpha}+\frac{B'}{4\beta}\right)[(z+2\gamma)^2-z^2]$$

ou, en réduisant, à

$$(33)\quad \gamma\left(\frac{A}{\alpha}+\frac{B'}{\beta}+\frac{C''}{\gamma}\right)(z+\gamma).$$

Cette expression peut être simplifiée à l'aide d'une formule générale établie à la page 359 de mon Mémoire du tome IV des *Acta mathematica*. Cette formule appliquée au cas actuel, dans lequel les quantités qui figurent dans la formule générale en question ont les valeurs particulières suivantes

$$\mu = \nu = \lambda' = \nu' = \lambda'' = \mu'' = 0, \qquad \lambda = \mu' = \nu'' = 1,$$

$$\theta = \theta' = \theta'' = \frac{\pi}{2}, \qquad l = 2\alpha, \qquad l' = 2\beta, \qquad l'' = 2\gamma,$$

nous donne

$$A\beta\gamma + B'\gamma\alpha + C''\alpha\beta = -\pi,$$

d'où

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B'}{\beta} + \frac{C''}{\gamma} = -\frac{\pi}{\alpha\beta\gamma};$$

la quantité (33) est donc égale à $-\frac{\pi}{\alpha\beta}(z+\gamma)$.

Sans avoir recours à cette formule générale, on pourrait, en écrivant la troisième des relations (32) sous la forme

$$(34) \qquad \Psi(x, y, z + 2\gamma) - \Psi(x, y, z) = Gz + H,$$

G et H désignant des constantes, montrer que l'on a

$$H = G\gamma, \qquad G = -\frac{\pi}{\alpha\beta}.$$

Il suffirait de remarquer que, la fonction Z étant paire par rapport à chacune des variables $x$, $y$, $z$, la fonction $\Psi$ l'est également; faisant alors dans la relation précédente $z = -\gamma$, on trouve zéro pour le premier membre, d'où $G\gamma - H = 0$. La constante H étant ainsi déterminée, on aura G en remarquant que l'intégrale double

$$\iint \frac{\partial\Psi}{\partial n} d\sigma,$$

étendue à la surface du parallélépipède formé par les six plans

$$x = \pm\alpha, \qquad y = \pm\beta, \qquad z = \pm\gamma,$$

est égale à $-4\pi$, car la fonction $\Psi$ a dans ce parallélépipède un seul pôle de résidu $+1$; d'autre part, en vertu des deux premières relations (32) et de la relation (34), cette intégrale a pour valeur $4G\alpha\beta$; on a donc

$$G = -\frac{\pi}{\alpha\beta}.$$

On peut remarquer, pour simplifier certains calculs ultérieurs, que la dérivée partielle $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ s'annule pour $x = \pm\alpha$ et $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$ pour $y = \pm\beta$. En effet, la première des relations (32) différentiée par rapport à $x$ donne, pour $x = -\alpha$,

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{x=-\alpha};$$

mais, comme la fonction $\Psi$ est paire en $x$, la dérivée $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ est impaire, et l'on a

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{x=\alpha} = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{x=-\alpha}.$$

Les valeurs de ces deux dérivées sont donc *nulles*.

**7.** D'après les relations (32), la fonction $\Psi(x, y, z)$ admet par rapport à $x$ la période $2\alpha$ et par rapport à $y$ la période $2\beta$; comme entre les deux plans

$$z = 2p\gamma, \qquad z = 2(p+1)\gamma \qquad (p \text{ entier}),$$

cette fonction est régulière, elle est, dans l'espace compris entre ces deux plans, développable en une série trigonométrique procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{\pi x}{\alpha}$, $\frac{\pi y}{\beta}$; il en est de même de toutes ses dérivées.

En particulier, si l'on donne à $z$ une valeur positive $c$ comprise entre $0$ et $2\gamma$, la fonction $\Psi(x, y, c)$ est développable en une série de la forme

$$\Psi(x, y, c) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} A_{\mu,\nu} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta}$$

ne contenant que des cosinus, car la fonction $\Psi$ est paire en $x$ et en $y$.

Les coefficients de ce développement sont des fonctions de $c$, et l'on a

$$\frac{\partial\Psi}{\partial c} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\mu,\nu=\infty} \frac{dA_{\mu,\nu}}{dc} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta}.$$

Les coefficients de ces deux développements sont donnés par les intégrales définies

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} A_{\mu,\nu} &= \frac{1}{\alpha\beta}\int_{x_0}^{x_0+2\alpha} dx \int_{y_0}^{y_0+2\beta} \Psi(x, y, c) \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta}\, dx\, dy, \\ \frac{dA_{\mu,\nu}}{dc} &= \frac{1}{\alpha\beta}\int_{x_0}^{x_0+2\alpha} dx \int_{y_0}^{y_0+2\beta} \frac{\partial\Psi(x, y, c)}{\partial c} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta}\, dx\, dy, \end{aligned} \right.$$

ces coefficients devant être réduits à leur moitié si l'un des entiers $\mu$ ou $\nu$ est nul, et à leur quart si $\mu$ et $\nu$ sont nuls.

Pour évaluer ces coefficients, considérons la fonction

$$\varphi(x, y, z) = e^{\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}}} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta};$$

cette fonction vérifie l'équation $\Delta\varphi = 0$ et est régulière en tous les points de l'espace situés à distance finie; elle a, par rapport à $x$, la période $2\alpha$, par rapport à $y$ la période $2\beta$; la dérivée partielle $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ s'annule pour $x = \pm\alpha$, et la dérivée $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ pour $x = \pm\beta$.

Soit P le parallélépipède formé par les six plans

$$x = \pm\alpha, \qquad y = \pm\beta, \qquad z = c, \qquad z = c - 2\gamma,$$

où $c$ est positif et moindre que $2\gamma$. Dans l'intérieur de ce parallélépipède, la fonction $\Psi(x, y, z)$ a un seul pôle, l'origine, qui est un pôle du premier degré de résidu $+1$. On en conclut, comme à la page 30, la relation

$$(36)\qquad \int\int_P \left(\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right) d\sigma = 4\pi,$$

l'intégrale double étant étendue à la surface du parallélépipède P et les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ et $\frac{\partial\Psi}{\partial n}$ étant prises normalement aux faces vers l'extérieur. Cette intégrale se partage en six parties relatives aux six faces du parallélépipède : les parties relatives aux faces latérales $x = \pm\alpha$, $y = \pm\beta$ sont nulles; car, sur la face $x = \alpha$, par exemple, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = \frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

et l'on a vu que ces dérivées partielles sont nulles pour $x = \alpha$; l'intégrale relative à la face $x = \alpha$ est donc nulle, puisque tous ses éléments sont nuls. Il ne reste plus qu'à évaluer les deux parties de l'intégrale (36) relatives l'une à la face supérieure $z = c$, l'autre à la face inférieure $z = c - 2\gamma$. On a, pour $z = c$,

$$\Psi = \Psi(x, y, c), \qquad \varphi = \varphi(x, y, c) = e^{\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}}}\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = \frac{\partial\Psi}{\partial c}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial c} = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}}\, e^{\pi c\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}}}\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

$$d\sigma = dx\, dy;$$

la partie de l'intégrale (36) relative à la face supérieure est donc, en faisant, pour abréger,

$$\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}} = (\mu, \nu),$$

$$e^{c(\mu,\nu)}\int_{-\alpha}^{+\alpha} dx\int_{-\beta}^{+\beta}\left[(\mu, \nu)\,\Psi(x, y, c) - \frac{\partial\Psi(x, y, c)}{\partial c}\right]\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta}\,dy,$$

c'est-à-dire, d'après les expressions (35) des coefficients $A_{\mu,\nu}$ et $\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}$,

$$\alpha\beta\, e^{c(\mu,\nu)}\left[(\mu, \nu)\,A_{\mu,\nu} - \frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}\right].$$

De même, sur la face inférieure $z = c - 2\gamma$, on a

$$\begin{aligned}\Psi(x, y, c - 2\gamma) &= \Psi(x, y, 2\gamma - c)\\ &= \Psi(x, y, -c) - \frac{\pi}{\alpha\beta}(-c + \gamma)\\ &= \Psi(x, y, c) + \frac{\pi}{\alpha\beta}(c - \gamma),\end{aligned}$$

et comme, pour cette face,

$$dn = -dz = -dc,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = -\frac{\partial\Psi(x, y, c-2\gamma)}{\partial c} = -\frac{\partial\Psi(x, y, c)}{\partial c} - \frac{\pi}{\alpha\beta};$$

puis

$$\varphi = \varphi(x, y, c-2\gamma) = e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi(x, y, c-2\gamma)}{\partial c} = -(\mu, \nu)\, e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta}$$

et

$$d\sigma = dx\, dy;$$

d'où

$$\begin{aligned}\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n} = &- e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)}\left[(\mu, \nu)\Psi(x, y, c) - \frac{\partial\Psi(x, y, c)}{\partial c}\right] \\ &\times \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta} - \frac{\pi}{\alpha\beta} e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)}[(\mu, \nu)(c-\gamma) - 1] \\ &\times \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta}.\end{aligned}$$

En multipliant par $dx\, dy$ et intégrant par rapport à $x$ et $y$ de $-\alpha$ à $+\alpha$ et de $-\beta$ à $+\beta$, on obtient la partie de l'intégrale (36) relative à la face inférieure du parallélépipède P. Supposons d'abord que les deux entiers $\mu$ et $\nu$ ne sont pas nuls tous deux; alors l'intégrale

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} dx \int_{-\beta}^{+\beta} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta}\, dy$$

est *nulle*, et, d'après les expressions (35) de $A_{\mu,\nu}$ et $\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}$, la partie de l'intégrale (36) relative à la face inférieure est

$$-\alpha\beta\, e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)}\left[(\mu, \nu)A_{\mu,\nu} - \frac{dA_{\mu,\nu}}{dc}\right].$$

L'intégrale

$$\iint_{P}\left(\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)d\sigma$$

étant la somme des deux expressions que nous venons de trouver pour les faces supérieure et inférieure, et étant d'ailleurs égale à $4\pi$, on a l'équation

$$\alpha\beta(\mu,\nu)\left[e^{c(\mu,\nu)} - e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)}\right]A_{\mu,\nu} - \alpha\beta\left[e^{c(\mu,\nu)} - e^{(c-2\gamma)(\mu,\nu)}\right]\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc} = 4\pi$$

ou bien

$$(\mu,\nu)A_{\mu,\nu} - \frac{dA_{\mu,\nu}}{dc} = \frac{4\pi}{\alpha\beta}\,\frac{e^{(\gamma-c)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}}.$$

Cette équation a été obtenue par la considération de l'intégrale

$$\int\!\!\int_{P}\left(\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)d\sigma,$$

où

$$\varphi = e^{\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}}}\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta} = e^{z(\mu,\nu)}\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta}.$$

Si l'on prenait

$$\varphi = e^{-\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}}}\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta} = e^{-z(\mu,\nu)}\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

en changeant le signe de $\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}}$ ou de $(\mu,\nu)$, on trouverait une autre équation qui se déduirait de la précédente par le même changement de signe. Cette nouvelle équation serait

$$(\mu,\nu)A_{\mu,\nu} + \frac{dA_{\mu,\nu}}{dc} = \frac{4\pi}{\alpha\beta}\,\frac{e^{-(\gamma-c)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}}.$$

On a donc, en ajoutant ces équations membre à membre,

$$A_{\mu,\nu} = \frac{2\pi}{\alpha\beta(\mu,\nu)}\,\frac{e^{(\gamma-c)(\mu,\nu)} + e^{-(\gamma-c)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}},$$

et en retranchant,

$$\frac{dA_{\mu,\nu}}{dc} = \frac{2\pi}{\alpha\beta}\,\frac{e^{-(\gamma-c)(\mu,\nu)} - e^{(\gamma-c)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}},$$

expression qui est bien la dérivée de la précédente par rapport à $c$.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que $\mu$ et $\nu$ ne sont pas nuls tous deux. Si $\mu = \nu = 0$, on a

$$(\mu, \nu) = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2}} = 0;$$

alors la partie de l'intégrale

$$\int\int_{\mathrm{P}}\left(\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)d\sigma,$$

étendue à la face supérieure du parallélépipède, est

$$-\alpha\beta\frac{d\mathrm{A}_{0,0}}{dc},$$

et la partie relative à la face inférieure

$$\alpha\beta\frac{d\mathrm{A}_{0,0}}{dc} + 4\pi,$$

ainsi qu'il résulte des expressions générales : en écrivant que la somme est égale à $4\pi$, on obtient une identité. Il faut donc procéder autrement pour trouver $\mathrm{A}_{0,0}$ et $\frac{d\mathrm{A}_{0,0}}{dc}$.

En désignant toujours par $\varphi(x, y, z)$ la fonction

$$\varphi(x, y, z) = e^{\pi z\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2}}}\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta}$$

et considérant l'intégrale

$$\int\int\left(\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)d\sigma$$

étendue non plus au parallélépipède précédent, mais au parallélépipède

$$x = \pm\alpha, \qquad y = \pm\beta, \qquad z = \pm c,$$

comme l'intégrale de la page 29, on pourra refaire exactement les calculs que nous avons faits aux pages 28, 29 et suivantes, en y remplaçant $a$ par $2\alpha$, $b$ par $2\beta$, et la fonction $\mathfrak{S}_2$ par la fonction $\Psi$. On trouvera ainsi que les coefficients $A_{\mu,\nu}$ vérifient la relation suivante, identique à la relation (27),

$$(\mu, \nu)\left[e^{c(\mu,\nu)} - e^{-c(\mu,\nu)}\right] A_{\mu,\nu} - \left[e^{c(\mu,\nu)} + e^{-c(\mu,\nu)}\right] \frac{dA_{\mu,\nu}}{dc} = \frac{4\pi}{\alpha\beta},$$

$(\mu, \nu)$ désignant, comme plus haut, la quantité $\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2}}$. On en conclut, pour $\mu = \nu = 0$, en réduisant le second membre au quart de sa valeur,

$$\frac{dA_{0,0}}{dc} = -\frac{\pi}{2\alpha\beta},$$

d'où

$$A_{0,0} = -\frac{\pi c}{2\alpha\beta} + C_{0,0},$$

$C_{0,0}$ désignant une constante qui ne dépend pas de $c$, mais uniquement des périodes $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$. Si l'on remplace $c$ par $z$ dans les valeurs de $A_{\mu,\nu}$ et $A_{0,0}$ trouvées ci-dessus, on obtient le développement suivant, valable pour toutes les valeurs de $z$ comprises entre zéro et $2\gamma$,

$$0 < z < 2\gamma,$$

$$(37)\quad \Psi(x, y, z) = -\frac{\pi z}{2\alpha\beta} + C_{0,0} + \frac{\pi}{\alpha\beta}\sum \frac{2}{(\mu,\nu)}\,\frac{e^{(\gamma-z)(\mu,\nu)} + e^{-(\gamma-z)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}}\cos\frac{\mu\pi x}{\alpha}\cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

où $(\mu, \nu)$ désigne la quantité $\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2}}$, la somme $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs de $\mu$ et $\nu$ de $0$ à $+\infty$, la combinaison $\mu = \nu = 0$ exceptée, et le facteur $2$ qui figure devant le terme général devant être remplacé par $1$ quand l'un des entiers $\mu$ ou $\nu$ est nul.

Pour les mêmes valeurs de $z$, on a, pour $Z(x, y, z)$, le développement qui résulte de la relation (31)

$$(38)\quad \begin{cases} Z(x, y, z;\, 2\alpha,\, 2\beta,\, 2\gamma) \\ \quad = \Psi(x, y, z) + \frac{A}{4\alpha}x^2 + \frac{B'}{4\beta}y^2 - \left(\frac{A}{4\alpha} + \frac{B'}{4\beta}\right)z^2. \end{cases}$$

Si l'on veut le développement en série trigonométrique de la fonction $\Psi$ pour des valeurs de $z$ non comprises entre $0$ et $2\gamma$, il suffit, par l'application répétée de la formule

$$\Psi(x, y, z+2\gamma) = \Psi(x, y, z) - \frac{\pi}{\alpha\beta}(z+\gamma),$$

d'exprimer la fonction $\Psi(x, y, z)$ à l'aide d'une fonction $\Psi(x, y, z')$, dans laquelle $z'$ est compris entre o et $2\gamma$, et d'appliquer ensuite le développement (37).

Si l'on pose, de même,

$$Z(x, y, z) = \Phi(x, y, z) + \frac{B'}{4\beta}y^2 + \frac{C''}{4\gamma}z^2 - \left(\frac{B'}{4\beta} + \frac{C''}{4\gamma}\right)x^2,$$

$$Z(x, y, z) = \Pi(x, y, z) + \frac{C''}{4\gamma}z^2 + \frac{A}{4\alpha}x^2 - \left(\frac{C''}{4\gamma} + \frac{A}{4\alpha}\right)y^2,$$

on a, pour les valeurs de $x$ comprises entre o et $2\alpha$,

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{\pi x}{2\beta\gamma} + C'_{0,0} + \frac{\pi}{\beta\gamma}\sum \frac{2}{(\mu, \nu)'}\,\frac{e^{(\alpha-x)(\mu,\nu)'} + e^{-(\alpha-x)(\mu,\nu)'}}{e^{\alpha(\mu,\nu)'} - e^{-\alpha(\mu,\nu)'}}\cos\frac{\mu\pi y}{\beta}\cos\frac{\nu\pi z}{\gamma},$$

où

$$(\mu, \nu)' = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\beta^2} + \frac{\nu^2}{\gamma^2}},$$

et, pour les valeurs de $y$ comprises entre o et $2\beta$,

$$\Pi(x, y, z) = -\frac{\pi y}{2\gamma\alpha} + C''_{0,0} + \frac{\pi}{\gamma\alpha}\sum \frac{2}{(\mu, \nu)''}\,\frac{e^{(\beta-y)(\mu,\nu)''} + e^{-(\beta-y)(\mu,\nu)''}}{e^{\beta(\mu,\nu)''} - e^{-\beta(\mu,\nu)''}}\cos\frac{\mu\pi z}{\gamma}\cos\frac{\nu\pi x}{\alpha},$$

où

$$(\mu, \nu)'' = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\gamma^2} + \frac{\nu^2}{\alpha^2}}.$$

**7.** A l'aide des résultats précédents, on obtiendra facilement le développement en série trigonométrique d'une fonction $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$, admettant les trois groupes de périodes $(2\alpha, 0, 0)$, $(0, 2\beta, 0)$, $(0, 0, 2\gamma)$ et n'ayant que des pôles dans un parallélépipède élémentaire. Cette fonction F est donc supposée vérifier les conditions

$$F(x+2\alpha, y, z) = F(x, y+2\beta, z) = F(x, y, z+2\gamma) = F(x, y, z).$$

Prenons pour parallélépipède élémentaire le parallélépipède dont les faces ont pour équation

$$x = 0, \qquad x = 2\alpha, \qquad y = 0, \qquad y = 2\beta, \qquad z = 0, \qquad z = 2\gamma$$

et soient

$$(x_1, y_1, z_1) \quad (x_2, y_2, z_2) \quad \ldots, \quad (x_p, y_p, z_p),$$

les pôles de la fonction F situés dans ce parallélépipède. Pour plus de simplicité, je supposerai tous ces pôles du premier degré et j'appellerai $R_1$, $R_2$, ..., $R_p$ les résidus correspondants. Alors, comme je l'ai démontré dans le tome IV des *Acta mathematica,* page 359 et suivantes, on aura, pour l'expression de cette fonction F,

$$(39) \quad \begin{cases} F(x, y, z) = L + Mx + Ny + Pz \\ \qquad + \sum_{k=1}^{k=p} R_k Z(x - x_k, y - y_k, z - z_k), \end{cases}$$

où $Z(x, y, z)$ est la fonction définie précédemment (p. 34), et où L, M, N, P désignent des constantes dont les trois dernières ont pour valeurs

$$(40) \quad 2M\alpha = A \sum_{k=1}^{k=p} R_k x_k, \qquad 2N\beta = B' \sum_{k=1}^{k=p} R_k y_k, \qquad 2P\gamma = C'' \sum_{k=1}^{k=p} R_k z_k;$$

on sait d'ailleurs que la somme des résidus

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_p$$

est *nulle.*

Proposons-nous de former le développement en série trigonométrique de la fonction $F(x, y, z)$ pour des valeurs de $z$ voisines de $2\gamma$, et en particulier pour $z = 2\gamma$, c'est-à-dire sur la face supérieure $z = 2\gamma$ du parallélépipède élémentaire considéré. Pour cela, conformément à l'équation (31), nous ferons

$$Z(x,y,z) = \Psi(x,y,z) + \frac{A}{4\alpha}x^2 + \frac{B'}{4\beta}y^2 - \left(\frac{A}{4\alpha} + \frac{B'}{4\beta}\right)z^2$$

ou encore, d'après la relation

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B'}{\beta} + \frac{C''}{\gamma} = -\frac{\pi}{\alpha\beta\gamma},$$

$$Z(x,y,z) = \Psi(x,y,z) + \frac{A}{4\alpha}x^2 + \frac{B'}{4\beta}y^2 + \frac{C''}{4\gamma}z^2 + \frac{\pi}{4\alpha\beta\gamma}z^2.$$

On déduit de là, en remplaçant $x, y, z$ par $x - x_k$, $y - y_k$, $z - z_k$,

$$\begin{aligned} Z(x - x_k, y - y_k, z - z_k) = \Psi(x - x_k, y - y_k, z - z_k) \\ + \frac{A}{4\alpha}x^2 + \frac{B'}{4\beta}y^2 + \frac{C''}{4\gamma}z^2 + \frac{\pi}{4\alpha\beta\gamma}z^2 \\ + \frac{A}{4\alpha}x_k^2 + \frac{B'}{4\beta}y_k^2 + \frac{C''}{4\gamma}z_k^2 + \frac{\pi}{4\alpha\beta\gamma}z_k^2 \\ - \frac{A}{2\alpha}xx_k - \frac{B'}{2\beta}yy_k - \frac{C''}{2\gamma}zz_k - \frac{\pi}{2\alpha\beta\gamma}zz_k. \end{aligned}$$

Remplaçons $Z(x - x_k, y - y_k, z - z_k)$ par cette valeur dans l'expression de la fonction $F(x, y, z)$ : les termes en $x^2, y^2, z^2$ disparaîtront en vertu de la relation $R_1 + R_2 + \ldots + R_p = 0$; les termes en $x$ et $y$ disparaîtront également en vertu des relations (40); et en posant, pour simplifier,

$$Q = \sum_{k=1}^{k=p} R_k\left(\frac{A}{4\alpha}x_k^2 + \frac{B'}{4\beta}y_k^2 + \frac{C''}{4\gamma}z_k^2\right), \qquad \zeta = \frac{\pi}{4\alpha\beta\gamma}\sum_{k=1}^{k=p} R_k z_k^2,$$

puis tenant compte de la troisième des relations (40), nous aurons

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x,y,z) = L + Q + \zeta - \frac{\pi P}{\alpha\beta C''}z \\ + \sum_{k=1}^{k=p} R_k \Psi(x - x_k, y - y_k, z - z_k). \end{aligned} \right.$$

Comme le pôle $(x_k, y_k, z_k)$ est dans le parallélépipède ayant pour faces opposées $z = 2\gamma$, $z = 0$, si $z$ est suffisamment voisin de $2\gamma$, la différence $z - z_k$ est positive et moindre que $2\gamma$, donc, pour des valeurs de $z$ suffisamment rapprochées de $2\gamma$, on pourra appliquer à $\Psi(x - x_k, y - y_k, z - z_k)$ le développement (37)

$$\Psi(x - x_k, y - y_k, z - z_k) = -\frac{\pi(z - z_k)}{2\alpha\beta} + C_{0,0}$$
$$+ \frac{\pi}{\alpha\beta}\sum \frac{2}{(\mu,\nu)} \frac{e^{(\gamma - z + z_k)(\mu,\nu)} + e^{-(\gamma - z + z_k)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}} \cos\frac{\mu\pi(x - x_k)}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi(y - y_k)}{\beta}.$$

En portant ce développement dans l'expression (39) de $F(x, y, z)$, on voit que la constante $C_{0,0}$ disparaît, car son coefficient est

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_p,$$

c'est-à-dire zéro, et il reste

$$F(x, y, z) = L + Q + \zeta - \frac{\pi P}{\alpha\beta C''}(z - \gamma)$$
$$+ \frac{\pi}{\alpha\beta}\sum_{\mu,\nu}\sum_{k=1}^{k=p} \frac{2R_k}{(\mu,\nu)} \frac{e^{(\gamma - z + z_k)(\mu,\nu)} + e^{-(\gamma - z + z_k)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}} \cos\frac{\mu\pi(x - x_k)}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi(y - y_k)}{\beta},$$

$(\mu, \nu)$ ayant la valeur $\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2}}$. Nous avons ainsi un développement en série trigonométrique de $F(x, y, z)$, valable sur le plan $z = 2\gamma$ et dans tout l'espace compris entre deux plans parallèles au plan $z = 2\gamma$ situés de part et d'autre de ce plan et passant par les pôles de la fonction F les plus rapprochés de ce plan.

De même, en posant

$$\xi = \frac{\pi}{4\alpha\beta\gamma}\sum_{k=1}^{k=p} R_k x_k^2, \qquad \eta = \frac{\pi}{4\alpha\beta\gamma}\sum_{k=1}^{k=p} R_k y_k^2,$$

on a, dans le voisinage de la face $x = 2\alpha$,

$$F(x, y, z) = L + Q + \xi - \frac{\pi M}{\beta\gamma A}(x - \alpha)$$
$$+ \frac{\pi}{\beta\gamma}\sum_{\mu,\nu}\sum_{k=1}^{k=p} \frac{2R_k}{(\mu,\nu)'} \frac{e^{(\alpha - x + x_k)(\mu,\nu)'} + e^{-(\alpha - x + x_k)(\mu,\nu)'}}{e^{\alpha(\mu,\nu)'} - e^{-\alpha(\mu,\nu)'}} \cos\frac{\mu\pi(y - y_k)}{\beta} \cos\frac{\nu\pi(z - z_k)}{\gamma}.$$

où

$$(\mu, \nu)' = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\beta^2} + \frac{\nu^2}{\gamma^2}}$$

et, dans le voisinage de la face $y = 2\beta$,

$$\begin{aligned}F(x, y, z) &= L + Q + \eta - \frac{\pi N}{\gamma\alpha B'}(y - \beta)\\ &+ \frac{\pi}{\gamma\alpha}\sum_{\mu,\nu}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{2R_k}{(\mu, \nu)''}\,\frac{e^{(\beta-y+y_k)(\mu,\nu)''} + e^{-(\beta-y+y_k)(\mu,\nu)''}}{e^{\beta(\mu,\nu)''} - e^{-\beta(\mu,\nu)''}}\cos\frac{\mu\pi(z-z_k)}{\gamma}\cos\frac{\nu\pi(x-x_k)}{\alpha},\end{aligned}$$

où

$$(\mu, \nu)'' = \pi\sqrt{\frac{\mu^2}{\gamma^2} + \frac{\nu^2}{\alpha^2}}.$$

Ces développements s'appliqueront par exemple à l'expression de la fonction de Green pour l'intérieur d'un parallélépipède rectangle, telle que je l'ai indiquée d'après Riemann, dans le tome VIII des *Acta mathematica* (p. 277) [1].

8. Comme vérification, il est possible de déduire du développement (37) celui de la fonction $\mathfrak{S}_2(x, y, z;\, 2\alpha, 2\beta)$, en supposant que $\gamma$ augmente indéfiniment. En effet, si l'on se reporte à la série (29) qui définit $Z(x, y, z;\, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$, on voit que, si $\gamma$ croît indéfiniment, tous les termes de cette série dans lesquels l'entier $p$ est différent de zéro tendent vers zéro, et l'on obtient pour $\gamma = \infty$ une série à double entrée que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}&Z(x, y, z;\, 2\alpha, 2\beta, \infty)\\ &\quad= \frac{1}{r} + \sum_{m,n}{}'\left[\frac{1}{\sqrt{(x-2m\alpha)^2 + (y-2n\beta)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2}}\right]\\ &\quad- \sum_{m,n}{}'\left[\frac{2m\alpha x + 2n\beta y}{(4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}\,\frac{3(2m\alpha x + 2n\beta y)^2 - (4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2)(x^2 + y^2 + z^2)}{(4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2)^{\frac{5}{2}}}\right],\end{aligned}$$

---

[1] La transformation des fonctions $\theta$ en fonctions $\mathfrak{S}$ employée dans les nos 1 et 3 a été également appliquée par M. Greenhill (*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. III, p. 289) à l'intégrale définie que donne Riemann pour exprimer la fonction de Green, mais dans un but différent du nôtre.

les sommes $\sum_{m,n}'$ étant étendues aux valeurs entières de $m$ et $n$, de $-\infty$ à $+\infty$, la combinaison $m = n = 0$ étant exceptée. La première partie du développement ci-dessus est $\mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta)$; quant à la deuxième, elle est de la forme

$$\mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 - (\mathcal{A} + \mathcal{B})z^2,$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ désignant des constantes; en effet, les sommes

$$\sum_{m,n}' \frac{2m\alpha}{(4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\sum_{m,n}' \frac{2n\beta}{(4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\sum_{m,n}' \frac{4mn\alpha\beta}{(4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

sont évidemment nulles; puis, si l'on désigne par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les constantes

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{m,n}' \frac{4n^2\beta^2 - 8m^2\alpha^2}{(4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2)^{\frac{5}{2}}}, \qquad \mathcal{B} = \frac{1}{2}\sum_{m,n}' \frac{4m^2\alpha^2 - 8n^2\beta^2}{(4m^2\alpha^2 + 4n^2\beta^2)^{\frac{5}{2}}},$$

la deuxième partie se réduit bien à

$$\mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 - (\mathcal{A} + \mathcal{B})z^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} &Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, \infty) \\ &\quad = \mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta) + \mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 - (\mathcal{A} + \mathcal{B})z^2. \end{aligned}$$

Lorsque $\gamma$ augmente indéfiniment, les constantes appelées précédemment A et B′ tendent vers des limites $A_1$ et $B'_1$ et la fonction

$$\Psi(x, y, z) = Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma) - \frac{A}{4\alpha}x^2 - \frac{B'}{4\beta}y^2 + \left(\frac{A}{4\alpha} + \frac{B'}{4\beta}\right)z^2$$

tend vers une limite $\Psi_1(x, y, z)$ donnée par la formule

$$\Psi_1(x, y, z) = Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, \infty) - \frac{A_1}{4\alpha}x^2 - \frac{B'_1}{4\beta}y^2 + \left(\frac{A_1}{4\alpha} + \frac{B'_1}{4\beta}\right)z^2,$$

ou encore, d'après l'expression ci-dessus de

$$Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, \infty),$$

$$\Psi_1(x, y, z) = \mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta) + \left(\mathcal{A} - \frac{A_1}{4\alpha}\right)x^2 + \left(\mathcal{B} - \frac{B'_1}{4\beta}\right)y^2 - \left(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \frac{A_1}{4\alpha} - \frac{B'_1}{4\beta}\right)z^2.$$

Comme les deux fonctions $\Psi_1(x, y, z)$ et $\mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta)$ admettent la période $2\alpha$ par rapport à $x$ et la période $2\beta$ par rapport à $y$, il faut que les coefficients de $x^2$, $y^2$, $z^2$ dans le second membre soient nuls, car le polynôme

$$\left(\mathcal{A} - \frac{A_1}{4\alpha}\right)x^2 + \left(\mathcal{B} - \frac{B'_1}{4\beta}\right)y^2 - \left(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \frac{A_1}{4\alpha} - \frac{B'_1}{4\beta}\right)z^2$$

ne doit pas changer quand $x$ augmente de $2\alpha$ ou $y$ de $2\beta$; on a donc

$$\mathcal{A} - \frac{A_1}{4\alpha} = 0, \qquad \mathcal{B} - \frac{B'_1}{4\beta} = 0$$

et

$$\Psi_1(x, y, z) = \mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta).$$

Donc la fonction $\mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta)$ est la limite vers laquelle tend $\Psi(x, y, z)$ quand $\gamma$ augmente indéfiniment. Nous avons trouvé pour $\Psi(x, y, z)$ le développement

$$\Psi(x, y, z) = -\frac{\pi z}{2\alpha\beta} + C_{0,0} + \frac{\pi}{\alpha\beta}\sum \frac{2}{(\mu, \nu)} \frac{e^{(\gamma - z)(\mu,\nu)} + e^{-(\gamma - z)(\mu,\nu)}}{e^{\gamma(\mu,\nu)} - e^{-\gamma(\mu,\nu)}} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

où

$$0 < z < 2\gamma.$$

Si $\gamma$ croît indéfiniment, $C_{0,0}$ tend vers une limite $B_{0,0}$ et l'on a

$$\Psi_1(x, y, z) = \mathfrak{S}_2(x, y, z; 2\alpha, 2\beta) = -\frac{\pi z}{2\alpha\beta} + B_{0,0} + \frac{\pi}{\alpha\beta}\sum \frac{2}{(\mu, \nu)} e^{-z(\mu,\nu)} \cos\frac{\mu\pi x}{\alpha} \cos\frac{\nu\pi y}{\beta},$$

développement identique à la série (22) dans laquelle on remplacerait $a$ par $2\alpha$ et $b$ par $2\beta$.

**9.** Le développement (37) présente une grande analogie avec celui de la fonction

$$W = \log\theta(x+yi)\,\theta(x-yi).$$

En effet, en adoptant les notations de Briot et Bouquet (*Théorie des fonctions elliptiques,* p. 480), on a, d'après Jacobi,

$$D\log\theta(z) = \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{q^{-m}-q^{m}}\sin\frac{2m\pi z}{\omega},$$

d'où

$$\log\theta(z) = A + 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m(q^{m}-q^{-m})}\cos\frac{2m\pi z}{\omega},$$

A désignant une constante. On en conclut

$$\begin{aligned}
&\log\theta(x+yi)\,\theta(x-yi)\\
&= 2A + 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{2}{m(q^{m}-q^{-m})}\cos\frac{2m\pi x}{\omega}\cos\frac{2m\pi yi}{\omega}\\
&= 2A + 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\,\frac{e^{\frac{2m\pi y}{\omega}}+e^{-\frac{2m\pi y}{\omega}}}{q^{m}-q^{-m}}\cos\frac{2m\pi x}{\omega};
\end{aligned}$$

l'analogie de cette série avec le développement (37) est évidente.

**10.** La méthode suivie dans les nos **1** et **5** permettra de trouver les développements en séries trigonométriques de fonctions de la forme

$$\sum\left[(x_1-m_1a_1)^2+(x_2-m_2a_2)^2+\ldots+(x_k-m_ka_k)^2+c^2\right]^{-p},$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de $m_1$, $m_2$, …, $m_k$ de $-\infty$ à $+\infty$, et l'exposant $p$ ayant une valeur assez grande pour que la série soit convergente (*voyez* une Note de M. Jordan, dans le Tome IX du *Bulletin de la Société mathématique*). Il suffira de prendre pour point de départ la relation

$$\Gamma(p)N^{-p} = \int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-Nt}\,dt.$$