JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. LÉAUTÉ

Sur la caractéristique cinématique d'un système mécanique en mouvement

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 3 (1887), p. 465-476.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1887_4_3__465_0>

Sur la caractéristique cinématique d'un système mécanique en mouvement;

Par M. H. LÉAUTE,

Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique.

Le système mécanique que nous considérons est formé d'un moteur, des outils qu'il actionne, des transmissions qui les réunissent et tous les problèmes pratiques que l'on peut avoir à résoudre sur un tel ensemble reviennent au fond à l'étude du mouvement troublé de ce système.

Il importe, en effet, lorsqu'on se place au point de vue dynamique, le seul qui convienne à la Mécanique appliquée, d'étudier les phénomènes produits par les variations des forces motrices ou résistantes et de laisser de côté, d'une façon complète, l'hypothèse purement théorique du mouvement uniforme. L'équilibre entre la puissance et la résistance est une fiction, admissible au point de vue cinématique et utile pour la détermination du régime moyen; mais elle ne permet de résoudre aucune des questions que soulèvent les applications et ne donne même pas la possibilité de les aborder.

L'étude du mouvement troublé, et surtout celle du mouvement qui succède à une perturbation, a ainsi une importance particulière; c'est elle qui nous a permis de résoudre la question fondamentale de la régularisation de la vitesse ([1]), et il convient, dans tous les cas, de simplifier cette étude le plus possible en mettant en évidence les éléments principaux dont elle dépend.

Or, quel que soit le problème que l'on se propose de résoudre, qu'il s'agisse d'éviter des oscillations, de maintenir une vitesse, de limiter des efforts, etc., on rencontre un paramètre qui joue le rôle le plus important, qui caractérise et différentie les divers systèmes mécaniques que l'on peut avoir à considérer et qui constitue ainsi pour chacun de ces systèmes une véritable constante spécifique. C'est ce paramètre que nous désignons sous le nom de *caractéristique du système considéré* et dont nous nous proposons, en raison de son importance capitale, de donner ici la définition et la mesure.

1. Considérons une machine ([2]) en mouvement et appliquons-lui à un instant quelconque le théorème des forces vives.

Pour cela, remarquons que l'ensemble du moteur et de l'outil constitue toujours un système à liaisons complètes, et que, dès lors, le mouvement est défini par celui de l'un quelconque des points du mécanisme.

Choisissons alors un des arbres animés d'une rotation continue et définissons la vitesse de la machine par le nombre de tours ν que cet arbre fait par minute.

Il est bien clair que les vitesses linéaires de tous les points sont, à un moment déterminé, proportionnelles à ν et que la force vive totale est, dès lors, proportionnelle à ν^2.

Cette force vive se représente ainsi par $K\nu^2$, K étant un coefficient qui peut, dans certains cas, varier suivant la position relative des diverses pièces, mais qui reprend toujours la même valeur quand la machine revient à la même position.

Ces variations périodiques de K, dues aux pièces animées d'un mou-

---

([1]) *Mémoire sur les oscillations à longues périodes dans les machines actionnées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations.* Gauthier-Villars; 1885.

([2]) Nous ne faisons aucune hypothèse sur la nature du moteur, qui peut être un moteur à vapeur ou un moteur hydraulique.

vement non uniforme, sont d'ailleurs assez restreintes, et c'est le but du volant de réduire leur influence.

En négligeant ces inégalités, toujours de faible amplitude, c'est-à-dire en considérant simplement le mouvement moyen, il est ainsi permis de regarder K comme une constante.

D'autre part, le travail moteur dépend à la fois du poids de fluide p qui traverse le moteur dans l'unité de temps et du rendement ρ. Nous avons établi dans un autre Mémoire ([1]) que ce travail était proportionnel à chacune de ces deux quantités.

Enfin le travail résistant varie à chaque instant suivant la position relative des diverses pièces, mais, en un un point d'application quelconque d'une résistance, le travail élémentaire est proportionnel au chemin décrit par ce point. Et, comme ces chemins sont eux-mêmes proportionnels à v, on voit que le travail résistant total est proportionnel à v, si l'on considère toujours le mouvement moyen.

En somme donc, le théorème des forces vives appliqué à la machine pendant un intervalle de temps dt donne

$$(1) \qquad dv^2 = Ap\rho\, dt - Bv\, dt,$$

A et B pouvant être regardés comme constantes pour une même valeur de la résistance.

II. L'équation précédente définit le mouvement moyen de la machine pendant un intervalle de temps élémentaire quelconque; appliquons-la à un instant dt de la période qui succède à une perturbation.

Si nous représentons alors par v_0, p_0, ρ_0 les valeurs de v, p, ρ correspondant à l'état de régime qui s'établira après cette perturbation, on aura, d'après l'équation (1), puisque la vitesse sera constante,

$$(2) \qquad Ap_0\rho_0 - Bv_0 = 0,$$

et l'équation (1) deviendra

$$(3) \qquad dv^2 = B\left(\frac{p}{p_0}\frac{\rho}{\rho_0}v_0 - v\right)dt.$$

([1]) *Loc. cit.*, Chap. II, § 1. *Équations du mouvement simultané de la machine et de son vannage.*

Imaginons maintenant que, la machine marchant à la vitesse de régime définie par ν_0, on supprime instantanément l'arrivée du fluide moteur sans modifier les résistances; l'équation du mouvement est donnée par l'équation (1) où l'on fait p égal à zéro, c'est-à-dire par

$$(4) \qquad d\nu^2 = -B\nu\, dt;$$

et, si l'on intègre cette équation depuis le moment où l'arrivée du fluide moteur a été interrompue jusqu'à celui où la vitesse est nulle, on en conclut

$$(5) \qquad \nu_0^2 = B\int_{\nu=\nu_0}^{\nu=0} \nu\, dt.$$

Mais, si l'on désigne par Λ le nombre de tours effectué par la machine dans la période d'arrêt, on a

$$\Lambda = \int_{\nu=\nu_0}^{\nu=0} \nu\, dt,$$

d'où l'on déduit

$$B = \frac{\nu_0^2}{\Lambda},$$

et l'équation (3) devient

$$(6) \qquad d\nu^2 = \frac{\nu_0^2}{\Lambda}\left(\frac{p}{p_0}\frac{\rho}{\rho_0}\nu_0 - \nu\right) dt$$

ou encore

$$(7) \qquad \frac{d\nu}{dt} = \frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\left(\frac{p}{p_0}\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\nu_0}{\nu} - 1\right).$$

Telle est donc l'équation générale du mouvement moyen de la machine.

III. Le paramètre Λ que nous venons de définir est la constante spécifique que nous nous proposons d'étudier et qui caractérise le système mécanique que l'on considère; *c'est le nombre de tours que décrit la machine* (¹) *en vertu de la seule inertie lorsque, étant en*

(¹) Il est entendu qu'il s'agit ici du moteur et des outils qu'il actionne et non du moteur seul.

marche normale, on supprime brusquement l'arrivée du fluide moteur sans modifier les résistances. Nous désignerons cette constante sous le nom de *caractéristique cinématique du système mécanique en mouvement* (1).

La détermination de la valeur de cette caractéristique s'effectue par l'expérience, mais dans la pratique l'arrivée du fluide moteur ne peut pas toujours être supprimée instantanément et il faut tenir alors compte du temps qu'exige la fermeture de l'orifice d'admission; de là, une difficulté pour l'évaluation de Λ; car le nombre de tours que l'on mesure entre le moment où l'on commence à fermer cet orifice et celui où la machine est arrêtée ne représente plus la caractéristique cherchée. Nous allons indiquer comment l'on doit opérer.

Pour cela, nous supposerons qu'à l'aide d'un compteur de tours on ait déterminé d'une part le nombre de tours λ_1 fait par la machine pendant que l'orifice d'admission se fermait; d'autre part, le nombre de tours λ_2 effectués depuis l'instant de la fermeture complète jusqu'à celui de l'arrêt, et nous chercherons la relation qui lie la caractéristique Λ aux deux nombres λ_1 et λ_2.

Dans cette recherche nous admettrons que la vitesse de fermeture de la valve d'admission ou de la vanne est sensiblement constante et que l'opération est faite assez rapidement pour être terminée avant l'arrêt complet de la machine.

(1) Cette caractéristique joue un rôle fondamental dans toutes les questions relatives au mouvement du système mécanique; il suffit pour le comprendre de se reporter au résultat suivant, que nous avons établi dans un autre travail au sujet des moteurs hydrauliques (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1er mars 1886).

Si l'on désigne par ς la plus grande variation relative de vitesse qui se produit quand la résistance varie brusquement de R_1 à R_2, on a

$$\varsigma = \frac{\frac{\Lambda}{4A\varepsilon}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2}{1 + \frac{\Lambda}{4A\varepsilon}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2}.$$

Dans cette formule ε représente la vitesse relative du vannage, A est l'ouverture de vanne et les valeurs de A et Λ se rapportent à l'état de régime qui suit la perturbation.

IV. Étudions tout d'abord le mouvement de la machine pendant la période où l'orifice se ferme.

Soit τ_1 la durée de cette période; prenons pour origine du temps le moment où la valve commence à se mouvoir, et désignons par φ le rapport de la quantité p de fluide qui traverse le moteur dans l'unité de temps à l'ouverture $\mathcal{A}$ d'admission, ce rapport étant pris à l'instant t.

La vitesse de fermeture étant supposée constante, l'ouverture de valve, qui diminue proportionnellement au temps, se trouvera réduite au bout du temps t dans le rapport $\frac{\tau_1 - t}{\tau_1}$ et l'on aura, en représentant par p_0, $\mathcal{A}_0$, φ_0 les valeurs des quantités p, $\mathcal{A}$, φ dans l'état de régime qui précède le mouvement de fermeture,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0\left(1 - \frac{t}{\tau_1}\right),$$

d'où

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\mathcal{A}\varphi}{\mathcal{A}_0\varphi_0} = \left(1 - \frac{t}{\tau_1}\right)\frac{\varphi}{\varphi_0},$$

et l'équation (7) du mouvement moyen dans cette première période devient ainsi

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_0^2}{2A}\left[\left(1 - \frac{t}{\tau_1}\right)\frac{\varphi}{\varphi_0}\frac{\rho}{\rho_0}\frac{v_0}{v} - 1\right]. \tag{8}$$

Une remarque indispensable doit être faite au sujet du facteur $\frac{\varphi}{\varphi_0}\frac{\rho}{\rho_0}\frac{v_0}{v}$ qui figure dans cette équation; ce facteur provient du terme $\frac{p}{p_0}\frac{\rho}{\rho_0}\frac{v_0}{v}$ de l'équation (7); or, ainsi que nous l'avons dit, le travail moteur est proportionnel au produit $p\rho$, et dès lors le terme considéré représente, à un facteur constant près, la pression exercée par le fluide sur le moteur.

Il résulte de là que le facteur $\frac{\varphi}{\varphi_0}\frac{\rho}{\rho_0}\frac{v_0}{v}$ de l'équation (8), d'abord égal à l'unité, ne devient jamais infini, puisque la pression du fluide sur le moteur ne peut jamais dépasser un certain maximum et varie en tout cas d'une manière continue.

On en conclut que l'accélération $\frac{d\nu}{dt}$ donnée par l'équation (8) est nulle au début de la période considérée et est égale à $-\frac{\nu_0^2}{2\Lambda}$ à la fin.

Si l'on différentie alors cette équation, on a

$$
(9) \qquad \frac{d^2\nu}{dt^2} = \frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\left[\left(1-\frac{t}{\tau_1}\right)\frac{d\,\frac{\varphi\rho\nu_0}{\varphi_0\rho_0\nu}}{d\nu}\frac{d\nu}{dt} - \frac{1}{\tau_1}\frac{\varphi\rho\nu_0}{\varphi_0\rho_0\nu}\right]
$$

et l'on voit que $\frac{d^2\nu}{dt^2}$ est égal à $-\frac{1}{\tau_1}\frac{\nu_0^2}{2\Lambda}$ pour t égal à zéro et à $-\frac{1}{\tau_1}\frac{\nu_0^3}{2\Lambda\nu_1}\frac{\varphi_1}{\varphi_0}\frac{\rho_1}{\rho_0}$ pour t égal à τ_1; ν_1, φ_1, ρ_1 désignant les valeurs de ν, φ, ρ au moment où l'admission est complètement fermée.

On a ainsi les valeurs de $\frac{d\nu}{dt}$ et de $\frac{d^2\nu}{dt^2}$ au début et à la fin de la période de fermeture; en appliquant alors à cet intervalle de durée τ_1 la formule de Stirling limitée à ses trois premiers termes et tenant compte de ce que

$$
\nu_1 = \nu_0 + \int_0^{\tau_1}\frac{d\nu}{dt}\,dt,
$$

on en déduit

$$
\nu_1 = \nu_0 + \tau_1\left(\frac{d\nu}{dt}\right)_0 + \frac{\tau_1}{2}\left(\Delta\frac{d\nu}{dt}\right)_0^{\tau_1} - \frac{\tau_1^2}{12}\left(\Delta\frac{d^2\nu}{dt^2}\right)_0^{\tau_1},
$$

et comme

$$
\left(\Delta\frac{d\nu}{dt}\right)_0^{\tau_1} = -\frac{\nu_0^2}{2\Lambda},
$$

$$
\left(\Delta\frac{d^2\nu}{dt^2}\right)_0^{\tau_1} = \frac{1}{\tau_1}\frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\left(1-\frac{\nu_0}{\nu_1}\frac{\varphi_1\rho_1}{\varphi_0\rho_0}\right),
$$

on a

$$
(10) \qquad \nu_1 = \nu_0 - \frac{\tau_1}{12}\frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\left(7-\frac{\varphi_1\rho_1\nu_0}{\varphi_0\rho_0\nu_1}\right).
$$

Le nombre λ_1 de tours effectués pendant cette période du mouvement de fermeture est donné par la relation

$$
\lambda_1 = \int_0^{\tau_1}\nu\,dt,
$$

qui devient, par la formule de Stirling,

$$\lambda_1 = \tau_1 \frac{v_0 + v_1}{2} + \frac{\tau_1^2}{12} \frac{v_0^2}{2\Lambda}, \tag{11}$$

et l'on a ainsi les deux relations (10) et (11) entre les quatre quantités Λ, λ_1, τ_1 et v_1.

V. Examinons maintenant la période de durée τ_2, qui s'étend depuis l'instant où l'orifice d'admission est complètement fermé jusqu'à l'arrêt complet; la vitesse v, égale à v_1 au début, devient nulle à la fin, et l'équation du mouvement est

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_0^2}{2\Lambda}; \tag{12}$$

on en déduit

$$v_1 = -\frac{v_0^2}{2\Lambda} \tau_2; \tag{13}$$

mais, d'autre part, on a, pour le nombre de tours λ_2 effectué pendant cette période,

$$\lambda_2 = \int_0^{\tau_1} v\,dt = \frac{v_0^2}{2\Lambda} \frac{\tau_2^2}{2}, \tag{14}$$

et l'on a ainsi les deux nouvelles relations (13) et (14) qui, rapprochées des équations (10) et (11), fournissent quatre relations entre les six quantités Λ, λ_1, λ_2, τ_1, τ_2 et v_1.

Dès que l'on connaîtra deux des quatre quantités λ_1, λ_2, τ_1, τ_2, on pourra calculer Λ; il convient donc de choisir ces deux quantités de façon que leur détermination expérimentale soit aisée.

Or, à ce point de vue, il est beaucoup plus facile de mesurer directement les nombres de tours λ_1 et λ_2 que les durées τ_1 et τ_2 des deux périodes correspondantes. A la fin de la seconde, en effet, le mouvement devient très lent, l'instant d'arrêt complet est difficile à saisir, et l'on est exposé à d'importantes erreurs sur la quantité τ_2. Cette difficulté ne se produit pas lorsqu'il s'agit des nombres de tours.

Nous supposerons donc λ_1 et λ_2 connus par l'expérience, et nous déduirons des formules (10), (11), (13), (14) l'expression de la caractéristique Λ en fonction de ces deux quantités.

VI. Le terme $\frac{\varphi_1\rho_1\nu_0}{\varphi_0\rho_0\nu_1}$, qui figure dans l'équation (10), dépend en partie du genre de moteur que l'on a à considérer; mais, dans les cas ordinaires de la pratique, il remplit un ensemble de conditions qui permettent de le déterminer avec une exactitude suffisante, sans qu'il soit nécessaire de spécifier la nature de ce moteur. Ceci résulte des considérations suivantes :

En premier lieu, on peut admettre que la quantité de fluide qui traverse le moteur dans l'unité de temps est fonction simplement de l'ouverture d'admission, et que le débit est proportionnel à cette ouverture; φ devient alors constant et le rapport $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$ est remplacé par l'unité.

D'autre part, dans les conditions normales de marche, le rendement, maximum au début de la première période, s'abaisse à mesure que la vitesse diminue.

Enfin, le rapport $\frac{\varphi\rho}{\varphi_0\rho_0}$, qui décroît à la fois avec la vitesse et avec l'ouverture d'admission quand celle-ci descend au-dessous d'une certaine limite, devient très petit dans le cas extrême où l'ouverture de valve et la vitesse sont toutes deux très petites.

Or, si l'on considère l'expression $\left(2-\frac{\nu}{\nu_0}\right)\frac{\nu}{\nu_0}$, on voit qu'elle est maxima pour ν égal à ν_0, c'est-à-dire pour la vitesse de régime, qu'elle décroît quand ν décroît et qu'elle tend vers zéro quand ν tend vers zéro. Elle reproduit dès lors la marche générale du rapport $\frac{\varphi\rho}{\varphi_0\rho_0}$, et l'on peut poser

$$(15)\qquad \frac{\nu_0\rho_1\varphi_1}{\nu_1\rho_0\varphi_0} = 2 - \frac{\nu_1}{\nu_0}.$$

La formule (10) devient alors

$$(16)\qquad \nu_1 = \nu_0 - \frac{\tau_1}{12}\frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\left(3 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\right),$$

d'où l'on tire

$$\tau_1 = 12\nu_0 \frac{1 - \frac{\nu_1}{\nu_0}}{\frac{\nu_0^2}{2\Lambda}\left(5 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\right)},$$

et cette valeur, portée dans l'équation (11), donne

$$\lambda_1 = 24\Lambda \frac{1 - \frac{\nu_1}{\nu_0}}{5 + \frac{\nu_1}{\nu_0}} \left(\frac{1 + \frac{\nu_1}{\nu_0}}{2} + \frac{1 - \frac{\nu_1}{\nu_0}}{5 + \frac{\nu_1}{\nu_0}} \right),$$

ou encore

$$(17) \qquad \frac{\lambda_1}{\Lambda} = 12 \frac{7 - 3\frac{\nu_1}{\nu_0} - 3\frac{\nu_1^2}{\nu_0^2} - \frac{\nu_1^3}{\nu_0^3}}{\left(5 + \frac{\nu_1}{\nu_0}\right)^2}.$$

Mais, d'autre part, on déduit des équations (13) et (14), en éliminant τ_2 entre les deux,

$$(18) \qquad \frac{\lambda_2}{\Lambda} = \frac{\nu_1^2}{\nu_0^2}.$$

On a ainsi deux équations qui déterminent les valeurs correspondantes de $\frac{\lambda_1}{\Lambda}$ et $\frac{\lambda_2}{\Lambda}$.

VII. Prenons alors une suite de valeurs pour $\frac{\nu_1}{\nu_0}$ considéré comme variable indépendante; nous pourrons, par les équations (17) et (18), calculer les valeurs correspondantes de $\frac{\lambda_1}{\Lambda}$ et $\frac{\lambda_2}{\Lambda}$; nous en déduirons celles de $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ et de $\frac{\Lambda}{\lambda_1+\lambda_2}$; nous construirons la courbe qui a pour ordonnées ces deux fractions, et nous pourrons conclure de cette courbe les valeurs de $\frac{\Lambda}{\lambda_1+\lambda_2}$ correspondant à des valeurs de $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, variant de dixièmes en dixièmes depuis zéro jusqu'à l'unité.

Nous avons ainsi

$$(19) \qquad \Lambda = \Lambda_0(\lambda_1 + \lambda_2),$$

en donnant à Λ_0 les valeurs contenues dans le Tableau suivant, valeurs qui ont été obtenues comme nous venons de le dire :

$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1,0
Λ_0.........	1	0,95	0,90	0,85	0,79	0,73	0,68	0,62	0,56	0,48	0,43	0,30

On a de la sorte le moyen de calculer la caractéristique Λ dès qu'on a mesuré par l'expérience les nombres de tours λ_1 et λ_2 correspondant à la période dans laquelle l'ouverture d'admission se ferme, et à celle dans laquelle elle est fermée.

VIII. Cette caractéristique Λ a une valeur correspondant à chaque vitesse de régime, et ce qui précède montre le moyen de la déterminer pour un régime donné ou, si l'on veut, pour une résistance donnée; il semblerait dès lors nécessaire de la mesurer pour chacune des résistances que la machine peut avoir à vaincre, mais nous allons voir qu'il est inutile de recourir de nouveau à l'expérience, et qu'il est suffisant, au degré d'approximation dont on a besoin, de déterminer la valeur Λ_m de Λ pour l'état de régime moyen.

En se reportant, en effet, à la définition même de Λ, qui représente le nombre de tours faits par la machine lorsqu'on ferme brusquement la vanne pendant l'état de régime correspondant à la résistance R, il est clair que le mouvement s'arrête lorsque le travail résistant $R\Lambda$ est devenu égal à la force vive $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$; on en conclut

$$\Lambda = \frac{1}{2}\frac{\Sigma mv^2}{R} \tag{20}$$

et, par suite,

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_m} = \frac{\Sigma mv^2}{\Sigma mv_m^2}\frac{R_m}{R}. \tag{21}$$

Il reste alors à reconnaître comment varie la force vive des masses en mouvement quand on passe de l'état R_m à l'état R.

Supposons, par exemple, que la résistance diminue, c'est-à-dire que R est inférieur à R_m; la perturbation considérée provient soit du débrayage d'une machine-outil, soit de la suppression de la résistance que cet outil doit surmonter.

Dans ce dernier cas, la force vive des masses en mouvement ne change pas, Σmv^2 est égal à Σmv_m^2, et l'on a

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_m} = \frac{R_m}{R}.$$

Mais, en dehors de ce cas, la diminution de résistance qui résulte du débrayage d'un outil entraîne une diminution de force vive correspondant à la force vive que possédait cet outil, et $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ décroît en même temps que R.

Toutefois, la variation de la quantité $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ est moins grande proportionnellement que celle de R, en raison de la force vive que possèdent toujours la transmission générale et le moteur. Dans la plupart des machines, en effet, cette force vive est une fraction importante de la force vive totale, tandis que le travail nécessaire pour entretenir le mouvement du moteur est une fraction relativement faible du travail total dépensé.

Il résulte de là que le rapport $\frac{\Sigma mv^2}{\Sigma mv_m^2}$ est plus petit que l'unité quand R_m est supérieur à R, mais est plus grand que $\frac{R}{R_m}$; on peut dès lors le remplacer par la valeur moyenne $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{R}{R_m}\right)$, et écrire

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_m} = \frac{R_m}{R}\,\frac{1 + \frac{R}{R_m}}{2}. \tag{22}$$

Cette formule, qui donne Λ en fonction de Λ_m, ne comporte pas évidemment une grande approximation, mais elle permet de se rendre compte très simplement des changements qu'apporte dans la marche de la machine une modification du travail effectué, et elle présente à ce titre une réelle utilité pratique.