JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 3 (1887), p. 327-404.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1887_4_3__327_0>

Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques;

PAR M. G. HUMBERT.

1. Le but de ce Mémoire est de démontrer une formule qui permet, étant données une courbe algébrique $f = 0$, de degré n, et une intégrale abélienne quelconque appartenant à cette courbe, de calculer *a priori* la somme des variations de l'intégrale sur les lignes décrites par les points d'intersection de la courbe proposée et d'une courbe algébrique variable, appartenant à un faisceau. Si l'on désigne par $F - u\varphi = 0$ l'équation des courbes de ce faisceau, la somme cherchée sera une fonction du paramètre u, et l'étude de ses variations, quand on fait varier le paramètre, donne lieu à des conséquences analytiques intéressantes, se traduisant géométriquement d'une manière souvent très simple.

L'emploi des fonctions fuchsiennes, introduites dans la Science par M. Poincaré, nous a permis d'arriver simplement au résultat cherché [1].

[1] Nous devons, à cette occasion, rectifier une erreur que nous avons commise dans un Mémoire, publié dans ce Journal, sur l'*Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques*. Nous avons attribué à Clebsch (n° 18) la théorie des *groupes de points* sur une courbe : c'est à MM. Brill et Nöther que revient l'honneur d'avoir établi et développé d'une manière si remarquable cette importante théorie.

La première Partie du présent travail est consacrée à la démonstration et à l'étude des conséquences analytiques de la formule fondamentale; on examine spécialement le cas où l'intégrale abélienne se réduit à une fonction rationnelle, et l'on en déduit le moyen de trouver la somme ou le produit des valeurs que prend une fonction rationnelle des coordonnées aux points communs à deux courbes algébriques, et de discuter cette somme ou ce produit quand une des courbes varie, sans cesser d'appartenir à un même faisceau.

La seconde Partie comprend les applications géométriques les plus simples de cette théorie : en considérant, soit une intégrale abélienne ayant une signification géométrique déterminée, soit une fonction rationnelle simple des coordonnées des points d'une courbe, on peut énoncer immédiatement des théorèmes géométriques, relatifs à la somme des valeurs que prennent cette intégrale et cette fonction aux points communs à la courbe proposée, et à chacune des courbes d'un faisceau. On a développé spécialement des applications relatives aux aires, aux directions et aux longueurs.

La troisième Partie a pour but de faire les mêmes applications aux arcs de courbe qui s'expriment par une intégrale abélienne appartenant à la courbe : les courbes qui jouissent de cette propriété sont celles que Laguerre a nommées *courbes de direction*.

Comme conséquence de cette théorie, on détermine les courbes curieuses dont l'arc s'exprime par une intégrale abélienne de première espèce; elles jouissent de cette propriété que la somme des arcs interceptés sur elles par deux courbes quelconques de même degré est toujours nulle.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉNONCÉ DU PROBLÈME.

2. Soit $f(\xi, \eta) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique plane de genre p et de degré n; considérons une intégrale abélienne quelconque appartenant à cette courbe

$$I = \int \frac{Q(\xi, \eta)}{R(\xi, \eta)} d\xi,$$

où Q et R désignent respectivement des polynômes de degrés q et r.

Coupons la courbe $f = 0$ par deux courbes de degré m

$$F(\xi, \eta) - u_0 \varphi(\xi, \eta) = 0, \qquad F(\xi, \eta) - u \varphi(\xi, \eta) = 0,$$

u_0 et u désignant deux constantes; et soient

$$\xi_1^0, \quad \xi_2^0, \quad \ldots, \quad \xi_{mn}^0; \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_{mn}$$

les abscisses qui correspondent respectivement aux points d'intersection de ces courbes avec la courbe primitive.

On sait que l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \int_{\xi_i^0}^{\xi_i} \frac{Q(\xi, \eta)}{R(\xi, \eta)} d\xi$$

est la somme d'une fonction rationnelle et d'une fonction logarithmique des coefficients des fonctions f, F, φ et des paramètres u_0 et u. Pour calculer la valeur de cette expression, on peut, par exemple, décomposer l'intégrale I en éléments simples, c'est-à-dire :

1° En intégrales de fonctions rationnelles de ξ;

2° En intégrales abéliennes de première espèce;

3° En intégrales normales de seconde et de troisième espèce,

et calculer, en partant des théorèmes connus, les parties de la somme cherchée qui correspondent à chacun de ces éléments.

Cette méthode paraît être un peu compliquée au point de vue des applications; nous nous proposons, dans ce qui suit, d'établir une formule simple, qui permettra d'évaluer directement la somme cherchée; nous nous appuierons, dans ce but, sur la théorie des fonctions fuchsiennes, qui nous a déjà permis, dans un travail antérieur [1], d'établir le théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce.

---

[1] *Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*: 1886).

Rappelons d'abord quelques considérations, développées dans ce travail, et qui se déduisent sans difficulté des belles recherches de M. Poincaré.

INTRODUCTION DES FONCTIONS FUCHSIENNES.

3. Les coordonnées des points d'une courbe algébrique plane, ayant pour équation en coordonnées ordinaires $f(\xi, \eta) = 0$, ou, en coordonnées homogènes ([1]), $f(x, y, z) = 0$, peuvent toujours se mettre sous la forme

$$(1) \qquad x = \theta_1(t), \qquad y = \theta_2(t), \qquad z = \theta_3(t);$$

θ_1, θ_2, θ_3 étant des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes d'une variable t, et de *degré* μ; c'est-à-dire telles qu'on ait, en désignant par $\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$ une quelconque des substitutions du groupe fuchsien G qui correspond à ces fonctions

$$\theta_i\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right) = \theta_i(t)(\gamma t + \delta)^{2\mu},$$

en supposant $\alpha\delta - \beta\gamma$ égal à l'unité.

Le polygone fuchsien R_0, qui correspond au groupe G, appartient à la première famille de M. Poincaré; il a $4p$ côtés ([2]); les côtés opposés sont conjugués deux à deux, c'est-à-dire transformés l'un dans l'autre par une des substitutions de G, et la somme des angles est égale à 2π.

La courbe représentée par les équations (1) est de genre p; son degré n est égal à $2\mu(p-1) - k$, k désignant le nombre des zéros communs aux trois fonctions θ_1, θ_2, θ_3, dans l'intérieur du polygone R_0.

([1]) Dans tout ce qui suit, ξ et η désigneront des coordonnées cartésiennes; x, y, z des coordonnées homogènes : on passera d'un système à l'autre en posant $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$.

([2]) Si la courbe $f = 0$ était unicursale, on aurait recours à des polygones fuchsiens de la première famille, de genre zéro, et d'un nombre pair de côtés : les démonstrations seraient les mêmes que dans le cas général.

Rappelons enfin une propriété du polygone R_0 qui nous sera utile plus loin. Soient ab et $a_1 b_1$ deux côtés opposés de ce polygone, tels que les points a_1 et b_1 soient respectivement les transformés des points a et b par la substitution de G qui transforme ab en $a_1 b_1$: si l'on décrit le périmètre de R_0 en partant de a, dans le sens ab, le côté opposé sera parcouru dans le sens $b_1 a_1$.

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE FONDAMENTALE.

4. Cela posé, rendons l'intégrale I homogène en y remplaçant ξ et η par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, et substituons à x, y, z les valeurs $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$, en fonction thêtafuchsienne de t. Il vient

$$\mathrm{I} = \int \frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)} \frac{x'z - xz'}{z^{q-r+2}} dt,$$

x', y', z' désignant les dérivées de x, y, z par rapport à t.

Posons, pour abréger

$$\frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)} \frac{x'z - xz'}{z^{q-r+2}} = \zeta(t).$$

On a

$$\mathrm{I} = \int \zeta(t)\, dt.$$

Je dis que la fonction $\zeta(t)$ est une fonction thêtafuchsienne de degré un. On peut écrire en effet

$$\zeta(t) = \frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z) z^{q-r}} \frac{d}{dt} \left[\frac{x(t)}{z(t)}\right].$$

Or $\frac{Q}{R z^{q-r}}$ est une fonction fuchsienne de t, de groupe G, puisque le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de même degré q, en x, y, z, et que x, y, z sont des fonctions thêtafuchsiennes de groupe G et de même *degré* μ. La fonction $\frac{x}{z}(t)$ est pour la même raison une fonction fuchsienne, et l'on a

$$\frac{x}{z}\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)=\frac{x}{z}(t);$$

d'où, en dérivant,

$$\frac{x'z-xz'}{z^2}\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)=\frac{x'z-xz'}{z^2}(t)(\gamma t+\delta)^2.$$

Par suite, on a bien

$$\zeta\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)=\zeta(t)(\gamma t+\delta)^2.$$

Pour évaluer la somme des intégrales I entre les points d'intersection de $f=0$ avec les courbes $F-u_0\,\varphi=0$, $F-u\,\varphi=0$, considérons l'intégrale

$$J=\int\frac{\zeta(t)\,dt}{\frac{F}{\varphi}-u},$$

F et φ étant les polynômes $F(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$, de degré m, où l'on a remplacé x, y, z par leurs valeurs en fonction thêtafuchsienne de t.

Je dis que la valeur de cette intégrale, le long du polygone R_0, est nulle.

Soient, en effet : t un point quelconque d'un côté ab, de R_0; t_1 le point correspondant sur le côté opposé a_1b_1, transformé de ab par la substitution $\left(t, \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)$.

Les éléments de l'intégrale J qui correspondent à ces deux points sont, puisque les côtés ab et a_1b_1 sont parcourus en sens contraire, comme on l'a fait remarquer plus haut,

$$\frac{\zeta(t)\,dt}{\frac{F}{\varphi}(t)-u}\quad\text{et}\quad-\frac{\zeta(t_1)\,dt_1}{\frac{F}{\varphi}(t_1)-u}.$$

Or on a

$$t_1=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta},\qquad dt_1=dt(\gamma t+\delta)^2.$$

D'un autre côté, $\frac{F}{\varphi}(t)$ est une fonction fuchsienne de t, de groupe G, puisque $F(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$ sont des fonctions thêtafuchsiennes de même degré; il en résulte qu'on a, d'après ce qui précède :

$$\frac{\zeta(t_1)\,dt_1}{\frac{F}{\varphi}(t_1)-u} = \frac{\zeta(t)\,dt}{\frac{F}{\varphi}(t)-u},$$

et l'on voit que les éléments de l'intégrale J se détruisent deux à deux.

On a donc bien, le long de R_0,

$$J = 0.$$

Il résulte de là que la somme des résidus de la fonction uniforme de t

$$\Theta(t) = \frac{\zeta(t)}{\frac{F}{\varphi}(t)-u} = \frac{Q(x'z-xz')}{R\,z^{q-r+2}\left(\frac{F}{\varphi}-u\right)} = \frac{Q}{R\,z^{q-r}}\,\frac{1}{\frac{F}{\varphi}-u}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{z}\right),$$

dans l'intérieur de R_0, est nulle.

C'est en évaluant cette somme et en l'égalant à zéro, que nous arriverons à la formule que nous avons en vue.

5. Déterminons d'abord les infinis de $\Theta(t)$. Si l'on observe que cette fonction, mise sous la troisième forme ci-dessus, est homogène et de degré zéro en x, y, z, et par suite ne devient pas infinie pour la valeur de l'un des k zéros communs aux trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, on voit que les infinis de $\Theta(t)$ sont :

1° Les arguments des rn points communs aux courbes $f = 0$, $R = 0$, à moins que l'un ou plusieurs d'entre eux n'annulent aussi le numérateur de $\Theta(t)$, mis sous la seconde forme;

2° Les arguments des points à l'infini sur $f = 0$: ces arguments sont des infinis d'ordre $q-r+2$; si $q-r+2$ est égal ou inférieur à zéro, ils ne sont plus des infinis;

3° Les arguments des points communs à la courbe $f = 0$ et à la courbe $F - u\varphi = 0$.

Les résidus qui correspondent aux infinis de cette dernière catégorie prennent une forme remarquable. Soit α l'argument de l'un des points considérés; on a, pour le résidu, en supposant que α soit un zéro simple de $\frac{F}{\varphi} - u$,

$$r_\alpha = \frac{\zeta(\alpha)}{\left(\frac{F}{\varphi}\right)'_\alpha}.$$

Or, si dans la relation $\frac{F}{\varphi}(\alpha) - u = 0$, on considère α comme fonction de u, on a, en différentiant,

$$\left(\frac{F}{\varphi}\right)'_\alpha = \frac{du}{d\alpha};$$

d'où

$$r_\alpha = \frac{\zeta(\alpha)\,d\alpha}{du} = \frac{dI_\alpha}{du},$$

en désignant par dI_α la variation de l'intégrale I quand on passe du point d'argument α, de la courbe $f = 0$, situé sur la courbe $F - u\varphi = 0$, au point d'argument $\alpha + d\alpha$, situé sur la courbe $F - (u + du)\varphi = 0$.

FORMULE FONDAMENTALE.

6. Si donc on désigne par $\sum r_\beta$ la somme des résidus de la fonction

$$\Theta(t) = \frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)} \frac{x'z - xz'}{z^{q-r+2}\left[\frac{F(x, y, z)}{\varphi(x, y, z)} - u\right]} \tag{2}$$

par rapport aux zéros de $R[x(t), y(t), z(t)]$; par $\sum r_\gamma$ la somme des résidus de la même fonction par rapport aux zéros de $z^{q-r+2} = 0$, on aura

$$\sum \frac{dI}{du} = -\sum (r_\beta + r_\gamma); \tag{3}$$

d'où, en intégrant par rapport à u, entre les limites u_0 et u,

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \int_{\xi_i^0}^{\xi_i} \frac{Q(\xi, \eta)}{R(\xi, \eta)} d\xi = - \sum \int_{u_0}^{u} (r_\beta + r_\gamma)\, du. \tag{3 bis}$$

C'est la formule qu'il s'agissait d'établir : on voit qu'on est ramené à calculer les résidus de la fonction $\Theta(t)$, ce qui ne présente aucune difficulté.

FORMES DIVERSES DE LA FORMULE FONDAMENTALE.

7. On peut d'ailleurs mettre cette formule sous une forme un peu plus simple. On a en effet, en coordonnées homogènes,

$$\mathrm{I} = \int \frac{\mathrm{Q}(x, y, z)}{\mathrm{R}(x, y, z)} \frac{z\,dx - x\,dz}{z^{q-r+2}},$$

ou

$$\mathrm{I} = \int \frac{\mathrm{Q}(x, y, z)}{\mathrm{S}(x, y, z)} (z\,dx - x\,dz),$$

Q et S étant des polynômes homogènes en x, y, z dont les degrés sont respectivement q et $q+2$. La formule (3 *bis*) devient alors

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=mn} \int_{x_i^0}^{x_i} \frac{\mathrm{Q}(x, y, z)}{\mathrm{S}(x, y, z)} (z\,dx - x\,dz) = -\sum \int_{u_0}^{u} r_\beta\,du,$$

en désignant par $\sum r_\beta$ la somme des résidus, par rapport aux zéros de $\mathrm{S}(x, y, z)$ de la fonction

$$(5) \qquad \Theta(t) = \frac{\mathrm{Q}(x, y, z)}{\mathrm{S}(x, y, z)} \frac{x'z - z'x}{\frac{\mathrm{F}}{\varphi}(x, y, z) - u}.$$

Plus simplement encore, dans le cas où l'intégrale I reste finie pour les points situés à l'infini sur la courbe $f(\xi, \eta) = 0$, on a

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{i=mn} \int_{\xi_i^0}^{\xi_i} \frac{\mathrm{Q}(\xi, \eta)}{\mathrm{S}(\xi, \eta)} d\xi = -\sum \int_{u_0}^{u} r_\beta\,du,$$

en désignant par Σr_β la somme des résidus, par rapport aux zéros de

$S(\xi, \eta)$, de la fonction

$$(7) \qquad \Theta(t) = \frac{Q(\xi, \eta)}{S(\xi, \eta)} \frac{\frac{d\xi}{dt}}{\frac{F}{\varphi}(\xi, \eta) - u}.$$

8. *Remarque.* — Il est évident *a priori* que les expressions $\sum (r_\beta + r_\gamma)$ ou $\sum r_\beta$, qui figurent dans les seconds membres des équations (3), (4) et (6), doivent être indépendantes des paramètres qui caractérisent le groupe fuchsien G, et ne dépendre que d'éléments géométriques appartenant à la courbe $f = 0$.

On peut d'ailleurs s'en rendre compte comme il suit :

Soit r_β le résidu de la fonction $\Theta(t)$, mise par exemple sous la forme (7), par rapport à un zéro, β, de $S(\xi, \eta)$, correspondant à un point ξ_β, η_β de la courbe $f = 0$.

La valeur de $2\pi i r_\beta$ est égale à l'intégrale $\int \Theta(t)\, dt$ le long d'un petit cercle enveloppant le point β et, par suite, si l'on passe du plan de la variable t au plan de la variable ξ, cette valeur est celle de l'intégrale

$$\int \Theta\, dt = \int \frac{Q(\xi, \eta)}{S(\xi, \eta)} \frac{d\xi}{\frac{F}{\varphi}(\xi, \eta) - u}$$

le long d'un petit contour enveloppant le point ξ_β : elle peut donc se calculer, indépendamment de la variable t, au moyen des valeurs de ξ, η et des dérivées de η par rapport à ξ, au point ξ_β.

CAS PARTICULIER DE LA FORMULE FONDAMENTALE.

9. Le cas où les infinis de la fonction $\Theta(t)$, correspondant aux zéros de S, sont tous simples, peuvent se traiter immédiatement.

Supposons, en effet, S étant toujours de degré $q + 2$, que la courbe $S = 0$ ne touche en aucun point la courbe $f = 0$. On aura, pour le résidu relatif à un infini β,

$$r_\beta = \left[\frac{Q(\xi, \eta) \frac{d\xi}{dt}}{\frac{dS}{dt}\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)} \right]_\beta ;$$

or,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dS}{d\eta}\frac{d\eta}{dt},$$

$$0 = \frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{df}{d\eta}\frac{d\eta}{dt},$$

d'où

$$r_\beta = \left[\frac{Q(\xi, \eta) f'_\eta}{(S'_\xi f'_\eta - S'_\eta f'_\xi)\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}\right]_\beta,$$

et, par suite, appelant X_1, Y_1; $X_2, Y_2, \ldots$ les coordonnées des points communs aux courbes $S = 0$, $f = 0$,

$$(8)\quad \sum_{i=1}^{i=mn} \int_{\xi_i^0}^{\xi_i} \frac{Q(\xi, \eta)}{S(\xi, \eta)} d\xi = \sum \frac{Q(X, Y)}{S'_X f'_Y - S'_Y f'_X} \log \frac{F(X, Y) - u\,\varphi(X, Y)}{F(X, Y) - u_0\,\varphi(X, Y)}.$$

La somme, dans le second membre, doit porter sur les systèmes de valeurs de X, Y, qui vérifient les équations $S = 0$, $f = 0$.

CONSÉQUENCES ANALYTIQUES.

On peut déduire de la formule fondamentale plusieurs conséquences analytiques intéressantes.

10. Les infinis de l'intégrale $\int \frac{Q}{S}(z\,dx - x\,dz)$ sont les points où la courbe $S = 0$ rencontre la courbe $f = 0$, à moins que les arguments de ces points n'annulent Q ou $z\,dx - x\,dz$.

Supposons que la courbe $\varphi(x, y, z) = 0$ passe par les points de $f = 0$, qui sont les infinis de l'intégrale, en tenant compte de leur multiplicité, c'est-à-dire que, si un point correspond à un zéro d'ordre h pour la fonction $S[x(t), y(t), z(t)]$, la courbe $\varphi = 0$ ait en ce point, avec $f = 0$, un contact d'ordre $h - 1$. Admettons, de plus, que la courbe $F(x, y, z) = 0$ ne passe par aucun de ces points. La fonction

$$\theta(t) = \frac{Q(x, y, z)}{S(x, y, z)} \frac{x'z - z'x}{\frac{F}{\varphi}(x, y, z) - u}$$

ne devient pas infinie pour les valeurs de t qui annulent S, puisque, pour ces points, la fonction $\frac{SF}{\varphi}(x, y, z)$ reste finie; $\Theta(t)$ n'a donc pas d'autres infinis que ceux qui annulent $\frac{F}{\varphi} - u$, et, par suite, les résidus r_β sont nuls. On a donc

$$\sum \int_{x_i^0}^{x_i} \frac{Q(x, y, z)}{S(x, y, z)}(z\,dx - x\,dz) = 0,$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Soit I *une intégrale abélienne quelconque relative à une courbe algébrique* $f(x, y, z) = 0$, *de degré n. La somme de mn intégrales* I, *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs de x, y, z, qui correspondent aux mn points d'intersection de la courbe* $f = 0$ *avec deux courbes quelconques de degré m est nulle, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par les courbes sécantes, il en est une qui passe par tous les points de la courbe* $f = 0$ *rendant l'intégrale infinie.*

La somme est nulle, en particulier, si les courbes sécantes coupent aux mêmes points la courbe $S = 0$, parce qu'alors une des courbes du faisceau comprend la courbe $S = 0$ elle-même.

Il y aurait *exception au théorème précédent,* si *toutes* les courbes du faisceau considéré passaient par un ou plusieurs des points qui rendent l'intégrale infinie, parce que, alors, F et φ s'annulant tous deux en ces points, la fonction $\Theta(t)$ pourrait y devenir infinie et l'on ne saurait affirmer que le résidu correspondant, r_β, est nul.

11. Le cas où le dénominateur S est divisible par f'_y est particulièrement intéressant : soit $S = Tf'_y$, T étant de degré $q + 3 - n$.

Nous allons montrer que la somme de ceux des résidus de la fonction $\Theta(t)$, qui correspondent aux zéros de f'_y, est nulle.

Les zéros de la fonction $f'_y(x, y, z)$ sont en effet de deux sortes : les uns correspondent aux points de contact des tangentes qu'on peut mener à la courbe $f(x, y, z) = 0$ par le point $x = 0$, $z = 0$; les autres correspondent aux points singuliers de cette courbe.

Si β est l'argument d'un des zéros de la première catégorie, la fonction $x'z - xz'$ s'annule pour $t = \beta$. On a, en effet,

$$x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + z'\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

et

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{x'z - xz'}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{y'x - yx'}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{z'y - zy'}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

et, par suite, si $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'annule sans que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'annulent également (c'est-à-dire si le point d'argument β n'est pas un point singulier), il faut qu'on ait, pour $t = \beta$,

$$x'z - xz' = 0.$$

Il en résulte que, pour chercher les résidus de la fonction

$$\Theta(t) = \frac{Q(x'z - xz')}{Tf'_y\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}$$

correspondant aux zéros de f'_y, on n'aura à tenir compte que des arguments des points singuliers de la courbe $f = 0$.

Soit, pour plus de simplicité, A un point double de cette courbe, de coordonnées a et b, auquel correspondent les valeurs γ et δ de l'argument t.

On aura, pour le résidu de $\Theta(t)$ relatif à l'une de ces valeurs, γ par exemple, en revenant à la forme (7) de $\Theta(t)$,

$$r_\gamma = \frac{Q(a, b)}{T(a, b)} \frac{1}{\frac{F}{\varphi}(a, b) - u} \left[\frac{\frac{d\xi}{dt}}{(f'_\eta)'}\right]_\gamma.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$f'_\eta = \psi(\xi, \eta),$$

on a

$$(f'_\eta)' = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dt}.$$

Le rapport $\frac{\frac{d\eta}{dt}}{\frac{d\xi}{dt}}$ a pour valeur, si l'on fait $t = \gamma$, le coefficient angulaire m_1 de la tangente à la branche γ de la courbe $f = 0$ au point A. On a ainsi

$$(9)\qquad r_\gamma + r_\delta = \frac{Q(a, b)}{T(a, b)} \frac{1}{\frac{F}{\varphi}(a, b) - u}\left(\frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + m_1\frac{\partial\psi}{\partial\eta}} + \frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + m_2\frac{\partial\psi}{\partial\eta}}\right),$$

où, dans $\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$, on remplace ξ et η par a et b.

Cela posé, si l'on désigne par Q_1 un polynôme quelconque en ξ et η, de degré $n - 3$, et si l'on considère l'intégrale

$$J_1 = \int \frac{Q_1}{f'_y}(z\,dx - x\,dz),$$

on voit, comme plus haut, qu'elle est nulle le long du polygone R_0. Si l'on choisit pour Q_1 le premier membre de l'équation d'une courbe de degré $n - 3$ présentant, en tous les points singuliers de la courbe $f = 0$, le point A excepté, le caractère d'une courbe adjointe (¹) (ce qui est toujours possible), les infinis de la fonction $\frac{Q_1}{f'_y}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)$ seront les quantités γ et δ. La somme des résidus de cette fonction étant nulle, on trouve, comme plus haut,

$$0 = r'_\gamma + r'_\delta = \left(\frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + m_1\frac{\partial\psi}{\partial\eta}} + \frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + m_2\frac{\partial\psi}{\partial\eta}}\right) Q_1(a, b),$$

et par suite, d'après (9),

$$r_\gamma + r_\delta = 0.$$

Il n'y aurait d'exception à ce raisonnement, qui s'étend sans diffi-

(¹) C'est-à-dire ayant en tout point multiple d'ordre p (autre que A) de la courbe $f = 0$ un point multiple d'ordre $p - 1$, comme la courbe $f'_y = 0$, et ne passant pas par A.

culté au cas des points multiples d'ordre supérieur à 2, que si, dans l'expression de $r_\gamma + r_\delta$, on ne pouvait pas mettre en facteur la quantité

$$\frac{Q(a, b)}{T(a, b)} \frac{1}{\frac{F}{\varphi}(a, b) - u},$$

c'est-à-dire si $T(a, b)$ était nul, cas où les infinis γ et δ ne seraient plus des infinis simples de $\Theta(t)$, ou si l'on avait à la fois

$$F(a, b) = \varphi(a, b) = 0,$$

parce qu'alors la fonction $\frac{F}{\varphi}(\xi, \eta)$ aurait deux valeurs différentes au point A, selon la branche de courbe que l'on considérerait.

Si l'on suppose donc que la courbe $T = 0$ ne passe par aucun des points singuliers de $f = 0$, et qu'aucun des points fixes du faisceau $F - u\varphi = 0$ ne coïncide avec l'un de ces points, on voit qu'on a la relation

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{i=mn} \int_{x_i^0}^{x_i} \frac{Q(x, y, z)}{f'_y T(x, y, z)}(z\,dx - x\,dz) = -\sum \int_{u_0}^{u} r_\beta\, du,$$

$\sum r_\beta$ désignant la somme des résidus, par rapport aux zéros de T, de la fonction de t,

$$\Theta(t) = \frac{Q}{f'_y T} \frac{(zx' - xz')}{\frac{F}{\varphi} - u}.$$

12. *Corollaire I.* — On en déduit, en s'appuyant sur les résultats obtenus plus haut, la proposition suivante :

Soit I *une intégrale abélienne de la forme*

$$I = \int \frac{Q(x, y, z)}{f'_y T(x, y, z)}(z\,dx - x\,dz),$$

relative à une courbe algébrique de degré n, $f = 0$.

La somme de mn intégrales I *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs de x, y, z, qui* *correspondent aux mn points d'intersection de la courbe $f=0$ avec deux courbes quelconques de degré m est nulle, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par les courbes sécantes, il en est une qui coupe la courbe $f=0$ aux points situés sur la courbe $T=0$, et qui rendent l'intégrale infinie.*

Il faut toutefois : 1° que la courbe $T=0$ ne passe par aucun des points singuliers de la courbe $f=0$; 2° qu'aucun des points fixes du faisceau déterminé par les courbes sécantes ne coïncide avec un de ces points, ou avec l'un des points communs aux courbes $f=0$, $T=0$, et rendant l'intégrale infinie.

13. *Corollaire II.* — Supposons, $Q(x,y,z)$ étant toujours de degré q, que $T(x,y,z)$ soit un polynôme de degré $q-n+3$, non divisible par z. Si la courbe $T=0$ ne touche en aucun point la courbe $f=0$, les zéros de $T(x,y,z)$ seront tous simples, et l'on aura, pour le résidu relatif à l'un de ces zéros, β,

$$r_\beta = \left[\frac{Qf'_\eta}{f'_\eta(T'_\xi f'_\eta - T'_\eta f'_\xi)\left(\frac{F}{\varphi}-u\right)}\right]_\beta = \left[\frac{Q}{(T'_\xi f'_\eta - T'_\eta f'_\xi)\left(\frac{F}{\varphi}-u\right)}\right]_\beta.$$

Par suite, en désignant par X, Y les coordonnées d'un point commun aux courbes $T=0$, $f=0$, il vient

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{i=mn}\int_{\xi_i^0}^{\xi_i}\frac{Q(\xi,\eta)}{f'_\eta T(\xi,\eta)}\,d\xi = \sum \frac{Q(X,Y)}{T'_X f'_Y - T'_Y f'_X}\log\frac{F(X,Y)-u\,\varphi(X,Y)}{F(X,Y)-u_0\,\varphi(X,Y)},$$

la somme s'étendant, dans le second membre, aux systèmes de valeurs de X, Y, qui vérifient simultanément les équations $f=0$, $T=0$.

On déduit de cette formule un théorème bien connu de Jacobi. Si l'on fait, en effet, $u=\infty$ dans la formule, il faut, pour que le second membre reste fini, qu'on ait l'identité

$$\sum \frac{Q(X,Y)}{T'_X f'_Y - T'_Y f'_X} = 0,$$

la somme étant étendue à tous les points communs aux courbes

$f(\xi, \eta) = 0$, $T(\xi, \eta) = 0$, de degrés respectifs n et h, et $Q(\xi, \eta)$ désignant un polynôme quelconque de degré $n + h - 3$, au plus, en ξ, η.

Il serait facile, d'après les considérations qui précèdent, de voir ce que devient le théorème de Jacobi quand le degré de Q surpasse $n + h - 3$; nous aurons occasion, dans un autre travail, de revenir sur ce sujet à un point de vue plus général.

14. *Corollaire III.* — Si T se réduit à une constante, $\sum r_\beta$ est nul, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Soit I *une intégrale abélienne de la forme*

$$I = \int \frac{Q(\xi, \eta)}{f'_\eta} d\xi,$$

relative à une courbe $f(\xi, \eta) = 0$, *de degré* n, Q *désignant un polynôme quelconque de degré* $n - 3$.

La somme de mn *intégrales* I *dont les limites inférieures et supérieures sont respectivement les systèmes de valeurs de* ξ, η, *qui correspondent aux points d'intersection de la courbe* $f = 0$ *avec deux courbes quelconques de degré* m *est nulle, si ces deux courbes ne passent simultanément par aucun des points singuliers de la courbe primitive.*

Dans le cas spécial où Q est une courbe adjointe à la courbe $f = 0$, la fonction

$$\Theta(t) = \frac{Q}{f'_\eta\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)} \frac{d\xi}{dt}$$

ne devient infinie que pour les zéros de $\frac{F}{\varphi} - u$, et la somme des mn intégrales I est nulle, *quelles que soient les courbes de même degré* $F = 0$, $\varphi = 0$.

C'est le théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce.

On retrouverait de même, sans difficulté, les théorèmes connus pour les intégrales normales de troisième et de seconde espèce.

APPLICATION AUX FONCTIONS RATIONNELLES.

15. La marche qu'on a suivie pour établir la formule fondamentale s'applique également au *cas où la différentielle abélienne est la différentielle d'une fonction rationnelle de* ξ, η.

Soit $U = \frac{Q(\xi, \eta)}{R(\xi, \eta)}$ cette fonction, Q et R étant des polynômes de degrés q et r respectivement.

Considérons l'intégrale

$$J = \int \frac{dU}{dt} \frac{dt}{\frac{F}{\varphi} - u}.$$

Elle est nulle, d'après ce qui précède, le long du polygone R_0; par suite, les résidus, dans ce polygone, de la fonction

$$\Theta(t) = \frac{dU}{dt} \frac{1}{\frac{F}{\varphi} - u} = \frac{R\frac{dQ}{dt} - Q\frac{dR}{dt}}{R^2\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}$$

ont une somme nulle, et l'on en conclut, comme plus haut, la relation

$$(12) \qquad \sum \frac{dU}{du} = -\sum r_\beta,$$

r_β étant le résidu de $\Theta(t)$ par rapport à un infini de cette fonction, autre qu'un zéro de $\frac{F}{\varphi} - u$.

Pour déterminer les infinis de cette nature de $\Theta(t)$, on doit distinguer deux cas, selon que q est inférieur ou supérieur à r.

Si l'on a $q \leqq r$, il est clair que la fonction $\frac{Q(\xi, \eta)}{R(\xi, \eta)} = \frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)} z^{r-q}$ ne devient pas infinie pour les zéros de $z(t)$, et il en est, par suite, de même de sa dérivée par rapport à t. En ce cas, les infinis correspondant aux résidus r_β sont les arguments des points communs aux courbes $f = 0$, $R = 0$. Si l'on a, au contraire, $q > r$, tout zéro de $z(t)$ est, en général, un infini d'ordre $q-r$ pour la fonction $\frac{Q}{R}$, et d'ordre $q-r+1$ pour sa dérivée. Ces infinis sont à ajouter à ceux qui proviennent des zéros de $R(\xi, \eta)$.

Il est clair qu'on discutera à la fois les deux cas en supposant ξ et η remplacés dans $\frac{Q}{R}(\xi, \eta)$ par $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$; on obtient ainsi une fonction $\frac{Q(x,y,z)}{V(x,y,z)}$, où l'on peut supposer que le numérateur et le dénominateur sont deux polynômes de même degré, q, l'un ou l'autre pouvant être divisible par une puissance de z. Les infinis de $\Theta(t)$ correspondant aux résidus r_β sont alors les zéros de $V(x,y,z)$. Soit β un de ces zéros, supposé simple : c'est un infini double de $\Theta(t)$. Pour calculer le résidu correspondant, il suffit de remarquer que le résidu de $\frac{dU}{dt}$, relatif à ce zéro, est nul, puisque U est une fonction monodrome de t. On trouve ainsi, évidemment,

$$r_\beta = -\rho_\beta \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\frac{F}{\varphi}(t) - u}\right]_\beta,$$

ρ_β étant le résidu correspondant de $U = \frac{Q}{V}$. Or on a, ainsi qu'on l'a déjà trouvé plusieurs fois,

$$\rho_\beta = \frac{Q f'_Y}{V'_X f'_Y - V'_Y f'_X},$$

en désignant par X, Y, Z les coordonnées du point d'argument β, commun aux courbes $f=0$, $V=0$, et il vient enfin

$$r_\beta = \frac{Q f'_Y}{V'_X f'_Y - V'_Y f'_X} \frac{1}{\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)^2} \frac{\varphi(F'_X f'_Y - F'_Y f'_X) - F(\varphi'_X f'_Y - \varphi'_Y f'_X)}{\varphi^2 f'_Y}.$$

On peut écrire

$$\varphi(F'_X f'_Y - F'_Y f'_X) - F(\varphi'_X f'_Y - \varphi'_Y f'_X) = -\begin{vmatrix} f'_X & f'_Y & 0 \\ F'_X & F'_Y & F \\ \varphi'_X & \varphi'_Y & \varphi \end{vmatrix} = \frac{Z}{m}\begin{vmatrix} f'_X & f'_Y & f'_Z \\ F'_X & F'_Y & F'_Z \\ \varphi'_X & \varphi'_Y & \varphi'_Z \end{vmatrix},$$

en tenant compte de la relation $f(X, Y, Z) = 0$ et en désignant toujours par m le degré des courbes $F = 0$, $\varphi = 0$.

On déduit de là, en intégrant, par rapport à u, les deux membres de (12), le résultat suivant.

Soient $\sum\limits_{u} \frac{Q}{V}$ et $\sum\limits_{u_0} \frac{Q}{V}$ les sommes respectives des valeurs que prend la fonction $\frac{Q}{V}(x, y, z)$ aux points communs à la courbe $f = 0$ et aux courbes $F - u\varphi = 0$, $F - u_0\varphi = 0$; on a

$$(13) \quad \sum_{u} \frac{Q}{V} - \sum_{u_0} \frac{Q}{V} = \sum \frac{Z}{m} \frac{Q(X,Y,Z)\,J(X,Y,Z)}{V'_X f'_Y - V'_Y f'_X} \frac{u - u_0}{[F(X,Y,Z) - u\varphi(X,Y,Z)][F(X,Y,Z) - u_0\varphi(X,Y,Z)]},$$

où la somme, dans le second membre, s'étend aux points X, Y, Z, communs aux courbes $f = 0$, $V = 0$, supposées n'avoir aucun contact, et où J désigne le déterminant jacobien

$$J = \begin{vmatrix} f'_X & f'_Y & f'_Z \\ F'_X & F'_Y & F'_Z \\ \varphi'_X & \varphi'_Y & \varphi'_Z \end{vmatrix}.$$

Cette formule montre, ce que nous savions déjà par la théorie générale, en raison de la forme de $\Theta(t)$, que le second membre de (13) s'annule dans le cas où l'une des courbes, $\varphi = 0$, du faisceau $F - u\varphi$ touche la courbe $f = 0$ aux points où celle-ci est coupée par la courbe $V = 0$; elle met de plus en évidence une particularité spéciale aux intégrales abéliennes dans le cas où ces intégrales sont des fonctions rationnelles de x, y, z : c'est que le second membre de (13) est nul quand la jacobienne des courbes $F = 0$, $\varphi = 0$ et $f = 0$ passe par les points communs à cette dernière et à la courbe $V = 0$, c'est-à-dire, puisque les points communs à la jacobienne et à f sont les points de contact avec cette dernière courbe des courbes du faisceau $F - u\varphi$ qui la touchent, lorsque les courbes du faisceau qui passent respectivement par les points d'intersection des courbes $V = 0$, $f = 0$ touchent en ces points cette dernière courbe.

On voit que ce résultat comprend, comme cas particulier, le cas rappelé plus haut, où l'*une* des courbes du faisceau touche f en *tous* les points communs aux courbes $f=0$, $V=0$.

On peut étendre ce théorème au cas où la courbe $V=0$ touche en certains points à la courbe $f=0$: nous allons démontrer, en effet, la proposition suivante :

La somme des valeurs que prend une fonction rationnelle $\frac{Q}{V}(x,y,z)$ *homogène et de degré zéro, aux points communs à une courbe algébrique* $f=0$, *et à chacune des courbes d'un faisceau reste constante, si les courbes du faisceau qui passent respectivement par les points d'intersection des courbes* $f=0$, $V=0$ *rendant la fonction* $\frac{Q}{V}$ *infinie, ont, en chacun de ces points avec la courbe* $f=0$, *un contact d'un ordre au moins égal à la différence entre les ordres des contacts de la courbe* $f=0$ *avec les courbes* $V=0$ *et* $Q=0$ *au point considéré* (¹).

On suppose toujours qu'aucun des points fixes du faisceau ne coïncide avec un des points communs aux courbes $f=0$, $V=0$, et rendant infinie la fonction $\frac{Q}{V}$.

Soit β l'argument d'un point où les courbes $V=0$, $Q=0$ ont respectivement avec $f=0$ des contacts d'ordre $\mu-1$ et $\nu-1$; soit $F-u_0\varphi=0$ l'équation d'une courbe du faisceau, ayant en ce point un contact d'ordre $\mu-\nu$ avec la courbe $f=0$.

Posons $t-\beta=\tau$.

On a

$$\Theta(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{V}\right)\frac{1}{\frac{F}{\varphi}-u}.$$

Par hypothèse, on a, aux environs du point $t=\beta$,

$$V(t)=a\tau^{\mu}+b\tau^{\mu+1}+\ldots,$$
$$Q(t)=a'\tau^{\nu}+b'\tau^{\nu+1}+\ldots.$$

(¹) Si la courbe $Q=0$ ne passe pas par le point considéré, on devra, pour appliquer le théorème, regarder l'ordre de son contact avec $f=0$ en ce point comme égal à -1. Il faudra alors que la courbe du faisceau qui passe par ce point y ait avec $f=0$ un contact plus élevé que la courbe $V=0$.

d'où

$$\frac{Q}{V} = \frac{g}{\tau^{\mu-\nu}} + \frac{h}{\tau^{\mu-\nu-1}} + \cdots + \frac{r}{\tau} + s + \ldots;$$

on a également

$$F(t) - u_0\varphi(t) = l\tau^{\mu-\nu+1} + m\tau^{\mu-\nu+2} + \ldots,$$

et le résidu correspondant de $\Theta(t)$ sera le coefficient de $\frac{1}{\tau}$ dans l'expression

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{g}{\tau^{\mu-\nu}} + \frac{h}{\tau^{\mu-\nu-1}} + \cdots + \frac{r}{\tau} + s + \ldots\right) \times \frac{1}{u_0 - u + \frac{l\tau^{\mu-\nu+1} - m\tau^{\mu-\nu+2} + \ldots}{\varphi(t)}}.$$

Or, $\varphi(t)$ n'est pas nul pour $t = \beta$, puisqu'une seule courbe du faisceau passe par le point β, et qu'on a supposé que cette courbe était $F - u_0\varphi = 0$.

Le deuxième facteur de l'expression précédente, ordonné suivant les puissances croissantes de τ, est donc de la forme

$$\frac{1}{u_0 - u} + k\tau^{\mu-\nu+1} + j\tau^{\mu-\nu+2} + \ldots,$$

et comme le premier ne renferme ni terme en $\frac{1}{\tau}$ ni terme en $\frac{1}{\tau^{\mu-\nu+2}}$, le résidu est nul. C. Q. F. D.

16. On peut donner une formule analogue pour exprimer le produit des valeurs que prend la fonction $\frac{Q}{V}$ aux points communs à la courbe $f = 0$ et à la courbe $F - u\varphi = 0$.

Soient $\prod_u \frac{Q}{V}$ ce produit, et $\prod_{u_0} \frac{Q}{V}$ le produit analogue pour les courbes $f = 0$, $F - u_0\varphi = 0$. On part, pour l'évaluer, de l'intégrale

$$J = \int \frac{1}{U}\frac{dU}{dt}\frac{dt}{\frac{F}{\varphi} - u};$$

en posant toujours $U = \frac{Q}{V}$, on trouve de même

$$(14) \qquad \sum \frac{1}{U}\frac{dU}{du} = -\sum r_\beta,$$

r_β désignant le résidu de la fonction

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}\frac{1}{\frac{F}{\varphi}-u} = \frac{V}{Q}\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{V}\right)\frac{1}{\frac{F}{\varphi}-u}$$

par rapport à un infini de cette fonction autre qu'un zéro de $\frac{F}{\varphi} - u$, c'est-à-dire par rapport à un zéro de $Q(x, y, z)$ ou de $V(x, y, z)$.

S'il s'agit d'un zéro de V, d'ordre de multiplicité μ, on a évidemment

$$r_\beta = \mu\left[\frac{V\frac{dQ}{dt} - Q\frac{dV}{dt}}{Q\frac{dV}{dt}\left(\frac{F}{\varphi}-u\right)}\right]_\beta = -\mu\left(\frac{1}{\frac{F}{\varphi}-u}\right)_\beta,$$

et s'il s'agit d'un zéro de Q, d'ordre de multiplicité ν,

$$r_\beta = \nu\left[\frac{V\frac{dQ}{dt} - Q\frac{dV}{dt}}{V\frac{dQ}{dt}\left(\frac{F}{\varphi}-u\right)}\right]_\beta = \nu\left(\frac{1}{\frac{F}{\varphi}-u}\right)_\beta.$$

Si maintenant on intègre les deux membres de la relation (14) par rapport à u, on a

$$\sum \log\frac{Q}{V} = \sum_{Q} \nu \log\left(\frac{F}{\varphi} - u\right) - \sum_{V} \mu \log\left(\frac{F}{\varphi} - u\right),$$

d'où

$$(15) \quad \prod_{u}\frac{Q}{V} = \prod_{u_0}\left(\frac{Q}{V}\right)\prod_{Q}\left[\frac{F(X,Y,Z) - u\,\varphi(X,Y,Z)}{F(X,Y,Z) - u_0\,\varphi(X,Y,Z)}\right]^\nu \prod_{V}\left[\frac{F(X,Y,Z) - u_0\,\varphi(X,Y,Z)}{F(X,Y,Z) - u\,\varphi(X,Y,Z)}\right]^\mu.$$

Dans le second membre, le produit $\prod_{Q}$ est étendu aux points X, Y, Z communs aux courbes $f=0$, $Q=0$; et le produit $\prod_V$ aux points X, Y, Z communs aux courbes $f=0$, $V=0$.

On en déduit, comme plus haut, les conséquences suivantes :

Le produit des valeurs que prend une fonction rationnelle $\frac{Q}{V}(x, y, z)$ *de degré zéro aux points communs à une courbe* $f=0$ *et à chacune des courbes d'un faisceau* $F-u\varphi=0$ *est constant, quand une des courbes du faisceau passe par les points d'intersection de la courbe* $f=0$ *avec les courbes* $Q=0$, $V=0$, *rendant la fonction* $\frac{Q}{V}$ *nulle ou infinie* (¹). *Ce produit est constant, en particulier, si l'une des courbes du faisceau comprend la courbe* $QV=0$, *c'est-à-dire si toutes les courbes du faisceau rencontrent aux mêmes points les courbes* $Q=0$, $V=0$.

17. Le théorème démontré au n° **15** est susceptible d'une conséquence intéressante, dont nous ferons quelques applications, et que, pour cette raison, nous placerons à la suite de la théorie générale.

Supposons que les points de la courbe $f=0$, où la fonction rationnelle $\frac{Q}{V}(x, y, z)$ de degré zéro devient infinie, soient tous des points d'inflexion de f, et que la fonction $\frac{Q}{V}$ soit infinie du premier ordre en chacun de ces points.

Prenons pour faisceau sécant le faisceau des courbes qui coupent respectivement $f=0$ aux points de contact des tangentes communes à cette courbe et à chacune des courbes d'un faisceau *tangentiel* donné.

Je dis que la somme des valeurs de la fonction $\frac{Q}{V}$ aux points communs à $f=0$ et à chacune des courbes du faisceau ponctuel considéré demeure constante.

Il suffit, pour cela, de montrer que la courbe du faisceau ponctuel qui passe par un des points d'inflexion donnés sur la courbe $f=0$ touche

---

(¹) Il suffit que la courbe du faisceau considérée *passe* par les points désignés, quel que soit le nombre des intersections de la courbe $f=0$ avec les courbes $Q=0$, $V=0$, confondues en chacun de ces points.

cette courbe en ce point, ce qui est évident, puisque la tangente d'inflexion correspondante doit être comptée deux fois parmi les tangentes communes à la courbe $f=0$ et à la courbe du faisceau tangentiel qui touche cette droite. Donc :

Soit $\frac{Q}{V}(x, y, z)$ *une fonction rationnelle quelconque, de degré zéro, ne devenant infinie, sur une courbe algébrique* $f(x, y, z) = 0$, *qu'en des points d'inflexion de cette courbe, et étant infinie du premier ordre seulement en ces points* (¹).

La somme des valeurs que prend cette fonction aux points de contact de la courbe $f=0$ *et des tangentes communes à cette courbe et à une autre courbe algébrique de classe donnée reste fixe quand cette dernière varie d'une manière quelconque, mais sans toucher* CONSTAMMENT *une des tangentes menée à la courbe primitive en un des points d'inflexion considérés.*

(¹) Le sens de cette expression est le suivant : Si $V=0$ a un contact d'ordre $\mu-1$ avec $f=0$ au point considéré, il faut que $Q=0$ ait avec cette dernière courbe, au même point, un contact d'ordre $\mu-2$.

DEUXIÈME PARTIE.

En appliquant à des différentielles algébriques ou à des fonctions rationnelles des coordonnées ayant, par rapport à la courbe $f=0$, une signification géométrique, les formules et les théorèmes démontrés dans la première Partie de ce travail, on obtient des propositions géométriques nombreuses, dont quelques-unes méritent d'être mises en évidence.

Nous les classerons en propositions relatives aux aires, aux directions et aux longueurs. Celles qui concernent spécialement les arcs de courbe, dans le cas où ces arcs s'expriment par une intégrale abélienne, feront l'objet de la troisième Partie de notre travail.

PROPOSITIONS RELATIVES AUX AIRES.

18. L'aire élémentaire comprise entre les deux points ξ, η; $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$ de la courbe $f=0$ et les rayons vecteurs qui joignent ces points à l'origine des coordonnées a pour expression

$$da=-\eta\, d\xi+\xi\, d\eta=\frac{1}{z^3}\left[-y(z\,dx-x\,dz)+x(z\,dy-y\,dz)\right];$$

or on a

$$\begin{gathered} xf'_x+\ \ yf'_y+\ \ zf'_z=nf=0, \\ dx\,f'_x+dy\,f'_y+dz\,f'_z=0; \end{gathered}$$

on en conclut

$$da=\frac{1}{z^2}\frac{f'_z}{f'_y}(z\,dx-x\,dz).$$

La fonction $\Theta(t)$ est ici

$$\Theta(t)=\frac{f'_z}{z^2 f'_y}\,\frac{(zx'-xz')}{\left(\frac{F}{\varphi}-u\right)}.$$

Elle ne devient infinie que pour les valeurs de t qui annulent z^2; si φ est de la forme $z^2\varphi_1$ et si F ne s'annule pour aucune de ces valeurs, $\Theta(t)$ reste fini pour les mêmes valeurs, et les résidus r_β correspondants sont nuls. Donc :

Soit une courbe algébrique quelconque f; menons les rayons vecteurs qui joignent un point arbitraire du plan aux points communs à f et à une courbe algébrique quelconque F *n'ayant avec la première aucune direction asymptotique commune : la somme des aires décrites par ces rayons vecteurs est nulle si la courbe* F *se déplace en restant asymptote à elle-même* (¹).

19. On peut donner sur les aires un théorème beaucoup plus général, et qui fournit une interprétation curieuse d'une des propositions algébriques exposées plus haut (**14**).

Proposons-nous de chercher l'aire élémentaire comprise entre les courbes $f=0$, $F-u\varphi=0$, $f+\varepsilon\psi=0$, $F-(u+du)\varphi=0$, au voisinage du point ξ, η, commun aux courbes $F-u\varphi=0$, $f=0$.

Dans ces équations, ε désigne une quantité infiniment petite, indépendante de u.

Soient $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$ les coordonnées du point voisin de ξ, η situé sur les courbes $f=0$, $F-(u+du)\varphi=0$, $\xi+\delta\xi$, $\eta+\delta\eta$, celles du point voisin situé sur les courbes $F-u\varphi=0$, $f+\varepsilon\psi=0$. On a, pour l'aire cherchée, à un facteur constant près,

$$da = d\xi\,\delta\eta - d\eta\,\delta\xi;$$

or

$$\begin{aligned} \delta\xi[F'_\xi - u\varphi'_\xi] + \delta\eta[F'_\eta - u\varphi'_\eta] &= 0,\\ \delta\xi\quad f'_\xi \quad + \delta\eta \quad f'_\eta \quad + \varepsilon\psi &= 0. \end{aligned}$$

On en conclut

$$da = \frac{\varepsilon\psi[(F'_\xi - u\varphi'_\xi)d\xi + (F'_\eta - u\varphi'_\eta)d\eta]}{f'_\xi[F'_\eta - u\varphi'_\eta] - f'_\eta[F'_\xi - u\varphi'_\xi]},$$

(¹) Plus généralement cette somme reste nulle si l'on prend successivement pour F toutes les courbes d'un faisceau comprenant une courbe qui admet pour asymptotes toutes les asymptotes de f.

et, en tenant compte de la relation

$$o = d\xi f'_\xi + d\eta f'_\eta,$$

il vient

$$da = \varepsilon \frac{\psi\, d\xi}{f'_y},$$

Supposons que ψ soit de degré $n-q$, n désignant toujours le degré de $f=0$; on aura, en revenant aux coordonnées homogènes,

$$da = \varepsilon \frac{\psi}{z^{3-q} f'_y} (z\, dx - x\, dz)$$

et

$$\Theta(t) = \varepsilon \frac{\psi(zx' - xz')}{z^{3-q} f'_y \left[\frac{F}{\varphi} - u\right]}.$$

On n'a à s'occuper, pour le calcul des résidus r_β, que des zéros de z^{3-q}; ces zéros ne sont pas des infinis de $\Theta(t)$, si l'on a

$$\varphi = z^{3-q} \varphi_1,$$

et les quantités r_β sont nulles. On en conclut, en donnant successivement à q les valeurs 1 et 3, les propositions suivantes :

La somme des aires comprises entre deux courbes asymptotes et deux courbes asymptotiques (¹) *quelconques est nulle.*

La somme des aires comprises entre deux courbes quelconques, de même degré, et deux courbes osculatrices entre elles en tous leurs points à l'infini est nulle.

On doit admettre toutefois que les deux groupes de courbes n'ont aucune direction asymptotique commune.

20. Plus généralement, ainsi que cela résulte du théorème du n° **12** :

La somme des aires comprises entre deux courbes asymptotes et

(¹) Nous disons que deux courbes sont asymptotes, si elles ont mêmes asymptotes; asymptotiques, si elles ont mêmes directions asymptotiques.

deux courbes quelconques de même degré est nulle si, parmi les courbes du faisceau déterminé par ces dernières, il en est une qui admette pour directions asymptotiques toutes les directions asymptotiques des deux premières.

La somme des aires comprises entre deux courbes asymptotiques et deux courbes quelconques de même degré est nulle, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par ces dernières, il en est une qui admette pour asymptotes toutes les asymptotes de l'une des premières.

La somme des aires comprises entre deux courbes de même degré et deux courbes quelconques, également de même degré, est nulle, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par ces dernières, il en est une qui oscule l'une des premières en tous ses points à l'infini.

En particulier :

La somme des aires illimitées comprises entre deux courbes osculatrices entre elles en tous leurs points à l'infini est nulle.

PROPOSITIONS RELATIVES AUX DIRECTIONS.

21. Soit θ l'angle que fait avec $O\xi$ la droite qui joint l'origine à un point ξ, η du plan; on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\eta}{\xi}$$

et

$$d\theta = \frac{\xi\, d\eta - \eta\, d\xi}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Si le point ξ, η appartient à la courbe $f(\xi, \eta) = 0$, il vient

$$d\theta = -\frac{\xi f'_\xi + \eta f'_\eta}{f'_\eta(\xi^2 + \eta^2)}\, d\xi$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$d\theta = \frac{f'_z}{f'_y(x^2 + y^2)}\,(x\, dz - z\, dx).$$

L'angle θ est donc donné par une intégrale abélienne, et les théorèmes de la première Partie permettent de calculer la somme des angles que font avec Ox les rayons vecteurs des points communs à la courbe $f = 0$ et à une courbe algébrique quelconque $F - u\varphi = 0$, ou plutôt la variation qu'éprouve cette somme quand on passe de la courbe sécante $F - u_0\varphi = 0$ à la courbe $F - u\varphi = 0$.

Pour simplifier le langage, nous adopterons une définition due à Laguerre.

Soient dans un plan deux systèmes de n droites A et B; prenons arbitrairement un axe fixe H, dans ce plan : si la somme des angles que font avec l'axe fixe les droites du système A est égale, à un multiple de π près, à la somme des angles que font avec ce même axe les droites du système B, on dira que les deux systèmes A et B ont même *orientation*. Ils jouiront évidemment de la même propriété relativement à tout axe situé dans le plan ([1]).

22. De la forme de la différentielle $d\theta$ et des théorèmes généraux de la première Partie résultent par suite les propositions suivantes :

Les deux systèmes, formés par les droites qui joignent respectivement un point fixe aux points où deux courbes algébriques de même degré sont traversées par une courbe algébrique, ont même orientation, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par les deux premières, il en est une qui passe par tous les points où la dernière rencontre le cercle de rayon nul ayant le point fixe pour centre.

En particulier :

Les deux systèmes ont même orientation, quelle que soit la dernière courbe, si les deux premières rencontrent le cercle de rayon nul aux mêmes points.

([1]) Laguerre, *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes* (*Bulletin de la Société philomathique*, p. 15; 1867).

23. Comme application de ces propositions générales, on peut énoncer, par exemple, les théorèmes suivants :

L'orientation du système des droites qui joignent un point fixe aux points d'intersection d'une courbe algébrique quelconque et d'un cercle ayant ce point pour centre est indépendante du rayon du cercle.

L'orientation du système des droites qui joignent un point fixe a aux points d'intersection d'une courbe algébrique et d'un cercle quelconques est la même que celle du système formé : 1° par les droites qui vont de a aux points d'intersection de la courbe et de l'axe radical du cercle et du point a; 2° par les directions asymptotiques de la courbe.

Ce théorème prend en particulier une forme très simple si l'on suppose que le point a est situé sur le cercle; l'axe radical du cercle et du point devient alors la tangente au cercle en a.

Si l'on coupe par une courbe algébrique un faisceau de coniques ayant une directrice et un foyer communs, les systèmes formés par les droites qui joignent le foyer aux points d'intersection de la courbe et de chacune des coniques ont même orientation : cette orientation est celle du système formé par les droites qui joignent le foyer aux points d'intersection de la courbe et de la directrice et par les droites opposées.

Ce théorème est une généralisation d'une proposition connue sur les coniques, et qu'on retrouve en supposant que la courbe sécante soit une droite.

24. On peut obtenir des propositions analogues, et plus élégantes, en considérant, au lieu des coordonnées ordinaires, des coordonnées tangentielles.

Soit $f(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = 0$, ou, en coordonnées homogènes, $f(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle d'une courbe, l'angle que fait avec $\mathrm{O}\xi$ la tangente $\mathrm{U}\xi + \mathrm{V}\eta + 1 = 0$ est défini par la relation

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}},$$

d'où

$$d\theta = \frac{V\,dU - U\,dV}{U^2 + V^2} = \frac{Vf'_V + Uf'_U}{U^2 + V^2}\,\frac{dU}{f'_U}$$

et, en coordonnées homogènes,

$$d\theta = \frac{f'_w}{(u^2 + v^2)f'_v}(w\,du - u\,dw).$$

On conclut de cette expression que l'orientation des tangentes communes à la courbe $f = 0$ et à deux courbes algébriques est la même si, parmi les courbes du faisceau tangentiel déterminé par ces dernières, il en est une qui touche les droites menées tangentiellement à la courbe $f = 0$ par les points $u + vi = 0$, $u - vi = 0$, c'est-à-dire par les points cycliques du plan. En d'autres termes :

Les deux systèmes de tangentes respectivement communes à deux courbes algébriques de même classe et à une courbe algébrique quelconque ont même orientation, si, parmi les courbes du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières, il en est une qui admette pour foyers tous les foyers de la dernière.

En particulier :

Les deux systèmes de tangentes respectivement communes à deux courbes homofocales et à une courbe algébrique quelconque ont même orientation (¹). (Laguerre.)

25. Ces propositions donnent lieu à de nombreuses conséquences; de la dernière on déduit en particulier les théorèmes suivants :

Si d'un point M *situé dans le plan d'une courbe de classe* n *on mène les* n *tangentes à la courbe, et si l'on joint le point* M *aux* n *foyers réels de la courbe, les deux systèmes de droites ainsi obtenus ont même orientation* (²).

(¹) Ce dernier théorème a été donné sans démonstration sous une autre forme par Laguerre (*Société philomathique*, p. 140; 1870).

(²) Ce théorème a été donné par Laguerre sans démonstration dans les *Comptes rendus* (janvier 1865).

Soient deux courbes de classes m et n, A *et* B : *le système des mn tangentes communes a même orientation que le système des mn droites qui joignent les m foyers réels de* A *aux n foyers réels de* B (¹).

La première des propositions du n° **24** fournit également des conséquences intéressantes :

Soit un faisceau tangentiel de courbes algébriques de classe n; par un foyer f de l'une d'entre elles, menons les n tangentes à l'une quelconque des autres : tous les systèmes ainsi obtenus à partir du point f ont même orientation.

On en conclut que :

Si l'on joint le point f aux n foyers réels d'une quelconque des courbes du faisceau tangentiel considéré et aux n foyers réels d'une autre de ces courbes, également quelconque, les deux systèmes ont même orientation.

En d'autres termes :

Le lieu des foyers des courbes d'un faisceau tangentiel, déterminé par deux courbes A *et* B *de classe n, est une courbe telle que, si l'on joint un de ses points aux n foyers réels de* A *et aux n foyers réels de* B, *les deux systèmes ainsi obtenus aient même orientation. Ce lieu ne dépend donc pas de tous les paramètres qui définissent les courbes* A *et* B; *il ne dépend que de la position des foyers de ces courbes.*

26. En appliquant ces résultats aux coniques, on obtient les propositions suivantes, dont quelques-unes sont aisées à démontrer directement.

Soient deux coniques A *et* B, *ayant respectivement pour foyers*

(¹) Ce théorème a été donné par Laguerre sans démonstration dans le *Bulletin de la Société philomathique*, p. 140; 1870.

réels les points a_1 et a_2, b_1 et b_2; soit C une conique quelconque inscrite dans le quadrilatère circonscrit à A et B : les deux faisceaux de droites qui joignent un foyer de C aux points a_1 et a_2, b_1 et b_2 ont mêmes bissectrices.

Le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit à deux coniques reste le même si ces deux coniques varient, leurs foyers respectifs demeurant fixes : la proposition précédente définit ce lieu.

Soient deux systèmes de coniques respectivement homofocales : les points d'intersection des tangentes communes à une courbe quelconque du premier système, et à une courbe quelconque du second, restent sur une courbe qui coïncide avec le lieu précédent.

Car ce lieu est celui des points tels que les droites ma_1 et ma_2 aient les mêmes bissectrices que les droites mb_1 et mb_2 : on forme sans difficulté son équation, en s'appuyant sur cette propriété, et l'on trouve une courbe du troisième degré.

PROPOSITIONS RELATIVES AUX LONGUEURS.

27. Nous commencerons par des théorèmes relatifs aux centres des moyennes distances d'un système de points, et dont quelques-uns ont été donnés par Liouville.

Soit $f(\xi, \eta) = 0$ une courbe algébrique de degré n; appliquons les théorèmes généraux de la première Partie à l'intégrale

$$\xi = \int d\xi.$$

On a, en coordonnées homogènes,

$$d\xi = \frac{z\,dx - x\,dz}{z^2}.$$

La fonction $\theta(t)$ est ici

$$\theta(t) = \frac{zx' - xz'}{z^2\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}.$$

On en conclut que la somme des abscisses des points communs à la courbe $f = 0$ et à l'une quelconque des courbes du faisceau $F - u\varphi = 0$ est constante, si, parmi ces courbes, il en est une qui admette pour asymptotes les asymptotes de f; et, en particulier, si toutes les courbes du faisceau sont asymptotes entre elles.

Les mêmes théorèmes s'appliquent à la somme des ordonnées.

Si les courbes du faisceau $F - u\varphi$ ont mêmes directions asymptotiques, c'est-à-dire si $\varphi = z\varphi_1$, on a

$$\theta(t) = \frac{zx' - xz'}{z\left[\frac{F}{\varphi_1} - uz\right]}.$$

Les infinis de $\theta(t)$, correspondant aux zéros de z sont alors simples, et l'on a, pour le résidu relatif à l'un de ces zéros, β,

$$r_\beta = \frac{-x_\beta}{\left(\frac{F}{\varphi_1}\right)_\beta}$$

quantité indépendante de u.

Par conséquent on aura

$$\sum \frac{d\xi}{du} = -\sum r_\beta = A;$$

A est une constante, et

$$\sum \xi = Au + B.$$

On aurait de même

$$\sum \eta = A'u + B'.$$

28. De tout ce qui précède, on déduit les propositions suivantes :

Le centre des moyennes distances des points communs à deux courbes algébriques quelconques reste fixe si l'une de ces courbes varie en restant asymptote à elle-même ([1]). (LIOUVILLE.)

Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe algébrique quelconque et aux courbes d'un faisceau reste

---

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 371; 1841.

fixe, si, parmi les courbes de ce faisceau, il en est une qui admette pour asymptotes toutes les asymptotes de la première courbe. (*Exemple :* la courbe fixe est une droite, asymptote à l'une des courbes du faisceau.)

Le centre des moyennes distances des points, communs à une courbe algébrique quelconque et à chacune des courbes d'un faisceau, décrit une droite, si les courbes du faisceau ont mêmes directions asymptotiques, ou si l'une d'elles admet pour directions asymptotiques toutes les directions asymptotiques de la première courbe.

Exemple. — *Le centre des moyennes distances des pieds des normales abaissées d'un point sur une courbe algébrique ne passant pas par les points cycliques du plan décrit une droite, quand le point considéré se meut lui-même sur une droite.*

Dans tous ces énoncés, on suppose que la courbe considérée et le faisceau des courbes sécantes n'ont aucune direction asymptotique commune; il est d'ailleurs inutile d'introduire explicitement cette restriction, puisque, si l'on se trouve placé dans le cas singulier dont il s'agit, un des points de rencontre de la courbe fixe et des courbes du faisceau est toujours à l'infini, et qu'il n'y a dès lors plus lieu de considérer le centre des moyennes distances de ces points.

29. Nous n'avons appliqué jusqu'ici à l'intégrale $\int d\xi$ que les propositions générales sur les intégrales abéliennes; nous pouvons aller plus loin, puisque cette intégrale est une fonction rationnelle de ξ, η; et la proposition du n° **15** nous donnera la conséquence suivante, plus générale que celles qui précèdent.

Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe algébrique quelconque et aux courbes d'un faisceau reste fixe, si chaque asymptote de la courbe est asymptote à l'une des courbes du faisceau.

On peut déduire de là des théorèmes intéressants, en faisant varier le degré et la nature du faisceau sécant, tout en satisfaisant toujours à la condition indiquée ; ainsi :

Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes menées à une courbe algébrique parallèlement à une même direction reste fixe quand cette direction varie. (CHASLES.)

30. Si toutes les asymptotes d'une courbe sont d'inflexion (la courbe n'étant pas tangente à la droite de l'infini), la fonction ξ ou $\frac{x}{z}$ ne devient infinie qu'en des points d'inflexion de cette courbe et, par suite, d'après (**17**).

Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes menées par un point quelconque du plan à une courbe algébrique ayant toutes ses asymptotes d'inflexion est un point fixe.

Ce point est également le centre des moyennes distances des points de contact avec la courbe considérée des tangentes communes à cette courbe et à une courbe algébrique quelconque.

En transformant ces propositions par la méthode de réciprocité, on arrive aux résultats suivants :

Soit une courbe telle que toutes les tangentes qu'on peut lui mener par un point soient des tangentes de rebroussement : la polaire de ce point par rapport aux tangentes menées à la courbe en ses points de rencontre avec une droite quelconque est une droite fixe.

Cette droite est également la polaire du point considéré par rapport aux tangentes menées à la courbe en ses points de rencontre avec une courbe algébrique quelconque.

Ces propositions s'appliquent, par exemple, à l'hypocycloïde à trois rebroussements, aux développées de coniques, etc.

31. Si, au lieu de l'intégrale $\int d\xi$, on considère $\int \frac{d\xi}{\xi}$, on est amené à la recherche du produit des abscisses qui correspondent aux points d'intersection des courbes $f = 0$, $F - u\varphi = 0$.

On a

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = \int \frac{x'z - xz'}{xz}\, dt,$$

et l'on peut par suite énoncer le théorème suivant :

Le produit des distances à une droite fixe D *des points communs à une courbe algébrique f, et à chacune des courbes d'un faisceau, est constant, si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admette pour directions asymptotiques toutes les directions asymptotiques de f, et qui passe par les points où cette dernière courbe rencontre la droite* D.

En particulier :

Ce produit est constant si toutes les courbes du faisceau ont mêmes directions asymptotiques et coupent aux mêmes points la droite D.

Exemple. — Si l'on coupe une courbe algébrique par une série de cercles ayant deux points communs, A et B, le produit des distances à la droite AB des points d'intersection de la courbe et d'un des cercles est constant.

32. En partant de l'intégrale

$$\frac{1}{\xi} = -\int \frac{d\xi}{\xi^2} = -\frac{x'z - xz'}{x^2}\, dt,$$

on arrive à des résultats semblables à ceux des n^{os} **28**, **29** et **30**. Ainsi, par exemple :

La somme des inverses des distances à une droite D *des points communs à une courbe algébrique et à chacune des courbes d'un faisceau reste constante si l'une des courbes du faisceau passe par les points d'intersection de la courbe primitive avec la droite* D *et y a les mêmes tangentes que cette courbe.*

Si tous les points où une droite D *rencontre une courbe algébrique* *sont des points d'inflexion, la somme des inverses des distances à cette droite des points de contact de la courbe avec les tangentes issues d'un point quelconque est constante.*

Ce théorème s'applique, par exemple, aux courbes du troisième ordre.

33. L'emploi des coordonnées tangentielles conduit également, sur les longueurs, à des propriétés intéressantes, dans l'énoncé desquelles figurent des systèmes de courbes homofocales, comme dans le cas des propositions sur les directions.

La distance de l'origine à la droite $U\xi + V\eta + 1 = 0$ est donnée par la formule

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{U^2 + V^2}},$$

d'où

$$-\frac{d\delta}{\delta} = \frac{U\,dU + V\,dV}{U^2 + V^2};$$

et, en coordonnées homogènes, en supposant qu'on ait pour équation de la courbe

$$f(u, v, w) = 0,$$

il vient

$$-\frac{d\delta}{\delta} = \frac{uf'_v - vf'_u}{f'_v(u^2 + v^2)w}(w\,du - u\,dw).$$

Il résulte de cette expression que le produit des distances de l'origine aux tangentes communes aux courbes

$$f = 0, \qquad F - \lambda(u^2 + v^2)w\varphi = 0$$

reste constant quand on fait varier le paramètre λ, et l'on exprimerait sans difficulté cette proposition sous une forme purement géométrique, d'ailleurs un peu compliquée.

Nous nous bornerons à examiner quelques cas particuliers.

34. Supposons d'abord que la courbe $f = 0$ soit une conique, ayant l'origine pour foyer. On aura

$$f(u, v, w) = u^2 + v^2 + w(au + bv + cw),$$

d'où

$$-\frac{d\delta}{\delta} = \frac{bu - av}{f'_v(u^2 + v^2)}(w\,du - u\,dw).$$

Le dénominateur ne contient plus le facteur w; on peut donc énoncer les théorèmes suivants :

Le produit des distances du foyer d'une conique aux tangentes, communes à cette conique et à chacune des courbes d'un faisceau tangentiel, est constant, si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admette pour foyers les foyers de la conique.

Le produit des distances du foyer d'une conique aux tangentes communes à cette conique et à chacune des courbes d'un système homofocal, quelconque d'ailleurs, est constant.

En d'autres termes :

Le produit des distances du foyer d'une conique aux $2n$ tangentes communes à cette conique et à une courbe algébrique de classe n est égal au produit des distances du même point aux $2n$ tangentes qu'on peut mener à la conique par les n foyers réels de la courbe.

35. Supposons, en second lieu, la courbe $f = 0$ étant quelconque, que l'on considère les tangentes communes à cette courbe et à des coniques homofocales, ayant l'origine pour foyer. L'équation générale de ces coniques sera

$$w(au + bv + cw) - \lambda(u^2 + v^2) = 0,$$

λ étant un paramètre variable, et la fonction $\Theta(t)$ correspondante sera

$$\Theta(t) = \frac{uf'_v - vf'_u}{f'_v w(u^2 + v^2)}\,\frac{wu' - uw'}{\dfrac{w(au + bv + cw)}{u^2 + v^2} - \lambda}.$$

Les zéros du dénominateur qui sont des infinis de $\Theta(t)$ sont ceux de w; le résidu correspondant à l'un d'eux β est

$$r_\beta = \left[\frac{uf'_v - vf'_u}{f'_v w'(u^2 + v^2)}\,\frac{uw'}{\lambda}\right]_\beta.$$

Or on a, pour $t = \beta$, puisque w est nul,

$$uf'_u + vf'_v = 0,$$

ce qui donne enfin

$$r_\beta = \frac{1}{\lambda};$$

d'où, en vertu de la formule fondamentale,

$$-\sum\int\frac{d\delta}{\delta} = -n\log\lambda,$$

n étant le nombre des zéros β, c'est-à-dire la classe de la courbe $f = 0$. Effectuant l'intégrale dans le premier membre, on trouve, en appelant $\delta_1, \delta_2, \ldots$ les distances de l'origine aux tangentes communes à $f = 0$ et à la courbe $w(au + bv + cw) - \lambda(u^2 + v^2) = 0$

$$\delta_1\delta_2\ldots = A\lambda^n,$$

A étant une constante indépendante de λ. Or, si l'on désigne par B le demi petit axe de la conique $w(au + bv + cw) - \lambda(u^2 + v^2) = 0$, on a

$$\lambda = B^2 c;$$

d'où cette proposition :

Soient une courbe algébrique C, de classe n, et une série de coniques homofocales, ayant pour foyers les points f et f' : le produit des distances du point f (ou f') aux $2n$ tangentes communes à C et à l'une des coniques est proportionnel à la puissance $2n$ du petit axe de cette conique.

56. Les coordonnées du pied de la normale menée de l'origine à la droite $U\xi + V\eta + 1 = 0$ sont

$$\xi = \frac{-U}{U^2 + V^2}, \qquad \eta = \frac{-V}{U^2 + V^2}.$$

On a

$$d\xi = \frac{dU(U^2 - V^2) + 2UV\,dV}{(U^2 + V^2)^2}$$

et, en coordonnées homogènes,

$$d\xi = \frac{(u^2 - v^2) f'_v - 2uv f'_u}{f'_v (u^2 + v^2)^2} (w\,du - u\,dw).$$

La fonction $\Theta(t)$ est ici

$$\Theta(t) = \frac{(u^2 - v^2) f'_v - 2uv f'_u}{f'_v (u^2 + v^2)^2} \, \frac{wu' - uw'}{\frac{F}{\varphi} - \lambda}.$$

En raisonnant comme au n° **27**, on voit que :

Le centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes communes à une courbe algébrique et à chacune des courbes d'un faisceau tangentiel homofocal, décrit une droite.

Le centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes communes à une courbe algébrique et à chacune des courbes d'un faisceau tangentiel décrit une droite quand, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admet pour foyers tous les foyers de la première courbe.

37. De même, si l'on observe que les courbes dont l'équation tangentielle est de la forme $F - \lambda(u^2 + v^2)^2 \varphi = 0$ ont à la fois mêmes foyers et mêmes points de contact avec les droites isotropes issues de ces foyers, c'est-à-dire mêmes foyers et mêmes *directrices*, en appelant *directrice* correspondant à un foyer la droite qui joint les points de contact de la courbe avec les deux droites isotropes passant par ce foyer, on peut énoncer les propositions suivantes :

Le centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque sur les tangentes communes à deux courbes algébriques reste fixe quand l'une de ces courbes varie en conservant ses foyers et les directrices correspondantes.

Le centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque sur les tangentes communes à une courbe algébrique et à chacune des courbes d'un faisceau tangentiel reste fixe, si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admette *pour foyers et pour directrices correspondantes les foyers et les directrices de la première.*

38. Soit toujours posé

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{U^2 + V^2}},$$

on a

$$\delta\, d\delta = \frac{(uf'_v - vf'_u)w}{f'_v(u^2+v^2)^2}(w\,du - u\,dw).$$

Il résulte de cette expression que :

La somme des carrés des distances d'un point quelconque aux tangentes, communes à deux courbes algébriques, reste constante, quand l'une de ces courbes varie en conservant ses foyers et les directrices correspondantes.

La somme des carrés des distances d'un point quelconque aux tangentes communes à une courbe algébrique et à chacune des courbes d'un faisceau tangentiel reste constante, si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admette pour foyers et pour directrices correspondantes les foyers et les directrices de la première.

39. Nous terminerons ce Chapitre par la remarque suivante, qui montre combien la méthode générale se plie aisément aux applications.

Considérons la courbe

$$U^2(aU + bV)^2 - \lambda(U^2 + V^2) = 0.$$

C'est l'enveloppe d'une droite de longueur égale à $\frac{b}{\sqrt{\lambda}}$, dont les deux extrémités s'appuient respectivement sur les droites

$$\eta = 0, \qquad a\eta - b\xi = 0.$$

En coordonnées homogènes, on a pour son équation

$$u^2(au + bv)^2 - \lambda(u^2 + v^2)w^2 = 0.$$

On déduirait aisément de là, par la méthode générale, les théorèmes suivants, dont quelques-uns ont été déjà démontrés plus haut, sous forme plus générale.

Soient C *une courbe quelconque de classe* n; D_1 *et* D_2 *deux droites quelconques, se coupant en un point* O.

Les tangentes à C *se partagent en systèmes de* $4n$ *droites, telles que les segments interceptés par les droites* D_1 *et* D_2 *sur les tangentes d'un même système soient égaux entre eux :*

1° *Tous ces systèmes ont même orientation.*

2° *Le produit des distances du point* O *aux tangentes d'un même système est constant.*

3° *La somme des distances du point* O *aux tangentes d'un même système est constante.*

4° *Le centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées de* O *sur les tangentes d'un même système décrit une droite.*

5° *Le centre des moyennes distances des points où les tangentes d'un même système rencontrent la droite* D_1 (*ou* D_2) *est fixe.*

6° *La polaire du point* O *par rapport aux tangentes d'un même système est une droite fixe.*

On comprend que les applications de cette nature peuvent être multipliées indéfiniment; comme elles ne présentent aucune difficulté spéciale, nous ne les poursuivrons pas ici, nous réservant d'exposer et de développer, dans un autre travail, les résultats principaux auxquels nous sommes parvenu par cette méthode.

TROISIÈME PARTIE.

DES COURBES DE DIRECTION.

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

40. Laguerre a le premier introduit dans la Géométrie la notion des *courbes de direction*, c'est-à-dire des courbes qui peuvent être regardées comme l'enveloppe de droites ayant un sens déterminé.

Au point de vue analytique, ces courbes sont telles que la distance d'un point quelconque du plan à une tangente soit fonction rationnelle des coordonnées du point de contact.

D'après cette définition, l'équation générale des courbes de direction sera, en coordonnées tangentielles,

$$(U^2+V^2)F^2(U,V)=\varphi^2(U,V),$$

F et φ étant deux polynômes entiers en U et V. En coordonnées cartésiennes rectangulaires, la courbe $f(\xi,\eta)=0$ sera de direction si l'expression $f_\xi'^2+f_\eta'^2$ est le carré d'une fonction rationnelle de ξ, η pour toutes les valeurs des variables satisfaisant à l'équation $f(\xi,\eta)=0$.

Il résulte de là que *l'arc d'une courbe de direction s'exprime par une intégrale abélienne appartenant à la courbe;* nous pourrons donc appliquer à ces arcs les théorèmes établis pour les intégrales abéliennes, et ces applications constitueront l'objet de la troisième Partie du présent travail. Toutefois, avant d'aborder cette étude, nous examinerons de plus près la forme de la différentielle de l'arc d'une courbe de direction, et nous indiquerons quelques propriétés qui se déduisent immédiatement de l'expression obtenue.

41. D'après ce qui précède, si la courbe $f(x,y,z)=0$ est de direction, on a identiquement

$$(1) \qquad N^2(f_x'^2 + f_y'^2) = M^2 + Pf,$$

M, N et P étant des polynômes entiers en x, y, z.

Cette identité peut se mettre sous la forme plus simple

$$f_x'^2 + f_y'^2 = \psi^2 + \chi f,$$

ψ et χ étant des polynômes entiers.

Pour le démontrer, nous rappellerons un théorème que nous avons démontré, dans un travail antérieur, sur l'*Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques* (¹).

Supposons les coordonnées des points de la courbe $f = 0$ mises sous la forme

$$x = \theta_1(t), \qquad y = \theta_2(t), \qquad z = \theta_3(t),$$

où θ_1, θ_2, θ_3 sont des fonctions thètafuchsiennes holomorphes de t, de degré μ et de genre p, ayant k zéros communs dans le polygone générateur; le degré n de la courbe $f = 0$ sera égal à $2\mu(p-1) - k$ (nº 3).

Cela posé, soit $\theta(t)$ une fonction thètafuchsienne holomorphe, de degré μq, admettant comme zéro multiple d'ordre q chacun des k zéros communs à x, y, z : elle sera fonction rationnelle de θ_1, θ_2, θ_3; pour que cette fonction rationnelle soit une fonction entière, il faut et il suffit (et c'est en cela que consiste le théorème démontré dans le travail précité) qu'on ait, en désignant par ε, ε' les arguments qui correspondent à l'un quelconque des points doubles de la courbe $f = 0$,

$$\theta(\varepsilon) : \theta_1^q(\varepsilon) = \theta(\varepsilon') : \theta_1^q(\varepsilon').$$

Remplaçons maintenant, dans l'identité (1), x, y, z par $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$; il vient, puisque $f = 0$,

$$(f_x'^2 + f_y'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{M}{N}.$$

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1886.

Cette équation montre que la fonction de t, $(f_x'^2 + f_y'^2)^{\frac{1}{2}}$, qui n'a évidemment pas d'infinis dans le polygone générateur, est une fonction thêtafuchsienne *holomorphe* de degré $\mu(n-1)$; elle admet, d'ailleurs, comme zéros multiples d'ordre $n-1$ chacun des zéros communs à θ_1, θ_2, θ_3; désignons-la par $\theta(t)$.

On a évidemment

$$\theta(\varepsilon) : \theta_1^{n-1}(\varepsilon) = \theta(\varepsilon') : \theta_1^{n-1}(\varepsilon'),$$

puisque, f_x' et f_y' s'annulant au point double $(\varepsilon, \varepsilon')$, $\theta(\varepsilon)$ et $\theta(\varepsilon')$ sont nuls. Par suite, $\theta(t)$ est une fonction entière, de degré $n-1$, de θ_1, θ_2, θ_3.

Soit $\psi(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ cette fonction.

On a, tout le long de la courbe $f = 0$,

$$f_x'^2 + f_y'^2 = \psi^2(x, y, z),$$

et, par suite, il vient identiquement, quels que soient x, y, z,

$$(2) \qquad f_x'^2 + f_y'^2 = \psi^2 + \chi f,$$

ψ et χ étant respectivement des polynômes de degrés $n-1$ et $n-2$.

De là résultent, pour l'arc de la courbe $f = 0$, les expressions

$$(3) \qquad ds = \frac{\psi}{f_\eta'} d\xi = \frac{\psi}{f_y'} \frac{z\,dx - x\,dz}{z^2}.$$

De l'identité (2) on déduit sans difficulté que la courbe $\psi = 0$ est une courbe adjointe de la courbe $f = 0$, et que, si cette dernière a un contact d'ordre h en un point avec la droite de l'infini $z = 0$, la courbe $\psi = 0$ a en ce point, avec la même droite, un contact d'ordre $h-1$.

Cette identité met également en évidence la propriété géométrique suivante des courbes de direction :

Les tangentes qu'on peut mener à une courbe de direction par les points cycliques de son plan, et dont les points de contact sont à distance finie, sont des tangentes d'inflexion.

En d'autres termes :

Les foyers, non singuliers et à distance finie, d'une courbe de direction, sont les centres de cercles de rayon nul biosculateurs à la courbe.

42. L'expression

$$ds = \frac{\psi}{f'_\eta}\,d\xi$$

montre que, si l'on s'est donné la fonction ψ, qui n'est déterminée qu'au signe près, l'élément d'arc compris entre les points ξ, η et $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$ a un signe et, par suite, un sens déterminé. Ce sens définit également celui de la semi-droite qui touche la courbe au point ξ, η. Si l'on change le signe de ψ, le sens change pour toute la courbe.

Il existe toutefois des courbes de direction pour lesquelles la fonction ψ a plusieurs valeurs différentes; ces courbes sont nécessairement décomposables en courbes de degré moindre.

Si l'on a, en effet,

$$f'^2_x + f'^2_y = \psi^2 + \chi f = \psi_1^2 + \chi_1 f,$$

on en conclut

$$(\psi - \psi_1)(\psi + \psi_1) = f(\chi_1 - \chi),$$

et, comme ψ et ψ_1 sont de degré $n-1$, tandis que f est de degré n, il faut que la courbe $f = 0$ se décompose en courbes de degré moindre, qui seront évidemment des courbes de direction.

Soit alors $f = F\varphi$, avec les relations

$$F'^2_x + F'^2_y = G^2 + DF,$$
$$\varphi'^2_x + \varphi'^2_y = \Gamma^2 + \Delta\varphi,$$

on a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} f'^2_x + f'^2_y &= \varphi^2(G^2 + DF) + F^2(\Gamma^2 + \Delta\varphi) + 2F\varphi(F'_x\varphi'_x + F'_y\varphi'_y)\\ &= (\varphi G - F\Gamma)^2 + AF\varphi\\ &= (\varphi G + F\Gamma)^2 + BF\varphi,\end{aligned}\right.$$

A et B étant des polynômes entiers. On voit ainsi que ψ a les quatre valeurs $\pm(\varphi G - F\Gamma)$ et $\pm(\varphi G + F\Gamma)$, qui correspondent évidemment aux quatre combinaisons que l'on peut faire en associant la courbe $F = 0$ ou cette courbe parcourue en sens inverse avec la courbe $\varphi = 0$ ou avec cette courbe parcourue en sens inverse.

43. Les courbes de direction jouent, dans la théorie des surfaces algébriques, un rôle important, qui n'a peut-être pas été remarqué, et que le théorème suivant met en évidence :

Toute ligne de courbure plane, non singulière, d'une surface algébrique est une courbe de direction, dans le cas où l'angle constant sous lequel son plan coupe la surface n'est ni nul ni droit.

Ou encore :

Tout plan qui coupe une surface algébrique, le long d'une courbe non singulière, sous un angle constant, qui n'est ni nul, ni droit, la coupe suivant une courbe de direction.

Soit, en effet, la surface $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$, coupée par le plan $\zeta = 0$ sous un angle V, tout le long de la courbe $f(\xi, \eta) = 0$.

On a

$$(5) \qquad F(\xi, \eta, \zeta) = f(\xi, \eta)\,\varphi(\xi, \eta, \zeta) + \zeta\chi(\xi, \eta, \zeta)$$

et, tout le long de la courbe $\zeta = 0$, $f(\xi, \eta) = 0$,

$$(6) \qquad F'^2_\xi + F'^2_\eta + F'^2_\zeta = \frac{1}{\cos^2 V} F'^2_\zeta.$$

Or, le long de cette courbe, on a, d'après (5),

$$F'_\xi = \varphi(\xi, \eta, 0) f'_\xi; \qquad F'_\eta = \varphi(\xi, \eta, 0) f'_\eta; \qquad F'_\zeta = \chi(\xi, \eta, 0).$$

La relation (6) devient

$$\varphi^2(\xi, \eta, 0)(f'^2_\xi + f'^2_\eta) = \chi^2(\xi, \eta, 0) \operatorname{tang}^2 V,$$

et, par suite, la courbe $f=0$ est bien de direction, si $\operatorname{tang} V$ n'est ni nul, ni infini, et si f'_ξ et f'_η ne sont pas nuls le long de la courbe.

De là résulte cette conséquence importante que les transformations qui conservent les lignes de courbure changent une courbe de direction en une autre courbe de direction; en particulier :

Toute transformation par rayons vecteurs réciproques dans le plan fait correspondre à une courbe de direction une autre courbe de direction.

Cette proposition, qu'on peut d'ailleurs vérifier directement, nous sera utile plus tard.

COURBES DE DIRECTION DU TROISIÈME ORDRE.

44. Les considérations qui précèdent vont nous permettre de trouver les courbes de direction les plus simples après la ligne droite et le cercle, c'est-à-dire les courbes de direction du troisième ordre.

Cherchons d'abord les courbes de direction du troisième ordre, ne touchant pas la droite de l'infini, ne passant pas par les points cycliques du plan et n'ayant pas de point singulier.

Si $f=0$ est l'équation d'une telle courbe, on a, comme toujours,

$$f'^2_x + f'^2_y = \psi^2 + \chi f.$$

Il résulte de cette équation que chacune des coniques $f'_x \pm i f'_y$ touche la courbe en trois points, situés sur la conique $\psi = 0$; les tangentes à $f=0$ en ces points passent, d'ailleurs, par l'un des points cycliques du plan : on peut donc mener par l'un de ces points, $z=0$, $\frac{y}{x}=i$ par exemple, trois tangentes à la conique $f'_x + i f'_y = 0$. Les coniques $f'_x \pm i f'_y = 0$ doivent, par suite, se réduire à une droite double. On a ainsi, en supposant $f(x, y)$ réel,

$$f'_x + i f'_y = (A + Bi)^2, \qquad f'_x - i f'_y = (A - Bi)^2;$$

d'où

$$f'_x = A^2 - B^2, \qquad f'_y = 2AB;$$

A et B sont deux polynômes réels du premier degré en x, y, z. Écrivons maintenant que les valeurs de f''_{xy} tirées de celles de f'_x et f'_y sont égales; nous arriverons ainsi à la forme de A et B et, par suite, à celle de f.

Sans entrer dans les détails de ce calcul, qui ne présente aucune difficulté, nous dirons seulement que, en prenant pour axe des ξ la droite $A = 0$, on arrive à trouver (¹)

$$f'_x = x^2 - y^2, \qquad f'_y = -2xy;$$

d'où

$$f = \tfrac{1}{3}x^3 - xy^2 + \lambda z^3 = 0,$$

λ étant une constante arbitraire. On peut écrire cette équation

$$(7) \qquad x^3 - 3xy^2 = a^3 z^3 \qquad \text{ou} \qquad \xi^3 - 3\xi\eta^2 = a^3.$$

On démontrerait ensuite, sans difficulté, qu'il n'existe pas de courbes de direction réelles du troisième ordre, indécomposables, sans point double, touchant la droite de l'infini ou passant par les points cycliques : il ne reste plus qu'à chercher les cubiques de direction à point double.

43. Si une cubique à point double est de direction, il faut, puisque les tangentes issues des points cycliques doivent être d'inflexion, et puisque la courbe n'a que trois points d'inflexion, que la cubique touche la droite de l'infini en trois points confondus, et admette deux autres points d'inflexion, à distance finie, tels que les tangentes en ces points passent respectivement par les points cycliques.

Son équation peut donc se mettre sous la forme

$$z(x^2 + y^2) = \lambda(x + az)^3.$$

Écrivant qu'elle a un point double, on trouve

$$27a\lambda = 4$$

(¹) On trouverait également dans le courant du calcul des courbes de direction du troisième ordre se décomposant en courbe de direction de degré moindre.

et on vérifie qu'elle est de direction. On a en effet

$$f_x'^2 + f_y'^2 = (x + az)^2[3\lambda(x + az) - \tfrac{4}{3}z]^2.$$

Nous avons donc une seconde catégorie de cubiques de direction données par l'équation

$$27m(\xi^2 + \eta^2) = (\xi + 4m)^3. \tag{8}$$

46. Les cubiques de direction sont, d'ailleurs, remarquables à plus d'un titre. Considérons d'abord celles de la première catégorie. Nous savons que les tangentes qu'on peut leur mener par les points cycliques du plan sont d'inflexion, et que les points de contact des trois tangentes issues d'un même point cyclique sont sur une droite. Comme on a

$$f_x' + if_y' = -3(y + ix)^2, \qquad f_x' - if_y' = -3(y - ix)^2,$$

on voit que les points de contact des tangentes issues d'un point cyclique sont sur la droite qui joint l'autre point cyclique à l'origine. Si l'on remarque, de plus, que les trois asymptotes sont des tangentes d'inflexion, et qu'elles concourent à l'origine, on peut énoncer la propriété suivante de la courbe :

Le triangle formé par l'origine et les deux points cycliques est tel que les tangentes qu'on peut mener à la courbe par l'un des sommets de ce triangle sont trois tangentes d'inflexion, et que leurs points de contact sont sur le côté opposé.

L'existence d'un pareil triangle caractérise une cubique *équianharmonique.*

Inversement, toute cubique équianharmonique peut être projetée suivant une courbe de direction : il suffit de faire coïncider les projections de deux des sommets de son triangle inflexionnel avec les points cycliques du nouveau plan.

En coordonnées polaires, l'équation des cubiques de direction prend une forme simple. Si l'on pose

$$\xi = \rho\cos\omega, \qquad \eta = \rho\sin\omega,$$

on trouve

$$\rho^3(\cos^3\omega - 3\cos\omega\sin^2\omega) = a^3 \qquad \text{ou} \qquad \rho^3\cos 3\omega = a^3.$$

Ces courbes appartiennent donc à la classe si remarquable des courbes $\rho^n = A\cos n\omega$, sur lesquelles nous aurons à revenir plus tard.

Il nous sera également utile, dans la suite, de connaître l'expression des coordonnées des points de la cubique (7) en fonction elliptique d'un paramètre.

Soit pu la fonction de M. Weierstrass, correspondant au cas de $g_2 = 0$. On a

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_3.$$

Si l'on pose

$$\xi = \frac{a g_3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{pu},$$

$$\eta = -\frac{a g_3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\sqrt{-3g_3}}\frac{p'u}{pu},$$

on trouve, en éliminant pu et $p'u$ entre ces trois relations,

$$\xi^3 - 3\xi\eta^2 = a^3.$$

Examinons maitenant les cubiques données par l'équation (8).

En coordonnées polaires, on a aisément

$$\rho^{\frac{1}{3}}\cos\tfrac{1}{3}\omega = m^{\frac{1}{3}},$$

équation d'une forme analogue à celle trouvée plus haut, et qu'on sait appartenir à la caustique par réflexion d'une parabole, les rayons lumineux étant perpendiculaires à l'axe.

PROPRIÉTÉS DES ARCS DES COURBES DE DIRECTION.

47. Soit

$$ds = \frac{\psi}{f'_\eta}d\xi = \frac{\psi}{f'_y}\frac{z\,dx - x\,dz}{z^2}$$

la différentielle de l'arc d'une courbe de direction, $f = 0$, de degré n.

La somme des arcs compris sur cette courbe, entre les points d'intersection de $f = 0$ avec les deux courbes de degré m, $F - u_0\varphi = 0$, $F - u\varphi = 0$, est donnée par la formule fondamentale établie dans la première Partie; elle est égale à $-\sum\int_{u_0}^{u} r_\beta\, du$, en désignant par Σr_β la somme des résidus, par rapport aux zéros de $z^2 f'_y$, de la fonction de t,

$$\Theta(t) = \frac{\psi(x'z - z'x)}{f'_y z^2\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}.$$

La courbe $\psi = 0$ étant une courbe adjointe, on n'a pas à s'occuper des zéros de f'_y qui correspondent à des points singuliers de $f = 0$ et qui donneraient des résidus nuls; on sait d'ailleurs que les autres zéros de f'_y annulent $x'z - z'x$; il n'y a donc à former que les résidus qui correspondent à des zéros β de z.

Avant d'aborder la question à ce point de vue général, nous énoncerons les propositions qui, d'après les principes posés dans la première Partie, se déduisent immédiatement de la forme de $\Theta(t)$.

1. *La somme des arcs interceptés sur une courbe de direction par deux courbes quelconques de même degré et n'ayant, avec la première, aucune direction asymptotique commune est nulle, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par ces dernières, il en est une qui admette pour asymptotes toutes les asymptotes de la courbe de direction.*

La somme des arcs interceptés sur une courbe de direction par deux courbes quelconques, ayant les mêmes asymptotes, est nulle, pourvu que les courbes sécantes n'aient, avec la proposée, aucune direction asymptotique commune.

Pour compléter ces propositions, il reste à examiner le cas où toutes les courbes du faisceau sécant, $F - u\varphi = 0$, passent par un ou plusieurs points à l'infini sur la courbe $f = 0$.

Si $F(t)$ admet q fois le zéro β, il faudra, pour que β n'annule pas le dénominateur de $\Theta(t)$, que $\varphi(t)$ admette $q + 2$ fois ce zéro; ce cas se présente en particulier si $\varphi(x, y, z)$ est de la forme $z^{q+2}\varphi_1(x, y, z)$. Par suite :

La somme des arcs à distance finie interceptés sur une courbe de direction par deux courbes de même degré ayant, avec la première, des contacts d'ordre p_1, p_2, ... en des points a_1, a_2, ... à l'infini, est nulle, si, parmi les courbes du faisceau déterminé par les courbes sécantes, il en est une qui ait, avec la courbe de direction, des contacts d'ordre p_1+2, p_2+2, ... aux points a_1, a_2, ...

Cette somme est nulle, en particulier, si les deux courbes sécantes ont entre elles, en TOUS *leurs points à l'infini, un contact d'ordre $p+2$, p désignant le plus grand des nombres p_1, p_2, ...*

INTERSECTION D'UNE COURBE DE DIRECTION ET D'UN FAISCEAU DE COURBES ASYMPTOTIQUES.

48. Avant d'examiner le cas général, où les courbes du faisceau sécant sont quelconques, il nous sera utile d'étudier, avec quelques détails, le cas où ces courbes sont asymptotiques entre elles, c'est-à-dire le cas où $\varphi(x, y, z)$ est de la forme $z\varphi_1(x, y, z)$, φ_1 étant un polynôme de degré $m-1$.

La fonction $\Theta(t)$ s'écrit alors

$$\Theta(t) = \frac{\psi(x'z - xz')}{f'_y z\left(\frac{F}{\varphi_1} - uz\right)}.$$

Supposons que la courbe $F=0$ ne passe par aucun des points à l'infini sur $f=0$. Les points à l'infini sur la courbe $f=0$ peuvent être des points ordinaires, à tangente distincte ou non de la droite de l'infini, des points multiples à branches séparées ou tangentes entre elles.

Soit β l'argument de l'un de ces points.

Si le point est simple, β est un zéro simple de $z(t)$; on peut, d'ailleurs, supposer que les axes des coordonnées ξ et η ont été choisis de façon que la courbe $f=0$ n'ait aucun point à l'infini dans la direction de ces axes; alors $x(\beta)$ et $y(\beta)$ ne sont pas nuls. On a, en ce cas, pour le résidu

$$-r_\beta = \left(\frac{\psi x \varphi_1}{f'_y F}\right)_\beta.$$

Si le point est simple et si la droite de l'infini a en ce point, avec la courbe, un contact d'ordre p, β est un zéro d'ordre $p+1$ de $z(t)$, et l'on a

$$-r_\beta = (p+1)\left(\frac{\psi x \varphi_1}{f'_y \mathrm{F}}\right)_\beta.$$

Si le point est un point multiple d'ordre h à branches séparées, les h valeurs de l'argument qui lui correspondent sont distinctes et le résidu qui correspond à chacune d'elles a la même forme que dans le cas du point ordinaire; si plusieurs branches de la courbe sont tangentes entre elles au point β, $p+1$ valeurs de l'argument sont égales, et l'on a pour le résidu correspondant la même expression que dans le cas du point où la droite de l'infini a un contact d'ordre p avec la courbe.

Dans tous les cas, on a, si β est l'argument d'un point à l'infini sur la courbe $f=0$,

$$\left[\frac{\psi}{f'_y}\right]_\beta = \left[\sqrt{1+\frac{f'^2_x}{f'^2_y}}\right]_\beta.$$

Or la relation

$$\frac{f'_x}{yz'-zy'} = \frac{f'_y}{zx'-xz'}$$

donne, dans tous les cas, pour $t=\beta$, puisque $x(\beta)$ et $y(\beta)$ sont différents de zéro, et que $z(t)$ est de la forme $(t-\beta)^q z_1$, z_1 ne s'annulant plus pour $t=\beta$,

$$\left[\frac{f'_x}{f'_y}\right]_\beta = -\frac{y}{x}.$$

On en tire

$$\left[\frac{\psi}{f'_y}\right]_\beta = \left[\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right]_\beta,$$

et par suite les deux expressions données pour r_β deviennent

$$\left[\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\,\frac{x\varphi_1}{\mathrm{F}}\right]_\beta \qquad \text{et} \qquad (p+1)\left[\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\,\frac{x\varphi_1}{\mathrm{F}}\right]_\beta.$$

On devra donner au radical, dans ces expressions, le signe de $\frac{\psi}{f'_y}$ pour $t=\beta$.

Cette valeur de t annulant z, il résulte des expressions précédentes que la valeur de r_β ne dépend, en supposant que les courbes $\mathrm{F}=0$ et $\varphi_1=0$ ne passent pas simultanément par le point β, que de la valeur de $\frac{y}{x}(\beta)$, c'est-à-dire de la direction asymptotique correspondante, et du signe de $\frac{\psi}{f'_y}$ pour $t = \beta$.

Or, d'une manière générale, on a, sur une courbe de direction,

$$ds = \frac{\psi}{f'_\eta} d\xi,$$

et le sens de l'arc élémentaire, par suite aussi celui de la tangente qui est le même, est déterminé par le signe de $\frac{\psi}{f'_\eta}$; inversement, si, en deux points a et b situés sur une même courbe de direction ou sur deux courbes de direction différentes, les tangentes sont parallèles et de même sens, les valeurs de $\frac{\psi}{f'_\eta}$ auront le même signe pour les deux courbes. En particulier, le signe de $\frac{\psi}{f'_y}$ sera le même, en un point à l'infini, commun à deux courbes de direction, si les asymptotes correspondantes des deux courbes sont parallèles et de même sens.

Il résulte de cette discussion que les valeurs des résidus r_β ne changent pas si l'on remplace la courbe $f = 0$ par une autre courbe de direction de même degré, ayant ses asymptotes parallèles à celles de la première et de même sens.

On peut, en particulier, choisir la courbe formée par les semi-droites menées par un point quelconque parallèlement aux asymptotes de $f = 0$, et de même sens que ces asymptotes : nous dirons que ce faisceau de semi-droites est *asymptotique* à la courbe de direction.

Si la courbe $f = 0$ a en un point un contact d'ordre q avec la droite de l'infini, ou si elle a en un point multiple à l'infini $q + 1$ branches tangentes entre elles, et correspondant à une même valeur de t, le faisceau de semi-droites asymptotiques comprendra $q + 1$ droites parallèles à la direction asymptotique correspondante, et toutes *de même sens*. Ce sens est, en effet, déterminé par le signe de $\frac{\psi}{f'_y}$, fonction qui n'a évidemment qu'une seule valeur pour la valeur unique de t qui correspond au point ou aux branches considérées.

Remarquons enfin que, dans tous les cas, et quelle que soit la nature du point à l'infini d'argument β, r_β est nul si ce point est l'un des points cycliques du plan : il n'y aurait d'exception que si F s'annulait pour $t = \beta$, c'est-à-dire si toutes les courbes du faisceau sécant passaient par le point considéré, cas que nous avons écarté.

49. De cette discussion résultent les théorèmes suivants :

II. *La somme des arcs interceptés sur une courbe de direction par deux courbes asymptotiques quelconques est égale à la somme des segments interceptés par les mêmes courbes sur tout faisceau de semi-droites asymptotiques à la première.*

Si la courbe de direction ne touche pas la droite de l'infini, la somme des arcs interceptés est égale à la somme des segments interceptés sur les asymptotes.

La somme des arcs interceptés par deux courbes asymptotiques sur une courbe de direction, qui n'a pas d'autres points à l'infini que les points cycliques du plan, est toujours nulle.

On suppose, dans tous ces énoncés, que les courbes sécantes n'ont aucune direction asymptotique commune avec la courbe de direction considérée.

50. De ces théorèmes découle immédiatement la solution du problème suivant :

Trouver toutes les courbes de direction sur lesquelles la somme des arcs interceptés par deux courbes asymptotiques est toujours nulle (¹).

Pour qu'une courbe de direction jouisse de cette propriété, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que *les directions asymptotiques non isotropes soient deux à deux parallèles et de sens contraire.*

Cette condition est remplie en particulier, comme on l'a dit plus haut, si la courbe n'a pas d'autres points à l'infini que les points cycliques.

(¹) Les courbes sécantes sont supposées n'avoir aucune direction asymptotique commune avec la proposée.

En dehors des points cycliques, qui pourront être des points simples ou multiples de la courbe, tous les autres points à l'infini devront être des points multiples, d'ordre pair. Si l'un de ces points est à branches séparées, et d'ordre $2p$, p des asymptotes correspondantes devront être de sens opposé aux p autres. Si le point a p branches tangentes entre elles et formant un *cycle* (¹), c'est-à-dire correspondant à la même valeur de t, il faudra que les asymptotes relatives aux p autres branches soient de sens opposé à l'asymptote relative au cycle. Enfin, si la courbe a en un point avec la droite de l'infini un contact d'ordre p pour une de ses branches, il faudra qu'une autre branche ait au même point avec la même droite un contact du même ordre, et que les directions asymptotiques qui correspondent aux deux branches soient de sens contraire.

51. Les plus intéressantes des courbes que l'on vient de rencontrer sont celles qui ne rencontrent la droite de l'infini qu'aux points cycliques; elles présentent d'ailleurs, dans la catégorie des courbes de direction, une grande généralité, puisque les transformées par rayons vecteurs réciproques d'une courbe de direction quelconque à partir d'un point non situé sur cette courbe sont des courbes de direction (nº **43**) n'ayant pas d'autres directions asymptotiques que les directions isotropes. Une courbe de direction quelconque donne ainsi naissance à une infinité de courbes de la classe qui nous occupe.

Cette propriété permet de définir analytiquement ces courbes; elles sont l'enveloppe des cercles

$$u\xi + v\eta = \lambda(\xi^2 + \eta^2), \tag{9}$$

λ étant une constante, et u, v deux paramètres liés par une relation de la forme

$$(u^2 + v^2)\,F^2(u, v) = \varphi^2(u, v). \tag{10}$$

(¹) Nous appellerons *cycle*, d'après M. Halphen, l'ensemble des branches d'une courbe qui correspondent, en un point de cette courbe, à une même valeur de la variable auxiliaire, à l'aide de laquelle les coordonnées sont exprimées d'une manière uniforme aux environs du point considéré.

Cette relation est en effet l'équation tangentielle générale des courbes de direction, et le cercle (9) est la transformée par rayons vecteurs réciproques, à partir de l'origine, de la tangente $u\xi + v\eta + 1 = 0$. Il faut toutefois que la courbe représentée par l'équation tangentielle (10) ne passe pas par l'origine.

COURBES CYCLIQUES DE DIRECTION.

52. Les courbes de direction qui ne coupent la droite de l'infini qu'aux points cycliques du plan, et que nous appellerons, pour abréger, *courbes cycliques de direction,* présentent une particularité analytique remarquable et dont les conséquences géométriques ont un grand intérêt : c'est que la fonction $\psi(x, y, z)$ correspondante est généralement de la forme $z\psi_1$, la courbe $\psi_1 = 0$ étant une courbe adjointe de la courbe de direction considérée, et la fonction $\frac{\psi_1}{f'_{\eta}}$ restant par suite finie aux points multiples de cette courbe.

Supposons d'abord que la courbe cyclique $f = 0$, de degré 2ν, ait, en chacun des points cycliques I et J, un point multiple d'ordre ν, à branches séparées, et qu'elle ne touche pas la droite de l'infini. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ les valeurs de l'argument qui correspond aux ν branches passant par I. Les courbes $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ ont en I un point multiple d'ordre $\nu - 1$, et par suite les fonctions de t, f'_x et f'_y admettent $\nu - 1$ fois chacun des zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. Il en est de même de la fonction ψ, vertu de l'identité

$$f'^2_x + f'^2_y = \psi^2 + \chi f.$$

Mais de plus la fonction $\frac{\psi}{f'_y}$ s'annule pour $t = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. On a en effet, comme on l'a vu plus haut,

$$\frac{f'_x}{yz' - zy'} = \frac{f'_y}{zx' - xz'};$$

d'où l'on tire

$$(11) \qquad \frac{\psi^2}{f'^2_y} = \frac{z'^2(x^2 + y^2) - 2zz'(xx' + yy') + z^2(x'^2 + y'^2)}{(z'x - x'z)^2}.$$

Par hypothèse, $z'(t)$ ne s'annule pas pour $t=\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$, puisque la droite de l'infini ne touche pas la courbe $f=0$; le dénominateur de l'expression précédente n'est donc pas nul, tandis que le numérateur est nul, en même temps que z et x^2+y^2. On en conclut que ψ admet au degré ν de multiplicité au moins les zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, ce qui ne peut se faire que si la courbe $\psi=0$ a un point multiple d'ordre ν en I. Le même raisonnement se répète au point J, et, comme ψ est de degré $2\nu-1$, la courbe $\psi=0$ se décompose en la droite de l'infini et en une courbe de degré $2\nu-2$, ayant un point multiple d'ordre $\nu-1$ en chacun des points I et J. C'est la proposition qu'il s'agissait d'établir.

Ce théorème peut cesser d'être vrai si la courbe $f=0$ a, aux points I et J, des branches tangentes entre elles et correspondant à une même valeur du paramètre, ou si elle touche la droite de l'infini.

Soit en effet α une des valeurs de l'argument qui correspondent au point I; on aura, en posant $t-\alpha=\tau$, dans les environs du point α,

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} z &= c\tau^q + c_1\tau^{q+1}+\ldots,\\ x &= p \quad + a\tau^r \quad + a_1\tau^{r+1}+\ldots,\\ y &= pi \quad + b\tau^r \quad + b_1\tau^{r+1}+\ldots;\end{aligned}\right.$$

d'où

$$x+yi = A\tau^s + A_1\tau^{s+1}+\ldots,$$

s étant au moins égal à r.

Si la tangente correspondante n'est pas la droite de l'infini, ce sera, par un choix convenable de l'origine des coordonnées, la droite $x+yi=0$, et la quantité s sera supérieure à q. L'ordre du *cycle* formé par les branches considérées sera q; la classe sera $s-q$ (¹). Dans l'expression donnée plus haut pour $\frac{\psi^2}{f_y'^2}$, on voit qu'au numérateur le terme de moindre degré en τ sera de l'ordre de τ^{2q-2+s}, et au déno-

(¹) L'ordre d'un cycle est, d'après M. Halphen, le nombre de points confondus avec l'origine de ce cycle dans le nombre total des points d'intersection de la courbe et d'une droite différente de la tangente au cycle; si cette droite est la tangente, le nombre des points d'intersection confondus avec l'origine du cycle est égal à la somme de l'ordre et de la classe de ce cycle.

minateur de l'ordre de τ^{2q-2}; par suite, $\frac{\psi^2}{f_y'^2}$ sera de l'ordre de τ^s; le coefficient du terme en τ^s est d'ailleurs égal à

$$2c^2 q A p[q-s] \frac{1}{q^2 c^2 p^2};$$

il n'est pas nul, car q est, par hypothèse, inférieur à s. Il en résulte que s est nécessairement pair, et que la fonction $\frac{\psi}{f_y'}$ admet le zéro α au degré $\frac{s}{2}$ de multiplicité. Par conséquent la valeur de $\frac{\psi}{z f_y'}$ pour $t=\alpha$ dépendra du signe de $q-\frac{s}{2}$, c'est-à-dire de la demi-différence entre l'ordre et la classe du cycle considéré. Dans le cas particulier où l'ordre est égal à la classe, $\frac{\psi}{z f_y'}$ reste fini pour $t=\alpha$; c'est précisément ce que nous avons vérifié plus haut pour le point multiple à branches séparées; $\frac{\psi}{z f_y'}$ s'annule pour $t=\alpha$ si la classe du cycle est supérieure à son ordre; enfin $\frac{\psi}{z f_y'}$ devient infini pour $t=\alpha$ si l'ordre est supérieur à la classe.

Si l'on suppose que la tangente correspondant au cycle α est la droite de l'infini $z=0$, on aura $q>s$; l'ordre du cycle sera s, sa classe $q-s$. L'expression $\frac{\psi^2}{z f_y'^2}$ sera toujours de l'ordre de τ^s et par suite α sera, pour la fonction $\frac{\psi}{z f_y'}$, un infini d'ordre égal à $q-\frac{s}{2}$, c'est-à-dire la somme de la classe et du demi-ordre du cycle considéré. Cet ordre devra être pair, et, en aucun cas, $\frac{\psi}{z f_y'}$ ne peut rester fini pour $t=\alpha$ (1).

INTERSECTION D'UNE COURBE CYCLIQUE DE DIRECTION ET DE DEUX COURBES QUELCONQUES.

53. La propriété de la fonction ψ, dans le cas où la courbe cyclique de direction n'a, aux points I et J, que des branches distinctes, et ne

(1) s étant pair, il y a au moins deux branches du cycle tangentes à la droite de l'infini; il en résulte que les courbes cycliques de direction, dont les branches à l'infini sont distinctes, ne touchent pas la droite de l'infini.

touche en aucun de ces points la droite de l'infini, permet d'exprimer simplement la somme des arcs interceptés sur cette courbe par deux courbes quelconques de degré m.

Il s'agit, en effet, d'évaluer les résidus par rapport aux zéros de $z(t)$ de la fonction

$$\Theta(t) = \frac{\psi(zx' - xz')}{f'_y z^2 \left(\frac{\mathrm{F}}{\varphi} - u\right)}.$$

Or, d'après l'hypothèse, $\frac{\psi}{z f'_y}$ reste fini pour tout zéro, β, de $z(t)$, et l'on a, pour le résidu correspondant à ce zéro, qui est un zéro simple de z,

$$r_\beta = -\left(\frac{\psi x}{z f'_y} \frac{1}{\frac{\mathrm{F}}{\varphi} - u}\right)_\beta.$$

Pour calculer $\frac{\psi x}{z f'_y}$, reportons-nous aux relations (11) et (12). Dans ces dernières, on devra supposer, τ désignant la quantité $t - \beta$, que q est égal à 1, et s au moins égal à 2.

Soit d'abord $s = 2$, ce qui est le cas le plus général; la tangente à la branche β au point cyclique correspondant, I, a un contact simple avec cette branche.

On a donc

$$\begin{aligned} z &= c\tau + c_1\tau^2 + \ldots, \\ x + yi &= \mathrm{A}\tau^2 + \mathrm{A}_1\tau^3 + \ldots, \\ x - yi &= 2p + \mathrm{B}\tau + \ldots. \end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans (11), on a

$$\frac{\psi^2}{f'^2_y} = \frac{-2c^2\mathrm{A}p\tau^2 + \ldots}{p^2c^2 + \mu\tau + \ldots}, \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{x\psi}{z f'_y}\right)_\beta = \sqrt{\frac{-2\mathrm{A}p}{c^2}}.$$

Or, si l'on considère la courbe définie par les relations

$$\left\{\begin{aligned} z &= c\tau, \\ x + yi &= \mathrm{A}\tau^2, \\ x - yi &= 2p, \end{aligned}\right.$$

z désignant un paramètre variable, on voit que cette courbe est un cercle

$$x^2 + y^2 = \frac{2Ap}{c^2} z^2,$$

et que ce cercle a au point cyclique I un contact du second ordre avec la branche de courbe β. La courbe de direction étant supposée réelle, ce cercle aura également un contact du second ordre avec une des branches de la courbe au point cyclique J. Soit R son rayon; on a

$$\left(\frac{x\psi}{zf'_y}\right)_\beta = \pm R\sqrt{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad r_\beta = \pm \frac{Ri}{\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)_\beta}.$$

Or, si dans la fonction $\Theta(t)$ on avait considéré x, y, z comme représentant les coordonnées, non plus d'un point de la courbe de direction, mais d'un point du cercle, on aurait trouvé de même, pour le résidu correspondant à la valeur $z = 0$,

$$\left(\frac{F}{\varphi} - u\right) r = \sqrt{\frac{-2Ap}{c^2}} = \pm R\sqrt{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad r = \pm \frac{Ri}{\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}.$$

Le signe sera le même que celui de r_β, si l'on donne au cercle le sens même de la branche qu'il oscule; quant à la quantité $\frac{F}{\varphi} - u$, elle est la même dans r et dans r_β, puisqu'elle est égale à $\frac{F(1, i, 0)}{\varphi(1, i, 0)} - u$. Il n'y aurait d'exception que si les deux courbes $F = 0$ et $\varphi = 0$ passaient toutes deux par le point I.

54. De cette discussion résulte immédiatement la proposition suivante :

III. *La somme des arcs interceptés sur une courbe cyclique de direction, à branches cycliques distinctes, par deux courbes quelconques de même degré, est égale à la somme des arcs interceptés par ces mêmes courbes sur les cercles qui osculent à l'infini les branches de la courbe primitive.*

Il faut, toutefois, que les courbes sécantes ne passent pas simultanément par les points cycliques.

On arriverait à une conclusion analogue pour les courbes à branches tangentes entre elles à l'infini, dans le cas où $\frac{\psi}{zf'_y}$ reste fini et différent de zéro pour l'argument correspondant, c'est-à-dire dans le cas où la classe du cycle formé par ces branches est égale à son ordre.

55. Ces résultats vont nous permettre de *déterminer toutes les courbes de direction sur lesquelles la somme des arcs interceptés par deux courbes quelconques de même degré est toujours nulle.*

A priori, il est clair, d'après la théorie des intégrales abéliennes, que ces courbes sont celles dont l'arc s'exprime par une intégrale abélienne de *première espèce appartenant à la courbe;* les courbes cycliques de direction peuvent seules jouir de cette propriété.

En effet, soit $ds = \frac{\psi}{f'_y}\frac{zx'-xz'}{z^2}dt$ la différentielle de l'arc; les infinis de $\frac{ds}{dt}$ ne peuvent être que les zéros de z^2; or, pour que $\frac{ds}{dt}$ reste fini pour $z = 0$, il faut que ψ s'annule; mais nous avons trouvé que, pour une valeur β de t annulant z, on avait

$$\frac{\psi}{f'_y} = \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}.$$

Il est donc nécessaire que la courbe n'ait pas à l'infini d'autres points que les points cycliques.

Si maintenant α est un argument correspondant à un de ces points I, et si l'on désigne par δ et γ le degré et la classe du cycle relatif à cet argument, on sait que $\frac{\psi}{zf'_y}$ admet α pour zéro au degré de multiplicité $\frac{\gamma-\delta}{2}$; la quantité $\frac{zx'-xz'}{z}$ admet α comme infini simple; il en résulte, puisque $\frac{\gamma-\delta}{2}$ est nécessairement entier, que $\frac{ds}{dt}$ reste fini pour $t=\alpha$, si l'ordre du cycle est inférieur à sa classe. Dans le cas où la branche est simple, $\delta = 1$, il faut que γ soit supérieur à 1, c'est-à-dire que la tangente à la branche soit d'inflexion; comme d'ailleurs γ devra être égal au moins à 3, la tangente aura un contact du troisième ordre au moins avec la branche.

56. On peut donc énoncer le théorème suivant :

IV. *La somme des arcs interceptés par deux courbes quelconques, de même degré, sur une courbe cyclique de direction ne touchant pas la droite de l'infini, est toujours nulle si cette courbe n'a, à l'infini, que des cycles dont la classe surpasse l'ordre.*

En particulier :

La somme des arcs interceptés par deux courbes quelconques, de même degré, sur une courbe cyclique de direction, est toujours nulle si les asymptotes de cette courbe sont toutes distinctes et inflexionnelles.

Les deux courbes sécantes peuvent avoir des points communs sur la courbe de direction, et ces points, *quels qu'ils soient*, même dans le cas où ils sont à l'infini, n'interviennent pas dans les théorèmes précédents; on n'a à tenir compte que des arcs compris sur la courbe de direction entre les autres points où elle est coupée par les deux courbes sécantes.

Ces propositions peuvent, d'ailleurs, se vérifier en remarquant que toutes les quantités r_β sont nulles dans les cas considérés.

Enfin :

Si la somme des arcs interceptés par deux courbes quelconques de même degré sur une courbe algébrique est toujours nulle, cette courbe est nécessairement une courbe cyclique de direction, n'ayant à l'infini que des cycles dont la classe surpasse l'ordre.

EXEMPLES.

57. Il est intéressant de former directement l'équation de quelques-unes de ces courbes remarquables : la propriété précédente permet toujours de reconnaître facilement si une courbe donnée rentre ou non dans la catégorie qui nous occupe; mais elle ne se prête pas simplement à former l'équation ponctuelle ou tangentielle générale de toutes les courbes de cette catégorie.

Les plus simples de ces courbes ne peuvent être que du quatrième degré au plus. Si, d'ailleurs, il existait une courbe cyclique de direction de ce degré, on obtiendrait, en la transformant par rayons vecteurs réciproques à partir de l'un de ses points, une courbe de direction du troisième degré passant par les points cycliques, courbe que nous savons ne pas exister.

Ce n'est donc pas avant le sixième degré que nous devons chercher une courbe jouissant des propriétés indiquées.

58. Prenons la transformée par rayons vecteurs réciproques, à partir de l'origine, de la courbe de direction du troisième ordre

$$\rho^3 \cos 3\omega = a^3,$$

nous trouvons

$$\rho^3 = a^3 \cos 3\omega,$$

c'est-à-dire

$$(x^2 + y^2)^3 = a^3 z^3 (x^3 - 3xy^2).$$

Soit C cette courbe du sixième degré, qui est évidemment une courbe cyclique de direction; pour l'étudier aux points I et J, posons

$$X = x + yi,$$
$$Y = x - yi.$$

Son équation devient

$$X^3 Y^3 = \frac{a^3}{2} z^3 [X^3 + Y^3].$$

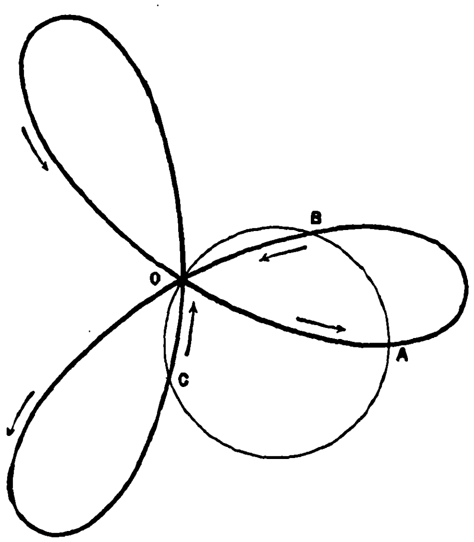
Sous cette forme, on voit que les trois tangentes aux points $X = 0$, $z = 0$, sont les droites

$$X^3 = \frac{a^3}{2} z^3$$

qui sont distinctes; une quelconque de ces droites coupe la courbe en six points confondus aux points $X = 0$, $z = 0$; elle a donc un contact du troisième ordre avec la branche qu'elle touche.

Il en résulte que l'arc de la courbe C est exprimable par une intégrale abélienne de première espèce appartenant à la courbe.

Cette courbe a la forme indiquée ci-dessous. Un cercle la coupe aux points cycliques et en six points à distance finie; ces six points coïn-



cident avec l'origine, si le cercle considéré est le cercle de rayon nul ayant l'origine pour centre.

On déduit de là, en particulier, la propriété suivante :

Un cercle passant par le point triple réel O *coupe la courbe en trois autres points à distance finie* A, B, C. *Le plus grand des arcs* OA, OB, OC, *sur la courbe* C, *est égal à la somme des deux autres.*

Cette propriété permet aisément, si l'on suppose la courbe tracée, de porter sur cette courbe, à partir d'un point donné, un arc égal à la somme ou à la différence de deux arcs donnés sur la courbe par leurs extrémités.

Remarque. — La courbe C est de genre un, puisqu'elle est la transformée par inversion d'une courbe de ce genre; les coordonnées de ses points sont donc des fonctions doublement périodiques d'un paramètre u, et l'arc doit être proportionnel à ce paramètre. On peut le vérifier aisément en partant des expressions données au n° **46**.

M. W. Roberts avait déjà observé que l'arc de cette courbe s'exprime par une intégrale elliptique de première espèce (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XII), mais sans remarquer que cette intégrale appartient à la courbe.

59. On prouverait de la même manière que les courbes dont l'équation polaire est, en désignant par n un entier supérieur à zéro,

$$\rho^{2n+1} = a^{2n+1}\cos(2n+1)\omega \qquad (n \geqq 1)$$

sont des courbes cycliques de direction, jouissant de la propriété que la somme de leurs arcs compris entre deux courbes quelconques de même degré est toujours nulle.

En premier lieu, ce sont bien des courbes de direction, car on a

$$ds = \frac{d\omega}{\rho^{2n}} a^{2n+1},$$

ou, si $f(\xi, \eta) = 0$ est l'équation de la courbe,

$$ds = \frac{\xi\,d\eta - \eta\,d\xi}{(\xi^2+\eta^2)^{n+1}} a^{2n+1},$$

expression qui est bien une différentielle abélienne appartenant à la courbe.

Ce sont ensuite des courbes cycliques; car leur équation, en posant toujours

$$X = x + yi, \qquad Y = x - yi,$$

peut s'écrire

$$X^{2n+1} Y^{2n+1} = \tfrac{1}{2} a^{2n+1} (X^{2n+1} + Y^{2n+1}) z^{2n+1},$$

et l'on voit de plus que les tangentes au point $X = 0$, $z = 0$ sont distinctes et ont avec la branche de courbe qu'elles touchent un contact d'ordre $2n+1$. Par conséquent, si n est au moins égal à 1, la proposition est démontrée.

Ces courbes intéressantes ont été étudiées par de nombreux géomètres, parmi lesquels on doit citer notamment Maclaurin, Euler, L'Hôpital, Fagnano, Riccati, Lamé, Serret; MM. O. Bonnet, Halphen, Haton de la Goupillière, W. Roberts et Fouret; la propriété qu'on vient d'établir nous paraît compléter utilement les propositions qu'on a données sur leurs arcs.

60. Les beaux travaux de M. Halphen sur ces courbes vont nous permettre d'étendre ces considérations.

Soit la courbe cyclique

$$\rho^k = \cos k\omega,$$

où l'on a $k = \frac{q}{s}$, q et s étant deux nombres positifs premiers entre eux. Elle sera de direction si sa polaire réciproque par rapport à un cercle de rayon un, concentrique à l'origine, est ce que M. Halphen nomme *une courbe de première catégorie*, c'est-à-dire, comme l'a fait voir ce géomètre, si le dénominateur de la fraction irréductible $\frac{1}{\frac{1}{k}+1}$ ou $\frac{s}{s+q}$ est pair. En d'autres termes, la courbe sera de direction si q et s sont impairs.

L'ordre des cycles à l'infini, aux points I et J, est, comme on le voit très facilement en appliquant les méthodes de M. Halphen, égal à s; la classe est égale à q. Donc, si $q > s$, l'arc de la courbe s'exprimera par une intégrale abélienne de première espèce, appartenant à la courbe.

Par suite :

L'arc de toute courbe représentée en coordonnées polaires par une équation de la forme

$$\rho^{\frac{2p+1}{2q+1}} = \mathrm{A} \cos \frac{2p+1}{2q+1}\,\omega,$$

où p et q sont deux entiers non négatifs, tels que la fraction $\frac{2p+1}{2q+1}$ soit irréductible, s'exprime par une intégrale abélienne de première espèce appartenant à la courbe, si p est plus grand que q.

Ces courbes jouissent donc de la propriété fondamentale signalée aux nos 55 et 56.

61. Nous allons maintenant indiquer une classe très générale de courbes de cette nature, en nous appuyant sur le caractère géométrique qu'elles doivent présenter aux points I et J.

Soit une courbe quelconque de direction, ne passant par aucun des points cycliques; appelons O un point du plan extérieur à S.

La transformée de S par rayons vecteurs réciproques à partir de O est une courbe cyclique de direction S'; cherchons quelles sont ses tangentes aux points I et J.

Soit m un point commun à S et à la droite OJ; le point transformé de m sera le point J, et la tangente en J à la branche correspondante sera la droite transformée de la droite Im : ce résultat est connu par la théorie générale de l'inversion. Pour que cette tangente à S' en J ait avec la branche correspondante un contact du second ordre au moins, il faut et il suffit que la droite Im ait en m, avec la courbe S, un contact du premier ordre au moins.

La courbe S' n'aura donc, à l'infini, que des tangentes inflexionnelles si, en tous les points supposés simples des droites IO et JO, les tangentes à S passent respectivement par les points J et I.

Si cette condition est remplie, on aura, en posant $X = x + iy$, $Y = x - iy$ et en désignant par $f(X, Y, z) = 0$ l'équation de S,

$$f'_X = X\varphi_1, \qquad f'_Y = Y\varphi_2,$$

et, réciproquement, si f'_X et f'_Y sont divisibles respectivement par X et Y, la condition sera remplie.

Or, pour que la courbe $F(x, y, z) = 0$ soit de direction, il *suffit* qu'on ait identiquement

$$F'^2_x + F'^2_y = \psi^2(x, y, z)$$

si l'on pose

$$X = x + yi, \qquad Y = x - yi,$$

et si $F(x, y, z)$ devient, par cette substitution, $f(X, Y, z)$, on aura

$$4f'_X f'_Y = \psi^2(X, Y, z).$$

On aura donc une courbe de direction S, de l'espèce cherchée, en posant

$$f'_X = X^2\varphi^2(X),$$
$$f'_Y = Y^2\varphi^2(Y),$$

$\varphi(X)$ étant une fonction entière de X. La même fonction doit figurer dans f'_Y pour que la courbe $F(x, y, z)$ soit réelle.

On a ainsi, pour équation de S,

$$o = S = \int_0^X X^2\varphi^2(X)\,dX + \int_0^Y Y^2\varphi^2(Y)\,dY + A.$$

A étant une constante différente de zéro, et la courbe S' sera la transformée par rayons vecteurs réciproques de S à partir de l'origine.

Soit posé

$$X^2\varphi^2(X) = aX^2 + bX^3 + cX^4 + \ldots + lX^{2\nu},$$

on aura

$$S = \frac{a}{3}(X^3 + Y^3) + \frac{b}{4}(X^4 + Y^4) + \ldots + \frac{l}{2\nu+1}(X^{2\nu+1} + Y^{2\nu+1}) + A$$

ou en coordonnées polaires, en posant $\xi = \rho\cos\omega$, $\eta = \rho\sin\omega$, d'où

$$X = \rho(\cos\omega + i\sin\omega), \qquad Y = \rho(\cos\omega - i\sin\omega),$$

il viendra

$$S = \frac{a}{3}\rho^3\cos 3\omega + \frac{b}{4}\rho^4\cos 4\omega + \ldots + \frac{l}{2\nu+1}\rho^{2\nu+1}\cos(2\nu+1)\omega + A.$$

On peut mettre l'équation de la courbe sous la forme définitive

$$(S) \qquad \alpha\rho^3\cos 3\omega + \beta\rho^4\cos 4\omega + \ldots + \lambda\rho^{2\nu+1}\cos(2\nu+1)\omega = \mu.$$

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont des constantes, telles que la dérivée, par rapport à ρ, de la fonction

$$\alpha\rho^3 + \beta\rho^4 + \ldots + \lambda\rho^{2\nu+1}$$

soit le carré parfait d'un polynôme entier en ρ.

La transformée de S par rayons vecteurs réciproques à partir de l'origine a une équation de la forme

$$(S') \quad \alpha\rho^{2\nu-2}\cos 3\omega + \beta\rho^{2\nu-3}\cos 4\omega + \ldots + \lambda\cos(2\nu+1)\omega = \mu\rho^{2\nu+1},$$

et son arc est exprimable par une intégrale abélienne de première espèce si la dérivée, par rapport au paramètre, de la fonction

$$\alpha\theta^3 + \beta\theta^4 + \ldots + \lambda\theta^{2\nu+1}$$

est le carré d'un polynôme entier en θ.

On obtient ainsi une classe étendue de courbes satisfaisant à la condition proposée; en particulier, si l'on suppose tous les coefficients α, β, ... nuls, sauf λ, on trouve les courbes $\rho^{2\nu+1} = A\cos(2\nu+1)\omega$, déjà rencontrées.

INTERSECTION D'UNE COURBE DE DIRECTION QUELCONQUE ET DE DEUX COURBES ALGÉBRIQUES.

62. Revenons maintenant au problème général de l'évaluation de la somme des arcs interceptés par deux courbes de même degré sur une courbe de direction quelconque; nous trouverons encore des résultats simples dans le cas où la courbe considérée n'a, à l'infini, que des points simples ou des points multiples à branches distinctes, et si elle ne touche pas la droite de l'infini.

Soit β l'argument d'un point à l'infini sur cette courbe $f=0$, de degré n : par hypothèse, β est un zéro simple de $z(t)$.

On a toujours

$$\Theta(t) = \frac{\psi}{f'_y}\,\frac{x'z - xz'}{z^2\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}.$$

Pour trouver le résidu r_β, écrivons

$$\Theta(t) = \frac{\psi}{f'_y\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)}\,\frac{d}{dt}\frac{x}{z}.$$

Posons $t-\beta=\tau$; on a, en désignant par x_0, x'_0, ... les valeurs de x, x'_1, ... pour $\tau=0$,

$$\frac{x}{z}=\frac{x_0+\tau x'_0+\ldots}{z'_0\tau+\ldots}=\frac{x_0}{z'_0\tau}+\lambda+\mu\tau+\ldots,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{x}{z}=-\frac{x_0}{z'_0\tau^2}+\mu+\ldots.$$

Le coefficient de $\frac{1}{\tau}$ dans le développement de $\Theta(t)$ sera donc égal à $-\frac{x_0}{z'_0}$, multiplié par la valeur de la dérivée par rapport à t de la fonction $\dfrac{\psi}{f'_y\left(\frac{F}{\varphi}-u\right)}$, pour $\tau=0$: cette fonction ne s'annule pas, en effet, pour $\tau=0$, si le point considéré n'est pas un des points cycliques du plan.

On a ainsi

$$r_\beta=\frac{-x_0}{z'_0}\,\frac{1}{\left(\frac{F}{\varphi}-u\right)_0}\left(\frac{\psi}{f'_y}\right)'_0+\frac{x_0}{z'_0}\left(\frac{\psi}{f'_y}\right)_0\frac{(F'\varphi-F\varphi')_0}{(F-u\varphi)^2_0}.$$

Je dis que le premier terme de r_β est nul pour $t=\beta$. On a, en effet,

$$\psi^2(t)=f'^2_x(t)+f'^2_y(t);$$

d'où

$$\frac{\psi^2}{f'^2_y}=1+\frac{f'^2_x}{f'^2_y},$$

et je dis que la dérivée de $\frac{\psi}{f'_y}$, par rapport à t, s'annule pour $t=\beta$.

On peut toujours supposer que les axes de coordonnées ne sont parallèles à aucune des asymptotes de la courbe $f=0$; le rapport $\frac{f'_x}{f'_y}$ reste donc fini pour $t=\beta$. Pour montrer que la dérivée de $\frac{\psi}{f'_y}$ s'annule pour cette valeur, il suffit donc, en vertu de la relation précédente, de faire voir que la dérivée de $\frac{f'_x}{f'_y}$ s'annule.

Or on a

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{yz' - y'z}{zx' - z'x}$$

et

$$\frac{d}{dt}\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{z\Delta}{(zx' - z'x)^2}, \qquad \text{étant posé} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Si l'on fait, dans cette relation, $t = \beta$, il vient, puisque $z(\beta) = 0$, et que, par suite de l'hypothèse, $z'(\beta)$ n'est pas nul, $\frac{d}{dt}\frac{f'_x}{f'_y} = 0$, et l'on a, par conséquent,

$$r_\beta = \left[\frac{x\psi}{z'f'_y}\frac{F'\varphi - F\varphi'}{(F - u\varphi)^2}\right]_\beta;$$

F' et φ' désignent les dérivées de F et φ par rapport à t.

Or on a

$$F' = F'_x x' + F'_y y' + F'_z z', \qquad \varphi' = \varphi'_x x' + \varphi'_y y' + \varphi'_z z';$$
$$mF = F'_x x + F'_y y + F'_z z, \qquad m\varphi = \varphi'_x x + \varphi'_y y + \varphi'_z z,$$

m étant le degré des courbes $F = 0$, $\varphi = 0$. On tire de là

$$m(F'\varphi - F\varphi') = (xy' - yx')(\varphi'_x F'_y - \varphi'_y F'_x) + \ldots,$$

et, à cause des relations $xf'_x + yf'_y + zf'_z = 0$; $x'f'_x + y'f'_y + z'f'_z = 0$, il vient

$$m(F'\varphi - F\varphi')\frac{f'_y}{zx' - z'x} = f'_z(\varphi'_x F'_y - F_x\varphi'_y) + \ldots = J,$$

en désignant par J la jacobienne des trois fonctions f, φ et F.

On tire de là

$$r_\beta = -\left[\frac{x^2\psi J}{mf'^2_y(F - u\varphi)^2}\right]_\beta.$$

Le second membre est une fonction de $\frac{y}{x}$, c'est-à-dire de la direction du point à l'infini considéré; les dérivées de la fonction f, par rapport à x, y et z, n'y figurent que par leurs rapports, car ψ est de la forme $f'_y\sqrt{1+\frac{f'^2_x}{f'^2_y}}$, et J de la forme $Af'_x + Bf'_y + Cf'_z$.

Il en résulte que la valeur de r_β ne change pas si l'on remplace f par une autre courbe passant par le point à l'infini considéré et ayant même tangente en ce point; par conséquent, Σr_β ne change pas si l'on remplace la courbe $f = 0$ par le système de ses asymptotes. Donc on peut énoncer ce théorème :

V. *Soit* C *une courbe de direction ne passant pas par les points cycliques, n'ayant à l'infini que des points simples ou des points multiples à branches distinctes, et ne touchant pas la droite de l'infini; la somme des arcs interceptés sur* C *par deux courbes quelconques de même degré est égale à la somme des segments que ces courbes interceptent sur les asymptotes de* C.

On peut citer comme exemple de ce genre de courbes celles qui ont pour équation

$$\rho^{2n+1}\cos(2n+1)\omega = a^{2n+1},$$

où n est un entier non négatif.

En combinant ce résultat et celui des n^{os} **53**, **54**, on arrive à la proposition générale suivante :

VI. *Soit* C *une courbe de direction n'ayant à l'infini que des points simples ou des points multiples à branches distinctes, ne touchant pas la droite de l'infini et admettant comme point multiple d'ordre* μ *chacun des deux points cycliques; la somme des arcs interceptés sur* C *par deux courbes quelconques de même degré est égale à la somme des arcs que ces courbes interceptent sur les asymptotes non isotropes de* C *et sur les cercles qui osculent respectivement à l'infini les branches cycliques de cette courbe* (¹).

(¹) Dans ces énoncés, on suppose toujours que les courbes sécantes ne passent simultanément par aucun des points à l'infini de la courbe de direction.

63. Nous terminerons ce Mémoire en énonçant quelques propositions qui sont relatives aux centres de gravité des arcs interceptés sur certaines courbes de direction par des courbes de même degré, et qui se démontrent sans difficulté en appliquant la formule fondamentale aux intégrales $\int \frac{x}{z}\, ds$ et $\int \frac{y}{z}\, ds$.

I. *Les arcs interceptés sur une courbe de direction par deux courbes de même degré, osculatrices entre elles en tous leurs points à l'infini, ont une somme algébrique nulle; de plus, le centre de gravité des arcs comptés positivement dans cette somme coïncide avec le centre de gravité des arcs comptés négativement.*

II. *Les arcs interceptés sur une courbe cyclique de direction par deux courbes ayant les mêmes asymptotes ont une somme algébrique nulle, et le centre de gravité des arcs positifs coïncide avec celui des arcs négatifs.*

On suppose dans ces énoncés que la courbe de direction n'a avec les courbes sécantes aucune direction asymptotique commune.

Comme application du dernier théorème, on a une propriété simple des centres de gravité des arcs d'un cercle compris entre deux coniques ayant mêmes asymptotes.

III. *Les arcs interceptés sur une courbe de direction par deux courbes* quelconques *de même degré ont une somme algébrique nulle, et le centre de gravité des arcs positifs coïncide avec celui des arcs négatifs, si la courbe de direction considérée est une courbe cyclique, n'ayant à l'infini que des cycles dont la classe surpasse le triple de l'ordre.*

Exemple. — La courbe de direction est une des courbes

$$\rho^{\frac{2p+1}{2q+1}} = A \cos \frac{2p+1}{2q+1}\, \omega,$$

p et q étant deux nombres entiers, non négatifs, tels que la fraction

$\frac{2p+1}{2q+1}$ soit irréductible, et que p soit supérieur à $3q+1$. En particulier, on aura dans cette classe les courbes

$$\rho^{2p+1} = a^{2p+1} \cos^{2p+1} \omega,$$

p étant un entier au moins égal à 2.