JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

GASTON DARBOUX

Sur la résolution de l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 3 (1887), p. 305-325.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1887_4_3__305_0>

Sur la résolution de l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues;

PAR M. GASTON DARBOUX.

I.

Dans un court Article *Sur la résolution de l'équation*

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

et de quelques équations analogues, inséré en 1873 au tome XVIII (2e série, p. 236) de ce Journal, j'ai considéré successivement différentes équations différentielles, toutes comprises dans le type suivant :

$$(1) \qquad f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = 0,$$

où f désigne une fonction homogène quelconque à coefficients constants des différentielles $dx_1, \ldots, dx_n$; et j'ai montré comment on peut intégrer ces équations, en supposant que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient des fonctions inconnues d'une même variable indépendante. Je me propose de revenir sur les résultats que j'ai indiqués, pour les compléter et en déduire quelques conséquences nouvelles.

Tout d'abord, il est nécessaire de bien préciser le problème proposé. On pourrait, évidemment, se donner arbitrairement, soit $x_3, x_4, \ldots, x_n$ en fonction de x_2, soit $x_2, x_3, \ldots, x_n$ en fonction d'un paramètre t.

L'équation (1) ferait alors connaître dx_1, en fonction de x_2 et dx_2 dans le premier cas, en fonction de t et de dt dans le second; et, par suite, x_1 serait déterminée par une quadrature. De telles solutions seront exclues dans la suite de cet Article, et nous nous proposons d'exprimer en fonction d'un paramètre arbitraire les expressions les plus générales de $x_1, \ldots, x_n$ satisfaisant à l'équation (1), *ces expressions ne contenant aucun signe de quadrature*. C'est de cette manière qu'Euler a intégré le premier l'équation

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

et J.-A. Serret l'équation analogue

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

[*Voir* le tome XIII (1re série, p. 353) de ce Journal.]

Pour résoudre de cette manière l'équation (1), nous poserons

$$(2) \qquad dx_1 = a_1 dx_n, \qquad dx_2 = a_2 dx_n, \qquad \ldots, \qquad dx_{n-1} = a_{n-1} dx_n;$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ devront vérifier l'équation

$$(3) \qquad f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1) = 0.$$

Introduisons maintenant les quantités b_i définies par les relations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x_n - x_1 \quad = b_1, \\ a_2 x_n - x_2 \quad = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n-1} x_n - x_{n-1} = b_{n-1}; \end{array} \right.$$

si l'on différentie ces relations en tenant compte des équations (2), elles donneront

$$(5) \qquad \frac{db_1}{da_1} = \frac{db_2}{da_2} = \cdots = \frac{db_{n-1}}{da_{n-1}} = x_n.$$

La question proposée se trouve ainsi ramenée à la suivante : *Déterminer les fonctions les plus générales a_i, b_i d'un certain paramètre satisfaisant aux équations* (3) *et* (5). Ces fonctions une fois connues, on aura

$$x_n = \frac{db_i}{da_i},$$

puis on déterminera $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ par les équations (4). Il est aisé de reconnaître que les formules (4) et (5) conduisent aux équations (2), et celles-ci, par leur combinaison avec la relation (3), donnent l'équation (1), qu'il s'agit de résoudre.

Prenons arbitrairement $n-1$ fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ d'un certain paramètre t, assujetties uniquement à vérifier l'équation (3). Il restera à exprimer, sans aucun signe d'intégration, les valeurs les plus générales de $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ satisfaisant aux relations

$$(6) \qquad \frac{db_1}{da_1} = \frac{db_2}{da_2} = \cdots = \frac{db_{n-1}}{da_{n-1}}.$$

Or la Géométrie a enseigné depuis longtemps le moyen de résoudre ce problème, au moins dans le cas où $n-1$ est égal à 2 ou à 3.

Posons

$$(7) \qquad U = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \\ \frac{da_1}{dt} & \frac{da_2}{dt} & \ldots & \frac{da_{n-1}}{dt} \\ \frac{d^2a_1}{dt^2} & \frac{d^2a_2}{dt^2} & \ldots & \frac{d^2a_{n-1}}{dt^2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{d^{n-2}a_1}{dt^{n-2}} & \frac{d^{n-2}a_2}{dt^{n-2}} & \ldots & \frac{d^{n-2}a_{n-1}}{dt^{n-2}} \end{vmatrix}.$$

Si l'on développe ce déterminant suivant les éléments de la première ligne, on aura

$$(8) \qquad U = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_{n-1} b_{n-1},$$

les fonctions λ vérifiant, d'après les propriétés élémentaires des déterminants, les relations

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 da_1 + \ldots + \lambda_{n-1} da_{n-1} &= 0, \\ \lambda_1 d^2a_1 + \ldots + \lambda_{n-1} d^2a_{n-1} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ \lambda_1 d^{n-2}a_1 + \ldots + \lambda_{n-1} d^{n-2}a_{n-1} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Cet ensemble de formules se rencontre soit dans la théorie du contact, soit dans celle des équations différentielles linéaires. Par des différentiations répétées, on en déduit, comme on sait, une série d'équations comprises dans le type suivant :

$$(10)\qquad d^i\lambda_1 d^k a_1 + d^i\lambda_2 d^k a_2 + \ldots + d^i\lambda_{n-1} d^k a_{n-1} = 0,$$

où l'on a

$$i + k < n - 1, \qquad k \geq 1, \qquad i \geq 0.$$

Quand i est égal à 0, il faut remplacer $d^0\lambda_h$ par λ_h.

Écrivons toutes celles de ces relations pour lesquelles k est égal à 1. Nous aurons le système

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 da_1 + \ldots + \lambda_{n-1} da_{n-1} = 0, \\ d\lambda_1 da_1 + \ldots + d\lambda_{n-1} da_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d^{n-3}\lambda_1 da_1 + \ldots + d^{n-3}\lambda_{n-1} da_{n-1} = 0. \end{array}\right.$$

Si nous remplaçons maintenant les différentielles $da_1, \ldots$ par les différentielles $db_1, \ldots$ qui doivent leur être proportionnelles, nous serons conduits au système suivant :

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 db_1 + \ldots + \lambda_{n-1} db_{n-1} = 0, \\ d\lambda_1 db_1 + \ldots + d\lambda_{n-1} db_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d^{n-3}\lambda_1 db_1 + \ldots + d^{n-3}\lambda_{n-1} db_{n-1} = 0, \end{array}\right.$$

qui va nous conduire au résultat cherché.

Si l'on différentie en effet l'équation (8) en tenant compte successivement des différentes formules (12), on obtiendra le système suivant :

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} U = b_1 \lambda_1 + \ldots + b_{n-1}\lambda_{n-1}, \\ \dfrac{dU}{dt} = b_1 \dfrac{d\lambda_1}{dt} + \ldots + b_{n-1}\dfrac{d\lambda_{n-1}}{dt}, \\ \dfrac{d^2U}{dt^2} = b_1 \dfrac{d^2\lambda_1}{dt^2} + \ldots + b_{n-1}\dfrac{d^2\lambda_{n-1}}{dt^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d^{n-2}U}{dt^{n-2}} = b_1 \dfrac{d^{n-2}\lambda_1}{dt^{n-2}} + \ldots + b_{n-1}\dfrac{d^{n-2}\lambda_{n-1}}{dt^{n-2}}, \end{array}\right.$$

et il suffira évidemment de résoudre ces $n-1$ équations par rapport à $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ pour obtenir les valeurs de ces inconnues exprimées au moyen de la fonction tout à fait arbitraire U et de ses $n-2$ premières dérivées.

Supposons d'abord que le déterminant

$$(14) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_{n-1} \\ \dfrac{d\lambda_1}{dt} & \ldots & \dfrac{d\lambda_{n-1}}{dt} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d^{n-2}\lambda_1}{dt^{n-2}} & \ldots & \dfrac{d^{n-2}\lambda_{n-1}}{dt^{n-2}} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Les formules (13) fourniront alors des valeurs bien déterminées de $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$; mais, de plus, tous les mineurs de Δ par rapport aux éléments de la dernière ligne ne pouvant être nuls, les équations (11) et (12) détermineront aussi sans ambiguïté les rapports mutuels de $da_1, \ldots, da_{n-1}$, ou de $db_1, \ldots, db_{n-1}$. Or les formules (12) peuvent être considérées comme une simple conséquence des équations (13); il suffit, par exemple, de différentier la première équation (13); en tenant compte de la seconde, on retrouvera la première des formules (12); et ainsi de suite. La comparaison des relations (11) et (12) montre alors immédiatement que, quelle que soit la fonction U, les quantités $b_1, \ldots, b_{n-1}$ déterminées par les formules (13) ont leurs différentielles proportionnelles à celles de $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Le problème que nous nous proposions est donc complètement résolu.

Dans le cas où les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, qui doivent satisfaire seulement à l'équation (3), ont été choisies de telle manière que le déterminant Δ soit nul, on peut raisonner de la manière suivante :

Soit

$$(15) \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ \dfrac{da_1}{dt} & \dfrac{da_2}{dt} & \ldots & \dfrac{da_{n-1}}{dt} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d^{n-2}a_1}{dt^{n-2}} & \ldots & \ldots & \dfrac{d^{n-2}a_{n-1}}{dt^{n-2}} \end{vmatrix}.$$

Si l'on pose

$$A_{i,k} = \frac{d^i\lambda_1}{dt^i}\frac{d^k a_1}{dt^k} + \ldots + \frac{d^i\lambda_{n-1}}{dt^{n-1}}\frac{d^k a_{n-1}}{dt^k}, \tag{16}$$

on aura

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{0,n-2} \\ A_{10} & \ldots & A_{1,n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ A_{n-2,0} & \ldots & A_{n-2,n-2} \end{vmatrix}.$$

En vertu de la formule (10), on a

$$A_{i,k} = 0$$

toutes les fois que i et k satisfont aux inégalités

$$i + k < n - 1, \qquad k \geq 1, \qquad i \geq 0;$$

on aura donc

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} A_{00} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ A_{10} & 0 & \ldots & 0 & A_{1,n-2} \\ A_{20} & 0 & \ldots & A_{2,n-3} & A_{2,n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{n-2,0} & A_{n-2,1} & \ldots & \ldots\ldots & A_{n-2,n-2} \end{vmatrix} \tag{17}$$

et, par conséquent,

$$\Delta\Delta' = \pm A_{00}A_{1,n-2}A_{2,n-3}\ldots A_{n-2,1}. \tag{18}$$

Si l'on applique maintenant la formule évidente

$$\frac{dA_{ik}}{dt} = A_{i+1,k} + A_{i,k+1}$$

aux éléments $A_{0,n-2}$, $A_{1,n-3}$, $\ldots$, $A_{n-3,1}$ qui sont tous nuls, on aura

$$A_{1,n-2} + A_{0,n-1} = 0,$$

$$A_{2,n-3} + A_{1,n-2} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{n-2,1} + A_{n-3,2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$A_{n-2,1} = -A_{n-3,2} = \ldots = \pm A_{1,n-2} = \mp A_{0,n-1}.$$

Le produit $\Delta\Delta'$ prendra donc la forme très simple

$$(19) \qquad \Delta\Delta' = \pm A_{00}(A_{0,n-1})^{n-2}.$$

Pour que Δ soit nul, il faudra que l'on ait, soit

$$A_{00} = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{n-1} a_{n-1} = 0,$$

soit

$$A_{0,n-1} = \lambda_1 \frac{d^{n-1} a_1}{dt^{n-1}} + \cdots + \lambda_{n-1} \frac{d^{n-1} a_{n-1}}{dt^{n-1}} = 0.$$

Si l'on se reporte à la définition des quantités λ par les formules (7) et (8), la première condition donne

$$\begin{vmatrix} a & \ldots & a_{n-1} \\ \frac{da_1}{dt} & \ldots & \frac{da_{n-1}}{dt} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{d^{n-2} a_1}{dt^{n-2}} & \ldots & \frac{d^{n-2} a_{n-1}}{dt^{n-2}} \end{vmatrix} = 0.$$

On déduit de là, comme on sait, qu'il existe, entre les quantités a_i, une ou plusieurs relations linéaires et homogènes à coefficients constants.

La seconde condition donne de même

$$\begin{vmatrix} \frac{da_1}{dt} & \ldots & \frac{da_{n-1}}{dt} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{d^{n-1} a_1}{dt^{n-1}} & \ldots & \frac{d^{n-1} a_{n-1}}{dt^{n-1}} \end{vmatrix} = 0,$$

et elle exprime aussi qu'il existe, entre les a_i, une ou plusieurs relations linéaires à coefficients constants; mais ces relations ne sont plus nécessairement homogènes.

En résumé, on voit que le cas d'exception dans lequel le déterminant des équations (13) est nul ne pourra se présenter que s'il existe entre les quantités a_i une ou plusieurs relations de la forme

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_{n-1} a_{n-1} + k_n = 0,$$

où $k_1, \ldots, k_n$ désignent des constantes. En remplaçant les a_i par leurs valeurs tirées des formules (2), on aura

$$k_1 dx_1 + \ldots + k_n dx_n = 0$$

ou, en intégrant,

$$k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n = k.$$

Au moyen de ces relations on pourra donc éliminer de l'équation proposée (1) un certain nombre des quantités x_i; on sera ainsi amené à résoudre une équation de même forme, contenant moins de variables et pour laquelle le cas exceptionnel ne se représentera pas.

Au raisonnement précédent, qui offre l'avantage de mettre en évidence une relation intéressante entre les déterminants Δ, Δ', on peut substituer le suivant, qui est beaucoup plus simple. Si l'on a

$$\Delta = 0,$$

il y aura, comme on sait, une ou plusieurs relations linéaires et homogènes entre les quantités λ_i. Soit

$$h_1 \lambda_1 + h_2 \lambda_2 + \ldots + h_{n-1} \lambda_{n-1} = 0$$

l'une quelconque d'entre elles. En remplaçant les λ par leur valeur, on aura

$$\begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \ldots & h_{n-1} \\ da_1 & da_2 & \ldots & da_{n-1} \\ d^2 a_1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d^{n-2} a_1 & \ldots & \ldots & d^{n-2} a_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation conserve la même forme, les constantes h_i changeant seulement de valeur, lorsqu'on effectue sur les a_i une substitution linéaire quelconque. Choisissons cette substitution de telle manière que toutes les constantes, sauf h_1, se réduisent à zéro; l'équation deviendra

$$\begin{vmatrix} da'_2 & \dots & da'_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ d^{n-2}a'_2 & \dots & d^{n-2}a'_{n-1} \end{vmatrix} = 0;$$

sous cette forme, on reconnaît immédiatement qu'elle entraîne au moins une relation linéaire entre les quantités a'_i et, par suite, entre les quantités a_i.

II.

Nous appliquerons d'abord la méthode générale précédente à l'équation d'Euler

$$dx^2 + dy^2 = ds^2. \tag{20}$$

On résoudra *algébriquement* cette équation en posant

$$dx = ds \cos\theta, \qquad dy = ds \sin\theta. \tag{21}$$

On fera ensuite

$$\begin{cases} x - s\cos\theta = a, \\ y - s\sin\theta = b, \end{cases} \tag{22}$$

et l'on aura, en différentiant,

$$s = \frac{db}{\cos\theta\, d\theta} = \frac{-da}{\sin\theta\, d\theta}. \tag{23}$$

Pour déterminer a et b, on prendra

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \mathrm{U}, \tag{24}$$

et cette équation donnera par la différentiation, en tenant compte de la précédente,

$$-a\sin\theta + b\cos\theta = \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}. \tag{25}$$

Les formules ainsi obtenues déterminent a, b, s, x, y en fonction de θ; on en déduit le système

$$(26)\quad \begin{cases} x\sin\theta - y\cos\theta + \dfrac{dU}{d\theta} = 0, \\ x\cos\theta + y\sin\theta + \dfrac{d^2U}{d\theta^2} = 0, \\ s = U + \dfrac{d^2U}{d\theta^2}, \end{cases}$$

qui est connu et employé depuis longtemps.

Comme on a

$$(27)\quad \begin{cases} \tang\theta = \dfrac{dy}{dx}, \\ U = s - x\cos\theta - y\sin\theta, \end{cases}$$

on voit que, pour toute courbe algébrique dont l'arc est algébrique, U est nécessairement une fonction algébrique des lignes trigonométriques de θ. Les formules d'Euler font donc connaître toutes les lignes planes algébriques dont l'arc est une fonction algébrique des coordonnées du point de contact.

Chaque courbe algébrique dont l'arc est algébrique a évidemment toutes ses développantes algébriques. On obtient donc en bloc toutes les courbes algébriques, algébriquement rectifiables, en considérant toutes les développées des courbes algébriques. Mais on peut se placer à un point de vue tout différent dans la recherche de ces courbes, et se proposer, par exemple, la détermination de toutes les courbes planes, de classe ou de degré donné, qui sont algébriquement rectifiables. Nous nous contenterons de signaler aux géomètres cette intéressante question, dont la solution serait sans doute rendue possible par les belles propositions que nous devons à M. Halphen sur les développées des courbes planes algébriques.

Considérons maintenant l'équation

$$(28)\quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

qui a été, comme nous l'avons déjà rappelé, l'objet des études de M. J.-A. Serret.

Nous ferons

$$(29)\qquad \frac{dx}{ds}=x_0,\qquad \frac{dy}{ds}=y_0,\qquad \frac{dz}{ds}=z_0,$$

et nous prendrons pour x_0, y_0, z_0 trois fonctions d'un même paramètre t, assujetties uniquement à vérifier l'équation

$$(30)\qquad x_0^2+y_0^2+z_0^2=1.$$

Nous poserons ensuite, conformément à la méthode générale,

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=x_0 s+X_0,\\ y&=y_0 s+Y_0,\\ z&=z_0 s+Z_0.\end{aligned}\right.$$

En différentiant, nous aurons

$$(32)\qquad -s=\frac{dX_0}{dx_0}=\frac{dY_0}{dy_0}=\frac{dZ_0}{dz_0}.$$

Pour déterminer sans aucun signe de quadrature les fonctions X_0, Y_0, Z_0, il suffit d'interpréter géométriquement les relations précédentes. Les deux courbes (Γ_0), décrite par le point (X_0, Y_0, Z_0), et (γ_0), décrite par le point (x_0, y_0, z_0), doivent avoir à chaque instant leurs tangentes, et par suite leurs plans osculateurs, parallèles. Donc la courbe (Γ_0) sera l'arête de rebroussement d'une surface développable dont les plans tangents seront parallèles aux plans osculateurs de (γ_0). D'après cela, si l'on considère l'équation

$$\begin{aligned} X\left(\frac{dy_0}{dt}\frac{d^2z_0}{dt^2}-\frac{dz_0}{dt}\frac{d^2y_0}{dt^2}\right)+Y\left(\frac{dz_0}{dt}\frac{d^2x_0}{dt^2}-\frac{dx_0}{dt}\frac{d^2z_0}{dt^2}\right)&\\ +Z\left(\frac{dx_0}{dt}\frac{d^2y_0}{dt^2}-\frac{dy_0}{dt}\frac{d^2x_0}{dt^2}\right)-U=\Phi&=0,\end{aligned}$$

où U est une fonction quelconque de t, les valeurs de X, Y, Z déduites des trois équations

$$(33)\qquad \Phi=0,\qquad \frac{d\Phi}{dt}=0,\qquad \frac{d^2\Phi}{dt^2}=0$$

seront précisément celles de X_0, Y_0, Z_0. La méthode géométrique s'accorde ici complètement avec notre théorie générale.

Une fois les valeurs de X_0, Y_0, Z_0 déterminées, les formules feront connaître s et x, y, z en fonction du paramètre variable t.

Pour toute courbe algébrique dont l'arc est algébrique, x_0, y_0, z_0 seront évidemment des fonctions algébriques d'un paramètre convenablement choisi. Il en sera de même de X_0, Y_0, Z_0 en vertu des formules (31) et, par conséquent, aussi de U. Il faut donc, pour obtenir toutes les courbes gauches algébriques dont l'arc est algébrique, prendre pour U, x_0, y_0, z_0 des fonctions algébriques d'un même paramètre, assujetties uniquement à vérifier l'équation (30).

On peut retrouver par une voie entièrement géométrique la solution que nous venons de donner et établir, sans aucun calcul, les relations qui existent entre les courbes (γ_0), (Γ_0) et la courbe cherchée (C), lieu du point (x, y, z). Étant donnée la courbe sphérique (γ_0), construisons, comme il a été indiqué, la courbe (Γ_0) dont les tangentes sont parallèles à celles de (γ_0). Aux points correspondants des deux courbes, les plans osculateurs seront parallèles; par suite, les angles de contingence et de torsion relatifs à deux arcs infiniment petits correspondants des deux courbes seront égaux. Or on sait que, pour obtenir une développée quelconque d'une courbe gauche, il faut mener en chaque point de cette courbe une normale faisant avec la normale principale un angle égal à

$$\int \frac{ds}{\tau},$$

ds désignant la différentielle de l'arc, et τ le rayon de torsion.

Il suit de là que, si, aux deux points correspondants de (γ_0) et de (Γ_0), on mène deux normales parallèles dont l'une touche une développée de (γ_0), l'autre enveloppera une développée de (Γ_0). Considérons, en particulier, celle des développées de (γ_0) qui se réduit à un point, le centre de la sphère sur laquelle est décrite (γ_0); nous serons ainsi conduits à la proposition suivante :

Étant donnée la courbe sphérique (γ_0) et la courbe quelconque (Γ_0) dont les tangentes sont parallèles à celles de (γ_0), menons par chaque point de (Γ_0) la parallèle au rayon de la sphère contenant

(γ_0) *qui passe au point correspondant de cette dernière courbe. Cette parallèle enveloppera une développée de* (Γ_0).

Cette développée est précisément la courbe (C) que la méthode analytique précédente nous enseigne à déterminer. Réciproquement, étant donnée une courbe (C) dont l'arc s'exprime sans aucun signe de quadrature, construisons une de ses développantes (Γ_0), et, par le centre d'une sphère de rayon 1, menons aux tangentes de (C) des parallèles qui détermineront sur la sphère la courbe (γ_0). Il est clair que (C) se déduira au moyen de (γ_0) et de (Γ_0) par la construction que nous venons d'indiquer, et, par suite, cette construction donnera bien toutes les courbes dont l'arc s'exprime sans aucun signe de quadrature.

Il nous reste à indiquer comment on déterminera les valeurs définitives de x, y, z, s en fonction du paramètre t. Les équations (33) sont de la forme

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} &X_0(y'_0 z''_0 - z'_0 y''_0) + \ldots &&= U,\\ &X_0(y'_0 z'''_0 - z'_0 y'''_0) + \ldots &&= U',\\ &X_0(y'_0 z^{\text{iv}}_0 - z'_0 y^{\text{iv}}_0 + y''_0 z'''_0 - z''_0 y'''_0) + \ldots &&= U''. \end{aligned}\right.$$

Résolues par rapport à X_0, Y_0, Z_0, elles donneront, pour ces quantités, des valeurs que l'on peut toujours écrire de la manière suivante :

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} X_0 &= \lambda x'_0 + \mu x''_0 + \nu x'''_0,\\ Y_0 &= \lambda y'_0 + \mu y''_0 + \nu y'''_0,\\ Z_0 &= \lambda z'_0 + \mu z''_0 + \nu z'''_0, \end{aligned}\right.$$

λ, μ, ν étant convenablement choisis. Pour déterminer ces trois paramètres, nous porterons les valeurs de X_0, Y_0, Z_0 dans les équations qu'elles doivent vérifier, et nous obtiendrons le résultat suivant

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \nu(123) &= U,\\ -\mu(123) &= U',\\ \lambda(123) - \mu(124) - \nu(134) &= U'', \end{aligned}\right.$$

où l'on désigne, pour abréger, par (ikl) le déterminant

$$\begin{vmatrix} x^{(i)} & x^{(k)} & x^{(l)} \\ y^{(i)} & y^{(k)} & y^{(l)} \\ z^{(i)} & z^{(k)} & z^{(l)} \end{vmatrix},$$

formé avec les dérivées d'ordres i, k, l de x, y, z.

Posons

$$(37) \qquad (123) = \Delta, \qquad (134) = \mathrm{D}.$$

En différentiant la première de ces équations, nous aurons

$$(124) = \Delta',$$
$$(134) + (125) = \Delta'',$$

et les formules (36) nous donneront alors

$$(38) \qquad \begin{cases} \mu = \dfrac{-\mathrm{U}'}{\Delta} & \nu = \dfrac{\mathrm{U}}{\Delta}, \\ \lambda = \dfrac{\mathrm{U}''}{\Delta} - \dfrac{\mathrm{U}'\Delta'}{\Delta^2} + \dfrac{\mathrm{DU}}{\Delta^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathrm{U}'}{\Delta}\right) + \dfrac{\mathrm{DU}}{\Delta^2}. \end{cases}$$

En portant ces valeurs de λ, μ, ν dans les équations (35), nous avons

$$(39) \qquad \begin{cases} \mathrm{X}_0 = \left[\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathrm{U}'}{\Delta}\right) + \dfrac{\mathrm{DU}}{\Delta^2}\right]x'_0 - \dfrac{\mathrm{U}'x''_0}{\Delta} + \dfrac{\mathrm{U}x'''_0}{\Delta}, \\ \mathrm{Y}_0 = \left[\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathrm{U}'}{\Delta}\right) + \dfrac{\mathrm{DU}}{\Delta^2}\right]y'_0 - \dfrac{\mathrm{U}'y''_0}{\Delta} + \dfrac{\mathrm{U}y'''_0}{\Delta}, \\ \mathrm{Z}_0 = \left[\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathrm{U}'}{\Delta}\right) + \dfrac{\mathrm{DU}}{\Delta^2}\right]z'_0 - \dfrac{\mathrm{U}'z''_0}{\Delta} + \dfrac{\mathrm{U}z'''_0}{\Delta}. \end{cases}$$

Il nous reste à trouver la valeur de s. Différentions la dernière des équations (34) en y remplaçant $d\mathrm{X}_0$, $d\mathrm{Y}_0$, $d\mathrm{Z}_0$ par leurs valeurs $-s\,dx_0$, $-s\,dy_0$, $-s\,dz_0$. Nous trouverons

$$s\Delta = -\mathrm{U}''' + 2\lambda(124) - 2\nu(234) - \mu(125) - \nu(135).$$

L'équation

$$(134) = \mathrm{D},$$

qui sert de définition à D, nous donne par différentiation

$$(135) + (234) = \mathrm{D}'$$

ou

$$(135) = \mathrm{D}' - \mathrm{E},$$

en posant

$$(234) = \mathrm{E}.$$

L'expression de s prend alors la forme

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} s = -\frac{\mathrm{U}'''}{\Delta} + \frac{2\Delta'}{\Delta^2}\mathrm{U}'' + \mathrm{U}'\left(\frac{\Delta''}{\Delta^2} - \frac{2\Delta'}{\Delta^3} - \frac{\mathrm{D}}{\Delta^2}\right) \\ + \mathrm{U}\left(\frac{2\mathrm{D}\Delta'}{\Delta^3} - \frac{\mathrm{E}}{\Delta^2} - \frac{\mathrm{D}'}{\Delta^2}\right) \end{aligned}\right.$$

ou, plus simplement,

$$(40\ bis)\qquad s = -\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\mathrm{U}'}{\Delta}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{UD}}{\Delta^2}\right) - \frac{\mathrm{EU}}{\Delta^2}.$$

Il suffira maintenant de porter les valeurs de s, X_0, Y_0, Z_0 dans les formules (31) pour obtenir les expressions définitives de x, y, z.

III.

La méthode générale que nous venons d'appliquer à deux exemples remarquables peut être modifiée d'une manière avantageuse dans certains cas particuliers. Nous choisirons comme exemple l'équation

$$(41)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2,$$

au sujet de laquelle nous avons à modifier et à compléter les résultats donnés dans notre précédent travail.

On peut la résoudre en prenant

$$(42)\quad \begin{cases} dx = a\,dx_1 + a'\,dy_1 + a''dz_1, \\ dy = b\,dx_1 + b'dy_1 + b''dz_1, \\ dz = c\,dx_1 + c'dy_1 + c''dz_1, \end{cases}$$

a, b, c, ... étant des fonctions d'un paramètre t assujetties à vérifier les équations

$$(43)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad aa' + bb' + cc' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que le déterminant des neuf quantités a, b, c, ... est égal à 1. S'il en était autrement, il suffirait de changer le signe de x_1, y_1, z_1.

Introduisons les arbitraires α, β, γ définies par les relations

$$(44)\quad \begin{cases} x = ax_1 + a'y_1 + a''z_1 + \alpha, \\ y = bx_1 + b'y_1 + b''z_1 + \beta, \\ z = cx_1 + c'y_1 + c''z_1 + \gamma, \end{cases}$$

et différentions ces relations; en tenant compte des précédentes (42), nous aurons

$$(45)\quad \begin{cases} 0 = x_1\,da + y_1\,da' + z_1\,da'' + d\alpha, \\ 0 = x_1\,db + y_1\,db' + z_1\,db'' + d\beta, \\ 0 = x_1\,dc + y_1\,dc' + z_1\,dc'' + d\gamma. \end{cases}$$

D'après des propositions bien connues, on peut exprimer les différentielles da, db, ... en fonction de trois arbitraires p, q, r, par les relations

$$(46)\quad \begin{cases} da = (br - cq)dt, \qquad db = (cp - ar)dt, \qquad dc = (aq - bp)dt, \\ da' = (b'r - c'q)dt, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ da'' = (b''r - c''q)dt; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (45), on aura, en tenant compte des formules (44),

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} q(z-\gamma) - r(y-\beta) &= \frac{d\alpha}{dt},\\ r(x-\alpha) - p(z-\gamma) &= \frac{d\beta}{dt},\\ p(y-\beta) - q(x-\alpha) &= \frac{d\gamma}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Il suffira donc, pour que l'équation proposée (41) soit vérifiée, que x, y, z; x_1, y_1, z_1 satisfassent aux équations (44) et (47). Mais il importe de remarquer que α, β, γ ne peuvent être choisis arbitrairement. En effet, si l'on ajoute les équations précédentes après les avoir multipliées respectivement par p, q, r, on obtient la condition

$$(48)\qquad p\frac{d\alpha}{dt} + q\frac{d\beta}{dt} + r\frac{d\gamma}{dt} = 0,$$

à laquelle doivent satisfaire α, β, γ.

Pour obtenir sans aucun signe de quadrature les valeurs de α, β, γ vérifiant l'équation précédente, il suffit de poser

$$(49)\qquad p\alpha + q\beta + r\gamma = \mathrm{U}.$$

En différentiant et tenant compte de l'équation (48), on aura

$$(50)\qquad \alpha\frac{dp}{dt} + \beta\frac{dq}{dt} + \gamma\frac{dr}{dt} = \frac{d\mathrm{U}}{dt},$$

et les valeurs de α, β, γ devront vérifier ces deux dernières équations, où U sera une fonction tout à fait arbitraire.

En résumé, on prendra pour a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' des fonctions quelconques de t assujetties uniquement à vérifier les relations bien connues (43) entre les neuf cosinus. On choisira pour α, β, γ trois nouvelles fonctions satisfaisant aux deux équations (49) et (50). Les valeurs de x, y, z seront données par le système (47) et celles de x_1, y_1, z_1 par le système (44). Comme les trois équations (47) se réduisent à deux et ne peuvent déterminer complètement x, y, z, il faudra leur adjoindre une relation quelconque

$$f(x, y, z) = 0$$

qui permettra de déterminer x, y, z. Ainsi la courbe lieu du point (x, y, z) pourra être tracée sur une surface quelconque.

Une interprétation géométrique très simple jettera beaucoup de lumière sur la solution précédente.

Si, dans l'équation à résoudre, on regarde x, y, z et x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées rectangulaires de deux points, le problème proposé s'énoncera de la manière suivante : *Déterminer dans l'espace, sans aucun signe de quadrature, deux courbes se correspondant point par point de telle manière que les arcs correspondants des deux courbes soient égaux.*

Examinons maintenant la solution. Considérons dans les formules (44) x, y, z comme les coordonnées d'un point de l'espace rapporté à des axes mobiles Ox, Oy, Oz et x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées du même point rapportées à des axes fixes O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1. Ces formules définiront un déplacement dans lequel la variable t jouera le rôle du temps; et les quantités p, q, r désigneront à chaque instant les composantes de la rotation infiniment petite du système mobile, prises par rapport aux axes mobiles. Cela posé, les équations (42) qui nous ont servi de point de départ expriment qu'il existe une courbe (C) de la figure mobile roulant sur une courbe (C_1) du système fixe; et, par conséquent, le point de contact des deux courbes à l'instant considéré a nécessairement une vitesse nulle. Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que tous les mouvements infiniment petits, successifs, du système mobile ne soient pas des mouvements hélicoïdaux, mais se réduisent à de simples rotations. C'est la condition exprimée par l'équation (48), que l'on peut obtenir immédiatement en écrivant que la vitesse de l'origine des axes mobiles est perpendiculaire à la direction de l'axe de rotation.

Nous avons indiqué le moyen de résoudre cette équation sans aucun signe de quadrature; et nous connaissons ainsi les mouvements dans lesquels chaque déplacement infiniment petit équivaut à une rotation.

On obtient, comme on sait, tous ces mouvements en faisant rouler une surface réglée (K) sur une autre surface réglée (K_1), applicable sur la première. L'équation de la surface (K) résulterait de l'élimination de t entre les deux équations auxquelles se réduit le système (47). On aurait la surface (K_1) en éliminant t, x, y, z entre les équations (44) et (47) ou, ce qui est la même chose, en éliminant t entre les équations

$$(51)\quad \begin{cases} q(cx_1 + c'y_1 + c''z_1) - r(bx_1 + b'y_1 + b''z_1) = \dfrac{d\alpha}{dt}, \\ r(ax_1 + a'y_1 + a''z_1) - p(cx_1 + c'y_1 + c''z_1) = \dfrac{d\beta}{dt}, \\ p(bx_1 + b'y_1 + b''z_1) - q(ax_1 + a'y_1 + a''z_1) = \dfrac{d\gamma}{dt}, \end{cases}$$

qui se réduisent également à deux.

Des remarques précédentes on déduit une première conséquence qui mérite d'être signalée : *On peut obtenir sans aucun signe de quadrature les équations les plus générales de deux surfaces réglées applicables l'une sur l'autre.*

Coupons maintenant la surface réglée (K) par une surface quelconque :

$$f(x, y, z) = 0.$$

Nous obtiendrons une certaine courbe (C) qui roulera sur la courbe correspondante (C_1) de la surface (K_1). *Les deux courbes* (C) et (C_1) *sont précisément celles que notre solution analytique nous a appris à déterminer.*

Nous rappellerons, en terminant, une solution toute différente que nous avons aussi donnée de la même question.

Si, dans l'équation (41), on pose

$$(52)\quad \begin{cases} x - x_1 = X, \\ y - y_1 = Y, \\ z - z_1 = Z; \end{cases}$$

$$(53)\quad \begin{cases} x + x_1 = X_1, \\ y + y_1 = Y_1, \\ z + z_1 = Z_1, \end{cases}$$

elle apparaît sous la forme

$$(54) \qquad dX\,dX_1 + dY\,dY_1 + dZ\,dZ_1 = 0.$$

Prenons arbitrairement pour X_1, Y_1, Z_1 des fonctions d'un paramètre t et posons

$$(55) \qquad X\,dX_1 + Y\,dY_1 + Z\,dZ_1 = U\,dt;$$

si l'on différentie cette équation, en tenant compte de la précédente, on aura

$$(56) \qquad X\,d^2X_1 + Y\,d^2Y_1 + Z\,d^2Z_1 = dU\,dt,$$

et réciproquement les deux équations (55) et (56) entraînent la relation (54).

Il suffira donc de prendre pour X, Y, Z des fonctions satisfaisant aux deux équations (55) et (56); ce qui permettra, par exemple, de déterminer l'une d'elles arbitrairement ou de donner *a priori* une relation quelconque

$$\varphi(X, Y, Z) = 0$$

entre X, Y, Z.

Supposons, pour indiquer une application, que l'on veuille trouver deux courbes dont les arcs soient égaux, les points correspondants se trouvant à une distance toujours la même, l. On fera

$$(57) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = l^2$$

et l'on aura à résoudre les trois équations (55), (56) et (57).

Prenons comme inconnue auxiliaire le déterminant

$$(58) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{dX_1}{dt} & \dfrac{dY_1}{dt} & \dfrac{dZ_1}{dt} \\ \dfrac{d^2X_1}{dt^2} & \dfrac{d^2Y_1}{dt^2} & \dfrac{d^2Z_1}{dt_2} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \Delta.$$

Si on l'élève au carré et si l'on pose, pour abréger,

$$ds_1^2 = dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2, \qquad \left(\frac{d^2X_1}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Y_1}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Z_1}{dt^2}\right)^2 = H^2,$$

on trouvera

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{ds_1}{dt}\right)^2 & \dfrac{ds_1}{dt}\dfrac{d^2s_1}{dt^2} & U \\ \dfrac{ds_1}{dt}\dfrac{d^2s_1}{dt^2} & H^2 & \dfrac{dU}{dt} \\ U & \dfrac{dU}{dt} & l^2 \end{vmatrix}.$$

Δ sera donc connu et, pour déterminer X, Y, Z, il suffira de joindre l'équation du premier degré (58) aux deux équations (55) et (56).

On pourrait encore joindre à ces deux équations, qui donnent la solution de la question proposée, une relation quelconque entre X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1. Supposons, par exemple, que l'on demande de déterminer les deux courbes (C), (C_1) de telle manière que deux points correspondants quelconques des deux courbes soient toujours à la même distance de l'origine. On aura

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

ou

$$XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 0.$$

Cette relation, jointe aux équations (55) et (56), fera connaître X, Y, Z sans aucune difficulté.