

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

A. MANNHEIM

**Mémoire d'optique géométrique comprenant la théorie du point  
représentatif d'un élément de surface réglée et son emploi tant pour la  
démonstration nouvelle de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces  
que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 4<sup>e</sup> série*, tome 2 (1886), p. 5-48.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1886\\_4\\_2\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1886_4_2_5_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

**JOURNAL**  
**DE**  
**MATHÉMATIQUES**  
**PURES ET APPLIQUÉES.**

---

---

*Mémoire d'optique géométrique comprenant la théorie du point représentatif d'un élément de surface réglée et son emploi tant pour la démonstration nouvelle de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques <sup>(1)</sup>;*

**PAR M. A. MANNHEIM.**

---

Ce Mémoire renferme la solution géométrique complète, donnée pour la première fois et dans le cas le plus général, du problème de la détermination des éléments des surfaces caustiques.

Quelques mots d'histoire vont me permettre de préciser l'état de la question : « De Tschirnhausen ouvrit la voie à de nouvelles spécula-

---

<sup>(1)</sup> Dans sa séance du 12 avril 1885, sur le rapport de MM. les professeurs Cremona et Beltrami, l'Académie R. des Lincèi a décidé l'insertion de ce Mémoire dans ses *Atti*.

tions géométriques en considérant la courbe enveloppe d'une série de rayons lumineux réfléchis par une ligne *dirimante* et correspondant à des rayons incidents parallèles (*Acta Lipsiæ*, novembre 1682). Ces nouvelles courbes reçurent le nom de *caustiques par réflexion* et furent étudiées par de La Hire, Leibnitz (*ibid.*, janvier 1689) et Jean Bernoulli (janvier 1692). Enfin Jean Bernoulli, considérant les caustiques par réfraction, donna la construction géométrique du point où chaque rayon réfracté touche son enveloppe (janvier 1693) et le marquis de l'Hôpital (*Analyse des infiniment petits*, proposition I, Section VI et VII) substitua à ces constructions deux formules qui ont été reproduites par Petit et ont conservé son nom [*Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. II, p. 354] (1) ».

M. A. Cornu a donné une construction élégante du point où un rayon réfracté touche son enveloppe, en faisant usage d'un point qu'il appelle *centre de jonction* (2).

Ainsi, pour le cas du plan, on a formules et constructions.

Ce n'est qu'au commencement de ce siècle (1808) que la question de l'espace fut abordée par Malus dans son *Optique* (3). Cet illustre physicien démontra « que toutes les fois que l'on considère un système de lignes droites émanant de tous les points d'une surface courbe suivant une loi analytique quelconque, le lieu des points de rencontre des lignes proposées est compris sur deux surfaces courbes ». Lorsque ces droites sont des rayons lumineux réfractés, Malus donne à ces surfaces le nom de *surfaces caustiques*. Il a aussi découvert un théorème généralisé ainsi par Dupin :

*Des rayons lumineux normaux à une surface se réfléchissent ou se réfractent suivant des directions normales à une surface.*

On sait qu'on appelle *foyers* les deux points où un rayon lumineux réfracté touche les surfaces caustiques : ces points ne sont pas toujours réels. Les plans tangents des surfaces caustiques aux deux foyers sont les *plans focaux*.

(1) PAUL SERRRET, *Des Méthodes en Géométrie*, p. 72.

(2) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. II, p. 311.

(3) *Journal de l'École Polytechnique*, XIV<sup>e</sup> Cahier.

Dans sa *Theory of systems of rays*, Hamilton a, le premier, étudié d'une façon générale les pinceaux quelconques de rayons lumineux : il a fait connaître des points et des plans relatifs à ces pinceaux et qui sont toujours réels.

M. Kummer, dans un beau Mémoire de Géométrie analytique, intitulé : *Théorie générale des systèmes rectilignes*, a approfondi la théorie de Hamilton et l'a complétée en quelques points.

Enfin, relativement aux pinceaux quelconques, je rappellerai que j'en ai donné une *Théorie géométrique*. Pour établir cette théorie, j'ai considéré l'élément de surface réglée, que j'appelle *surface élémentaire* du pinceau, constitué par le rayon du pinceau et un rayon qui lui est infiniment voisin. Autour d'un rayon, il y a une infinité de surfaces élémentaires.

Les points trouvés par Hamilton, et qui sont toujours réels sur le rayon d'un pinceau, sont les deux extrémités du segment sur lequel sont situés les points centraux de toutes les surfaces élémentaires du pinceau. En ces deux points appelés *points limites*, les plans centraux correspondants des surfaces élémentaires sont appelés *plans principaux*. Ces plans principaux sont rectangulaires.

Dans le cas particulier où les rayons lumineux forment un pinceau de normales à une surface, les surfaces élémentaires de ce pinceau sont des éléments de normales à cette surface, les points limites se confondent avec les foyers du rayon du pinceau et sont aussi les centres de courbure principaux de cette surface; enfin celle-ci a, pour plans de ses sections principales, les plans principaux du pinceau qui sont confondus ici avec les plans focaux.

Restant dans le cas particulier où les rayons lumineux sortent normalement d'une surface, Sturm, dans son Mémoire *Sur l'Optique* <sup>(1)</sup>, a étudié analytiquement les éléments de courbure des surfaces auxquelles ces rayons sont normaux après leur réfraction et a trouvé des formules intéressantes et de beaux théorèmes.

Dans son Mémoire sur la *Théorie générale des surfaces* <sup>(2)</sup>, revenant sur le même sujet, toujours dans le cas des rayons lumineux nor-

---

<sup>(1)</sup> *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1<sup>re</sup> série, t. III.

<sup>(2)</sup> *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1<sup>re</sup> série, t. IX.

maux à une surface, M. Bertrand, par des considérations de Géométrie infinitésimale, a retrouvé les formules dues à Sturm et en a ajouté une nouvelle. Ces formules permettent de calculer les éléments des surfaces caustiques.

Enfin, en 1845, Sturm a traité de nouveau analytiquement le même problème à la fin de son *Mémoire Sur la vision* (1).

Ainsi, pour le seul cas particulier de l'espace qui eût été traité, on avait trouvé des formules, mais pas de construction effective. Tel était, à ma connaissance, l'état de la question lorsque j'ai commencé à l'étudier (2).

La solution géométrique que j'apporte aujourd'hui est complète et aboutit à plusieurs *constructions planes* des éléments des surfaces caustiques, et cela, je le répète, dans le cas le plus général. Les solutions de nombreuses questions ne sont vraiment achevées que lorsque l'on fait connaître les constructions qu'elles exigent; elles ne peuvent attendre cet achèvement que de la Géométrie. La question d'Optique résolue dans ce travail en est un exemple.

#### DU POINT REPRÉSENTATIF D'UN ÉLÉMENT DE SURFACE RÉGLÉE.

Dans mon *Mémoire Sur les pinceaux de droites* (3) j'ai montré comment, au moyen d'une droite auxiliaire, on peut représenter la loi de variation des plans tangents à une surface réglée pour les différents points d'une génératrice de cette surface. Cette droite auxiliaire est relative à un point pris comme origine sur cette génératrice et change en même temps que ce point; mais *toutes les droites auxiliaires relatives aux différents points d'une génératrice passent par un même point.*

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1<sup>er</sup> semestre 1845. M. Ri-  
baucour s'est aussi occupé du même cas particulier, mais on ne connaît de son  
travail que l'annonce qu'il en a faite en 1873 dans sa Notice sur ses travaux ma-  
thématiques.

(2) Je n'ai pas parlé des travaux de Gergonne, Quetelet, Sarrus, de La Rive,  
Timmermans, etc., qui ne se rattachent pas directement au problème que j'avais  
en vue. Un travail sur les courbes et surfaces caustiques, analogue à la belle  
dissertation du D<sup>r</sup> O. Böklen sur la surface de l'onde (Reutlingen, 1881) serait  
utile aussi bien aux physiciens qu'aux géomètres.

(3) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2<sup>e</sup> série, t. XVII, 1872.

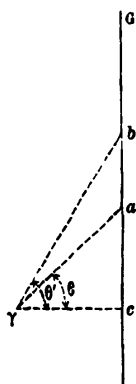
Ces droites auxiliaires sont respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent ce point aux différents points pris comme origine sur la génératrice.

Une génératrice d'une surface réglée étant donné, il suffit donc de lui adjoindre ce seul point pour pouvoir déterminer les plans tangents à la surface réglée. Le point qu'il faut ainsi adjoindre à une génératrice, je l'appelle *point représentatif* de l'élément de la surface réglée le long de cette droite.

Avant d'en faire usage, je vais montrer comment on y arrive directement, ce qui dispensera de recourir à des Mémoires antérieurs.

Soient (G) une surface gauche et G (*fig. 1*) une de ses génératrices

Fig. 1.



que, pour l'explication, je suppose placée verticalement. Menons un plan par G et faisons-le tourner autour de cette droite de façon que sa trace sur un plan horizontal de projection tourne dans le sens direct de rotation d'une droite sur un plan. Ce plan touche (G) successivement en des points qui, je suppose, s'éloignent du plan horizontal, c'est-à-dire vont en s'élevant sur G.

Appelons  $c$  le point central de (G) sur G,  $k$  le paramètre de distribution des plans tangents à (G) pour G,  $a$  un point distant de  $c$  de la longueur  $l$ , et  $\theta$  l'angle que le plan tangent en  $a$  fait avec le plan central; on a

$$\text{tang } \theta = \frac{l}{k}.$$

Sur un plan quelconque mené par  $G$ , et que nous prenons pour plan de la figure, élevons au point  $c$  une perpendiculaire à  $G$ . Portons sur cette droite le segment  $c\gamma$  égal à  $k$  et menons la droite  $\gamma a$ .

Dans le triangle  $c\gamma a$  on a

$$\text{tang } c\gamma a = \frac{l}{k}.$$

En rapprochant cette égalité de la précédente, on voit que l'angle  $c\gamma a$  est égal à  $\theta$ .

De même, pour un autre point  $b$  de  $G$ , on a l'angle  $c\gamma b$  qui représente l'angle  $\theta'$  que le plan tangent en  $b$  à  $(G)$  fait avec le plan central.

L'angle  $a\gamma b$ , qui est égal à  $\theta' - \theta$ , est alors égal à l'angle que font entre eux les plans tangents en  $a$  et  $b$ . On a ainsi ce théorème connu :

*L'angle sous lequel on voit du point  $\gamma$  un segment  $ab$  de  $G$  est égal à l'angle que font entre eux les plans tangents à  $(G)$  aux points  $a$  et  $b$ .*

Remarquons que la droite du plan de la figure qui, tournant autour du point  $\gamma$ , passe successivement par les points  $a, b, \dots$ , tourne dans le sens direct comme la trace horizontale du plan qui touche successivement  $(G)$  aux points  $a, b, \dots$  (<sup>1</sup>). La figure formée par les droites  $\gamma a, \gamma b$  peut donc servir à représenter la figure formée par les traces horizontales des plans tangents en  $a, b, \dots$ .

Si le plan mené par  $G$ , tournant toujours dans le même sens, touche successivement  $G$  en des points qui se rapprochent du plan horizontal de projection, on a encore la représentation de la figure formée par les traces horizontales de ce plan dans ses diverses positions, à la condition de placer  $\gamma$ , par rapport à  $G$ , symétriquement à sa première position.

*Le point  $\gamma$  est le point représentatif de l'élément de  $(G)$  le long de  $G$ .*

(<sup>1</sup>) Le plan de la figure est un plan de front devant le spectateur et le plan horizontal est au-dessous de ce spectateur.

D'après ce qui précède, on doit le choisir sur la perpendiculaire élevée à  $G$  du point central à une distance  $k$  de ce point, de façon que les droites qui vont du point représentatif successivement aux différents points de  $G$  représentent, y compris le sens de la rotation, la figure formée par les traces du plan qui touche ( $G$ ) successivement en ces différents points.

La connaissance des plans tangents à ( $G$ ) en trois points de  $G$  suffit pour déterminer le point représentatif relatif à cette droite et par suite pour déterminer tous les plans tangents qui passent par  $G$ .

Afin de familiariser le lecteur avec l'emploi du *point représentatif*, je vais donner, à l'aide de ce point, des démonstrations nouvelles de propriétés relatives à la théorie de la courbure des surfaces et utiles d'ailleurs par la suite.

EMPLOI DU POINT REPRÉSENTATIF DANS LA THÉORIE  
DE LA COURBURE DES SURFACES.

Je vais exposer cette théorie en supposant préalablement démontré le théorème suivant :

*A partir d'un point  $o$  sur une surface ( $S$ ), on trace des courbes quelconques. Les normales à ( $S$ ), qui ont ces courbes pour directrices, sont tangentes entre elles en deux points de la normale  $N$  en  $o$  à ( $S$ ). Leurs plans tangents communs en ces points sont rectangulaires.*

On en déduit facilement le théorème de Meusnier et l'on voit aussi que :

*Si l'on considère une normale qui a pour directrice une courbe  $E$ , tracée sur  $S$  à partir du point  $o$ , le plan normal à ( $S$ ), qui est tangent en  $o$  à  $E$ , est normal à cette normale en un point qui est le centre de courbure de la section qu'il détermine dans ( $S$ ).*

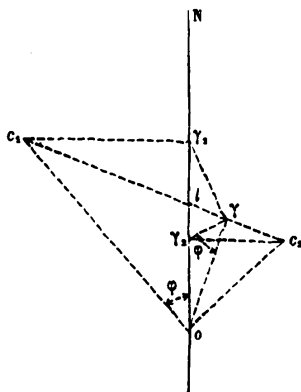
C'est en partant de là que je vais d'abord résoudre, au moyen d'un point représentatif, le problème suivant :

*Construire le rayon de courbure de la section faite dans une surface ( $S$ ) par un plan qui lui est normal.*



Soient toujours  $E$  une courbe tracée sur  $(S)$ ,  $o$  un point de cette courbe,  $N$  la normale en ce point à  $S$ . Prenons pour plan de la figure le plan normal à  $(S)$  qui est tangent à  $E$  en  $o$ , c'est-à-dire le plan qui détermine la section pour laquelle nous cherchons le centre de courbure correspondant au point  $o$ . Appliquons le théorème précédent; pour cela, considérons la normalie  $(N)$  à  $(S)$  dont la directrice est  $E$ . Appelons  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  (*fig. 2*) les points de  $N$  où se touchent toutes les normales à  $S$  dont les directrices partent du point  $o$ . Soit  $\gamma$  le point re-

Fig. 2.



présentatif de cette normalie pour la génératrice  $N$ ; ce point est tel que l'angle  $\gamma_1\gamma\gamma_2$  est droit, puisque les plans tangents à  $(N)$  aux points  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  sont rectangulaires. Il suffit d'élever en  $\gamma$  la perpendiculaire  $\gamma l$  à  $\gamma o$  pour avoir en  $l$  sur  $N$  le point de contact avec  $(N)$  du plan mené par  $N$  perpendiculairement au plan tangent en  $o$  à cette normalie. Ce point  $l$  est alors le centre de courbure demandé.

Lorsque l'on considère les différentes normalies à  $(S)$  qui contiennent  $N$ , on a des points représentatifs, tels que  $\gamma$ , qui sont toujours sur la circonférence décrite sur  $\gamma_1\gamma_2$  comme diamètre. La construction précédente, lorsqu'on emploie ces différents points représentatifs, montre comment varient les rayons de courbure, tels que  $ol$ , c'est-à-dire les rayons de courbure des différentes sections faites dans  $(S)$  par des plans menés par  $N$ . Elle montre que le rayon de courbure est maximum lorsqu'il est égal à  $o\gamma_1$ , et minimum lorsqu'il est égal à  $o\gamma_2$ . Les points  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  sont les centres de courbure principaux de  $(S)$  pour

le point  $o$  et les plans, dont les sections ont ces points pour centres de courbure, sont les plans des sections principales de  $(S)$ .

*Remarques.* — Le théorème relatif aux normales, rappelé précédemment, peut maintenant être énoncé ainsi :

*Les normales à  $(S)$ , dont les directrices partent d'un même point  $o$ , sont tangentes entre elles aux centres de courbure principaux de  $(S)$  relatifs à ce point et leurs plans tangents communs, qui sont rectangulaires, sont les plans des sections principales de  $(S)$  en  $o$ .*

Le plan de la section principale, dont le centre de courbure est  $\gamma_1$ , est le plan tangent commun aux normales au point  $\gamma_2$  et de même pour l'autre plan de la section principale.

La section normale à  $(S)$ , dont le centre de courbure est  $l$ , fait avec le plan de la section principale, dont le centre de courbure est  $\gamma_1$ , un angle égal à  $\gamma_2\gamma_1o$ .

Revenons à la construction du centre de courbure  $l$ . Nous venons de remarquer que l'angle  $\gamma_2\gamma_1o$  est égal à l'angle que le plan de la section normale dont le centre de courbure est  $l$  fait avec le plan de la section principale dont le centre de courbure est  $\gamma_1$ . Supposons connu cet angle, que nous appellerons  $\varphi$ , ainsi que les rayons de courbure principaux  $o\gamma_1$ ,  $o\gamma_2$ . Ces éléments suffisent pour construire  $l$ . On peut, en effet, construire ce point après avoir déterminé  $\gamma$  à la rencontre de la circonférence décrite sur  $\gamma_1\gamma_2$  comme diamètre et du segment capable de l'angle  $\varphi$  décrit sur  $o\gamma_2$ .

Modifions cette construction. Prolongeons  $\gamma l$  jusqu'aux points  $c_1$ ,  $c_2$ , où cette droite rencontre les perpendiculaires élevées des points  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  à  $N$ . Les quatre points  $c_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma$ ,  $o$  sont sur la circonférence décrite sur  $c_1o$  comme diamètre, et les points  $o$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma$ ,  $c_2$  sont sur la circonférence décrite sur  $oc_2$  comme diamètre. Au moyen de ces circonférences on voit que l'angle  $\gamma_1oc_1$  est égal à l'angle  $\gamma_1\gamma c_1$ , et que l'angle  $c_2o\gamma_2$  est égal à l'angle  $l\gamma\gamma_2$ . Il résulte de là que l'angle  $c_2oc_1$  est droit, et, en outre, que l'angle  $\gamma_1oc_1$  est égal à  $\varphi$ . On a alors la construction suivante pour déterminer le centre de courbure d'une section normale.

On donne  $N$ , les centres de courbure principaux  $\gamma_1, \gamma_2$  et l'angle  $\varphi$  que le plan de la section normale, dont on cherche le rayon de courbure, fait avec le plan de la section principale dont le centre de courbure est  $\gamma_1$ . On mène la droite  $oc_1$  qui fait avec  $N$  l'angle  $\varphi$ , et l'on élève à cette droite la perpendiculaire  $oc_2$ . Les droites  $oc_1, oc_2$  rencontrent en  $c_1$  et  $c_2$  les perpendiculaires élevées des points  $\gamma_1, \gamma_2$  à  $N$  : la droite  $c_1c_2$  coupe  $N$  au centre de courbure  $l$  cherché.

*Remarque.* — Le point représentatif  $\gamma$  est au pied de la perpendiculaire abaissée du point  $o$  sur la droite  $c_1c_2$ .

*Relation d'Euler.* — En partant de la construction que nous venons de trouver, il est facile d'établir la relation d'Euler. On y arrive aussi de la manière suivante en faisant usage du point représentatif  $\gamma$ . On a

$$\text{aire}\gamma_1\gamma\gamma_2 = \text{aire}\gamma_1\gamma l + \text{aire}l\gamma\gamma_2;$$

par suite,

$$\gamma\gamma_1 \times \gamma\gamma_2 = \gamma\gamma_1 \times \gamma l \cos \varphi + \gamma l \times \gamma\gamma_2 \sin \varphi,$$

d'où

$$\frac{1}{\gamma l} = \frac{\cos \varphi}{\gamma\gamma_2} + \frac{\sin \varphi}{\gamma\gamma_1}.$$

Désignons  $o\gamma$  par  $\rho$ ,  $\gamma\gamma_1$  par  $R_1$  et  $\gamma\gamma_2$  par  $R_2$ . On a

$$\gamma l = \rho \sin \gamma ol, \quad \frac{\sin \gamma ol}{\gamma\gamma_1} = \frac{\cos \varphi}{R_1}, \quad \frac{\sin \gamma ol}{\gamma\gamma_2} = \frac{\sin \varphi}{R_2};$$

substituant dans la relation précédente, il vient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2},$$

qui est la relation d'Euler.

*Remarque.* — La démonstration dont nous venons de faire usage montre que, si l'on a un angle droit  $\gamma_1\gamma\gamma_2$ , dont le côté  $\gamma\gamma_2$  fait avec une droite  $\gamma o$  un angle  $\varphi$ , on a

$$\frac{1}{ol} = \frac{\cos^2 \varphi}{o\gamma_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{o\gamma_2}.$$

*Indicatrice.* — Remplaçons, dans la relation d'Euler,  $\rho$  par  $\lambda \bar{d}^2$ ,  $R_1$  par  $\lambda \bar{a}^2$ ,  $R_2$  par  $\lambda \bar{b}^2$  et supprimons le facteur  $\lambda$ ; il vient

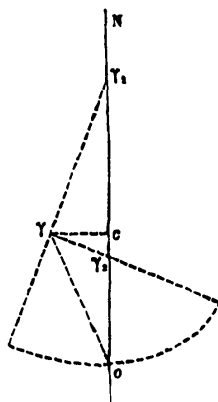
$$\frac{1}{\bar{d}^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{\bar{a}^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\bar{b}^2},$$

équation en coordonnées polaires d'une conique dont les demi-axes sont  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$ .

Construisons cette courbe sur le plan tangent (T) à (S) au point  $o$ , de façon que son centre soit en ce point et que son grand axe soit dans le plan de la section principale dont le centre de courbure est  $\gamma_1$ . Le rayon de courbure d'une section normale à (S) au point  $o$  est alors proportionnel au carré du diamètre de cette conique qui est dans ce plan. Cette conique est l'indicatrice de Dupin.

**THÉORÈME.** — *La tangente en un point  $o$  de la directrice d'une normale à (S) et la trace du plan central de cette normale sur le plan (T), tangent en  $o$  à (S), sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice de (S) en  $o$ .*

Fig. 3.



La normale  $a$ , je suppose (*fig. 3*), pour point représentatif le point  $\gamma$ . Le pied  $c$  de la perpendiculaire abaissée de  $\gamma$  sur  $N$  est le point central de cette normale pour cette génératrice. Les droites  $\gamma\gamma_1$ ,  $\gamma\gamma_2$ ,  $\gamma c$ ,  $\gamma o$  forment une figure égale à la figure qu'on obtient en prenant sur (T) les axes de l'indicatrice, la trace du plan central et la tangente en  $o$  à

la directrice de la normale. Imaginons alors que, au lieu de tracer l'indicatrice de (S) sur (T), on trace cette courbe sur le plan de la figure en lui donnant des dimensions telles qu'elle passe par le point  $o$ , son centre étant en  $\gamma$  et son grand axe dirigé suivant  $\gamma\gamma_2$ . Appelons toujours  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  les demi-axes de cette conique.

On a, puisque c'est une indicatrice,

$$\frac{o\gamma_1}{o\gamma_2} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}.$$

Cette relation montre que N est la normale en  $o$  à cette conique; par suite,  $\gamma c$ , qui lui est perpendiculaire, est parallèle à la tangente en  $o$  à cette courbe.

Les droites  $\gamma c$  et  $\gamma o$  sont donc deux diamètres conjugués de l'indicatrice, et le théorème est démontré.

Ce théorème, comme l'on sait, permet de démontrer très facilement le théorème des tangentes conjuguées.

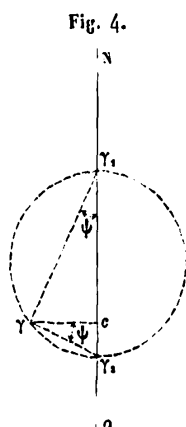
*Rayon de courbure de la courbe de contour apparent d'une surface.* — On va voir encore combien l'emploi du point représentatif rend facile la détermination de ce rayon de courbure.

Circonscrivons à la surface donnée (S) un cylindre dont les génératrices soient perpendiculaires au plan de projection. Appelons E la courbe de contact de ce cylindre et de (S) et E' la trace de ce cylindre sur le plan de projection. Comme la courbe E' reste la même à quelque distance que l'on transporte ce plan de projection, parallèlement à lui-même, faisons passer ce plan par le point  $o$  de E. C'est pour ce point  $o$  que nous allons chercher le centre de courbure de E', qui est la ligne de contour apparent de (S) sur le plan de projection. Considérons la normale (N) à (S), qui a pour directrice E. Les génératrices de cette normale sont parallèles au plan de projection et se projettent suivant les normales à E'.

Prenons la génératrice N<sub>1</sub> de (N), qui est infiniment voisine de N, et le pied  $c$  sur N de la perpendiculaire commune à cette droite et à N<sub>1</sub>. Le point  $c$ , qui n'est autre que le point de rencontre de deux normales à E', qui sont infiniment voisines, est le centre de courbure demandé.

On voit ainsi que ce centre de courbure est le point central de (N) sur N, et que le plan central relatif à cette droite est perpendiculaire au plan de projection.

Soient (fig. 4) N la normale en o à (S),  $\gamma_1, \gamma_2$  les centres de cour-



bure principaux,  $\gamma$  le point représentatif de l'élément de (N) le long de N et c le point central situé sur N.

L'angle  $\gamma_2\gamma c$  est l'angle compris entre le grand axe de l'indicatrice en o et le plan central, c'est-à-dire que c'est l'angle des projetantes avec ce grand axe.

Désignons-le par  $\psi$ . On voit sur la figure que  $\gamma\gamma_1o$  est égal à  $\psi$ ; par suite, on a cette construction : On mène  $\gamma_1\gamma$ , de façon que l'angle  $\gamma\gamma_1o$  soit égal à  $\psi$ . Cette droite rencontre en un point  $\gamma$  la circonférence décrite sur  $\gamma_1\gamma_2$  comme diamètre : la projection de  $\gamma$  sur N est le centre de courbure cherché.

On a

$$\gamma_2c = \gamma c \operatorname{tang} \psi = c\gamma_1 \operatorname{tang}^2 \psi.$$

Désignons par R le rayon de courbure oc; cette relation peut s'écrire

$$R - R_2 = (R_1 - R) \operatorname{tang}^2 \psi$$

ou, en développant,

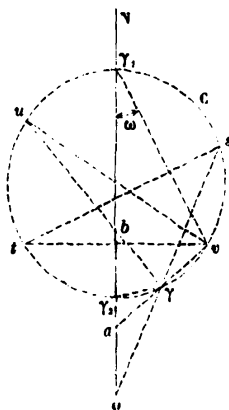
$$R = R_1 \sin^2 \psi + R_2 \cos^2 \psi.$$

Telle est la relation qui lie le rayon de courbure de la courbe de contour apparent aux éléments de courbure de (S).

#### REPRÉSENTATION PLANE D'UN PINCEAU.

Les différents éléments de normales qui appartiennent à un pinceau de normales à une surface (S) peuvent être représentés chacun par leur point représentatif, et, comme de chacun de ces points on doit voir sous un angle droit le segment compris entre les centres de courbure principaux  $\gamma_1, \gamma_2$  de (S), ces points représentatifs appartiennent à la circonférence C décrite sur le segment  $\gamma_1\gamma_2$  comme diamètre. Pour fixer la position du pinceau par rapport à un plan fixe, mené par la normale N (*fig. 5*), que nous prenons pour plan de la figure, sup-

Fig. 5.



posons donné l'angle  $\omega$  dont il faut faire tourner le plan tangent commun en  $\gamma_2$  aux normales pour amener ce plan à coïncider avec le plan fixe de la figure. Menons la droite  $\gamma_1 v$  qui fait avec  $\gamma_1\gamma_2$  cet angle  $\omega$ . Une normale, qui touche le plan de la figure au point arbitraire  $a$ , a pour point représentatif le point de rencontre  $\gamma$  de  $va$  avec C, car il résulte bien de cette construction que l'angle  $\gamma_2\gamma a$  est égal à  $\omega$ . Le point  $v$ , qui est fixe sur C, permet donc d'avoir immédiatement le point représentatif de l'élément de normale qui touche le plan de la figure en un point donné de N.

*Il suffit donc de la circonférence C, dont le centre est sur N, et du point  $\nu$  marqué sur C pour représenter de forme et de position le pinceau de normales (1).*

Reprenons l'élément de normalie représenté par  $\gamma$ ; menons la droite qui joint le point  $o$  de N au point  $\gamma$  : elle coupe en  $s$  la circonférence C.

Joignons le point  $s$  au point  $t$ , situé à la rencontre de C et de la perpendiculaire abaissée de  $\nu$  sur N. L'angle  $\nu ts$  est égal à l'angle  $\alpha\gamma o$ ; par conséquent il est égal à l'angle que le plan tangent en  $o$  à la normalie fait avec le plan de la figure. Le point  $t$ , comme le point  $\nu$ , est fixe sur C et peut être employé pour tous les éléments de normalies du pinceau de normales.

Remarquons que les droites qui partent du point  $t$ , telles que  $ts$ , et relatives aux différents éléments de normalies du pinceau forment une figure qui est égale à la figure formée, sur un plan mené en  $o$  perpendiculairement à N, par les traces des plans tangents en  $o$  à tous ces éléments de normalies.

Il y a encore un point fixe de C dont nous ferons usage, c'est le point  $u$  de cette circonférence qui est diamétralement opposé à  $\nu$ . La droite, qui joint ce point  $u$  au point représentatif  $\gamma$  d'un élément de normalie, coupe N au point  $b$  où cet élément est normal au plan de la figure, car l'angle  $b\gamma a$  est droit.

Tout ce que je viens d'expliquer pour un pinceau de normales s'étend à un pinceau quelconque en vertu des propriétés de ce pinceau (2). Un pareil pinceau est toujours représenté par une circonférence sur laquelle on marque un point fixe. Ce point dépend de l'orientation du pinceau par rapport à un plan fixe mené par le rayon du pinceau. Pour fixer cette orientation, on se donne l'angle dont il faut faire tourner l'un des plans principaux du pinceau pour amener ce plan à coïncider avec le plan fixe.

(1) J'ai déjà donné ce mode de représentation dans une Communication faite à l'Académie des Sciences le 9 juin 1879.

(2) Voir mon Mémoire *Sur les pinceaux de droites*.



PREMIÈRE CONSTRUCTION PLANE DES ÉLÉMENTS  
DES SURFACES CAUSTIQUES.

Cette construction est obtenue en appliquant la méthode générale dont j'ai déjà fait usage pour déterminer les éléments de courbure de la surface de l'onde (1). Cette méthode consiste, pour l'étude des transformations des pinceaux, à rechercher la correspondance qui existe entre leurs représentations planes (2).

Voici l'énoncé du problème d'Optique que je vais résoudre :

*Étant donnés les éléments d'un pinceau quelconque de rayons lumineux incidents et les éléments de courbure de la surface séparatrice des milieux traversés par ces rayons, déterminer les éléments du pinceau formé par ces rayons après leur réfraction.*

Appelons (S) la surface séparatrice des milieux.

Un rayon incident I rencontre (S) au point  $o$ , et il est réfracté suivant le rayon R. Le plan des droites I et R contient la droite N, normale en  $o$  à (S), et l'on a, quel que soit le rayon incident,

$$\frac{\sin(I, N)}{\sin(R, N)} = \text{const.}$$

Cette constante est l'indice de réfraction que nous désignerons par  $\lambda$ . Nous désignerons par  $i$  l'angle (I, N) et par  $r$  l'angle (R, N).

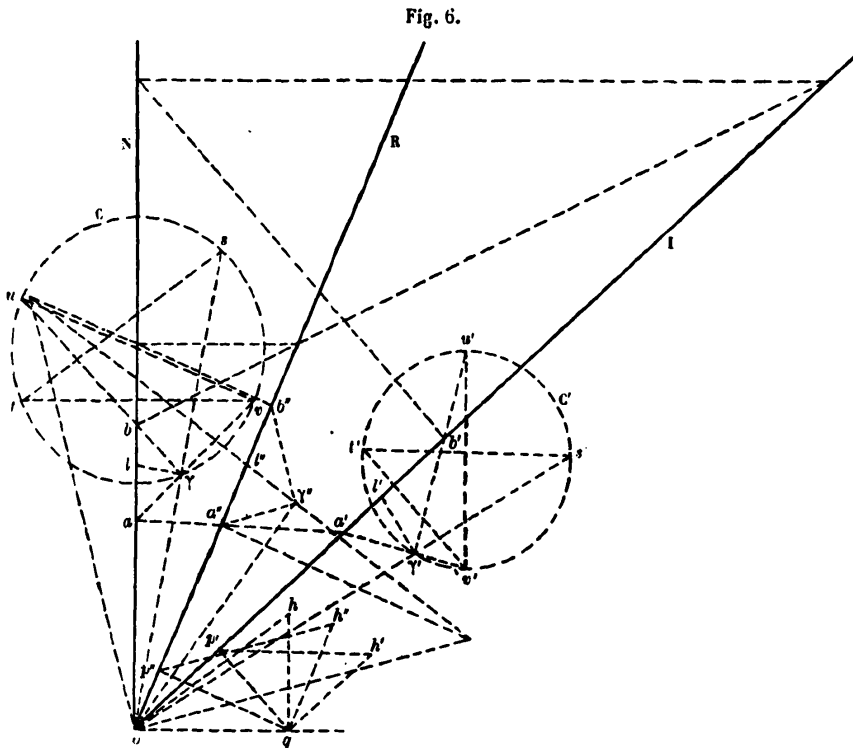
Prenons pour plan de la *fig. 6* le plan des trois droites I, R, N. Représentons le pinceau [N] des normales à (S) dont les pieds sont aux points infiniment voisins de  $o$ , par la circonférence C sur laquelle est marqué le point  $\nu$ . Représentons de même par C' et  $\nu'$  le pinceau [I] des rayons lumineux incidents.

(1) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances des 2, 9 et 16 juin 1879, ainsi que le Volume publié en Italie, par MM. Cremona et Beltrami en mémoire de Chelini, sous le titre de *Collectanea mathematica*.

(2) Elle s'étend naturellement à toutes les transformations des figures de l'espace dont on connaîtrait la représentation plane.

Pour résoudre notre problème, nous nous proposons de construire, pour le pinceau [R] des rayons réfractés, la circonférence  $C''$  et le point  $\sigma''$  qui le représentent.

Appelons (I) une surface élémentaire du pinceau [I]. A cette surface correspond un élément de normale (N) et une surface élémentaire (R). Ce que nous allons d'abord chercher, c'est le point représentatif  $\gamma''$  de (R) qui correspond au point représentatif  $\gamma'$  de (I).



Pour construire  $\gamma''$ , déterminons en trois points de R les plans tangents à la surface élémentaire (R).

Ces trois points sont le point  $o$ , le point pour lequel (R) est tangent au plan de la figure, et le point pour lequel cette surface élémentaire est normale au plan de la figure.

Nous conservons pour le pinceau [N] les notations employées précédemment lorsqu'il s'est agi de la représentation plane d'un pinceau.

Pour le pinceau [I], nous prenons les mêmes notations avec des lettres marquées d'un accent, et enfin, pour le pinceau [R], nous prenons encore les mêmes lettres marquées de deux accents.

La surface élémentaire (I) étant représentée par le point  $\gamma'$ , menons la droite  $o\gamma'$ ; elle coupe C' au point  $s'$  : l'angle  $\nu't's'$  est alors égal à l'angle que le plan tangent en  $o$  à (I) fait avec le plan de la figure.

Cherchons tout de suite les angles analogues pour (N) et (R).

D'un point arbitraire  $q$  de la perpendiculaire élevée en  $o$  à N, abaissons sur I et R les perpendiculaires  $qp'$ ,  $qp''$ . Du point  $p'$  menons  $p'h'$  parallèlement à  $t's'$ . Cette droite rencontre en  $h'$  la perpendiculaire  $qh'$  à  $qp'$ , et le segment  $qh'$  est égal à la portion de la perpendiculaire menée du point  $q$  au plan de la figure et comprise entre ce plan et le plan tangent en  $o$  à (I). Il suffit maintenant de porter sur la perpendiculaire  $qh$  à  $oq$  et sur la perpendiculaire  $qh''$  à  $qp''$  des segments égaux à  $qh'$  pour avoir les angles  $qoh$ ,  $qp''h''$  que les plans tangents en  $o$  à (N) et à (R) font avec le plan de la figure.

Appelons  $I_1$  le rayon lumineux infiniment voisin de I qui détermine avec ce rayon la surface élémentaire (I). La droite  $I_1$  rencontre (S) au point  $o_1$ , d'où partent la normale  $N_1$  à (S) et le rayon réfracté  $R_1$ . Les trois droites  $I_1$ ,  $N_1$ ,  $R_1$  sont dans un même plan qui est la nouvelle position du plan (I, R, N) lorsque le point  $o$  est venu en  $o_1$ .

Le déplacement du plan (I, R, N) donne lieu à une caractéristique qui est la droite d'intersection de ce plan et du plan ( $I_1$ ,  $R_1$ ,  $N_1$ ). Cette caractéristique contient les points  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$  où le plan de la figure touche les surfaces élémentaires (N), (I), (R) (<sup>1</sup>).

On voit ainsi que :

*Les surfaces élémentaires correspondantes touchent le plan de la figure en des points qui appartiennent à une même droite.*

La surface (I) touche le plan de la figure au point  $a'$  où  $\nu'\gamma'$  rencontre  $I_1$ . Pour avoir le point  $a$ , où la normale (N) touche ce même plan, menons du point  $t$  la droite  $ts$  parallèlement à  $oh$  (afin de construire l'angle  $\nu ts$  égal à l'angle que le plan tangent en  $o$  à N fait avec

---

(<sup>1</sup>) Voir mon *Cours de Géométrie descriptive*, 1<sup>re</sup> édition, p. 277.

le plan de la figure). Joignons le point  $s$  au point  $o$ . Cette droite rencontre  $C$  au point  $\gamma$  qui est le point représentatif de l'élément de normale  $(N)$ . Cette construction est, en effet, la construction inverse de celle qui donnerait l'angle  $\nu ts$  si le point  $\gamma$  était donné. Ayant construit le point  $\gamma$ , on mène la droite  $\nu\gamma$  : elle coupe la droite  $N$  au point  $a$  demandé.

D'après le théorème qui vient d'être démontré, la droite  $aa'$  rencontre  $R$  au point  $a''$  où  $(R)$  touche le plan de la figure. *Nous avons ainsi construit sur  $R$  un point  $a''$ , qui est le deuxième pour lequel nous connaissons le plan tangent à  $(R)$ . Le point  $o$  était le premier pour lequel on connaissait le plan tangent à cette surface.*

Occupons-nous maintenant des points où les surfaces élémentaires correspondantes  $(N)$ ,  $(I)$ ,  $(R)$  sont normales au plan de la figure.

Le point où  $(I)$  est normal au plan de la figure est le point  $b'$ , où la droite  $\gamma'u'$  rencontre  $I$ . De même le point où  $(N)$  est normal au plan de la figure est le point  $b$ , où la droite  $\gamma u$  rencontre  $N$ . Connaissant  $b$  et  $b'$ , nous allons déterminer le point  $b''$ , où  $(R)$  est normal au plan de la figure.

Les droites  $I$ ,  $N$ ,  $R$ , font entre elles des angles tels que

$$\frac{\sin(I, N)}{\sin(R, N)} = \lambda.$$

Les projections sur le plan de la figure des angles  $(I, N)$ ,  $(R, N)$  ne différant de ces angles que d'infinitement petits d'ordre supérieur, on a, entre les sinus des angles obtenus ainsi en projection, le même rapport  $\lambda$ . Les points  $b$ ,  $b'$ ,  $b''$  sont, du reste, les points où les droites  $I$ ,  $R$ ,  $N$  sont respectivement rencontrées par les projections de  $I$ ,  $R$ ,  $N$ . En considérant ces projections sur le plan de la figure comme de nouvelles positions de  $I$ ,  $N$ ,  $R$ , on peut alors supposer que ces trois droites se déplacent sur le plan de la figure pour occuper ces nouvelles positions, de façon que  $o$  se déplace normalement à  $N$ , tandis que ces droites touchent leurs enveloppes respectivement en  $b$ ,  $b'$ ,  $b''$ ; le rapport des sinus des angles qu'elles comprennent restant égal à  $\lambda$ . Les points  $b$ ,  $b'$ ,  $b''$  sont alors liés par la construction plane suivante :

*Sur le plan de la figure, on élève en  $b'$  une perpendiculaire à  $I$ .*

*Du point où cette droite coupe N, on élève une perpendiculaire à cette droite N. Cette perpendiculaire rencontre I en un point que l'on joint au point b. Cette droite coupe R en un point que l'on projette sur N : le point ainsi obtenu étant projeté sur R donne le point  $b''$  (1).*

Nous connaissons donc, pour la surface élémentaire (R) :

- 1° Le point  $a''$  où elle touche le plan de la figure;
- 2° Le point  $b''$  où elle lui est normale;
- 3° L'angle  $qp''h''$  que le plan tangent en  $o$  à cette surface fait avec le plan de la figure. Nous pouvons alors construire le point représentatif  $\gamma''$  de la surface élémentaire (R).

Ce point  $\gamma''$  doit être sur la circonférence décrite sur  $a''b''$  comme diamètre, puisque les plans tangents en ces points à (R) sont rectangulaires.

Le point  $\gamma''$  doit être aussi sur le segment capable de l'angle  $qp''h''$  décrit sur  $oa''$ . Mais nous avons vu précédemment, à propos de la courbure des surfaces, comment on détermine linéairement l'intersection de ces deux circonférences.

C'est cette construction que nous employons pour déterminer le point  $\gamma''$  :

*Du point  $o$ , on mène une parallèle à  $p'h''$  et une perpendiculaire à cette droite. Ces deux droites rencontrent respectivement les perpendiculaires à R élevées des points  $a''$  et  $b''$  : la projection du point  $o$  sur la droite qui joint ces deux points donne le point  $\gamma''$ .*

En partant du point représentatif  $\gamma'$  d'une surface élémentaire du pinceau [I], nous sommes arrivés au point représentatif  $\gamma''$  de la surface élémentaire correspondante du pinceau [R]. Une autre surface élémentaire de [I] dont le point représentatif est  $\gamma'_1$  (2) donnera de la même manière le point représentatif  $\gamma''_1$  de la surface élémentaire qui lui correspond dans le pinceau [R]. La connaissance des deux points

(1) *Loc. cit.*, p. 207.

(2) Pour ne pas compliquer la figure, nous n'avons pas indiqué les points  $\gamma'_1$ ,  $\gamma''_1$ ,  $a''_1$ , ni la circonférence  $C''$ .

$\gamma''$  et  $\gamma'_1$  suffit pour déterminer la circonférence  $C''$  et le point  $v''$  qui représentent le pinceau réfracté [R]. Voici comment : on mène la droite  $a''\gamma''$  et la droite analogue  $a'_1\gamma'_1$  ; ces deux droites se coupent au point  $v''$ . On mène la droite  $b''\gamma''$  et la droite analogue  $b'_1\gamma'_1$  ; ces deux droites se coupent au point  $u''$ .

*La circonférence décrite sur  $u''v''$  comme diamètre est la circonférence  $C''$  relative au pinceau [R] et le point  $v''$  de cette courbe permet d'avoir l'orientation du pinceau.*

La connaissance de cette circonférence  $C''$  entraîne la connaissance des éléments du pinceau [R]. Ainsi, les points de rencontre de  $C''$  et de R sont les foyers sur ce rayon, et l'angle, sous lequel on voit d'un point de  $C''$  le segment compris entre ces deux foyers, est égal à l'angle compris entre les plans focaux. Ces foyers et cet angle sont les éléments des surfaces caustiques relatives à R. Nous avons donc résolu le problème d'Optique énoncé précédemment.

La solution que nous venons d'exposer est absolument générale, puisque nous n'avons fait aucune hypothèse relativement au pinceau [I] en le représentant par une circonférence de cercle. Nous verrons plus loin que la construction plane précédente permet de trouver que, lorsque le centre de cette circonférence est sur I, c'est-à-dire lorsque [I] est un pinceau de normales, il en est de même du pinceau [R], parce qu'alors le centre de la circonférence  $C''$  est sur le rayon R. Nous retrouverons ainsi le théorème de Malus et de Dupin, sur lequel nous n'avons pas eu besoin de nous appuyer.

*Remarques* (1). — Lorsque le rayon lumineux I varie de position, il en est de même de R et par suite du plan (I, R, N). Ce plan pour un déplacement de I a pour caractéristique une droite telle que  $aa'a''$ . Mais, lorsqu'on déplace I de toutes les manières possibles autour de la première position de ce rayon, le plan (I, R, N) reste tangent à une surface, et chacun des déplacements de ce plan donne lieu à une caractéristique qui passe par le point de contact de ce plan avec cette sur-

---

(1) Ces remarques ne sont pas utiles pour la suite.

face. Donc : *Toutes les droites, telles que  $a, a', a''$ , passent par un même point.*

Prenons quatre surfaces élémentaires du pinceau [I], chacune d'elles touche le plan de la figure en un point tel que  $a'$ . Joignons ces quatre points au point  $\varphi'$ . Ces droites rencontrent  $C'$  en des points tels que  $\gamma'$ . Joignons ces points au point  $u'$ . Ces quatre droites déterminent sur I quatre points tels que  $b'$ . Il résulte de cette construction que l'on a deux faisceaux de droites dont les sommets sont  $u'$  et  $\varphi'$  et dont les droites correspondantes se coupent sur  $C'$ . Les rapports anharmoniques de ces deux faisceaux sont alors égaux et, par suite : *les rapports anharmoniques de quatre points, tels que  $b'$ , sont égaux aux rapports anharmoniques de quatre points tels que  $a'$ .*

Mais le théorème précédent montre que le rapport anharmonique des points, tels que  $a'$  sur I, est égal au rapport anharmonique des points correspondants tels que  $a$  sur N et  $a''$  sur R; donc il en est de même pour les points tels que  $b$  sur N et  $b''$  sur R.

Ainsi : *Sur I, N, R les rapports anharmoniques des points correspondants, tels que  $b, b', b''$ , sont égaux entre eux.*

Comme le point  $o$  peut être à la fois un point tel que  $b, b', b''$ , nous voyons que :

*Les droites telles que  $bb'$  passent par un même point et qu'il en est de même pour les droites telles que  $b'b''$  et pour les droites telles que  $bb''$ .*

Appelons  $\alpha$  le point fixe relatif aux droites  $bb'$ ,  $\beta$  le point fixe relatif aux droites  $b'b''$  et enfin  $\delta$  le point fixe relatif aux droites  $bb''$  :

*Les trois points  $\alpha, \beta, \delta$  sont en ligne droite*, car les triangles tels que  $bb'b''$  ont toujours leurs sommets sur les droites I, N, R qui concourent au point  $o$ .

*La droite  $\beta\alpha$  coupe N, I, R en des points tels que  $b, b', b''$ , comme il est facile de le voir. Si l'on applique à ces trois points particuliers la construction linéaire qui les relie, on voit tout de suite que les perpendiculaires à I et à R, élevées respectivement des points particuliers tels que  $b'$  et  $b''$ , concourent en un point de la perpendiculaire élevée en  $o$  à N.*

Par suite, si l'on projette un point quelconque de  $oq$  sur I et R, la droite qui joint ces points est parallèle à  $\alpha\beta\delta$ . Donc :

*La droite  $\alpha\beta\delta$  est parallèle à  $p'p''$ .*

*Si le point tel que  $b'$  est sur I la projection d'un point tel que  $b$  sur N, le point  $b''$  correspondant est aussi la projection de ce point  $b$  sur R.*

Cela résulte immédiatement de la construction qui lie les points tels que  $b, b', b''$ .

On peut remarquer que la droite qui joint les points particuliers, tels que  $b'$  et  $b''$  de l'énoncé précédent, est perpendiculaire à la droite  $\alpha\beta\delta$ .

#### PREMIÈRE MODIFICATION DE LA CONSTRUCTION PRÉCÉDENTE.

Les plans tangents en  $o$  aux surfaces élémentaires correspondantes (I), (R), (N) se coupent suivant une même droite du plan (T), tangent en  $o$  à (S).

Cette remarque va me permettre de modifier la construction précédente. Pour cela je vais généraliser le théorème d'où nous sommes partis précédemment, et, au lieu de prendre pour une génératrice d'une surface réglée les traces des plans tangents à cette surface sur un plan perpendiculaire à cette génératrice, je vais prendre les traces des plans tangents sur un plan arbitraire.

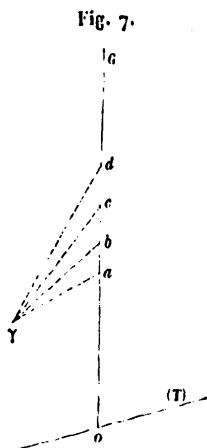
Prenons pour plan de la *fig. 7* le plan qui projette orthogonalement la génératrice  $G$  de la surface réglée ( $G$ ) sur un plan fixe quelconque (T) <sup>(1)</sup>. Soient  $a, b, c, d$  quatre points arbitraires sur  $G$  et (A), (B), (C), (D) les plans tangents en ces points à ( $G$ ). Construisons sur  $ab$  un segment capable de l'angle compris entre les traces de (A) et de (B) sur (T), et sur  $bc$  décrivons un segment capable de l'angle analogue relatif à (B) et (C); ces deux circonférences se coupent en  $b$  et en un autre point  $\gamma$ . En vertu d'un théorème de Chasles, les droites  $\gamma a, \gamma b, \gamma c, \gamma d$  forment un faisceau dont les rapports anhar-

---

(1) Les lettres employées ici ne se rapportent pas aux notations précédentes.



moniques sont égaux aux rapports anharmoniques du faisceau formé par les traces des quatre plans (A), (B), (C), (D) sur le plan (T). Mais, par construction, trois droites du premier faisceau comprennent



entre elles des angles respectivement égaux aux angles formés par les droites correspondantes du deuxième faisceau. Ces deux faisceaux sont alors égaux, et l'angle, sous lequel on voit  $cd$  du point  $\gamma$ , est égal à l'angle compris entre les traces sur (T) des plans tangents (C) et (D). Comme le point  $d$  est arbitraire, on a alors ce théorème :

*Sur un plan passant par une génératrice  $G$  d'une surface réglée ( $G$ ), il existe un point d'où l'on voit un segment quelconque de  $G$  sous un angle égal à l'angle compris entre les traces, sur un plan fixe arbitraire, des plans tangents à ( $G$ ) aux extrémités de ce segment.*

C'est ce point que nous allons prendre pour point représentatif de l'élément de ( $G$ ) le long de  $G$ .

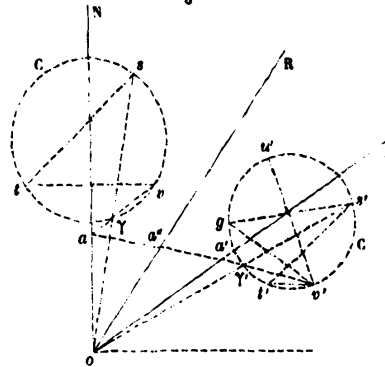
En faisant usage de pareils points un pinceau est toujours représenté par une circonférence de cercle. De chacun des points de cette courbe on voit la distance focale du pinceau sous un angle égal à l'angle compris entre les traces des plans focaux du pinceau sur le plan fixe.

On doit remarquer que la circonférence qui représente un pinceau de normales n'a plus son centre sur le rayon du pinceau. Mais, dans

tous les cas, on a, comme précédemment, un point fixe marqué sur la circonférence pour indiquer l'orientation du pinceau.

Reprenons (*fig. 8*) le pinceau [I], ainsi que les notations précédentes, et choisissons pour plan fixe le plan (T) tangent en  $o$  à (S). Le plan de la figure est toujours le plan des trois droites I, R, N qui est perpendiculaire à (T). Le pinceau [I] est représenté par la circonférence  $C'$  et le point  $o'$ . Menons par le point  $o'$  une perpendiculaire

Fig. 8.



à N. Cette droite coupe  $C'$  au point  $t'$ . Le point  $\gamma'$  étant le point représentatif de la surface élémentaire (I), menons la droite  $o\gamma'$  : elle coupe  $C'$  au point  $s'$ . L'angle  $o't's'$  est égal à l'angle compris entre les traces sur (T) du plan tangent en  $o$  à (I) et du plan de la figure. La droite  $o'\gamma'$  rencontre I au point  $a'$  où (I) touche le plan de la figure. La droite  $\gamma'u'$  (<sup>1</sup>) coupe comme précédemment I au point  $b'$  où la surface (I) est normale au plan de la figure, parce que le plan de la figure et un plan qui lui est perpendiculaire ont pour traces sur (T) des droites perpendiculaires entre elles.

Pour déterminer les points  $a$  et  $b$  relatifs à (N) la construction précédente se simplifie, puisqu'il suffit de mener  $ts$  parallèlement à  $t's'$ .

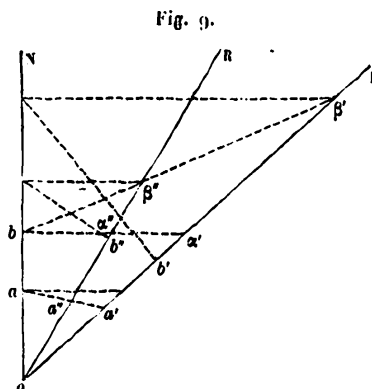
Supposons  $a''$  et  $b''$  déterminés comme précédemment et construisons  $\gamma''$ . Pour cela décrivons sur  $a''b''$  une circonférence de cercle comme diamètre;  $\gamma''$  est sur cette courbe. Ce point  $\gamma''$  est aussi sur le segment capable de l'angle  $o't's'$  décrit sur  $oa''$ . Nous pouvons déterminer

(<sup>1</sup>) Pour ne pas la compliquer, nous n'avons pas complété la figure.

le point de rencontre de ces deux circonférences comme précédemment. Du point  $o'$  abaissons sur R la perpendiculaire  $o'g$ ; cette droite coupe C' au point  $g$  que l'on joint au point  $s'$ . Du point  $o$  on mène une parallèle à  $gs'$  et une perpendiculaire à cette droite. Ces deux droites rencontrent respectivement les perpendiculaires à R issues des points  $a''$  et  $b''$  en des points que l'on joint par une droite : la projection de  $o$  sur cette droite est le point  $\gamma''$  cherché. Après avoir déterminé un autre point représentatif, tel que  $\gamma''$ , la solution s'achève comme précédemment.

DEUXIÈME CONSTRUCTION PLANE DES ÉLÉMENTS  
DES SURFACES CAUSTIQUES.

Reprenons (*fig. 9*) les droites I, R, N sur lesquelles nous avons les points en ligne droite  $a, a', a''$  où les surfaces élémentaires correspon-



dantes (I), (R), (N) touchent le plan (I, R, N) et les points  $b, b', b''$ , liés par la construction reproduite sur la figure, où ces surfaces sont normales au plan (I, R, N).

Menons du point  $b$  une perpendiculaire à N et appelons  $\alpha'$  et  $\alpha''$  les points où cette droite coupe I et R.

L'angle  $\alpha' b \beta'$ , coupé par les deux transversales I et R, donne <sup>(1)</sup>

$$\left( \frac{1}{o\alpha'} - \frac{1}{o\beta'} \right) \frac{1}{\sin i} = \left( \frac{1}{o\alpha''} - \frac{1}{o\beta''} \right) \frac{1}{\sin r}.$$

(<sup>1</sup>) En vertu d'un théorème connu, énoncé dans mon *Cours de Géométrie*

Mais

$$o\alpha' = \frac{ob}{\cos i}, \quad o\alpha'' = \frac{ob}{\cos r}, \quad o\beta' = \frac{ob'}{\cos^2 i}, \quad o\beta'' = \frac{ob''}{\cos^2 r};$$

on a donc

$$(1) \quad \left( \frac{\cos i}{ob} - \frac{\cos^2 i}{ob'} \right) \frac{1}{\sin i} = \left( \frac{\cos r}{ob} - \frac{\cos^2 r}{ob''} \right) \frac{1}{\sin r}.$$

Appelons  $\varphi, \varphi', \varphi''$  les angles compris entre le plan de la figure et les plans tangents en  $o$  aux surfaces élémentaires correspondantes (N), (I), (R); on a

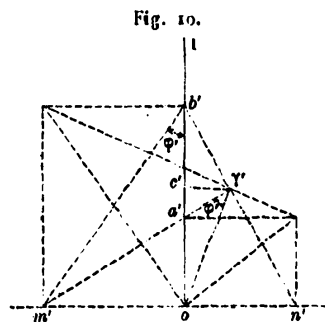
$$\text{tang } \varphi = \cos i \text{ tang } \varphi', \quad \text{tang } \varphi = \cos r \text{ tang } \varphi''.$$

La formule précédente peut alors s'écrire

$$\left( \frac{\cos i}{ob \text{ tang } \varphi} - \frac{\cos i}{ob' \text{ tang } \varphi'} \right) \frac{1}{\sin i} = \left( \frac{\cos r}{ob \text{ tang } \varphi} - \frac{\cos r}{ob'' \text{ tang } \varphi''} \right) \frac{1}{\sin r},$$

que nous allons interpréter géométriquement.

Soient toujours (fig. 10), pour le rayon I, les points  $a'$  et  $b'$  où la



surface élémentaire (I) est respectivement tangente ou normale au plan de la figure, et  $\gamma'$  le point représentatif de cette surface. Reproduisons

---

*descriptive*, 1<sup>re</sup> édition, p. 180, et démontré précédemment en 1857 dans ma brochure sur la *Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques*. Nous ferons plusieurs fois usage de ce théorème dans la suite de ce Mémoire.

une figure analogue à la *fig. 2* employée à propos de la théorie de la courbure des surfaces. Ici  $a'\gamma'o$  est égal à  $\varphi'$ . La circonférence qui contient les points  $o, \gamma', b'$  coupe la perpendiculaire élevée en  $o$  à  $I$  au point  $m'$  qui appartient à la droite  $\gamma'a'$ , et l'on voit tout de suite que

$$om' = ob' \operatorname{tang} \varphi'.$$

De la même manière on obtient, pour les surfaces élémentaires (N) et (R), des segments  $om$  et  $om''$  respectivement égaux à  $ob \operatorname{tang} \varphi$  et  $ob'' \operatorname{tang} \varphi''$ .

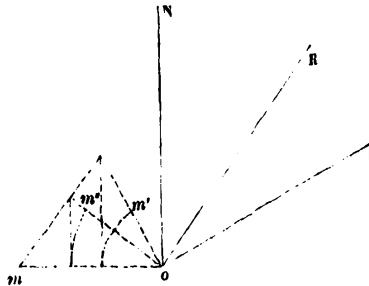
La dernière formule peut donc s'écrire

$$(1') \quad \left( \frac{\cos i}{om} - \frac{\cos i}{om'} \right) \frac{1}{\sin i} = \left( \frac{\cos r}{om} - \frac{\cos r'}{om''} \right) \frac{1}{\sin r},$$

qui prouve que :

*Si l'on amène sur  $om$  (fig. 11), en les faisant tourner dans le*

Fig. 11.



*sens direct autour de  $o$ , les segments  $om'$ ,  $om''$ , et, si des extrémités des segments ainsi amenés on élève des perpendiculaires à  $om$ , ces droites rencontrent respectivement  $om'$  et  $om''$  en des points qui sont sur une même ligne droite avec  $m$ .*

Cette liaison des points  $m, m', m''$  permet de construire  $m''$  lorsque l'on connaît  $m$  et  $m'$ .

Reprenons les deux transversales  $I$  et  $R$  (*fig. 9*) qui coupent les côtés

de l'angle formé par la droite  $aa'$  et par la perpendiculaire élevée du point  $a$  à  $N$ , on a

$$(2) \quad \left( \frac{\cos i}{oa} - \frac{1}{oa'} \right) \frac{1}{\sin i} = \left( \frac{\cos r}{oa} - \frac{1}{oa''} \right) \frac{1}{\sin r}.$$

Cette formule peut s'écrire

$$\left( \frac{\text{tang } \varphi \cos i}{oa} - \frac{\text{tang } \varphi' \cos i}{oa'} \right) \frac{1}{\sin i} = \left( \frac{\text{tang } \varphi \cos r}{oa} - \frac{\text{tang } \varphi'' \cos r}{oa''} \right) \frac{1}{\sin r}.$$

Prolongeons sur la *fig.* 10 la droite  $b'\gamma'$  jusqu'à sa rencontre  $n'$  avec la perpendiculaire élevée en  $o$  à  $I$ ; on voit facilement que

$$\frac{\text{tang } \varphi'}{oa'} = \frac{1}{on'}.$$

De même, pour les surfaces élémentaires  $(N)$  et  $(R)$ , on a des points  $n$  et  $n''$  analogues à  $n'$ . La relation précédente devient alors

$$\left( \frac{\cos i}{on} - \frac{\cos i}{on'} \right) \frac{1}{\sin i} = \left( \frac{\cos r}{on} - \frac{\cos r}{on''} \right) \frac{1}{\sin r},$$

qui montre que les points  $n$ ,  $n'$ ,  $n''$  sont liés par une construction analogue à la construction qui lie entre eux les points  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$  de la *fig.* 11. Le point  $n''$  peut alors se construire lorsque l'on connaît les points  $n$  et  $n'$ .

Nous allons faire usage de ces points  $m''$ ,  $n''$ ; mais, au lieu de prendre deux surfaces élémentaires arbitraires du pinceau  $[I]$ , nous emploierons la surface élémentaire  $(I)_o$  qui fait en  $o$  avec le plan de la figure un angle nul et la surface élémentaire  $(I)_d$  qui fait en  $o$  un angle droit avec le plan de la figure.

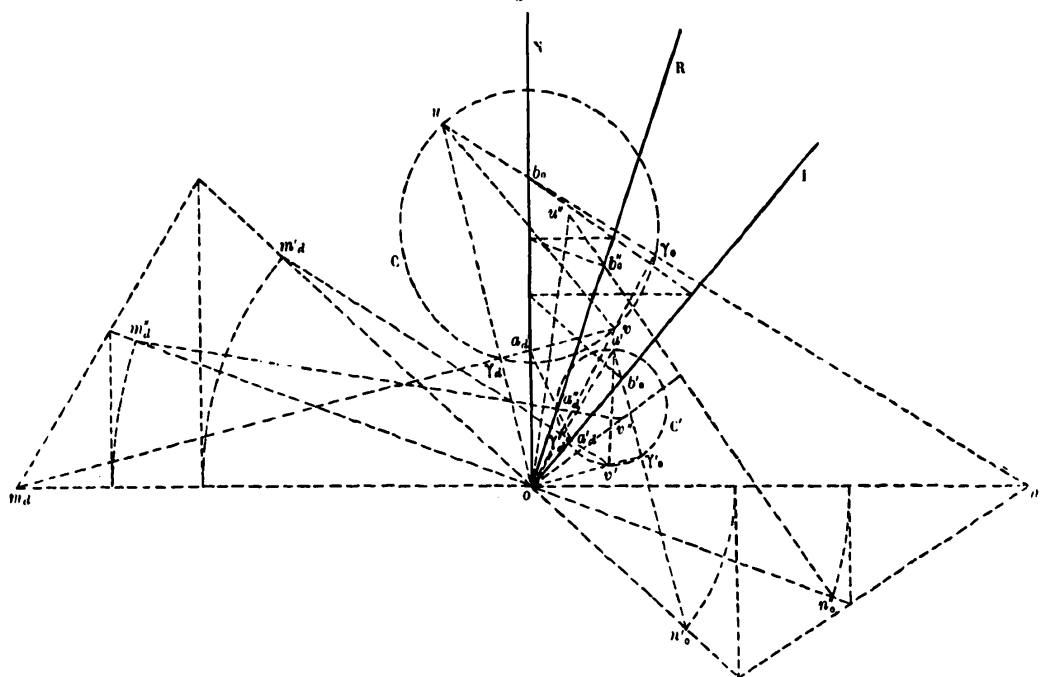
A ces surfaces élémentaires particulières correspondent, pour les pincesaux  $[N]$  et  $[R]$ , des surfaces élémentaires, les unes qui touchent aussi le plan de la figure au point  $o$  et les autres qui sont normales aussi en  $o$  au plan de la figure.

Nous adoptons les notations suivantes : les points ou segments relatifs aux surfaces élémentaires, qui font en  $o$  avec le plan de la figure un angle nul, seront indiqués avec des lettres marquées de l'indice zéro,

et les points ou les segments relatifs aux surfaces élémentaires correspondantes, qui font en  $o$  un angle droit avec le plan de la figure, seront indiqués par des lettres marquées de l'indice  $d$ .

Faisant usage de ces notations, on a (fig. 12) la construction suivante pour déterminer  $u''$  et  $v''$ .

Fig. 12.



On joint le point  $o$  au point  $u'$ . Cette droite coupe  $C'$  au point  $\gamma'_d$ . La droite  $o\gamma'_d$  rencontre  $I$  au point  $a'_d$  et la perpendiculaire élevée du point  $o$  à  $I$  au point  $m'_d$ . On détermine de même sur  $N$  le point  $a_d$  et sur la perpendiculaire élevée en  $o$  à  $N$  le point  $m_d$ .

La droite  $a_d a'_d$  rencontre  $R$  au point  $a''_d$ , et la connaissance des points  $m_d$  et  $m'_d$  entraîne la connaissance du point  $m''_d$ .

*La droite  $m''_d a''_d$  contient le point  $v''$ , et la perpendiculaire abaissée du point  $o$  sur cette droite contient  $u''$ .*

On joint le point  $o$  au point  $v'$ , cette droite coupe  $C'$  au point  $\gamma'_o$ . La

droite  $u'\gamma'_0$  rencontre I au point  $b'_0$  et la perpendiculaire élevée du point  $o$  à I, au point  $n'_0$ . On détermine de même sur N le point  $b_0$  et sur la perpendiculaire élevée du point  $o$  à N, le point  $n_0$ .

La connaissance des points  $b_0$  et  $b'_0$  permet de construire  $b''_0$ , comme nous l'avons dit précédemment.

*La droite  $n''_0b''_0$  contient le point  $u''$ , et la perpendiculaire abaissée du point  $o$  sur cette droite contient le point  $v''$ .*

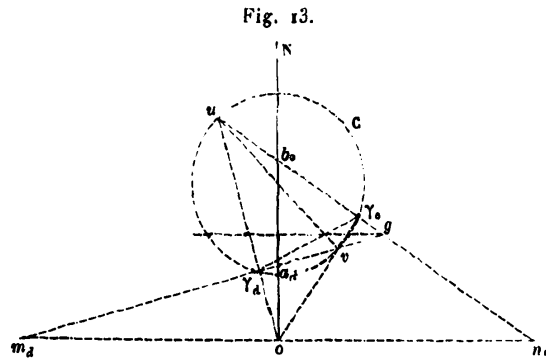
On a donc deux paires de droites qui contiennent les points  $u''$  et  $v''$  : ces points sont alors déterminés.

*La connaissance des points  $u''$  et  $v''$  entraîne, comme nous l'avons déjà dit, celle des foyers et des plans focaux relatifs au rayon réfracté R.*

Le problème d'Optique est donc encore ainsi résolu par une seconde construction dans le cas le plus général.

REMARQUES. — [N] étant un pinceau de normales, je dis que  $om_d = on_0$ .

Pour le démontrer, prolongeons  $\gamma_a v$  (fig. 13) jusqu'à sa rencontre



en  $g$  avec  $u\gamma_0$ . La droite qui joint le point  $g$  au point de rencontre de  $vu$  et de  $\gamma_a\gamma_0$  est la polaire du point  $o$ . Cette droite est alors perpendiculaire à N qui contient le centre de C. Cette polaire est alors aussi parallèle à  $m_d n_0$ . La droite N est divisée harmoniquement par cette



polaire, par le point  $o$  et par  $vg$  et  $ug$ . Les droites  $ug$ ,  $vg$ ,  $og$  et la polaire forment alors un faisceau harmonique, comme  $m_a n_0$  est parallèle à la polaire de  $o$ ; les droites  $vg$ ,  $og$ ,  $ug$  déterminent sur  $m_a n_0$  des segments égaux.

Le théorème énoncé est ainsi démontré.

2° *Sa réciproque est vraie*, c'est-à-dire si  $om_a = on_0$ , alors la droite qui joint le point  $g$  au point de rencontre de  $vu$  et de  $\gamma_a \gamma_0$  est parallèle à  $m_a n_0$  et, par suite, perpendiculaire à  $N$ ; et, comme elle est la polaire de  $o$ , la droite  $N$  qui lui est perpendiculaire doit contenir le centre de  $C$ .

Supposons maintenant que [I] soit un pinceau de normales. On a alors (*fig. 12*)  $om'_a = on'_0$ , et, comme  $om_a = on_0$ , on voit par la construction de  $om'_a$  et de  $on'_0$  que ces deux segments sont égaux. Par suite, [R] est un pinceau de normales, *puisque R doit contenir le centre de C''*.

Le théorème de Malus et de Dupin se trouve ainsi démontré.

3° Dans la relation (1), remplaçons  $\cos^2 i$  par  $\frac{\tan^2 \varphi}{\tan^2 \varphi'}$  et  $\cos^2 r$  par  $\frac{\tan^2 \varphi}{\tan^2 \varphi''}$ ; elle devient

$$(1'') \left( \frac{\cos i}{ob \tan^2 \varphi} - \frac{1}{ob' \tan^2 \varphi'} \right) \frac{1}{\sin i} = \left( \frac{\cos r}{ob \tan^2 \varphi} - \frac{1}{ob'' \tan^2 \varphi''} \right) \frac{1}{\sin r};$$

ajoutant membre à membre les relations (1'') et (2), on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin i} \left[ \cos i \left( \frac{1}{ob \tan^2 \varphi} + \frac{1}{oa} \right) - \left( \frac{1}{ob' \tan^2 \varphi'} + \frac{1}{oa'} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sin r} \left[ \cos r \left( \frac{1}{ob \tan^2 \varphi} + \frac{1}{oa} \right) - \left( \frac{1}{ob'' \tan^2 \varphi''} + \frac{1}{oa''} \right) \right]. \end{aligned}$$

Appelons toujours  $l$  (*fig. 6*) le point de rencontre de  $N$  avec la perpendiculaire élevée du point  $\gamma$  à  $\gamma o$  et  $l'$ ,  $l''$  les points analogues sur I et R. Nous avons vu, dans la théorie de la courbure des surfaces, que

$$\frac{1}{ol} = \frac{\cos^2 \varphi}{ob} + \frac{\sin^2 \varphi}{oa},$$

d'où

$$\frac{1}{ol \sin^2 \varphi} = \frac{1}{ob \tan^2 \varphi} + \frac{1}{oa};$$

de même

$$\frac{1}{ol' \sin^2 \varphi'} = \frac{1}{ob' \tan^2 \varphi'} + \frac{1}{oa'},$$

$$\frac{1}{ol'' \sin^2 \varphi''} = \frac{1}{ob'' \tan^2 \varphi''} + \frac{1}{oa''}.$$

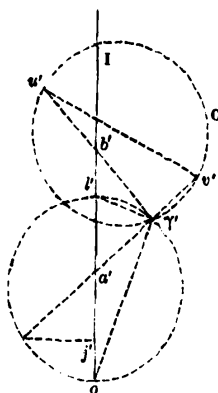
La relation précédente peut alors s'écrire

$$(3) \quad \frac{1}{\sin i} \left( \frac{\cos i}{ol \sin^2 \varphi} - \frac{1}{ol' \sin^2 \varphi'} \right) = \frac{1}{\sin r} \left( \frac{\cos r}{ol \sin^2 \varphi} - \frac{1}{ol'' \sin^2 \varphi''} \right).$$

Interprétons géométriquement cette relation.

Sur  $ol'$  comme diamètre (*fig. 14*) décrivons une circonférence de

Fig. 14.



cercle. Prolongeons  $\gamma'a'$  jusqu'à sa rencontre avec cette courbe et projetons le point ainsi obtenu en  $j'$  sur  $I$ .

On voit facilement sur la figure que  $oj' = ol' \sin^2 \varphi'$ .

Appelons  $j$  et  $j''$  les points qui, sur  $N$  et  $R$ , sont analogues à  $j'$ . La relation (3) peut alors s'écrire

$$\frac{1}{\sin i} \left( \frac{\cos i}{oj} - \frac{1}{oj'} \right) = \frac{1}{\sin r} \left( \frac{\cos r}{oj} - \frac{1}{oj''} \right),$$

qui est tout à fait analogue à la relation (2) et qui montre que *les points  $j, j', j''$  sont en ligne droite.*

Lorsque, au lieu de prendre une surface élémentaire (I) quelconque, on choisit celle qui est normale en  $o$  au plan de la figure et dont le point

représentatif est (*fig. 12*)  $\gamma'_a$  à la rencontre de  $C'$  avec  $u'o$ , alors le point  $j'$  devient le point central relatif à cette surface.

La propriété générale que nous venons de démontrer conduit alors à ce théorème :

*Les surfaces élémentaires correspondantes, normales en  $o$  au plan de la figure, ont leurs points centraux en ligne droite.*

4° Hamilton a donné, pour un pinceau quelconque, une relation que j'ai démontrée géométriquement dans mon Mémoire sur les pinceaux de droites, et qui est tout à fait analogue à la relation d'Euler démontrée précédemment.

On pourrait alors établir l'indicatrice d'un pinceau quelconque, indicatrice qui, dans le cas d'un pinceau de normales, se confond avec l'indicatrice de Dupin. L'emploi de cette indicatrice d'un pinceau quelconque permet d'interpréter d'une autre manière la relation (3). Je donnerai cette interprétation plus loin et lorsque [I] est un pinceau de normales.

#### DEUXIÈME MODIFICATION DE LA PREMIÈRE CONSTRUCTION GÉNÉRALE.

La première construction générale est basée sur la détermination du point représentatif  $\gamma''$  de la surface élémentaire (R).

Voici une nouvelle construction de ce point, qui résulte de l'emploi de la liaison géométrique qui existe entre les points  $m, m', m''$  ou entre les points  $n, n', n''$ .

La connaissance du point représentatif  $\gamma'$  entraîne, comme nous l'avons vu, celle du point  $\gamma$ . La droite  $v\gamma$  coupe N en  $a$  et rencontre la perpendiculaire à N, issue de  $o$ , au point  $m$ . On obtient de même  $a'$  et  $m'$  au moyen de la droite  $v'\gamma'$ . D'autre part, au moyen des droites  $u\gamma$  et  $u'\gamma'$ , on détermine les points  $n$  et  $n'$ .

Pour construire  $\gamma''$ , voici maintenant comment on opère : on prend le point de rencontre de R et de  $aa'$  qui est le point  $a''$ . Au moyen de  $m$  et  $m'$ , on détermine  $m''$  et, au moyen de  $n$  et  $n'$ , on détermine  $n''$ . Sur  $m''n''$  comme diamètre on décrit une circonférence de cercle :

cette courbe est coupée par la droite  $m''a''$  au point  $\gamma''$  cherché. Cela se voit au moyen d'une figure analogue à la *fig. 10*.

De la même manière, on construit un point représentatif  $\gamma'_1$ , et la première construction s'achève alors comme précédemment.

CAS PARTICULIER OU LES RAYONS INCIDENTS SONT NORMAUX  
A UNE SURFACE.

Supposons que [I] soit un pinceau de normales à une surface donnée. Appelons  $(S_1)$  la surface parallèle à cette surface et qui passe par le point  $o$ . Le pinceau [R] est alors un pinceau de normales. Appelons  $(S_R)$  la surface passant par  $o$  et à laquelle les rayons réfractés sont normaux.

Les éléments des pinceaux [I], [N], [R] sont maintenant les éléments de courbure des surfaces  $(S_1)$ ,  $(S)$  et  $(S_R)$ .

Appelons toujours  $\omega$  l'angle dont il faut faire tourner dans le sens direct le plan de la section principale de  $(S)$ , qui contient le grand axe de l'indicatrice en  $o$ , pour amener ce plan à coïncider avec le plan de la figure.

Sur la *fig. 5* cet angle  $\omega$  est égal à l'angle  $\gamma_2\gamma\alpha$ .

Appelons  $\omega'$  et  $\omega''$  les angles analogues pour les surfaces  $(S_1)$  et  $(S_R)$ . Désignons par  $R_1$  et  $R_2$  les rayons de courbure principaux de  $(S)$  en  $o$ , par  $R'_1$  et  $R'_2$  les rayons de courbure principaux de  $(S_1)$  en  $o$  et de même par  $R''_1$  et  $R''_2$  les rayons de courbure principaux de  $(S_R)$ . Ces rayons de courbure sont les distances du point  $o$  aux points où N, I, R sont respectivement rencontrés par les circonférences C, C', C'' dont les centres sont maintenant sur ces droites.

La relation (1') s'écrit

$$\left(\frac{1}{om_d} - \frac{1}{om'_d}\right) \frac{1}{\tan g i} = \left(\frac{1}{om_d} - \frac{1}{om''_d}\right) \frac{1}{\tan g r}.$$

Cherchons l'expression de  $om_d$  en fonction des éléments de courbure de  $(S)$ .

Abaissons (*fig. 15*) du point  $u$  la perpendiculaire  $ue$  sur N. Le tri-

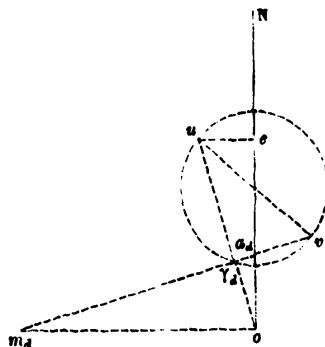
angle  $m_d o \gamma_d$  est semblable au triangle  $oue$ . On a

$$\frac{o \gamma_d}{om_d} = \frac{ue}{uo};$$

d'où

$$\frac{1}{om_d} = \frac{ue}{o \gamma_d \times uo} = \frac{\frac{uv}{2} \sin 2\omega}{o \gamma_d \times uo} = \frac{\sin 2\omega}{2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right).$$

Fig. 15.



De même pour  $om_d'$  et  $om_d''$  <sup>(1)</sup>. Introduisons ces valeurs dans la relation précédente, elle devient

$$(1''') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin 2\omega}{2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \left( \frac{1}{\text{tang } i} - \frac{1}{\text{tang } r} \right) \\ = \frac{\sin 2\omega'}{2} \left( \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_1'} \right) - \frac{\sin 2\omega''}{2} \left( \frac{1}{R_2''} - \frac{1}{R_1''} \right), \end{array} \right.$$

qui est une relation trouvée par M. Bertrand.

La relation (1'), d'où nous avons déduit la relation (1'''), peut s'obtenir directement, comme je le montrerai dans une Note à la fin de ce Mémoire.

(1) Si  $f_1'$  et  $f_2'$  sont les foyers d'un pinceau [I] et si  $\theta'$  est l'angle compris entre les plans focaux de ce pinceau, on trouve facilement que, dans ce cas,  $\frac{1}{om_d'}$  et  $\frac{1}{om_d''}$  ont pour valeurs

$$\frac{\sin 2\omega'}{2 \sin \theta'} \left( \frac{1}{of_2'} - \frac{1}{of_1'} \right) \pm \frac{1}{2 \text{ tang } \theta'} \left( \frac{1}{of_2'} - \frac{1}{of_1'} \right).$$

Lorsque [I] est un pinceau de normales, le point appelé précédemment  $l'$ , qui est à la rencontre de I et de la perpendiculaire à  $o\gamma'$  élevée du point  $\gamma'$ , devient le centre de courbure de la section faite dans  $(S_1)$  par le plan tangent en  $o$  à la surface élémentaire (I).

De même pour  $l$  et  $l''$ .

Appelons  $\rho, \rho', \rho''$  les rayons de courbure  $ol, ol', ol''$ .

La relation (3) peut s'écrire

$$(3') \quad \frac{1}{\sin i} \left( \frac{\cos i}{\rho \sin^2 \varphi} - \frac{1}{\rho' \sin^2 \varphi'} \right) = \frac{1}{\sin r} \left( \frac{\cos r}{\rho \sin^2 \varphi} - \frac{1}{\rho'' \sin^2 \varphi''} \right).$$

Lorsque que  $\varphi'$  est droit, il en est de même de  $\varphi$  et  $\varphi''$ , et l'on a simplement

$$(3'') \quad \frac{1}{\sin i} \left( \frac{\cos i}{\rho_d} - \frac{1}{\rho'_d} \right) = \frac{1}{\sin r} \left( \frac{\cos r}{\rho_d} - \frac{1}{\rho''_d} \right),$$

relation analogue à la relation (2) et qui montre que, dans ce cas, les centres de courbure des sections faites respectivement dans  $(S)$ ,  $(S_1)$ ,  $(S_R)$  par les plans menés par N, I, R perpendiculairement au plan de la figure sont en ligne droite.

Démontrons directement ce théorème dû à Sturm.

Le plan mené par N perpendiculairement au plan de la figure détermine dans  $(S)$  une section dont le centre de courbure est le point où ce plan est normal à la normale à  $(S)$  dont la directrice est perpendiculaire en  $o$  au plan de la figure.

Ou encore, ce centre de courbure est le point où le plan de la figure est tangent à cette normale.

De même pour les points analogues relatifs aux normales correspondantes. Mais les points de contact du plan de la figure avec les normales correspondantes sont toujours en ligne droite, comme nous l'avons vu précédemment; donc le théorème est démontré.

Appelons  $ot$  la trace commune sur  $(T)$  des plans tangents en  $o$  aux normales correspondantes (N), (I) et (R). On a

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = \sin(ot, I), \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi''} = \sin(ot, R);$$

la relation (3') peut alors s'écrire

$$(3'') \quad \frac{1}{\sin i} \left[ \frac{\cos i}{\rho} - \frac{\sin^2(ot, I)}{\rho'} \right] = \frac{1}{\sin r} \left[ \frac{\cos r}{\rho} - \frac{\sin^2(ot, R)}{\rho''} \right],$$

relation qui a été trouvée par Sturm.

Interprétons géométriquement cette relation. Traçons sur le plan tangent (T) l'indicatrice ( $n$ ) de (S) avec un paramètre  $\mu$ ; traçons sur le plan mené en  $o$  perpendiculairement à I l'indicatrice ( $i$ ) de (S<sub>I</sub>) avec un paramètre  $\mu'$ ; projetons obliquement cette courbe sur (T) au moyen de droites parallèles à I. Appelons ( $i'$ ) la conique ainsi obtenue. De même pour (S<sub>R</sub>) nous avons l'indicatrice ( $r$ ) construite avec le paramètre  $\mu''$  et qui est projetée obliquement sur (T) au moyen de droites parallèles à R suivant la conique ( $r'$ ).

Sur  $ot$ , la conique ( $n$ ) intercepte le diamètre  $\delta$ , la conique ( $i'$ ) intercepte le diamètre  $\delta'$  et la conique ( $r'$ ) intercepte  $\delta''$ .

On a

$$\rho = \mu\delta^2, \quad \rho' = \mu'\delta'^2 \sin^2(ot, I), \quad \rho'' = \mu''\delta''^2 \sin^2(ot, R);$$

la relation précédente peut alors s'écrire

$$\frac{1}{\sin i} \left( \frac{1}{\mu\delta^2} - \frac{1}{\mu'\delta'^2} \right) = \frac{1}{\sin r} \left( \frac{1}{\mu\delta^2} - \frac{1}{\mu''\delta''^2} \right).$$

Posons

$$\frac{\mu}{\mu'} = \cos i, \quad \frac{\mu}{\mu''} = \cos r;$$

on a alors

$$\frac{1}{\tan i} \left( \frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta'^2} \right) = \frac{1}{\tan r} \left( \frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta''^2} \right).$$

De là ce théorème :

*La différence des inverses des carrés des diamètres interceptés par ( $n$ ) et ( $i'$ ) sur une droite issue de  $o$  est dans un rapport constant avec la différence des inverses des carrés des diamètres interceptés par ( $n$ ) et ( $r'$ ) sur cette droite, quelle qu'en soit la direction.*

Dans le cas particulier où  $\delta = \delta'$ , on a aussi  $\delta = \delta''$ ; donc :

*Les coniques (n), (i') et (i'') passent par les mêmes points.*

Ce dernier théorème est dû à Sturm.

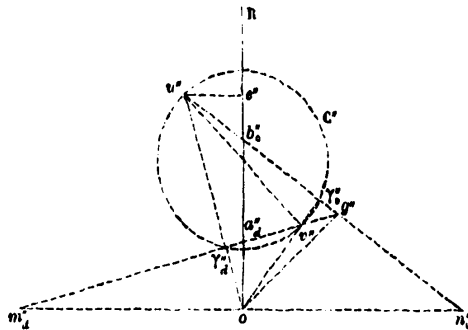
CALCUL DES ÉLÉMENTS DU PINCEAU RÉFRACTÉ LORSQUE CE PINCEAU EST FORMÉ DE NORMALES A UNE SURFACE.

Je vais traduire en formules la dernière construction générale dans le cas où [I] est un pinceau de normales.

Il est bien clair qu'on pourrait faire cette recherche aussi facilement dans le cas d'un pinceau quelconque, mais les formules seraient encore plus compliquées. Les éléments du pinceau des normales [R] sont les éléments de courbure de  $(S_R)$ , c'est-à-dire  $\omega''$ ,  $R_1''$  et  $R_2''$ . Ce sont ces éléments qu'il s'agit de calculer.

Joignons (fig. 16, qui est la reproduction, pour R, de la fig. 13)

Fig. 16.



le point  $o$  au point de rencontre  $g''$  des droites  $u''\gamma_0''$  et  $v''\gamma_d''$ . Dans le triangle  $og''u''$  les droites  $g''\gamma_d''$  et  $o\gamma_0''$  sont deux hauteurs; par conséquent  $u''v''$  est perpendiculaire à  $og''$ . Les droites  $og''$  et  $on_0''$  étant respectivement perpendiculaires à  $u''v''$  et R, l'angle  $n_0''og''$  est égal à  $2\omega''$ .

L'angle  $m_d''g''n_0''$ , coupé par les deux transversales R et  $m_d''n_0''$ , donne

$$\left(\frac{1}{oa_d''} - \frac{1}{ob_0''}\right) \frac{1}{\sin g''oa_d''} = \left(\frac{1}{on_0''} + \frac{1}{m_d''o}\right) \frac{1}{\sin n_0''og''},$$



d'où

$$(4) \quad \frac{1}{\tan 2\omega''} = \frac{om_d''}{2} \left( \frac{1}{oa_d''} - \frac{1}{ob_0''} \right).$$

On voit tout de suite sur la figure que

$$(5) \quad \frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''} = \frac{1}{oa_d''} + \frac{1}{ob_0''}$$

et

$$R_1'' R_2'' = o\gamma_d'' \times ou''.$$

Projetons  $u''$  en  $e''$  sur R, on a alors

$$R_1'' R_2'' = oa_d'' \times oe''.$$

Calculons  $oe''$  (1). L'angle  $n_0'' u'' e''$ , coupé par les transversales R et  $on_0''$ , donne

$$\left( \frac{1}{ob_0''} - \frac{1}{oe''} \right) \frac{1}{\sin b_0'' ou''} = \frac{1}{on_0''} \frac{1}{\sin n_0'' ou''}$$

ou

$$\left( \frac{1}{ob_0''} - \frac{1}{oe''} \right) \frac{1}{\tan b_0'' ou''} = \frac{1}{om_d''},$$

mais l'angle  $b_0'' ou''$  est égal à l'angle  $om_d'' a_d''$  dont la tangente est  $\frac{a_d'' o}{m_d'' o}$ ; on a donc

$$\frac{1}{oe''} = \frac{1}{ob_0''} - \frac{oa_d''}{om_d''^2};$$

par suite,

$$(6) \quad \frac{1}{R_1'' R_2''} = \frac{1}{oa_d'' \times ob_0''} - \frac{1}{om_d''^2}.$$

Dans les seconds membres des formules (4), (5) et (6), il n'entre que  $om_d''$ ,  $oa_d''$ ,  $ob_0''$ , dont voici les valeurs en fonction des éléments de courbure de (S) et de (S<sub>1</sub>).

(1) On peut remarquer que  $oe''$  est le rayon de courbure de la courbe de contour apparent de (S<sub>R</sub>) projetée sur le plan de la figure.

La relation (1<sup>m</sup>) donne

$$\frac{1}{om_d} = \frac{\sin 2\omega'}{2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \frac{1}{\tan g i} - \frac{\sin 2\omega}{2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \left( \frac{1}{\tan g i} - \frac{1}{\tan g r} \right).$$

La relation (3<sup>m</sup>) donne

$$\frac{1}{\rho_d} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{o\alpha_d} = \frac{1}{\sin i} \left[ \frac{\sin(i-r)}{\rho_d} + \frac{\sin r}{\rho'_d} \right].$$

Remplaçons  $\frac{1}{\rho_d}$  et  $\frac{1}{\rho'_d}$  en fonction des éléments de courbure de (S) et de (S<sub>1</sub>); il vient

$$\frac{1}{o\alpha_d} = \frac{1}{\sin i} \left[ \sin(i-r) \left( \frac{\sin^2 \omega}{R_1} + \frac{\cos^2 \omega}{R_2} \right) + \sin r \left( \frac{\sin^2 \omega'}{R_1} + \frac{\cos^2 \omega'}{R_2} \right) \right].$$

De la relation (3<sup>m</sup>) on déduit

$$\frac{1}{\rho_0} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{ob_0} = \frac{1}{\sin i \cos^2 r} \left[ \frac{\sin(i-r)}{\rho_0} + \frac{\sin r \cos^2 i}{\rho_0} \right].$$

Remplaçons  $\frac{1}{\rho_0}$  et  $\frac{1}{\rho_0}$  en fonction des éléments de courbure de (S) et de (S<sub>1</sub>); il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{ob_0} = \frac{1}{\sin i \cos^2 r} & \left[ \sin(i-r) \left( \frac{\cos^2 \omega}{R_1} + \frac{\sin^2 \omega}{R_2} \right) \right. \\ & \left. + \sin r \cos^2 i \left( \frac{\cos^2 \omega'}{R_1} + \frac{\sin^2 \omega'}{R_2} \right) \right]; \end{aligned}$$

il suffit de porter ces valeurs de  $\frac{1}{om_d}$ ,  $\frac{1}{o\alpha_d}$ ,  $\frac{1}{ob_0}$  dans les équations (4), (5), (6) pour avoir les éléments de courbure de (S<sub>R</sub>).

Comme on le voit, les expressions des éléments de courbure de (S<sub>R</sub>) en fonction des éléments de courbure de (S) et de (S<sub>1</sub>) sont des expressions compliquées.

On peut y arriver par les méthodes analytiques; mais il nous semble qu'il aurait été difficile, pour ne pas dire plus, de revenir de ces expressions compliquées à des constructions géométriques simples.

Cette remarque en faveur de la Géométrie ne doit pas faire perdre de vue que ma solution de la question d'Optique n'est ici qu'une nouvelle application de la méthode générale (1) dont j'avais fait usage pour construire les éléments de courbure de la surface de l'onde (2).

Il y a en outre ici, dans l'application de cette méthode, l'emploi du *point représentatif*, élément plus simple que la droite auxiliaire, et qui m'a permis de traiter complètement le problème d'Optique étudié dans ce Mémoire.

Je compte donner plus tard de nouvelles applications du *point représentatif*, dont je crois l'utilité déjà démontrée par ce travail même.

### NOTE PREMIÈRE.

#### DÉMONSTRATION DIRECTE DE LA RELATION

$$\left(\frac{1}{om} - \frac{1}{om'}\right) \frac{1}{\text{tang } i} = \left(\frac{1}{om} - \frac{1}{om'}\right) \frac{1}{\text{tang } r}.$$

De l'égalité  $\sin i = \lambda \sin r$ , on déduit

$$\cos i \, di = \lambda \cos r \, dr, \quad \text{d'où} \quad \frac{di}{dr} = \frac{\text{tang } i}{\text{tang } r}.$$

Cherchons les expressions de  $di$  et de  $dr$ , et, pour cela, appliquons une formule qui donne la variation de longueur d'un arc de grand cercle que l'on déplace sur une sphère.

Appelons  $a$ , et  $b$ , (*fig. 17*) les extrémités de l'arc de grand cercle mobile, et  $e$ , le point de contact de cet arc avec son enveloppe. Menons par les extrémités  $a$ , et  $b$ , des arcs de grands cercles respectivement normaux aux trajectoires de ces points. Désignons par  $\alpha$ , et  $\beta$ , les points où ils rencontrent l'arc normal en  $e$ , à  $a, b$ , et appelons  $d\varepsilon$  l'angle compris entre  $a, b$ , et cet arc dans sa position infiniment voisine. On a

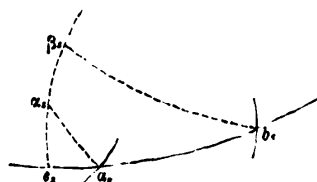
$$d a, b, = d\varepsilon (\text{tang } e, \beta, - \text{tang } e, \alpha,).$$

(1) C'est cette méthode dont j'avais annoncé la fécondité dans la Notice sur mes travaux (1881).

(2) *Collectanea mathematica*.

Appliquons cette formule, et, pour cela, supposons que  $a$ , et  $b$ , soient les traces sur la sphère de rayons parallèles à N et I, et que les positions infiniment voisines de  $a$ , et  $b$ , soient les traces sur la sphère des positions infiniment voisines de N et de I. Les plans des arcs  $a, \alpha,$

Fig. 17.



$b, \beta,$  sont respectivement parallèles aux plans centraux des surfaces élémentaires (N) et (I), et le plan de l'arc  $e, \alpha,$  est parallèle au plan mené perpendiculairement au plan (N, I, R), suivant la caractéristique  $aa'a''$  de ce plan. Sur ce dernier plan, les traces des plans centraux des surfaces (N) et (I) font, avec  $aa'a''$  des angles que je désigne par  $\eta$  et  $\eta'$ , et qui sont respectivement égaux à  $e, \alpha,$  et  $e, \beta,$ . On a alors

$$di = d\epsilon(\text{tang}\eta' - \text{tang}\eta).$$

De même, on a

$$dr = d\epsilon(\text{tang}\eta'' - \text{tang}\eta);$$

donc

$$\frac{di}{dr} = \frac{\text{tang}\eta' - \text{tang}\eta}{\text{tang}\eta'' - \text{tang}\eta},$$

et, comme

$$\frac{di}{dr} = \frac{\text{tang}i}{\text{tang}r},$$

il vient

$$\frac{\text{tang}i}{\text{tang}r} = \frac{\text{tang}\eta' - \text{tang}\eta}{\text{tang}\eta'' - \text{tang}\eta}.$$

Appelons  $\Theta, \Theta', \Theta''$  les angles que les plans centraux des surfaces correspondantes (N), (I), (R) font avec le plan de la figure.

On a

$$\text{tang}\eta = \text{tang}\Theta \sin oa'a',$$

$$\text{tang}\eta' = \text{tang}\Theta' \sin oa'a'',$$

$$\text{tang}\eta'' = \text{tang}\Theta'' \sin oa''a.$$

Portons ces valeurs dans la relation précédente; celle-ci devient

$$\frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r} = \frac{\operatorname{tang} \theta' \sin oa' a'' - \operatorname{tang} \theta \sin oaa'}{\operatorname{tang} \theta' \sin oa'' a - \operatorname{tang} \theta \sin oaa'}$$

Divisons les deux termes du second membre de cette relation par  $\sin oaa'$ , et remplaçons les rapports des sinus par  $\frac{oa}{oa'}$  et  $\frac{oa}{oa''}$ ; il vient

$$\frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r} = \frac{\frac{\operatorname{tang} \theta'}{oa'} - \frac{\operatorname{tang} \theta}{oa}}{\frac{\operatorname{tang} \theta'}{oa''} - \frac{\operatorname{tang} \theta}{oa}}$$

On voit (*fig. 10*) que l'angle  $c'\gamma'a'$  est égal à  $\theta'$ , et, par suite, que  $\frac{\operatorname{tang} \theta'}{oa'} = \frac{1}{om'}$ ; de même pour les autres termes du second membre de la relation précédente. Elle peut donc s'écrire

$$\left(\frac{1}{om'} - \frac{1}{om}\right) \frac{1}{\operatorname{tang} i} = \left(\frac{1}{om''} - \frac{1}{om}\right) \frac{1}{\operatorname{tang} r},$$

relation qu'il s'agissait d'établir.

#### NOTE DEUXIÈME.

Prenons (*fig. 6*) la surface parallèle à  $(S_1)$  qui passe par le point  $p'$ , et désignons cette surface par  $(S'_1)$ ; de même appelons  $(S'_R)$  la surface parallèle à  $(S_R)$  qui passe par le point  $p''$ .

La surface  $(S)$  est le lieu des points dont les distances aux surfaces  $(S'_1)$  et  $S'_R$ ) sont dans le rapport constant  $\frac{op'}{op''}$ .

Il résulte de la solution de la question d'Optique développée dans ce travail que nous savons déterminer les éléments de courbure de  $(S)$  lorsque l'on suppose connus les éléments de courbure des surfaces  $(S'_1)$  et  $(S'_R)$ .

Nous avons donc résolu aussi le problème suivant :

*Construire les éléments de courbure de la surface, lieu des points dont le rapport des distances à deux surfaces données est constant.*