JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 2 (1886), p. 239-329.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1886_4_2__239_0>

Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques;

PAR M. G. HUMBERT.

---

1. M. Poincaré a démontré qu'on peut toujours exprimer les coordonnées des points d'une courbe algébrique en fonction fuchsienne d'un paramètre : c'est ce résultat capital qui a servi de point de départ au présent Mémoire, et nous a permis d'appliquer aux courbes de genre quelconque les principes et la méthode dont nous avons fait usage, dans un autre travail, pour étudier les courbes de genre un.

On connaît la relation intime qui existe entre la Géométrie sur une courbe algébrique et la théorie des intégrales abéliennes qui appartiennent à cette courbe : c'est Clebsch qui a mis le premier cette relation en évidence dans son beau Mémoire *Sur l'application des fonctions abéliennes à la Géométrie*, publié au *Journal de Crelle*, t. 63; il est revenu sur la question, avec plus de détails, dans ses *Leçons sur la Géométrie*, recueillies et complétées par M. Lindemann.

Il résulte de ces travaux que le théorème d'Abel et les éléments de la théorie de l'inversion des intégrales abéliennes de première espèce permettent de traiter, d'une manière complète, la question de l'intersection d'une courbe algébrique et d'une courbe adjointe quelconque, et de résoudre, en particulier, dans le cas des courbes adjointes, le problème dit des *courbes de contact*.

Pour les courbes non adjointes, il faut introduire en outre des intégrales de troisième espèce; la question se rattache alors au problème de l'inversion étendu, et Clebsch ne l'a pas traitée d'une manière générale, au point de vue géométrique.

L'emploi des fonctions fuchsiennes nous a permis de combler cette lacune, sans recourir à la théorie des intégrales de troisième espèce : nous avons d'ailleurs envisagé la question de l'intersection d'une courbe algébrique et d'une courbe quelconque, adjointe ou non adjointe, à un autre point de vue que Clebsch.

Clebsch se préoccupait spécialement des relations qui lient les coordonnées des points d'intersection; nous avons, au contraire, examiné celles qui lient les paramètres dont dépend l'équation de la courbe sécante, soumise à certaines conditions; et nous avons pu ainsi, dans le problème des courbes de contact, donner non seulement les propriétés des systèmes de points de contact, comme l'a fait Clebsch dans le cas particulier des courbes adjointes, mais indiquer la forme de l'équation générale des courbes de contact, et en déduire des propriétés géométriques de ces courbes elles-mêmes.

Les cinq premiers paragraphes de notre travail sont consacrés à l'exposition de quelques propriétés importantes des fonctions fuchsiennes et thêtafuchsiennes : en particulier, on démontre au § III une proposition purement algébrique, relative aux zéros et aux infinis d'une fonction fuchsienne, proposition identique, au fond, au théorème d'Abel, et qui joue dans notre théorie le rôle que joue, dans la théorie des courbes de genre un, le théorème de Liouville sur les zéros et les infinis d'une fonction doublement périodique.

Dans les §§ VI-X, on expose les principes de la représentation des coordonnées des points d'une courbe à l'aide des fonctions thêtafuchsiennes, et l'on étudie l'intersection d'une courbe de genre p et d'une courbe adjointe. On est ainsi conduit à distinguer deux espèces de courbes de genre p.

Dans les §§ XI-XII, on aborde la question de l'intersection d'une courbe de genre p et d'une courbe quelconque, et l'on traite le problème général des courbes de contact.

On termine enfin par l'étude sommaire de quelques courbes spéciales, des courbes hyperelliptiques en particulier.

2. Parmi les modes de représentation en fonctions fuchsiennes, indiqués par M. Poincaré pour les coordonnées des points d'une courbe de genre p, celui que nous avons adopté est le suivant.

Soit R_0 un polygone fuchsien de la première famille de $4p$ côtés, et tel que les côtés opposés soient conjugués : tous les sommets de ce polygone appartiennent alors à un même cycle, et l'on pourra supposer que la somme de tous les angles de R_0 est égale à 2π. Un tel polygone définit un groupe fuchsien G, et il sera toujours possible de déterminer les paramètres de ce groupe, de telle sorte qu'étant donnée une relation algébrique quelconque $f(x, y) = 0$, on puisse poser $x = F(z)$, $y = \varphi(z)$, F et φ étant deux fonctions fuchsiennes du groupe G.

Remarque. — Soient ab et $a_1 b_1$ deux côtés opposés de R_0, tels que les points a et b correspondent respectivement aux points a_1 et b_1 ; il résulte des travaux de M. Poincaré que, si l'on décrit le périmètre du polygone en partant de a dans le sens ab, le côté conjugué sera parcouru dans le sens $b_1 a_1$.

I. — Fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré.

3. Soit $\Theta(z)$ une fonction thêtafuchsienne de groupe G, holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental, et de degré m, c'est-à-dire telle que l'on ait, $\left(z, \frac{\lambda z + \mu}{\nu z + \varpi}\right)$ étant une des substitutions de G,

$$(1) \qquad \Theta\left(\frac{\lambda z + \mu}{\nu z + \varpi}\right) = \Theta(z)(\nu z + \varpi)^{2m},$$

en supposant $\lambda\varpi - \mu\nu = 1$.

Dans le cas que nous considérons, la somme des angles du polygone R_0 étant égale à 2π, les sommets de ce polygone ne sont pas, en général, des zéros de la fonction $\Theta(z)$: le nombre des zéros de cette fonction dans l'intérieur de R_0 sera, d'après une formule donnée par M. Poincaré, égal à $2m(p-1)$.

Bien que M. Poincaré, en étudiant les fonctions qui satisfont à l'équation (1), ait supposé que m désignait un entier supérieur à l'unité, la formule précédente, dont la démonstration ne s'appuie que sur la relation (1), est également applicable au cas $m = 1$: la fonction thêtafuchsienne correspondante est alors du premier degré.

Il est facile de démontrer l'existence de fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un, et de donner une expression analytique de ces fonctions.

Soient, en effet, x_1, x_2, x_3 trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m; posons $x = \frac{x_2}{x_1}$, $y = \frac{x_3}{x_1}$: les deux fonctions fuchsiennes x et y seront liées par une relation algébrique $f(x, y) = 0$, que nous écrirons aussi $f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Il est aisé de déterminer le degré de cette relation. Soit k le nombre des zéros communs aux trois fonctions x_1, x_2, x_3 : les fonctions x et y auront, dans R_0, $2m(p-1) - k$ infinis, ces infinis étant d'ailleurs les mêmes pour les deux fonctions, et, par suite, une droite

$$ax + by + c = 0$$

coupera la courbe $f = 0$ en $2m(p-1) - k$ points : le degré de cette courbe sera donc $2m(p-1) - k$.

Il n'existera, comme on le voit aisément, qu'un cas d'exception, celui où les équations

$$x(z) = x(\alpha), \qquad y(z) = y(\alpha),$$

α désignant l'affixe d'un point quelconque intérieur à R_0, auraient, dans l'intérieur de ce polygone, d'autres solutions communes que la solution $z = \alpha$.

Si nous écartons ce cas particulier, nous pouvons dire que la courbe $f = 0$ est de degré $2m(p-1) - k$, et qu'à un point de cette courbe ne correspond, dans l'intérieur de R_0, qu'une seule valeur de l'argument z.

4. Cela posé, considérons l'expression

$$(2) \qquad \theta(z) = \frac{P(x, y)}{f'_y}\frac{dx}{dz} = \frac{P(x_1, x_2, x_3)}{f'_{x_3}(x_1, x_2, x_3)}\left(x_1\frac{dx_2}{dz} - x_2\frac{dx_1}{dz}\right),$$

où $P(x, y)$ est le premier membre de l'équation d'une courbe de degré $n-3$ [étant posé $2m(p-1)-k=n$], adjointe à la courbe $f=0$.

Il est clair qu'on a

$$\theta\left(\frac{\lambda z+\mu}{\nu z+\varpi}\right)=\theta(z)(\nu z+\varpi)^2. \tag{3}$$

Je dis d'ailleurs que $\theta(z)$ est holomorphe à l'intérieur de R_0 : on voit en effet, par la deuxième expression de cette fonction, qu'elle ne peut devenir infinie que pour les valeurs de z qui annulent f'_{x_3}.

Or on a

$$x_1 f'_{x_1}+x_2 f'_{x_2}+x_3 f'_{x_3}=nf=0,$$
$$\frac{dx_1}{dz}f'_{x_1}+\frac{dx_2}{dz}f'_{x_2}+\frac{dx_3}{dz}f'_{x_3}=0,$$

x_3 et $\frac{dx_3}{dz}$ ne devenant pas infinis dans l'intérieur de R_0, les valeurs de z qui annulent f'_{x_3} vérifient les équations

$$0=x_1 f'_{x_1}+x_2 f'_{x_2}, \qquad 0=\frac{dx_1}{dz}f'_{x_1}+\frac{dx_2}{dz}f'_{x_2},$$

et, par suite, annulent le déterminant $x_1\frac{dx_2}{dz}-x_2\frac{dx_1}{dz}$, à moins qu'on n'ait à la fois $f'_{x_1}=f'_{x_2}=f'_{x_3}=0$.

Dans la première hypothèse, le numérateur de θ est nul, en même temps que le dénominateur, et la fonction reste finie; dans la deuxième, deux cas pourront se présenter :

Ou le zéro commun des fonctions $f'_{x_1}, f'_{x_2}, f'_{x_3}$ sera un des k zéros communs à x_1, x_2, x_3, et $\theta(z)$ reste fini pour ces valeurs de z, comme le montre la première expression de la fonction; ou le zéro commun sera l'argument d'un point double de f, argument qui, par hypothèse, annule $P(x_1, x_2, x_3)$, et θ reste encore fini.

Il résulte de cette discussion que $\theta(z)$ est une fonction thêtafuchsienne du premier degré, holomorphe dans l'intérieur du polygone R_0.

Cherchons maintenant quels sont, dans ce polygone, les zéros de la fonction.

En partant de l'expression

$$\theta(z)=\frac{P(x,y)}{f'_y}\frac{dx}{dz},$$

et en remarquant que les infinis de f'_y, c'est-à-dire les infinis de x et y, ou les zéros de x_3, n'annulent pas $\theta(z)$, on voit que les zéros de cette fonction seront :

1° Les zéros de $P(x, y)$ n'annulant pas f'_y, c'est-à-dire ne correspondant pas à un point singulier de f : leur nombre est égal à celui des points communs aux courbes $P = 0$ et $f = 0$, distincts des points singuliers de cette dernière, c'est-à-dire à $2(p' - 1)$, p' étant le genre de la courbe $f = 0$.

2° Les zéros de $\frac{dx}{dz}$ qui n'annulent pas f'_y. Or la relation

$$\frac{dx}{dz} f'_x + \frac{dy}{dz} f'_y = 0$$

montre qu'un tel zéro, α_0, doit annuler $\frac{dy}{dz}$; donc, dans le voisinage du point $z = \alpha_0$, x et y se développent en série de la forme

$$x = x_0 + \frac{1}{1.2}(x - x_0)^2 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right) + \ldots,$$

$$y = y_0 + \frac{1}{1.2}(y - y_0)^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) + \ldots;$$

d'où

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 + \ldots,$$

$$f'_y = 2B(y - y_0) + \ldots,$$

et f'_y s'annulera également pour $z = \alpha_0$. Il en résulte que $\theta(z)$ n'a, dans le polygone R_0, que $2(p' - 1)$ zéros.

Or une fonction thêtafuchsienne holomorphe du premier degré, de groupe G, a, dans R_0, $2(p - 1)$ zéros; on a donc $p' = p$, et la courbe $f = 0$ est de genre p. Ainsi :

Trois fonctions thêtafuchsiennes x_1, x_2, x_3, de degré m, ayant k zéros communs dans le polygone générateur, et telles que les équations $\frac{x_1(z)}{x_1(\alpha)} = \frac{x_2(z)}{x_2(\alpha)} = \frac{x_3(z)}{x_3(\alpha)}$ n'aient pas dans ce polygone d'autre solution que $z = \alpha$, sont liées par une relation algébrique homogène $f = 0$ d'ordre $2m(p - 1) - k$ et de genre p.

Les arguments des points autres que les points singuliers, où la *courbe $f = 0$ est coupée par une courbe adjointe quelconque d'ordre $2m(p-1) - k - 3$, sont les zéros d'une fonction thêtafuchsienne, holomorphe dans le cercle fondamental et de degré un.*

5. La courbe $f = 0$, étant de genre p, admet p courbes adjointes d'ordre $n - 3$, dont les équations sont linéairement distinctes : nous pourrons ainsi, en partant de l'expression (2), former p fonctions thêtafuchsiennes holomorphes et de degré un, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ qui sont évidemment linéairement indépendantes.

Je dis que toute fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré un, $\theta(z)$, est fonction linéaire et homogène des précédentes.

En effet, le rapport $\dfrac{\theta(z)}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)}$, étant une fonction fuchsienne, s'exprime rationnellement en fonction de x et y [1].

On peut donc écrire

$$\theta(z) = \frac{dx}{dz}\,\frac{P(x,y)}{f'_y},$$

$P(x,y)$ étant une fonction rationnelle. On démontrerait aisément, comme dans la théorie des intégrales abéliennes, que $\theta(z)$ ne peut rester fini dans le polygone R_0 que si P est un polynôme entier et la courbe $P = 0$ une adjointe à la courbe $f = 0$, de degré $n - 3$.

II. — Périodes.

6. Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ p fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré, linéairement distinctes.

---

[1] On a en effet, en désignant par u une fonction fuchsienne,

$$\varphi(u, x) = 0, \qquad \psi(u, y) = 0,$$

φ et ψ étant deux fonctions algébriques : u est donc une fonction rationnelle de x et de y, à moins qu'à des valeurs $x(\alpha), y(\alpha)$ de x et y, correspondant à un même point de la courbe $f = 0$, ne corresponde plus d'une valeur de u ; ce cas ne peut se présenter que si les équations $x(z) = x(\alpha)$, $y(z) = y(\alpha)$ ont, dans R_0, d'autres solutions communes que $z = \alpha$, hypothèse que nous avons écartée.

Considérons l'intégrale

$$I = \int_z^{\frac{\lambda z+\mu}{\nu z+\varpi}} \theta_k(z)\,dz,$$

$\left(z, \dfrac{\lambda z+\mu}{\nu z+\varpi}\right)$ étant une des substitutions du groupe G : cette intégrale a une valeur indépendante de z, car

$$\frac{dI}{dz} = \theta_k\left(\frac{\lambda z+\mu}{\nu z+\varpi}\right)\frac{1}{(\nu z+\varpi)^2} - \theta_k(z) = 0$$

en vertu de (3).

Soient $S_1(z)$, $S_2(z)$ deux substitutions du groupe G : on a identiquement

$$\int_z^{S_2[S_1(z)]} \theta_k(z)\,dz = \int_z^{S_1(z)} \theta_k(z)\,dz + \int_{S_1(z)}^{S_2[S_1(z)]} \theta_k(z)\,dz.$$

Or la dernière intégrale est, d'après ce qui précède, égale à

$$\int_z^{S_2(z)} \theta_k(z)\,dz.$$

Il en résulte que, en désignant par $S(z)$ une substitution quelconque du groupe G, on aura

$$(4) \qquad \int_z^{S(z)} \theta_k(z)\,dz = m\omega_k + m'\omega'_k + \ldots + m^{(2p-1)}\omega_k^{(2p-1)},$$

$m, m', \ldots$ étant des entiers, et $\omega_k, \omega'_k, \ldots$ désignant les valeurs de l'intégrale correspondant aux $2p$ substitutions fondamentales de G, c'est-à-dire aux substitutions qui transforment respectivement l'un dans l'autre les côtés conjugués du polygone R_0.

Si au lieu de θ_k on considère une autre fonction analogue θ_l, on aura de même

$$\int_z^{S(z)} \theta_l(z)\,dz = m\omega + m'\omega'_l + \ldots,$$

$m, m', \ldots$ étant les mêmes que dans la relation (4), puisque ces entiers ne dépendent que de la manière dont S est formée à l'aide des substitutions fondamentales.

Les quantités ω_k sont évidemment les *périodes* de l'intégrale abélienne de première espèce

$$\int \frac{P_k(x, y)}{f'_y} dx.$$

III. — Zéros et infinis des fonctions fuchsiennes.

7. Soit $F(z)$ une fonction fuchsienne quelconque d'*ordre* μ, c'est-à-dire ayant μ zéros et μ infinis dans l'intérieur de R_0.

L'intégrale

$$J = \int \frac{\theta_k(z) dz}{F(z) - u},$$

où u désigne une constante arbitraire et θ_k une fonction thêtafuchsienne holomorphe du premier degré, est nulle le long du périmètre de R_0. Soient en effet ab et $a_1 b_1$ deux côtés conjugués de ce polygone, tels que, par la substitution $\left(z, \frac{\lambda z + \mu}{\nu z + \varpi}\right)$, ab se transforme en $a_1 b_1$. D'après une remarque faite au n° **2**, si l'on décrit le périmètre de R_0, à partir de a, dans le sens ab, on décrira le côté conjugué de ab dans le sens $b_1 a_1$. La partie de l'intégrale relative à ces deux côtés sera donc

$$i = \int_a^b \frac{\theta_k(z) dz}{F(z) - u} - \int_{a_1}^{b_1} \frac{\theta_k(z_1) dz_1}{F(z_1) - u}.$$

Soit z_1 le point de l'arc $a_1 b_1$ qui correspond au point z de l'arc ab. On a

$$F(z_1) = F(z), \qquad \theta_k(z_1) = \theta_k(z)(\nu z + \varpi)^2, \qquad dz_1 = dz(\nu z + \varpi)^{-2}$$

et, par suite,

$$\frac{\theta_k(z) dz}{F(z) - u} = \frac{\theta_k(z_1) dz_1}{F(z_1) - u}.$$

ce qui entraîne $i = 0$. On a donc aussi, le long du périmètre de R_0,

$$J = 0.$$

En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ les μ zéros de $F(z) - u$ compris dans l'intérieur de R_0, il vient par suite

$$0 = \frac{\theta_k(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)} + \frac{\theta_k(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)} + \ldots.$$

Or, si dans l'équation $F(\alpha) - u = 0$, on considère α comme une fonction de u, on a

$$F'(\alpha)\,d\alpha = du,$$

et, par suite,

$$0 = \theta_k(\alpha_1)\,d\alpha_1 + \theta_k(\alpha_2)\,d\alpha_2 + \ldots.$$

Faisons varier u depuis la valeur u considérée jusqu'à une valeur u', les zéros $\alpha_1 \ldots$ varieront d'une manière continue et prendront finalement les valeurs $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$; on aura donc

$$(5) \qquad 0 = \int_{\alpha_1}^{\alpha'_1} \theta_k(\alpha_1)\,d\alpha_1 + \int_{\alpha_2}^{\alpha'_2} \theta_k(\alpha_2)\,d\alpha_2 + \ldots.$$

Il peut arriver que, dans leurs variations, une ou plusieurs des quantités α sortent du polygone R_0 : si α'_1, par exemple, est en dehors de ce polygone, désignons par β_1 le point correspondant dans R_0.

On a

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha'_1} \theta_k(z)\,dz = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_k(z)\,dz + \int_{\beta_1}^{\alpha'_1} \theta_k(z)\,dz.$$

Or la dernière intégrale est (§ II) de la forme $m\omega_k + m'\omega'_k + \ldots$. Si donc on désigne par $\beta_1, \beta_2, \ldots$ les zéros de $F(z) - u'$ compris dans R_0, il vient

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_k(z)\,dz + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \theta_k(z)\,dz + \ldots = h\omega_k + h'\omega'_k + \ldots,$$

$h, h', \ldots$ étant des entiers. En donnant successivement à k les valeurs $1, 2, \ldots, p$, on obtiendra p équations de cette forme, les entiers $h, h', \ldots$ étant évidemment les mêmes pour toutes ces équations On a ainsi

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \sum \int_{\alpha}^{\beta_i} \theta_1(z)\,dz = h\omega_1 + h'\omega'_1 + \ldots + h^{(2p-1)}\omega^{(2p-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu) \\ \sum \int_{\alpha}^{\beta_i} \theta_p(z)\,dz = h\omega_p + h'\omega'_p + \ldots + h^{(2p-1)}\omega_p^{(2p-1)}. \end{array} \right.$$

Ces relations, si l'on se reporte à l'équation (2), reviennent manifestement au *théorème d'Abel*, relatif aux intégrales de première espèce.

En particulier, on peut, dans les équations (6), supposer que α_1, $\alpha_2, \ldots$ sont les zéros, $\beta_1, \beta_2, \ldots$ les infinis d'une fonction fuchsienne.

Le quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m est une fonction fuchsienne : les équations (6) restent donc vraies si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les zéros d'une de ces fonctions, par $\beta_1, \beta_2, \ldots$ ceux de l'autre.

8. On peut déduire des équations (6) un théorème dont nous ferons souvent usage :

Toute fonction fuchsienne d'ordre $p - k$ peut être mise de $k + 1$ façons différentes sous la forme du quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré.

Plus généralement :

Soient h fonctions fuchsiennes, d'ordre n, ayant mêmes infinis, et linéairement distinctes : si l'inégalité $p + h - n > 0$ est vérifiée, chacune de ces fonctions pourra se mettre, de $p + h - n$ façons différentes, sous la forme du quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré.

En effet, $F_1, \ldots, F_h$, étant h fonctions fuchsiennes d'ordre n, ayant les mêmes infinis, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, la fonction

$$f(z) = u_1 F_1 + u_2 F_2 + \ldots + u_h F_h + u_{h+1},$$

où $u_1, \ldots$ sont des constantes, a les mêmes infinis, et l'on peut disposer de $u_1, \ldots$ de manière à l'annuler pour h valeurs quelconques de z, $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$. Soient $\mu_1, \ldots, \mu_{n-h}$ les $n-h$ autres zéros de cette fonction. On a

$$\int_{\beta_1}^{\lambda_1} \theta_k(z)\,dz + \ldots + \int_{\beta_{h+1}}^{\mu_1} \theta_k(z)\,dz + \ldots + \int_{\beta_n}^{\mu_{n-h}} \theta_k(z)\,dz = \text{const.}$$
$$(k = 1, 2, \ldots p);$$

d'où, en dérivant successivement par rapport aux quantités variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$,

$$(7) \qquad \theta_k(\lambda_1) + \theta_k(\mu_1)\frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_1} + \ldots + \theta_k(\mu_{n-h})\frac{\partial \mu_{n-h}}{\partial \lambda_1} = 0,$$

$$(7\ bis) \qquad \theta_k(\lambda_2) + \theta_k(\mu_1)\frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_2} + \ldots = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots p),$$

. . . .

Soit, pour fixer les idées, $p - n + h = 2$: les quantités μ sont au nombre de $p-2$; les équations (7) étant en nombre p, on en conclut que les déterminants formés avec $p-1$ lignes quelconques du Tableau

$$\begin{matrix} \theta_1(\lambda_1) & \theta_1(\mu_1) & \theta_1(\mu_2) & \ldots & \theta_1(\mu_{p-2}) \\ \theta_2(\lambda_1) & \theta_2(\mu_1) & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \theta_p(\lambda_1) & \theta_p(\mu_1) & \ldots\ldots & \ldots & \theta_p(\mu_{p-2}) \end{matrix}$$

sont nuls; en vertu des relations (7 *bis*), etc., on obtient de même des résultats nuls, en remplaçant dans la première colonne de ce Tableau λ_1 par $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Il en résulte que les deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes, de degré un et linéairement distinctes,

$$\theta(z) = \begin{vmatrix} \theta_1(z) & \theta_1(\mu_1) & \ldots & \theta_1(\mu_{p-2}) \\ \theta_2(z) & \theta_2(\mu_1) & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \theta_{p-1}(z) & \theta_{p-1}(\mu_1) & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix},$$

$$\theta'(z) = \begin{vmatrix} \theta_2(z) & \theta_2(\mu_1) & \ldots & \theta_2(\mu_{p-2}) \\ \theta_3(z) & \theta_3(\mu_1) & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \theta_p(z) & \theta_p(\mu_1) & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix},$$

s'annulent pour $z = \lambda_1, \ldots, \lambda_h, \mu_1, \ldots, \mu_{p-2}$.

Les rapports $\frac{\theta(z)}{f(z)}, \frac{\theta'(z)}{f(z)}$ sont ainsi holomorphes dans l'intérieur du polygone R_0, et ce sont évidemment des fonctions thêtafuchsiennes du premier degré, θ_0 et θ'_0. On a donc

$$f(z) = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\theta'}{\theta'_0}.$$

Une telle égalité subsiste, quelles que soient les constantes $u_1, u_2, \ldots$ et, en particulier, si elles sont toutes nulles, sauf une, c'est-à-dire si $f(z)$ se réduit à $F_1(z), F_2(z), \ldots, F_h(z)$. C. Q. F. D.

9. Les équations (6) montrent qu'on ne peut pas se donner arbitrairement les zéros et les infinis d'une fonction fuchsienne; p de ces quantités sont déterminées par les autres.

De même on ne pourra choisir *arbitrairement* plus de $2m(p-1)-p$ des $2m(p-1)$ zéros d'une fonction thêtafuchsienne de degré m.

Il existe pourtant un cas d'exception : pour le découvrir, supposons qu'on puisse former une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré m s'annulant pour $2m(p-1)-p+1$ zéros arbitrairement choisis, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ les $p-1$ autres zéros; on aura, en différentiant successivement par rapport aux variables λ les équations du théorème d'Abel

$$(8)\quad 0=\theta_k(\lambda_1)+\theta_k(\mu_1)\frac{\partial\mu_1}{\partial\lambda_1}+\ldots+\theta_k(\mu_{p-1})\frac{\partial\mu_{p-1}}{\partial\lambda_1}\quad (k=1,2,..,p).$$

Les équations (8) étant au nombre de p et les quantités $\frac{\partial\mu}{\partial\lambda_1}$ au nombre de $p-1$, le déterminant de ces équations est nul, et, par un raisonnement identique à celui qu'on a fait plus haut, on voit que tous les zéros de la fonction thêtafuchsienne de degré m considérée annulent une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré un. On a donc $m=1$.

Cette condition nécessaire est aussi suffisante, car une fonction thêtafuchsienne holomorphe du premier degré étant de la forme

$$a_1\theta_1+a_2\theta_2+\ldots+a_p\theta_p$$

pourra avoir $p-1$ zéros quelconques, et les autres zéros, déterminés par les précédents, sont en nombre $2(p-1)-(p-1)=p-1$.

IV. — Fonctions thêtafuchsiennes holomorphes.

10. On peut déduire de ce qui précède le nombre M des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m, linéairement indépendantes, c'est-à-dire le nombre de ces fonctions au moyen desquelles toutes les autres s'expriment linéairement.

On aura évidemment, puisqu'une telle fonction a $2m(p-1)$ zéros dans l'intérieur du polygone R_0, et que p de ces zéros sont déterminés en fonction des autres par les relations (6)

$$(9)\quad \begin{cases} M\leqq 2m(p-1)-p+1; \\ \text{ou} \\ M\leqq(2m-1)(p-1). \end{cases}$$

D'un autre côté, trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes, de degré m, x_1, x_2, x_3, n'ayant aucun zéro commun, sont liées par une relation algébrique $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, de degré $2m(p-1)$ ou n, et de genre p (§ I). Une courbe $P = 0$, de degré $n-3$, adjointe à la courbe $f = 0$, coupe cette dernière aux points singuliers et en $2(p-1)$ autres points; par ces points et les points doubles de $f = 0$, dont le nombre est égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$, faisons passer des courbes de degré $n-2$: leur équation générale renfermera, sous forme linéaire et homogène, un nombre de paramètres arbitraires *au moins* égal à

$$n - p + 1 = (2m - 1)(p - 1).$$

Soit $C_i = 0$ l'équation de l'une d'entre elles : la fonction de z

$$\theta_i(z) = \frac{C_i[x_1(z), x_2(z), x_3(z)]}{P[x_1(z), x_2(z), x_3(z)]}$$

est évidemment une fonction thêtafuchsienne de degré m; elle est d'ailleurs holomorphe dans le polygone R_0, puisque, par hypothèse, les zéros du dénominateur annulent le numérateur. On pourra former ainsi $(2m-1)(p-1)$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m : je dis qu'elles sont linéairement indépendantes.

S'il existait en effet une relation de la forme

$$\Sigma a_i \theta_i = 0,$$

on en tirerait

$$\Sigma a_i C_i[x_1(z), \ldots] = 0$$

et, par suite, la fonction $\Sigma a_i C_i(x_1, x_2, x_3)$ s'annulant en tous les points de la courbe $f = 0$, on aurait identiquement, quels que soient x_1, x_2, x_3,

$$\Sigma a_i C_i(x_1, x_2, x_3) = A f,$$

A désignant un polynôme entier en x_1, x_2, x_3; mais les polynômes C_i étant de degré $n-2$, et f de degré n, A est nul, et l'on arrive ainsi à une relation linéaire et homogène entre les polynômes C_i, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On a donc

$$M \geqq (2m-1)(p-1)$$

et, par suite, d'après (9),

$$(10) \qquad M = (2m-1)(p-1).$$

Cette formule n'est pas vraie pour $m=1$, parce que l'inégalité (9) n'est plus exacte : $p-1$ seulement des zéros sont alors déterminés par les autres comme on l'a vu au n° **9**. On a dans ce cas $M = p$.

11. Il résulte de la valeur de M pour $m > 1$ qu'on peut toujours former une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré m ayant pour zéros $2m(p-1)-p$ quantités choisies arbitrairement; les p autres zéros sont liés aux précédents par les p équations (6).

Peut-on en déduire qu'inversement $2m(p-1)$ quantités satisfaisant à ces équations sont les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré m? Pour que cette conclusion soit légitime, il faut évidemment démontrer que, les valeurs λ de $2m(p-1)-p$ de ces quantités étant données, les équations (6) fournissent, pour les p autres μ, un seul système de valeurs, ou, s'ils en fournissent plusieurs, qu'il existe toujours une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré m s'annulant pour les valeurs λ données et pour les valeurs μ d'un des systèmes correspondants.

Nous sommes ainsi conduit à la discussion des équations

$$(6) \begin{cases} \displaystyle\int_{\alpha_1}^{\lambda_1} \theta_k(z)\,dz + \int_{\alpha_2}^{\lambda_2} \theta_k(z)\,dz + \ldots \\ \displaystyle\quad + \int_{\beta_1}^{\mu_1} \theta_k(z)\,dz + \ldots + \int_{\beta_p}^{\mu_p} \theta_k(z)\,dz = h\omega_k + \ldots \qquad (k=1,2,\ldots,p). \end{cases}$$

$\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots, \beta_p$ désignent les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe et de degré m, donnée, et quelconque d'ailleurs.

On obtient, en différentiant, les équations aux différentielles totales

$$0 = d\lambda_1 \theta_k(\lambda_1) + d\lambda_2 \theta_k(\lambda_2) + \ldots + d\mu_1 \theta_k(\mu_1) + \ldots + d\mu_p \theta_k(\mu_p)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p).$$

On démontrerait sans difficulté, en suivant la marche adoptée par M. Briot pour la discussion des équations différentielles abéliennes, qui sont, au fond, identiques aux précédentes, que les relations (6) fournissent généralement, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont donnés, un seul système de valeurs de $\mu_1, \ldots, \mu_p$: toutefois, pour certains systèmes spéciaux de valeurs des λ, s des quantités μ, $\mu_1, \ldots, \mu_s$ peuvent être choisies arbitrairement; les autres sont déterminées sans ambiguïté en fonction des précédentes et des quantités λ. $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sont alors des zéros de s fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un, linéairement distinctes.

Or nous verrons plus loin (§ VIII) que, dans ce cas, on peut former $s+1$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m s'annulant pour $z = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$. On pourra donc former une telle fonction s'annulant en outre pour $z = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$, et les autres zéros de cette fonction seront nécessairement, d'après (6), les quantités $\mu_{s+1}, \ldots, \mu_p$.

Il est donc permis d'énoncer la proposition suivante :

Si $2m(p-1)$ quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ satisfont aux relations

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_k(z)dz + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \theta_k(z)dz + \ldots = h\omega_k + \ldots$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p),$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots$ sont les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré m, il existe toujours une semblable fonction admettant pour zéros les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

Remarque. — Dans le cas de $m > 1$, on pourra toujours, en vertu de la formule (10), former s fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m, linéairement distinctes, ayant pour zéros

$$2m(p-1) - p - s + 1$$

quantités données, et en général on ne pourra en former que s. Mais il peut se présenter des cas d'exception que nous étudierons plus loin au point de vue géométrique; nous nous bornerons à énoncer pour l'instant la proposition suivante, qui se déduit immédiatement du théorème du n° **8**.

Si $s+\rho$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m, linéairement distinctes, ont $2m(p-1)-p-s+1$ zéros communs, elles sont, de ρ manières différentes, proportionnelles à des fonctions thêtafuchsiennes de degré un.

V. — Expression des fonctions fuchsiennes a l'aide des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes.

12. Soit $F(z)$ une fonction fuchsienne d'ordre n, admettant les zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et les infinis $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Proposons-nous de mettre $F(z)$ sous la forme du quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes.

Il est d'abord évident que ces deux fonctions devront, en général, avoir des zéros communs; car, s'il en était autrement, on aurait, en désignant leur degré par μ, $n=2\mu(p-1)$, et n serait divisible par $2(p-1)$.

Supposons n compris entre les nombres

$$2(\mu-1)(p-1) \quad \text{et} \quad 2\mu(p-1);$$

deux cas seront à distinguer suivant le signe de la différence

$$2\mu(p-1)-n-p.$$

Premier cas : $2\mu(p-1)-n-p \geqq 0$. — On pourra former une fonction thêtafuchsienne holomorphe, de degré μ, Θ, ayant pour zéros les n quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, et $2\mu(p-1)-n-p$ autres quantités qu'on peut choisir arbitrairement, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$; nous désignerons par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ les p derniers zéros de $\Theta(z)$.

Je dis maintenant qu'on peut former une autre fonction holomorphe de degré μ, $\Theta_0(z)$, ayant pour zéros :

1° Les n zéros de $F(z)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$;

2° Les $2m(p-1)-n-p$ quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$;

3° Les p quantités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$.

Il suffit en effet de démontrer, puisque $\beta_1, \ldots, \beta_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \rho_1, \ldots, \rho_p$ sont les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré μ, qu'on a les relations

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_k(z)dz + \ldots + \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \theta_k(z)dz + \int_{\lambda_1}^{\lambda_1} \theta_k(z)dz + \ldots$$
$$+ \int_{\rho_1}^{\rho_1} \theta_k(z)dz + \ldots + \int_{\rho_p}^{\rho_p} \theta_k(z)dz = h\omega_k + \ldots$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

ou

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_k(z)dz + \ldots + \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \theta_k(z)dz = h\omega_k + \ldots.$$

Or ces dernières relations sont vérifiées, puisque par hypothèse $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les zéros, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ les infinis d'une fonction fuchsienne $F(z)$. La fonction fuchsienne $\frac{\theta_0}{\theta}(z)$ aura par suite mêmes zéros et mêmes infinis que $F(z)$, dont elle ne différera que par un facteur constant.

Second cas : $2\mu(p-1) - n - p < 0$. — En ce cas, il sera généralement impossible de mettre $F(z)$ sous la forme du quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ; mais on pourra employer deux fonctions de degré $\mu + 1$: en vertu du raisonnement précédent, il suffit, pour le démontrer, de vérifier la condition

$$2(\mu + 1)(p - 1) - n - p \geqq 0$$

ou

$$2\mu(p - 1) - n + p - 2 \geqq 0.$$

Or cette inégalité est vraie, puisque par hypothèse n est inférieur à $2\mu(p-1)$ et que p est au moins égal à 2.

En ce cas, on aura

$$F(z) = \frac{\theta_0(z)}{\theta(z)},$$

θ_0 et θ étant deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré $\mu + 1$, ayant $2(\mu + 1)(p - 1) - n$ zéros communs, parmi lesquels $2(\mu + 1)(p - 1) - n - p$ peuvent être choisis arbitrairement.

Considérons maintenant deux fonctions fuchsiennes, F et F', ayant mêmes infinis : il résulte de ce qui précède qu'on pourra les mettre sous la forme

$$F = \frac{\Theta_0}{\Theta}, \qquad F' = \frac{\Theta'_0}{\Theta},$$

$\Theta_0, \Theta'_0, \Theta$ étant des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes.

Remarque. — Les raisonnements précédents montrent que, si n quantités α sont liées à n quantités β par les relations

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_k(z)\,dz + \ldots + \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \theta_k(z)\,dz = h\omega_k + h'\omega'_k + \ldots,$$

on pourra former une fonction fuchsienne d'ordre n admettant les quantités β comme zéros et les quantités α comme infinis. Il est clair d'ailleurs qu'on ne peut, à un facteur constant près, en former qu'une seule.

VI. — Expression des coordonnées des points d'une courbe algébrique.

13. Les coordonnées des points d'une courbe algébrique de genre p peuvent, comme l'a montré M. Poincaré, s'exprimer en fonction fuchsienne d'un paramètre, le polygone R_0 générateur ayant $4p$ côtés et étant déterminé comme nous l'avons rappelé. On pourra toujours, par un choix convenable des axes de coordonnées, faire en sorte que les fonctions fuchsiennes de z qui représentent les coordonnées x et y aient mêmes infinis; soit n leur ordre commun.

Nous supposerons que les équations $\dfrac{x(z)}{x(\alpha)} = \dfrac{y(z)}{y(\alpha)} = 1$ n'ont, dans le polygone R_0, d'autre solution commune que la solution $z = \alpha$: la courbe S, décrite par le point (x, y), est alors de degré n (§ I).

Soient

$$2(\mu - 1)(p - 1) \quad \text{et} \quad 2\mu(p - 1)$$

les deux multiples consécutifs de $2(p - 1)$ qui comprennent n. On pourra, d'après les résultats du paragraphe précédent, mettre x et y

sous la forme

$$x = \frac{\Theta_0}{\Theta}, \qquad y = \frac{\Theta'_0}{\Theta};$$

les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes Θ, Θ_0, Θ'_0 étant de degré μ ou $\mu+1$ suivant le signe de la quantité $2\mu(p-1)-n-p$.

Si l'on a

$$2\mu(p-1)-n-p \geqq 0,$$

les coordonnées des points d'une courbe de degré n et de genre p pourront, en coordonnées homogènes, être représentées par trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ; on ne pourra employer, en aucun cas, pour cette représentation, des fonctions de degré $\mu-1$, parce que le degré d'une courbe ainsi définie serait au plus égal à $2(\mu-1)(p-1)$, quantité inférieure à n par hypothèse.

Si l'on a

$$2\mu(p-1)-n-p < 0,$$

les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de la représentation seront, en général, de degré $\mu+1$; toutefois, pour certaines courbes *spéciales* de degré n, on pourra employer des fonctions de degré μ, puisque, par hypothèse, $2\mu(p-1)$ est égal ou supérieur à n.

Il en résulte que les coordonnées x_1, x_2, x_3 des points d'une courbe algébrique de genre p pourront se mettre sous la forme

$$(\mathrm{R}) \quad x_i = a_1^{(i)}\Theta_1 + a_2^{(i)}\Theta_2 + \ldots + a^{(i)}_{(2\mu-1)(p-1)}\Theta_{(2\mu-1)(p-1)} \qquad (i=1,2,3),$$

Θ_1, Θ_2, ... désignant $(2\mu-1)(p-1)$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ linéairement distinctes; et $a_1^{(i)}$, ... des constantes.

Inversement, toute courbe représentée par des équations de la forme (R) sera du degré $2\mu(p-1)-k$, k désignant le nombre des zéros communs aux trois fonctions x_1, x_2, x_3, à condition toutefois que les équations

$$\frac{x_2}{x_1}(z) = \frac{x_2}{x_1}(\alpha), \qquad \frac{x_3}{x_1}(z) = \frac{x_3}{x_1}(\alpha)$$

n'aient dans R_0 d'autre solution commune que $z=\alpha$.

La courbe, en ce cas, sera de genre p, comme il résulte des considérations développées au § I.

VII. — Intersection d'une courbe de genre p et d'une courbe adjointe.

14. Soient x_1, x_2, x_3 trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ ayant k zéros communs. Proposons-nous d'étudier la courbe S décrite par le point (x_1, x_2, x_3).

Nous avons fait l'hypothèse que les équations

$$\frac{x_2}{x_1}(z) = \frac{x_2}{x_1}(\alpha), \qquad \frac{x_3}{x_1}(z) = \frac{x_3}{x_1}(\alpha)$$

n'ont, dans l'intérieur du polygone générateur de $4p$ côtés, R_0, pas d'autre solution commune que $z = \alpha$: cette hypothèse ne restreint pas la généralité, car on démontre sans grande difficulté que, si elle n'est pas vérifiée, la courbe S est de genre inférieur à p ; les coordonnées de ses points peuvent donc s'exprimer à l'aide de fonctions thêtafuchsiennes de genre inférieur à p (1).

---

(1) On peut s'en rendre compte de la manière suivante. Supposons que la condition dont il s'agit ne soit pas remplie, et qu'à un point de la courbe S correspondent, dans R_0, deux valeurs, par exemple, de l'argument z. Si

$$P(x_1, x_2, x_3) = 0$$

est l'équation d'une courbe de degré $n - 3$ adjointe à S, on voit, comme au § I, que la fonction

$$\theta(z) = \frac{P(x_1, x_2, x_3)}{f'_{x_3}}\left(x_1 \frac{dx_2}{dz} - x_2 \frac{dx_1}{dz}\right)$$

est une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré un, ayant par suite $2(p-1)$ zéros dans R_0. Or parmi ces zéros figurent les valeurs qui annulent P sans annuler f'_{x_3}, c'est-à-dire les arguments qui correspondent aux points non singuliers où P coupe S. Si p' est le genre de S, ces points sont en nombre égal à $2(p'-1)$ et les arguments correspondants sont au nombre de $4(p'-1)$. On a

Nous supposerons de plus que les fonctions x_1, x_2, x_3 ne sont ni de degré un, ni, ce qui revient au même, proportionnelles à des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un : nous aurons à étudier ensuite le cas où il en serait autrement.

Dans cette hypothèse, je dis qu'il n'existe que $(2\mu - 1)(p - 1) - k$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ, linéairement distinctes, et s'annulant pour les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des k zéros communs à x_1, x_2, x_3 : en effet, s'il existait davantage, x_1, x_2, x_3 seraient proportionnels à trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un (§ IV, *Remarque*).

De même, il n'existe que $[2(\mu h + \rho) - 1](p - 1) - hk$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré $\mu h + \rho$ linéairement distinctes, et admettant au degré de multiplicité h chacun des k zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; car, s'il en existait un plus grand nombre, on voit qu'en désignant par Θ_ρ une fonction thêtafuchsienne quelconque holomorphe de degré ρ, les fonctions $x_1^h\, \Theta_\rho; x_1^{h-1} x_2 \Theta_\rho; x_1^{h-1} x_3 \Theta_\rho$, qui admettent h fois chacun de ces zéros, seraient proportionnelles à trois fonctions de degré un; il en serait par suite de même de x_1, x_2, x_3.

15. L'étude des systèmes de points communs à une courbe algébrique et à ses courbes adjointes constitue une des théories les plus importantes de la Géométrie sur une courbe; elle repose, comme l'a fait voir Clebsch, sur le théorème d'Abel relatif aux intégrales de première espèce.

L'emploi des fonctions thêtafuchsiennes va nous permettre de retrouver simplement la plupart des résultats connus de cette théorie, et d'en démontrer de nouveaux.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par S la courbe de genre p et de degré $n = 2\mu(p - 1) - k$ décrite par le point $x_1(z), x_2(z), x_3(z)$; par $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les k zéros communs à x_1, x_2, x_3.

Les propositions suivantes mettent en évidence la relation simple

---

donc

$$4(p' - 1) \leqq 2(p - 1),$$

et par suite

$$p' < p$$

dès que p dépasse 1.

qui lie la théorie des zéros des fonctions thêtafuchsiennes et celle de l'intersection d'une courbe algébrique avec ses courbes adjointes.

I. *Soit* C *une courbe adjointe à* S *d'ordre* $n+q-3$; *les arguments des points, autres que les points singuliers, communs à cette courbe et à* S, *annulent une fonction thêtafuchsienne holomorphe* $\Theta(z)$, *de degré* $\mu q+1$; *les autres zéros de cette fonction sont les quantités* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, *chacune au degré q de multiplicité.*

Inversement :

Soit $\Theta(z)$ *une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré* $\mu q+1$, *admettant comme zéro multiple d'ordre q chacune des quantités* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$; *les autres zéros de cette fonction sont les arguments des points, autres que les points singuliers, où la courbe* S *est coupée par une courbe adjointe de degré* $n+q-3$.

En effet, $C(x_1, x_2, x_3)=0$ étant l'équation d'une courbe adjointe de degré $n+q-3$, les arguments des $n(n+q-3)$ points où cette courbe coupe S annulent la fonction $C[x_1(z), x_2(z), x_3(z)]$, qui admet de plus les zéros $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, chacun au degré $n+q-3$ de multiplicité. Cette fonction n'a pas d'autres zéros dans le polygone R_0, car ceux dont nous venons de parler sont en nombre égal à

$$n(n+q-3)+k(n+q-3),$$

c'est-à-dire à

$$2\mu(n+q-3)(p-1);$$

or la fonction $C[x_1(z), \dots]$ est de degré $\mu(n+q-3)$ et a par suite $2\mu(n+q-3)(p-1)$ zéros dans le polygone R_0.

Cela posé, soit $P=0$ l'équation d'une courbe quelconque d'ordre $n-3$, adjointe à S, et coupant cette courbe en $2(p-1)$ points, distincts des points singuliers, dont les arguments vérifient la relation $\theta(z)=0$; $\theta(z)$ étant une fonction thêtafuchsienne holomorphe du premier degré (§ I).

Posons

$$\Theta(z)=\frac{C[x_1(z), \dots]}{P[x_1(z), \dots]}\,\theta(z).$$

La fonction $\Theta(z)$ est évidemment une fonction thêtafuchsienne de degré $\mu(n+q-3)+1-\mu(n-3)=\mu q+1$, dont les zéros, d'après l'expression précédente, sont les zéros de $C[x_1(z), \ldots]$ qui n'annulent pas $P[x_1(z), \ldots]$, c'est-à-dire les arguments des points non singuliers où C coupe S, et les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, chacune au degré q de multiplicité. Elle est d'ailleurs holomorphe, puisque les zéros du dénominateur annulent le numérateur : les arguments des points non singuliers où C coupe S et les quantités $\alpha, \ldots, \alpha_k$, prises au degré q de multiplicité, sont donc les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré $\mu q+1$. C. Q. F. D.

Pour démontrer la réciproque, considérons ainsi toutes les courbes adjointes à S de degré $n+q-3$ et les fonctions $C[x_1(z), \ldots]$ correspondantes, nous obtenons une infinité de fonctions $\Theta(z)$. Cherchons combien de ces fonctions sont linéairement distinctes.

Les courbes d'ordre $n+q-3$ adjointes à S et dont les équations sont linéairement distinctes sont en nombre *au moins* égal à

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(n+q-2)(n+q-1)-[\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-p]\\ &\quad =nq+p-1+\tfrac{1}{2}(q-1)(q-2);\end{aligned}$$

soient $C_1=0$, $C_2=0, \ldots$ leurs équations.

Parmi les courbes figurent évidemment celles dont l'équation est

$$0=S\varphi_{q-3},$$

φ_{q-3} désignant un polynôme quelconque d'ordre $q-3$, homogène en x_1, x_2, x_3. Ce polynôme renfermant $\frac{(q-1)(q-2)}{2}$ coefficients arbitraires, l'équation précédente fournit un nombre égal de courbes adjointes d'ordre $n+q-3$, linéairement distinctes, que nous choisirons pour les courbes

$$C_{nq+p}=0, \qquad C_{nq+p+1}=0, \qquad \ldots, \qquad C_{nq+p-1+\frac{1}{2}(q-1)(q-2)}=0.$$

Or si, dans l'expression de $\Theta(z)$, on remplace C par $S\varphi_{n-3}$, on trouve un résultat nul, puisque $S[x_1(z), \ldots]=0$: il ne nous reste ainsi que

$nq+p-1$ *fonctions* $\Theta(z)$, formées avec les premiers membres des équations des courbes $C_1=0, \ldots, C_{nq+p-1}=0$.

Je dis que ces fonctions $\Theta(z)$ sont linéairement distinctes.

En effet, par suite de ce qui précède, il n'existe pas, entre x_1, x_2, x_3, de relation identique de la forme

$$a_1 C_1 + a_2 C_2 + \ldots + a_{nq+p-1} C_{nq+p-1} = S\varphi,$$

$a_1, \ldots$ étant des constantes et φ un polynôme de degré $q-3$ en x_1, x_2, x_3. Or, si l'on avait une équation de la forme

$$a_1\Theta_1(z) + a_2\Theta_2(z) + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire

$$a_1 C_1[x_1(z), \ldots] + a_2 C_2[x_2(z), \ldots] + \ldots = 0,$$

on en déduirait que la fonction $a_1 C_1(x_1, x_2, x_3) + \ldots$, qui s'annule en tous les points de la courbe S, est divisible par $S(x_1, x_2, x_3)$; on aurait ainsi

$$a_1 C_1 + a_2 C_2 + \ldots = S\varphi,$$

relation que nous savons être impossible.

On obtient donc, par le procédé indiqué plus haut, $nq+p-1$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré $\mu q+1$, linéairement indépendantes, et admettant au degré q de multiplicité chacun des zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Or les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré $\mu q+1$ qui admettent q fois ces k zéros sont en nombre au moins égal à

$$\begin{aligned}&[2(\mu q+1)-1](p-1)-kq\\ &\quad=(2\mu q+1)(p-1)-q[2\mu(p-1)-n]=nq+p-1.\end{aligned}$$

Elles ne sont pas en nombre supérieur, ainsi qu'on l'a dit plus haut, puisque $x_1(z), x_2(z), x_3(z)$ ne sont pas proportionnels à trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un.

Il en résulte :

1° Que, par les points singuliers de S, on ne peut faire passer que

$nq + p - 1 + \frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ courbes adjointes d'ordre $n+q-3$ dont les équations soient linéairement distinctes;

2° Que les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré $\mu q + 1$, qui admet q fois chacun des zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, sont les arguments des points non singuliers où S est coupée par une courbe adjointe d'ordre $n+q-3$. C. Q. F. D.

16. On démontrerait, en suivant une marche identique, les propositions suivantes, qu'on pourrait d'ailleurs déduire directement des précédentes.

II. *Soit* C *une courbe adjointe à* S *d'ordre* $n+q-3$, *passant par les* $2(p-1)$ *points non singuliers communs à* S *et à une courbe adjointe quelconque d'ordre* $n-3$; *les arguments des autres points (non singuliers) où cette courbe coupe* S *annulent une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré* μq, *dont les derniers zéros sont les quantités* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, *chacune au degré* q *de multiplicité.*

Inversement :

Soit $\Theta(z)$ *une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré* μq, *admettant comme zéro multiple d'ordre* q *chacune des quantités* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; *les autres zéros de cette fonction sont les arguments de points de* S, *situés, avec les* $2(p-1)$ *points où* S *est coupée par une courbe adjointe quelconque de degré* $n-3$, *sur une courbe adjointe d'ordre* $n+q-3$.

VIII. — Des groupes de points sur une courbe algébrique.

17. Considérons toutes les courbes adjointes d'un degré donné, qui passent, en dehors des points singuliers, par un certain nombre de points fixes de S; elles déterminent sur cette courbe, par leurs intersections mobiles, des groupes de points dont l'étude constitue l'objet principal de la *Géométrie sur une courbe algébrique*.

Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les arguments des points de deux de ces groupes : on a évidemment, en se reportant au théorème I du

§ VII et aux résultats du § III, les relations

$$\int_{\beta_1}^{\lambda_1}\theta_i(z)\,dz+\int_{\beta_2}^{\lambda_2}\theta_i(z)\,dz+\ldots+\int_{\beta_h}^{\lambda_h}\theta_i(z)\,dz=l\omega_i+l'\omega'_i+\ldots$$
$$(i=1,2,\ldots,p).$$

Inversement, les relations précédentes peuvent servir à définir les groupes de points indépendamment des courbes adjointes qui les traversent : si h quantités $\beta_1, \ldots, \beta_h$ sont liées à h quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ par des équations de cette forme, nous dirons que le groupe $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ est *équivalent* au groupe $\beta_1, \ldots, \beta_h$.

D'après cette définition, deux groupes équivalents à un troisième sont équivalents entre eux.

Nous dirons qu'un groupe $\beta'_1, \ldots, \beta'_{h'}$ est *résiduel* du groupe $\beta_1, \ldots, \beta_h$, par rapport à une courbe adjointe C_q, si les points d'arguments $\beta_1, \ldots, \beta_h, \beta'_1, \ldots, \beta'_{h'}$ constituent le système complet des intersections de la courbe S avec une courbe adjointe de degré q, les points singuliers exceptés ([1]).

Le théorème fondamental de la théorie des groupes est connu sous le nom de théorème du *reste;* il peut s'énoncer ainsi :

Si deux groupes sont résiduels par rapport à une courbe C_q, un groupe quelconque équivalent au premier est également résiduel d'un groupe quelconque équivalent au second.

Soient, en effet,

(β) et (β') deux groupes résiduels par rapport à une courbe C_{n+q-3};
(λ) un groupe équivalent à (β);
(λ') un groupe équivalent à (β').

On a

$$\sum_{j=1}^{j=h}\int_{\beta_j}^{\lambda_j}\theta_i(z)\,dz=l\omega_i+l'\omega'_i+\ldots\qquad(i=1,2,\ldots,p),$$

$$\sum_{j=1}^{j=h'}\int_{\beta'_j}^{\lambda'_j}\theta_i(z)\,dz=m\omega_i+m'\omega'_i+\ldots\qquad(i=1,2,\ldots,p).$$

([1]) CLEBSCH, *Leçons sur la Géométrie;* trad. BENOIST, t. II, p. 137.

D'un autre côté, les groupes (β) et (β') étant résiduels, on a, en désignant par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_h, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{h'}$ les arguments des points communs à S et à une courbe adjointe C_{n+q-3} (§ III et VII) :

$$\sum_{j=1}^{j=h} \int_{\gamma_j}^{\beta_j} \theta_i(z)\,dz + \sum_{j=1}^{j=h'} \int_{\gamma'_j}^{\beta'_j} \theta_i(z)\,dz = n\omega_i + n'\omega'_i + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{j=h} \int_{\gamma_j}^{\lambda_j} \theta_i(z)\,dz + \sum_{j=1}^{j=h'} \int_{\gamma'_j}^{\lambda'_j} \theta_i(z)\,dz = a\omega_i + a'\omega'_i + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Or on sait (§ VII) qu'il existe une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré $\mu q + 1$, admettant comme zéros les quantités γ_j et γ'_j, et ayant comme zéro multiple d'ordre q chacune des quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$: il résulte de l'équation précédente qu'on peut former une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré $\mu q + 1$, ayant les mêmes zéros multiples d'ordre q que la précédente, et admettant comme derniers zéros les quantités λ_j et λ'_j (n° **11**). En d'autres termes (§ VII, th. I), les groupes (λ) et (λ') constituent l'ensemble complet des intersections de S et d'une courbe adjointe de degré $n + q - 3$, les points singuliers exceptés : ils sont donc résiduels par rapport à une courbe C_{n+q-3}. C. Q. F. D.

18. Dans un système de groupes équivalents nous distinguerons, avec Clebsch ([1]), deux éléments importants :

1° Le *nombre* h des points d'un groupe du système;

2° La *multiplicité* r du système, c'est-à-dire le nombre des points d'un groupe qu'on peut se donner arbitrairement.

Nous désignerons un tel groupe par g_h^r.

Les arguments des points d'un groupe étant liés par p relations, on ne peut, en général, se donner arbitrairement que $h - p$ de ces points, et par suite, en général, on a $r = h - p$.

([1]) Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*; trad. Benoist, t. II, p. 136.

Mais il pourra se faire qu'on ait $r = h - p + \rho$, et nous dirons dans ce cas que nous sommes en présence d'un système *spécial d'indice* ρ.

19. D'une manière générale, d'après la remarque du § V, l'étude des groupes équivalents à un groupe donné $\beta_1, \ldots, \beta_h$ est identique à l'étude des zéros des fonctions fuchsiennes qui admettent les infinis $\beta_1, \ldots, \beta_h$; car on peut former une et une seule fonction fuchsienne ayant pour infinis les arguments des points d'un groupe, et pour zéros les arguments des points d'un groupe équivalent.

D'un autre côté, les fonctions fuchsiennes ayant mêmes infinis sont évidemment des fonctions linéaires et homogènes d'un certain nombre d'entre elles, et ce nombre est précisément égal au degré de multiplicité du système auquel appartient le groupe considéré, augmenté de 1.

On peut donc dire, en désignant les fonctions fuchsiennes dont il s'agit par $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_{r+1}(z)$, que les arguments des points d'un groupe équivalent au groupe (β) sont les zéros d'une fonction de la forme

$$f(z) = a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z) + \ldots + a_{r+1} f_{r+1}(z)$$

et réciproquement. D'ailleurs, on doit retrouver parmi les groupes ainsi déterminés le groupe (β) lui-même, et, par suite, l'une des fonctions $f(z)$ devra avoir pour zéros $\beta_1, \ldots, \beta_h$: comme elle admet déjà ces quantités pour infinis, elle sera égale à une constante; nous pourrons donc supposer, par exemple, $f_{r+1} = 1$, et il reste

$$f(z) = a_1 f_1(z) + \ldots + a_r f_r(z) + a_{r+1}.$$

Cette remarque très simple va nous permettre de donner quelques propriétés des *systèmes spéciaux*.

S'il s'agit d'un système spécial, on a en effet

$$r = h - p + \rho.$$

Il existe alors r fonctions fuchsiennes linéairement distinctes, d'ordre h, ayant mêmes infinis $f_1(z), \ldots, f_r(z)$: par suite (§ III), une quelconque d'entre elles pourra se mettre de $p + r - h$, c'est-à-dire de ρ manières différentes, sous la forme du quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un. On a ainsi

$$f_1(z) = \frac{\theta_1^1}{\theta_{r+1}^1} = \frac{\theta_1^2}{\theta_{r+1}^2} = \ldots = \frac{\theta_1^\rho}{\theta_{r+1}^\rho},$$

et, par conséquent, les zéros de f_1 annulent θ_1^s, et les infinis de cette fonction annulent $\theta_{r+1}^s (s = 1, 2, \ldots, \rho)$. Les fonctions f_1 et f_2 ayant mêmes infinis, la fonction thêtafuchsienne $f_2 \theta_{r+1}^s$ est holomorphe, et, comme elle est du premier degré, elle est égale à une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré un, θ_2^s : on a ainsi

$$f_2(z) = \frac{\theta_2^1}{\theta_{r+1}^1} = \frac{\theta_2^2}{\theta_{r+1}^2} = \ldots = \frac{\theta_2^\rho}{\theta_{r+1}^\rho};$$

et, de même,

$$f_3(z) = \frac{\theta_3^1}{\theta_{r+1}^1} = \ldots\ldots\ldots = \frac{\theta_3^\rho}{\theta_{r+1}^\rho},$$

....

On peut comprendre toutes ces relations en une seule, en désignant par $a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, u_1, \ldots, u_\rho$ des constantes arbitraires

$$a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r + a_{r+1} = \frac{u_1 \Sigma a_i \theta_i^1 + u_2 \Sigma a_i \theta_i^2 + \ldots + u_\rho \Sigma a_i \theta_i^\rho}{u_1 \theta_{r+1}^1 + u_2 \theta_{r+1}^2 + \ldots + u_\rho \theta_{r+1}^\rho}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r+1).$$

On en conclut que les h zéros de $a_1 f_1 + \ldots + a_{r+1}$, c'est-à-dire les arguments des h points d'un des groupes considérés, annulent la fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré un $u_1 \Sigma a_i \theta_i^1 + \ldots$; ces h points sont donc situés (§ I et VII) sur des courbes adjointes d'ordre $n - 3$, dont l'équation générale est de la forme

$$u_1 P_1 + u_2 P_2 + \ldots + u_\rho P_\rho = 0,$$

et qui déterminent par suite, par leurs $2(p-1) - h$ autres points d'intersection avec S, un système de multiplicité $\rho - 1$.

Ce système est également un système spécial, car on a

$$p + \rho - 1 - 2(p-1) + h = h - p + \rho + 1 = r + 1,$$

et son indice est $r+1$. Géométriquement, nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, connue sous le nom de *théorème de Riemann et Roch* [1] :

Par les points d'un groupe appartenant à un système spécial de multiplicité r et d'indice ρ, on peut faire passer un nombre $\rho-1$ fois infini de courbes adjointes de degré $n-3$. Ces courbes déterminent, par leurs points mobiles d'intersection avec la courbe primitive, un nouveau système de multiplicité $\rho-1$, qui est un système spécial d'indice $r+1$.

Ainsi les systèmes spéciaux sur une courbe d'ordre n peuvent toujours être découpés par une famille linéaire de courbes adjointes de degré $n-3$; et ils se groupent deux à deux, suivant la loi remarquable indiquée par le théorème précédent. On voit également qu'au point de vue algébrique l'étude des groupes spéciaux se ramène à celle des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré : nous reviendrons sur cette question dans le dernier paragraphe du présent Mémoire.

20. *Remarque I.* — Un système de groupes renfermant moins de $p+1$ points est un système spécial; car, r étant au moins égal à 1, on a

$$h-p+\rho \geqq 1 \quad \text{ou} \quad \rho \geqq p-h+1,$$

et, par suite, si h est inférieur à $p+1$, ρ est positif et le système est un système spécial d'indice égal ou supérieur à $p-h+1$.

21. *Remarque II.* — Si les h points d'un groupe sont sur une courbe adjointe de degré $n-3$, il en est de même des points de tout groupe équivalent.

La propriété est évidente si h est égal ou inférieur à $p-1$, puisque par $p-1$ points de S on peut toujours faire passer une courbe adjointe d'ordre $n-3$.

Si $h=p-1+s$, la courbe adjointe d'ordre $n-3$ qui, par hypo-

[1] Clebsch, *Leçons sur la Géométrie;* trad. Benoist, t. III, p. 51.

thèse, contient les h points d'un groupe g, coupe S en

$$2(p-1)-h=p-1-s$$

autres points. Or, d'après le théorème, du reste, on obtient tous les groupes équivalents à g en menant par ces $p-1-s$ points toutes les courbes adjointes possibles d'ordre $n-3$, et en prenant les intersections mobiles de ces courbes. C. Q. F. D.

22. *Remarque III.* — Il est clair qu'au lieu de définir un système de groupes par des relations de la forme

$$\sum_{j=1}^{j=h}\int_{\beta_j}^{\lambda_j}\theta_k(z)\,dz=h\omega_k+h'\omega'_k+\ldots\quad(k=1,2,\ldots,p),$$

$\beta_1, \ldots, \beta_h$ étant des quantités fixes, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ les arguments des points d'un groupe, on peut partir d'équations telles que

$$\sum_{j=1}^{j=h}\int_{\beta_j}^{\lambda_j}\theta_k(z)\,dz=v_k+h\omega_k+\ldots,$$

les v_k étant des constantes. Les systèmes de valeurs des λ qui satisfont à ces équations sont les arguments de points appartenant à des groupes équivalents entre eux, mais non équivalents au groupe $\beta_1, \ldots, \beta_h$.

23. *Remarque IV.* — A la théorie des systèmes spéciaux se rattache la solution du problème suivant :

Comment doit-on choisir h points sur la courbe S *pour que les courbes adjointes de degré $n+q-3$ menées par ces points forment une famille linéaire l fois infinie, le nombre l étant plus grand qu'on ne devrait s'y attendre d'après les données de la question?*

Les points d'intersection de S avec toutes les courbes adjointes C_{n+q-3} forment un système dont la multiplicité est égale au nombre, diminué de 1, des fonctions thêtafuchsiennes linéairement indépendantes, de degré $\mu q+1$, qui admettent comme zéro multiple d'ordre k chacune des quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, c'est-à-dire à $nq+p-2$

(§ VII, nos **14** et **15**). Si l'on assujettit les courbes adjointes C_{n+q-3} à passer par h points fixes de S, elles déterminent par leurs intersections mobiles avec S un système de groupes dont la multiplicité est, en général, $nq+p-2-h$.

Le problème revient à choisir les h points de telle sorte que la multiplicité du système devienne $nq+p-2+h+\rho$.

Je dis qu'en ce cas le système considéré est un système spécial. Pour le démontrer, il suffit, en appelant h' le nombre des points d'un groupe du système, de calculer la quantité

$$nq+p-h-2+\rho-h'+p.$$

Or on a

$$n(n+q-3)=h+h'+(n-1)(n-2)-2p.$$

La quantité précédente se réduit par suite à ρ.

Le système est donc un système spécial d'indice ρ.

La réciproque de cette proposition est vraie et se démontrerait de la même manière, en partant du théorème du reste. Donc :

Par h points donnés sur la courbe S, *on peut faire généralement passer une famille linéaire de courbes adjointes d'ordre $n+q-3$ t fois infinie; si les h points sont tels que leur système résiduel par rapport à des courbes C_{n+q-3} soit un système spécial d'indice ρ, la famille linéaire des courbes adjointes d'ordre $n+q-3$ qui passent par ces points sera $t+\rho$ fois infinie, et réciproquement.*

Au point de vue algébrique, on peut déduire de tout ce qui précède une proposition dont nous avons fait usage au no **11**, et qui peut s'énoncer ainsi :

Soient s fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré, linéairement indépendantes, ayant q zéros communs, et une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré m admettant ces q zéros et s'annulant en outre, dans R_0, *pour les $2m(p-1)-q$ valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. On pourra former $q-p+s+1$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m s'annulant pour $z=\lambda_1$, $\lambda_2, \ldots$.*

IX. — Propriétés d'un système particulier.

24. Une courbe adjointe d'ordre $n - 3$ coupe S en $2(p-1)$ points formant un groupe qui appartient à un système spécial.

En effet, on peut choisir arbitrairement $p - 1$ de ces points, puisque les courbes adjointes d'ordre $n - 3$ forment une famille $p - 1$ fois infinie; on a donc

$$h = 2(p-1), \qquad r = p - 1,$$

et, par suite, l'indice ρ du système est donné par la relation

$$\rho = p + r - h = p + p - 1 - 2(p-1) = 1.$$

Nous désignerons, dans ce qui suit, par γ tout groupe de $2(p-1)$ points communs à S et à une courbe adjointe d'ordre $n - 3$.

Nous allons donner quelques propriétés du système des groupes résiduels des groupes γ par rapport aux courbes adjointes de degré $n - 2$.

Soit C_{n-2} une courbe adjointe de degré $n - 2$ passant par les points d'un groupe γ : elle coupe S en n nouveaux points, constituant un groupe que nous désignerons par Γ (1).

Il résulte de la théorie du paragraphe précédent que :

Un groupe γ et un groupe Γ quelconques sont sur une courbe adjointe d'ordre $n - 2$.

Toute courbe adjointe d'ordre $n - 2$ passant par les points d'un groupe γ (ou Γ) coupe S en de nouveaux points, formant un groupe Γ (ou γ).

Par n points pris sur S on peut faire passer en général une famille de courbes adjointes C_{n-2} $p - 2$ fois infinie; si les n points forment un groupe Γ, la famille des courbes C_{n-2} qui passent par ces points sera $p - 1$ fois infinie, et réciproquement.

Les arguments des points d'un groupe Γ sont les zéros d'une fonc-

(1) La courbe C_{n-2} peut se décomposer en une courbe adjointe C_{n-3} et en une droite : les groupes Γ sont donc équivalents au groupe formé par n points quelconques de S, situés en ligne droite.

tion thêtafuchsienne holomorphe de degré μ, dont les autres zéros sont les k quantités fixes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (§ VII, II).

Par les points d'un groupe γ et d'un groupe Γ quelconques, faisons passer une courbe adjointe d'ordre $n-1$, qui coupe S en n nouveaux points : je dis que ces points forment un groupe Γ.

En effet, les arguments des points autres que les points doubles, où cette courbe adjointe d'ordre $n-1$ coupe S, sont les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré $2\mu+1$, dont les derniers zéros sont les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, chacune au second degré de multiplicité.

Appelons

$\Theta_{2\mu+1}(z)$ cette fonction;

$\Theta_\mu(z)$ la fonction thêtafuchsienne de degré μ qui s'annule pour les arguments des n points du groupe Γ considéré;

$\Theta(z)$ la fonction thêtafuchsienne du premier degré qui s'annule pour les arguments des $2(p-1)$ points du groupe γ.

Les arguments des n points où la courbe adjointe d'ordre $n-1$, qui traverse les groupes Γ et γ, coupe de nouveau la courbe S, annulent évidemment la fonction $\frac{\Theta_{2\mu+1}}{\Theta_\mu \Theta}$, qui est une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré μ, admettant comme zéros simples les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. C. Q. F. D.

La réciproque de ce théorème est vraie et se démontre de la même manière. Donc :

Une courbe adjointe d'ordre $n-1$ menée par les points d'un groupe γ et d'un groupe Γ quelconques coupe S en n nouveaux points formant un groupe Γ.

Deux groupes Γ et un groupe γ quelconques sont sur une courbe adjointe à S d'ordre $n-1$.

Plus généralement, on voit de même que :

Une courbe adjointe d'ordre $n+q-2$ menée par les points d'un groupe γ et de q groupes Γ quelconques coupe S en n nouveaux points formant un groupe Γ.

$(q+1)$ *groupes* Γ *et un groupe* γ *quelconques sont sur une courbe adjointe à* S *d'ordre* $n+q-2$.

X. — De deux espèces de courbes de genre p.

25. Soient n le degré d'une courbe de genre p; $2(\mu-1)(p-1)$ et $2\mu(p-1)$ les deux multiples consécutifs de $2(p-1)$ qui comprennent n, de telle sorte qu'on ait

$$2(\mu-1)(p-1)<n\leqq 2\mu(p-1).$$

Nous avons vu (§ V et VI) que si l'on a

$$2\mu(p-1)-p-n\geqq 0,$$

les coordonnées des points de la courbe considérée S peuvent, en coordonnées homogènes, être représentées par trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ; si, au contraire, on a

$$2\mu(p-1)-p-n<0,$$

ces fonctions thêtafuchsiennes seront, en général, de degré $\mu+1$, sauf pour certaines courbes spéciales, dont les coordonnées des points seront des fonctions thêtafuchsiennes de degré μ.

Dans le cas où $2\mu(p-1)-p-n<0$, il y a donc deux espèces de courbes de degré n et de genre p : nous allons indiquer quelques propriétés géométriques qui dérivent de la définition précédente, et nous montrerons ensuite qu'il existe également deux espèces de courbes, dans le cas où l'on a $2\mu(p-1)-p-n\geqq 0$.

Soit donc, en premier lieu,

$$2\mu(p-1)-p-n=-h;$$

on a nécessairement, d'après les hypothèses faites,

$$h\leqq p \qquad \text{et} \qquad h\geqq 1.$$

Pour les courbes générales de degré n et de genre p, que nous appellerons *courbes de seconde espèce,* les coordonnées des points seront des fonctions thêtafuchsiennes de degré $\mu+1$, ayant $2(p-1)+p-h$ zéros communs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; pour les courbes spéciales, que nous appellerons *courbes de première espèce,* les coordonnées des points seront des fonctions thêtafuchsiennes de degré μ, ayant $p-h$ zéros communs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-h}$.

Considérons d'abord ces dernières courbes.

Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\mu+1}$, $(\mu+1)$ fonctions thêtafuchsiennes quelconques du premier degré; leur produit

$$\Theta(z) = \theta_1\theta_2\ldots\theta_{\mu+1}$$

est évidemment une fonction thêtafuchsienne du degré $\mu+1$. On peut choisir la fonction $\theta_{\mu+1}$ de façon qu'elle s'annule pour les $p-h$ zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots$, car on peut toujours former une fonction thêtafuchsienne du premier degré s'annulant pour moins de p valeurs données. Si maintenant on se reporte au § VII, on voit que les zéros de $\Theta(z)$, à l'exception de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-h}$ sont les arguments de points situés sur une courbe adjointe à S de degré $n-2$. On peut donc énoncer cette proposition.

Par les points simples communs à S et à μ courbes adjointes d'ordre $n-3$, on peut faire passer une courbe adjointe d'ordre $n-2$, dont les autres points d'intersection avec S sont sur une courbe adjointe d'ordre $n-3$ passant par $p-h$ points fixes.

Si nous considérons maintenant une courbe de seconde espèce, nous pourrons poser

$$\Theta(z) = \theta_1\theta_2\ldots\theta_\mu\theta',$$

θ' étant une fonction thêtafuchsienne du second degré; on pourra, en général, choisir cette fonction de façon qu'elle s'annule pour les

$$2(p-1)+p-h$$

valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. En effet, les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du second degré sont fonctions linéaires et homogènes de $3(p-1)$ d'entre elles (§ IV), et la condition précédente pourra être remplie si l'on a

$$3(p-1)-1 \geqq 2(p-1)+p-h$$

ou

$$h \geqq 2.$$

Ainsi, si h est supérieur ou égal à 2, on pourra, par les points communs à S et à μ courbes adjointes d'ordre $n-3$, faire passer une courbe adjointe d'ordre $n-2$: les autres points d'intersection de cette courbe avec S ne sont pas sur une courbe adjointe d'ordre $n-3$.

Si h est égal à l'unité, on ne pourra faire passer une courbe adjointe d'ordre $n-2$ que par les points communs à S et à $\mu-1$ courbes adjointes d'ordre $n-3$.

Arrivons, en second lieu, au cas où l'on a

$$2\mu(p-1)-p-n=h,$$

avec les conditions

$$h \geqq 0, \qquad h \leqq p-3.$$

Les coordonnées des points d'une courbe S de degré n et de genre p s'expriment par trois fonctions thêtafuchsiennes de degré μ, ayant $p+h$ zéros communs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

$p+h$ est compris entre p et $2p-3$: nous dirons que la courbe S est de première espèce si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont des zéros d'une même fonction thêtafuchsienne holomorphe du premier degré ; elle sera de seconde espèce dans le cas contraire ([1]).

On voit alors, comme plus haut, que par les points simples communs à une courbe de première espèce et à μ courbes adjointes d'ordre $n-3$ on peut faire passer une courbe adjointe de degré $n-2$, dont les autres points d'intersection avec la courbe primitive sont fixes ; si la courbe est de seconde espèce, on ne pourra faire passer une courbe

---

([1]) Parmi les $p+h$ zéros, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, h$ sont arbitraires (§ V), et l'on peut remplacer le système $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ par un autre système $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$. Mais il est clair que les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$ constituent des groupes équivalents, et, par suite, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont les zéros d'une fonction thêtafuchsienne du premier ordre, il en sera de même de $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$ (*Rem. II*, § VIII).

adjointe d'ordre $n - 2$ que par les points communs à la courbe considérée et à $\mu - 1$ courbes adjointes d'ordre $n - 3$.

26. En résumé :

Soit
$$2(\mu - 1)(p - 1) < n \leqq 2\mu(p - 1).$$

Premier cas : $2\mu(p-1) - p - n \geqq 0$. — *Les courbes de degré n et de genre p se divisent en deux classes, distinguées par les propriétés suivantes :*

Appelons groupe γ tout groupe de $2(p-1)$ points simples, communs à la courbe de degré n et de genre p, et à une courbe adjointe C_{n-3}.

Sur une courbe de première espèce, μ groupes γ quelconques sont traversés par une courbe adjointe d'ordre $n - 2$, qui coupe en outre la courbe considérée en $n - 2(\mu - 1)(p - 1)$ points fixes.

Sur une courbe de deuxième espèce, $\mu - 1$ groupes γ quelconques sont traversés par une courbe adjointe d'ordre $n - 2$; μ groupes γ ne peuvent jamais être sur une telle courbe.

Second cas : $2\mu(p-1) - p - n < 0$. — *Les courbes de degré n et de genre p se divisent encore en deux classes.*

Sur une courbe de première espèce, μ groupes γ quelconques sont traversés par une courbe adjointe d'ordre $n - 2$, dont les autres points d'intersection avec la courbe considérée, en nombre égal à $n - 2(\mu - 1)(p - 1)$, sont sur une courbe adjointe d'ordre $n - 3$, passant par $2\mu(p - 1) - n$ points fixes de la courbe de genre p.

En particulier, si $n = 2\mu(p - 1)$, $\mu + 1$ groupes γ quelconques sur la courbe de première espèce sont traversés par une courbe adjointe C_{n-2}.

Sur une courbe de seconde espèce, μ groupes γ quelconques sont traversés par une courbe adjointe d'ordre $n - 2$; mais les autres points communs à cette courbe et à la courbe considérée ne peuvent être sur une même courbe adjointe d'ordre $n - 3$.

Il y a exception pour le cas où $n=(2\mu-1)(p-1)$: on ne peut alors faire passer une courbe adjointe C_{n-2} que par $\mu-1$ groupes γ de la courbe de seconde espèce.

27. Dans le cas des courbes de genre 2, les résultats précédents prennent une forme plus simple. Les groupes γ comprennent alors deux points que nous appellerons *points conjugués*.

Il y a deux espèces de courbes de degré n et de genre 2.

Soit d'abord

$$n=2\mu.$$

La courbe de première espèce est celle dont les coordonnées des points sont des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ. *Sur une telle courbe,* $\mu+1$ *couples de points conjugués sont toujours traversés par une courbe adjointe* C_{n-2}, *qui ne coupe la courbe primitive qu'en ces points et aux points singuliers.*

La courbe de deuxième espèce est celle dont les coordonnées des points sont des fonctions thêtafuchsiennes de degré $\mu+1$ ayant deux zéros communs. *Sur une telle courbe,* μ *couples de points conjugués sont toujours traversés par une courbe adjointe* C_{n-2} *passant par deux points fixes, situés sur la courbe considérée.*

Soit

$$n=2\mu-1.$$

La courbe de première espèce est celle dont les coordonnées des points sont des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ ayant un zéro commun. *Sur une telle courbe,* μ *couples de points conjugués sont toujours traversés par une courbe adjointe* C_{n-2}, *coupant en outre la courbe primitive en un point qui est fixe.*

La courbe de deuxième espèce est celle dont les coordonnées des points sont des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré $\mu+1$, ayant trois zéros communs. *Sur une telle courbe,* $\mu-1$ *couples de points conjugués sont toujours traversés par une courbe adjointe* C_{n-2} *et* μ *couples ne le sont jamais.*

XI. — Intersection d'une courbe de genre p et d'une courbe algébrique.

28. Les arguments de mn points d'intersection de la courbe S, de degré n et de genre p, et d'une courbe quelconque, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, de degré q, sont donnés par l'équation

$$0 = f(z) = f[x_1(z), x_2(z), x_3(z)].$$

La fonction $f(z)$ est une fonction thêtafuchsienne de degré μq, qui admet comme zéro multiple d'ordre q chacune des quantités α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ (¹); les autres zéros de cette fonction, en nombre égal à $2\mu q(p-1) - kq$, c'est-à-dire à nq, sont les arguments des nq points communs aux deux courbes.

Inversement, soit $f(z)$ une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré μq, admettant comme zéros multiples d'ordre q les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$: les nq autres zéros de cette fonction ne sont pas nécessairement les arguments de points de la courbe S, situés sur une courbe de degré q; certaines conditions doivent être satisfaites pour qu'il en soit ainsi.

29. Le nombre de ces conditions se détermine comme il suit.

Remarquons d'abord que les fonctions $f(z)$ que nous considérons sont des fonctions linéaires et homogènes de $(2\mu q - 1)(p-1) - kq$ d'entre elles (nº **14**) $f_1, f_2, \ldots$; et distinguons ensuite deux cas

$$q < n \qquad \text{et} \qquad q \geqq n.$$

Si q est inférieur à n, les fonctions de la forme $x_1^{q_1}(z) x_2^{q_2}(z) x_3^{q_3}(z)$, où q_1, q_2, q_3 sont des entiers non négatifs de somme q, ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène (sinon la courbe S serait décomposable); ces fonctions sont d'ailleurs thêtafuchsiennes holo-

(¹) On suppose toujours que les coordonnées d'un point de S sont trois fonctions thêtafuchsiennes de μ, ayant k zéros communs, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; on a alors

$$n = 2\mu(p-1) - k.$$

morphes de degré μq, et admettent comme zéros multiples d'ordre q les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$: leur nombre étant de $\frac{1}{2}(q+1)(q+2)$, on pourra exprimer $\frac{1}{2}(q+1)(q+2)$ des fonctions $f_1, f_2, \ldots$, en fonction linéaire des $(2\mu q - 1)(p-1) - kq - \frac{1}{2}(q+1)(q+2)$ autres fonctions f_i, et des fonctions $x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3}$; si nous écrivons maintenant que dans l'expression de $f(z)$, les fonctions f_i disparaissent, nous exprimerons que les nq zéros de $f(z)$ autres que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, sont les arguments de points de S situés sur une courbe de degré q. Nous avons ainsi un nombre de conditions égal à

$$(2\mu q - 1)(p-1) - kq - \tfrac{1}{2}(q+1)(q+2)$$

ou, puisque

$$k = 2\mu(p-1) - n,$$

égal à

$$nq - \tfrac{1}{2}(q+1)(q+2) - p + 1.$$

Si q est égal ou supérieur à n, les fonctions

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} \qquad (q_1 + q_2 + q_3 = q)$$

sont liées par des relations de la forme générale

$$\varphi_q = S\psi_{q-n},$$

ψ_{q-n} étant un polynôme quelconque de degré $q - n$.

Il y a donc entre les fonctions $x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3}$ un nombre de relation linéaires et homogènes égal au nombre des coefficients de ψ, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(q-n+1)(q-n+2)$, et le nombre de ces fonctions linéairement distinctes sera par suite

$$\tfrac{1}{2}(q+1)(q+2) - \tfrac{1}{2}(q-n+1)(q-n+2) = nq - \tfrac{1}{2}n(n-3).$$

On en conclut, par le raisonnement fait plus haut, que la fonction $f(z)$ devra vérifier $\frac{1}{2}n(n-3) - p + 1$ conditions, pour que ses nq zéros, autres que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, soient les arguments de points de S situés sur une courbe de degré q.

Dans le cas de $q = n - 1$ et $q = n - 2$, le nombre de ces relations est le même que pour $q \geqq n$, c'est-à-dire égal au nombre des points doubles de la courbe S.

30. On peut mettre les relations dont il s'agit sous une forme très importante au point de vue des applications, comme l'a fait Clebsch dans le cas des courbes de genre 0 et de genre 1.

Si la fonction $f(z)$ est une somme de termes de la forme

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} \qquad (q_1 + q_2 + q_3 = q),$$

il est clair qu'on aura, en désignant par (e, e') les arguments qui correspondent à un point double E, de S ([1])

$$(14) \qquad \frac{f(e)}{x_1^q(e)} = \frac{f(e')}{x_1^q(e')}.$$

Les relations (14) sont précisément en nombre égal à

$$\tfrac{1}{2} n(n-3) - p + 1;$$

elles sont nécessairement vérifiées quand les nq zéros de $f(z)$, autres que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, sont les arguments de points de S situés sur une courbe algébrique d'ordre q; je dis maintenant qu'elles sont suffisantes.

La démonstration de ce théorème repose sur une interprétation géométrique simple qu'on peut donner de chacune de ces équations ([2]).

31. D'après la proposition II du § VII, les nq zéros de $f(z)$ dont il s'agit sont situés, avec les $2(p-1)$ points simples où S est coupée par une courbe adjointe quelconque d'ordre $n-3$, sur une courbe adjointe d'ordre $n+q-3$. Nous désignerons cette dernière courbe par F, et la courbe d'ordre $n-3$ considérée par P.

([1]) Dans ce qui suit, nous supposerons, pour plus de simplicité, que la courbe S n'a comme points singuliers que des points doubles ou de rebroussement.

([2]) Nous avons donné cette interprétation dans le cas des courbes de genre un (*Sur les courbes de genre un*, p. 55 et suiv.).

Si $n+q-3$ est égal ou supérieur à n, c'est-à-dire si $q \geqq 3$, il y aura, pour une même fonction $f(z)$, une infinité de courbes F, ayant pour équation générale

$$(\mathrm{F}) \qquad \mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + \mathrm{SR}_{q-3},$$

$\mathrm{F}_0 = 0$ étant l'équation d'une quelconque d'entre elles, et R_{q-3} désignant un polynôme arbitraire de degré $q-3$. Il résulte de cette équation que les courbes F, qui correspondent à une même fonction $f(z)$, ont même tangente en un quelconque des points doubles de S.

Or on a évidemment

$$(15) \qquad \mathrm{F}(z) = \alpha \mathrm{P}(z) f(z),$$

α étant une constante.

Supposons vérifiée une des équations (14)

$$(14) \qquad f(e) : x_1^q(e) = f(e') : x_1^q(e').$$

Prenons pour axes $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$ les deux tangentes à S au point double (e, e'); $x_2 = 0$ étant tangente à la branche e, $x_3 = 0$ à la branche e'. On aura, en ordonnant F et P par rapport aux puissances décroissantes de x_1,

$$\mathrm{F}(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_2 + a x_3) x_1^{n+q-4} + (\lambda' x_2^2 + \ldots) x_1^{n+q-5} + \ldots$$
$$\mathrm{P}(x_1, x_2, x_3) = \mu(x_2 + b x_3) x_1^{q-4} + \ldots.$$

Or, d'après (15), $f(e)$ est la limite vers laquelle tend la fonction

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\mathrm{F}(e+\varepsilon)}{\mathrm{P}(e+\varepsilon)},$$

pour $\varepsilon = 0$.

C'est donc la limite de l'expression

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\lambda}{\mu} \frac{x_2(e+\varepsilon) + a x_3(e+\varepsilon)}{x_2(e+\varepsilon) + b x_3(e+e)} x_1^q(e).$$

Mais $x_2(e+\varepsilon)$ est infiniment petit par rapport à $x_3(e+\varepsilon)$, puisque

$x_2 = 0$ est la tangente de la branche e; il reste ainsi

$$f(e) = \frac{1}{\alpha} \frac{\lambda}{\mu} \frac{a}{b} x_1^q(e),$$

de même

$$f(e') = \frac{1}{\alpha} \frac{\lambda}{\mu} x_1^q(e'),$$

et la relation (14) donne par suite $a = b$. En d'autres termes :

Si l'équation (14), *relative à un point double, est vérifiée, les courbes* F *et* P *se touchent en ce point.*

32. Cela posé, si les équations (14) sont vérifiées pour tous les points doubles de S, les courbes F et P sont tangentes en

$$\tfrac{1}{2} n(n-3) - p + 1$$

points coïncidant avec les points doubles, et se coupent encore aux $2(p-1)$ points simples communs à S et à P. On peut donc dire que la courbe F passe par les points d'intersection des courbes S et P, et l'on peut écrire identiquement (¹)

$$F = AP + BS,$$

A et B étant deux polynômes entiers, de degrés q et $q-3$.

33. On en conclut que les points d'intersection de F et de S, non situés sur la courbe P, c'est-à-dire les nq points dont les arguments vérifient l'équation $f(z) = 0$, sont sur la courbe de degré q, $A = 0$.

Les équations (14) *sont donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que les nq zéros de $f(z)$, autres que les k zéros d'ordre q $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, soient les arguments de nq points de* S, *situés sur une courbe de degré q.*

Remarque I. — Si la fonction $f(z)$ s'annule pour $z = e$ et $z = e'$,

(¹) Clebsch, *Leçons sur la Géométrie,* traduct. Benoist, t. II, p. 45.

l'équation correspondante est identiquement vérifiée, et le nombre des conditions diminue d'une unité.

Si q est inférieur ou égal à $n-3$, le nombre des relations auxquelles doit satisfaire la fonction considérée, $f(z)$, est égal, comme on l'a vu, à

$$nq - \tfrac{1}{2}(q+1)(q+2) - p + 1;$$

en ce cas, il est clair que les équations (14) ne seront pas distinctes, et qu'elles se réduiront

$$nq - \tfrac{1}{2}(q+1)(q+2) - p + 1$$

d'entre elles.

Remarque II. — Si le point double (e, e') est un point de rebroussement, il faut, dans l'équation correspondante

$$f(e) : x_1^q(e) = f(e') : x_1^q(e'),$$

faire $e' = e + \varepsilon$ et faire tendre ε vers zéro; on trouve ainsi

$$x_1(e) f'(e) = q x_1'(e) f(e).$$

XII. — Applications géométriques. Courbes de contact.

Soient, sur une courbe algébrique S de degré n et de genre p, h groupes, $g_1, g_2, \ldots, g_h$, comprenant respectivement $l_1, l_2, \ldots, l_h$ points. Nous supposerons qu'il existe une courbe algébrique

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

de degré q, ayant avec S aux l_j points du groupe g_j un contact d'ordre $r_j - 1$, $(j = 1, 2, \ldots, h)$ et coupant en outre S en k_1 points doubles et en k_2 points simples. On a ainsi

$$nq = 2k_1 + k_2 + r_1 l_1 + \ldots + r_h l_h.$$

On demande de trouver la forme de l'équation générale des courbes de degré q, qui coupent S *aux k_1 points doubles et aux k_2 points simples précédents, et qui ont avec* S, *en l_j points formant un groupe équivalent à g_j, un contact d'ordre $r_j - 1$; $(j = 1, 2, \ldots h)$.*

En d'autres termes, il s'agit de trouver sous quelle forme entrent les constantes arbitraires dans l'équation $f = 0$, de ces courbes ou, ce qui revient au même, dans la fonction $f(z) = f[x_1(z), \ldots]$.

La fonction $F(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$ est évidemment une fonction fuchsienne d'ordre $nq - 2k_1 - k_2$.

Soient $\alpha_j, \beta_j, \ldots, \lambda_j$, les arguments des points du groupe g_j; α'_j, $\beta'_j, \ldots, \lambda'_j$, les arguments des points d'un groupe quelconque, équivalent au précédent, et par lequel passe la courbe $f = 0$.

Il existe une et une seule fonction fuchsienne, $F_j(z)$, ayant pour infinis $\alpha_j, \ldots, \lambda_j$ et pour zéros $\alpha'_j, \beta'_j, \ldots, \lambda'_j$ (nº **12**, Remarque); inversement, toute fonction fuchsienne d'ordre l_j, ayant pour infinis $\alpha_j, \ldots, \lambda_j$, aura pour zéros les arguments des points d'un groupe équivalent à g_j. Or les fonctions fuchsiennes ayant mêmes infinis, en nombre l_j, sont des fonctions linéaires et homogènes d'un certain nombre d'entre elles : ce nombre est égal à $l_j - p + 1$, si g_j n'est pas un groupe spécial, et à $l_j - p + 1 + \rho_j$ si g_j est un groupe spécial d'indice ρ_j (nº **19**).

On a donc

$$F_j(z) = \eta_1 F_j^{(1)}(z) + \eta_2 F_j^{(2)}(z) + \eta_3 F_j^{(3)}(z) + \ldots + \eta_{m_j} F_j^{(m_j)}(z),$$

en posant pour abréger $m_j = l_j - p + 1 + \rho_j$.

Dans cette formule $\eta_1, \eta_2, \ldots$ sont des constantes qui sont *arbitraires,* si l'on n'impose pas à $\alpha'_j, \ldots, \lambda'_j$ d'autre condition que d'être les arguments des points d'un groupe équivalent à g_j.

37. De là résulte la forme de la fonction $F(z)$; on a en effet évidemment

$$F(z) = F_1^{r_1}(z) F_2^{r_2}(z) \ldots F_h^{r_h}(x)$$

et, par suite

$$(f) \quad \left\{ \begin{aligned} f(z) &= \varphi(z)F(z) \\ &= \varphi(z)[\alpha_1 F_1^{(1)} + \alpha_2 F_1^{(2)} + \ldots + \alpha_{m_1} F_1^{(m_1)}]^{r_1} \\ &\quad \times [\beta_1 F_2^{(1)} + \ldots + \beta_{m_2} F_2^{(m_2)}]^{r_2} \ldots [\delta_1 F_h^{(1)} + \ldots + \delta_{m_h} F_h^{(m_h)}]^{r_h}. \end{aligned} \right.$$

Nous écrirons symboliquement

$$(f\,bis) \qquad f(z) = (\alpha_1 \ldots \alpha_{m_1})^{r_1} (\beta_1 \ldots \beta_{m_2})^{r_2} \ldots (\delta_1 \ldots \delta_{m_h})^{r_h}.$$

D'après la formule (f), les zéros de $f(z)$ sont : 1° les arguments correspondant aux k_1 points doubles et aux k_2 points simples considérés sur S; 2° les arguments de h groupes, équivalents à $g_1, \ldots, g_h$, aux degrés respectifs $r_1, \ldots, r_h$ de multiplicité; 3° les k zéros communs aux trois fonctions thêtafuchsiennes $x_1(z), x_2(z), x_3(z)$, au degré q de multiplicité. Il reste maintenant à exprimer que les nq zéros des deux premières catégories sont les arguments de nq points de S situés sur une courbe de degré q, passant par k_1 points doubles de la courbe S; on écrira pour cela les relations (14)

$$(14) \qquad f(e) : x_1^q(e) = f(e') : x_1^q(e').$$

Ces équations seront en nombre égal à

$$\tfrac{1}{2} n(n-3) - p + 1 - k_1,$$

si $q \geqq n-2$, et à

$$nq - \tfrac{1}{2}(q+1)(q+2) - p + 1 - k_1,$$

si $q \leqq n-3$ (§ XI).

Elles établiront des relations entre les constantes $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ qui figurent dans les formules (f) et $(f\,bis)$.

De là résultera sans difficulté la forme de l'équation générale cherchée.

38. Parmi les applications qu'on peut faire de cette théorie, la plus importante est relative à l'étude des courbes de contact. Le problème à traiter peut s'énoncer comme il suit :

Problème des courbes de contact. — Soit

$$nq = 2k_1 + k_2 + rl, \qquad q \geqq n - 2.$$

Trouver l'équation générale des courbes de degré q qui passent par k_1 points doubles et k_2 points simples donnés sur une courbe S, *de degré n et de genre p, et qui ont avec cette courbe en l points un contact d'ordre r* — 1.

Dans ce qui suit, nous désignerons par d, pour abréger, le nombre des points doubles de la courbe S

$$d = \tfrac{1}{2}n(n-3) - p + 1.$$

Soit $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 0$ une des courbes répondant à la question, et ayant avec S un contact d'ordre $r - 1$ aux l points d'arguments β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_l$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ les arguments des points mobiles où l'une quelconque des courbes cherchées, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, touche S. On a, par l'application du théorème d'Abel,

$$r\int_{\beta_1}^{\alpha_1} \theta_i(z)\,dz + \ldots + r\int_{\beta_l}^{\alpha_l} \theta_i(z)\,dz = h\omega_i + h'\omega'_i + \ldots + h^{(2p-1)}\omega_i^{(2p-1)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$

d'où

$$(16)\qquad \int_{\beta_1}^{\alpha_1} \theta_i(z)\,dz + \ldots + \int_{\beta_l}^{\alpha_l} \theta_i(z)\,dz = \frac{1}{r}(h\omega_i + h'\omega'_i + \ldots).$$

Dans le second membre, on peut donner aux $2p$ entiers $h, h', \ldots$ les valeurs $0, 1, \ldots, r-1$: il en résulte que les courbes cherchées se divisent en r^{2p} *systèmes*, et que les groupes formés par les l points de contact correspondant aux courbes d'un même système sont équivalents.

Supposons que les courbes $\varphi = 0$ et $f = 0$ appartiennent au même système; on aura, d'après ce qui précède,

$$f(z) = \varphi(z)[\lambda_1 F^{(1)} + \lambda_2 F^{(2)} + \ldots + \lambda_m F^{(m)}]^r,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ étant des constantes, et étant posé

$$m = l - p + 1 + \rho,$$

en désignant par ρ l'indice du système des groupes équivalents au groupe des points de contact de S et de φ. (Dans le cas général, ce système ne sera pas spécial, et l'on aura $\rho = 0$.)

Les fonctions $F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}$ sont des fonctions fuchsiennes d'ordre l, ayant pour infinis les quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$.

On a de plus entre les constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les équations (14), qui prennent ici une forme remarquable.

On a, en effet (n° **30**),

$$\frac{\varphi(e')}{\varphi(e)} \frac{x^q(e)}{x^q(e')} = 1$$

et, par suite,

$$[\lambda_1 F^{(1)}(e) + \ldots + \lambda_m F^{(m)}(e)]^r = [\lambda_1 F^{(1)}(e') + \ldots + \lambda_m F^{(m)}(e')]^r.$$

On a $d - k_1$ équations de cette forme. On peut les écrire, en extrayant les racines $r^{\text{ièmes}}$ des deux membres,

$$(17)\quad \lambda_1 F^{(1)}(e) + \ldots + \lambda_m F^{(m)}(e) = e^{2s\frac{i\pi}{r}} [\lambda_1 F^{(1)}(e') + \ldots + \lambda_m F^{(m)}(e')],$$

s étant un entier qui peut prendre les valeurs $0, 1, \ldots, r-1$ [1].

En combinant ces valeurs, on aura, puisqu'il y a $d - k_1$ équations de la forme précédente, r^{d-k_1} groupes d'équations *linéaires et homogènes* en $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, et les solutions du problème s'obtiendront en égalant à zéro les $d - k_1$ premiers membres des $d - k_1$ équations de l'un quelconque de ces groupes.

Considérons les équations d'un des groupes : on en tirera la valeur

---

[1] Ces équations peuvent aussi s'écrire

$$f^{\frac{1}{r}}(e) = \frac{x_1^{\frac{q}{r}}(e)}{x_1^{\frac{q}{r}}(e')} e^{2s\frac{i\pi}{r}} f^{\frac{1}{r}}(e').$$

Cette forme nous sera utile plus loin.

de $d - k_1$ des constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en fonction linéaire et homogène des $m - d + k_1$ autres, et l'on aura ainsi

$$f(z) = \varphi(z)[\lambda_1\varphi_1(z) + \ldots + \lambda_{m-d+k_1}\varphi_{m-d+k_1}(z)]^r,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-d+k_1}$ étant maintenant des constantes *arbitraires*.

En conséquence, l'équation générale des courbes appartenant au groupe considéré sera de la forme

$$0 = f(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1^r A_{r,0,\ldots,0} + r\lambda_1^{r-1}\lambda_2 A_{r-1,1,\ldots,0} + \ldots + \lambda_{m-d+k_1}^r A_{0,\ldots,0,r}.$$

Les A sont des polynômes de degré q en x_1, x_2, x_3, qui, égalés à zéro, représentent des courbes de degré q passant par les k_1 points doubles et les k_2 points simples donnés sur la courbe S; on a

$$A_{r,0,\ldots,0}(z) = \varphi(z)\varphi_1^r(z),$$
$$A_{r-1,1,\ldots,0}(z) = \varphi(z)\varphi_1^{r-1}(z)\varphi_2(z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

39. On peut donc énoncer les résultats suivants :

Soit
$$nq = 2k_1 + k_2 + rl, \qquad q \geqq n - 2.$$

Les courbes de degré q, qui passent par k_1 points doubles et k_2 points simples donnés sur une courbe S, *de degré n et de genre p, et qui ont avec cette courbe en l points un contact d'ordre $r - 1$, se divisent en r^{2p} systèmes : pour les courbes d'un même système, les l points de contact avec* S *forment des groupes équivalents.*

Chaque système se divise en r^{d-k_1} groupes, et l'équation générale des courbes d'un même groupe est de la forme

$$(18) \qquad \lambda_1^r A_{r,0,\ldots,0} + r\lambda_1^{r-1}\lambda_2 A_{r-1,1,\ldots,0} + \ldots + \lambda_{m-d+k_1}^r A_{0,\ldots,r} = 0,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ désignent des constantes arbitraires, et où l'on a posé

$$m = l - p + 1 + \rho,$$

ρ étant l'indice du système des groupes équivalents formés par les l points de contact des courbes considérées.

40. *Remarque I.* — Il résulte de l'équation (18) que, pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait

$$m - d + k_1 \geqq 1,$$

c'est-à-dire

$$l + \rho + k_1 \geqq p + d.$$

En général, si les points donnés sur S sont choisis arbitrairement, les groupes équivalents formés par les points de contact des courbes d'un même système ne sont pas spéciaux et l'on a

$$\rho = 0.$$

La condition ci-dessus devient alors

$$l + k_1 \geqq p + d.$$

On peut déduire de ce qui précède la proposition suivante :

Soit g un groupe quelconque de l points, situés sur une courbe S de genre p, à d points doubles : une courbe quelconque de degré q ayant avec S en ces l points un contact d'ordre $r - 1$ coupe, en outre, la courbe en k_1 points doubles et k_2 points simples. Inversement, par ces $k_1 + k_2$ points, on peut faire passer r^{d-k_1} groupes de courbes de degré q, ayant respectivement avec S des contacts d'ordre $r - 1$ en l points formant un groupe équivalent à g. L'équation générale des courbes d'un groupe est de la forme (18) et renferme

$$l - p - d + k_1$$

paramètres arbitraires.

Si le groupe g est un groupe spécial d'indice ρ, le nombre de ces paramètres est augmenté de ρ.

Cette proposition est une généralisation de celle du n° **23** sur les propriétés des groupes spéciaux.

41. *Remarque II.* — Si q est égal ou supérieur à n, on ajoutera au second membre de l'équation (18) le produit SR_{q-n}, où R_{q-n} désigne un polynôme quelconque de degré $q - n$ en x_1, x_2, x_3.

42. *Remarque III.* — Si q est inférieur à $n-2$, les équations (17) seront au nombre de $nq - \frac{1}{2}(q+1)(q+2) - k_1 - p + 1$ (n° **33**); il n'y aura ainsi, dans chaque système, que

$$r^{nq - \frac{1}{2}(q+1)(q+2) - k_1 - p + 1}$$

groupes de courbes de contact.

En particulier, pour $q = n - 3$, ce nombre devient r^{d-k_1-1} (¹).

43. *Remarque IV.* — Si la courbe S a des points de rebroussement, il convient de modifier légèrement les énoncés précédents.

Supposons que, parmi les $d - k_1$ points doubles par lesquels ne passent pas les courbes de contact considérées, il y ait R points de rebroussement, d'arguments $e_1, e_2, \ldots, e_R$.

L'équation (14) relative à l'un de ces points devient (**33**)

$$f'(e_1)x_1(e_1) = qf(e_1)x'_1(e_1),$$

(¹) On doit remarquer que, si q est inférieur à $n-3$, le problème des courbes de contact est généralement impossible. En effet, pour qu'il soit possible, il faut, comme on le voit aisément en appliquant la méthode du n° 40, qu'on ait

$$(i') \qquad l - p + \rho - nq + \tfrac{1}{2}(q+1)(q+2) + k_1 + p \geqq 1.$$

Or on a

$$nq = 2k_1 + k_2 + rl;$$

la plus grande valeur de l, toutes choses égales d'ailleurs, correspond à la plus petite valeur de r, soit $r = 2$; si l'on fait cette hypothèse dans la relation précédente, l'inégalité (i) entraîne la suivante

$$\rho - \frac{nq}{2} + \frac{1}{2}(q+1)(q+2) - \frac{k_2}{2} \geqq 1$$

et, *a fortiori*, en supprimant $\frac{k_2}{2}$,

$$2\rho + q(q - n + 3) \geqq 0.$$

En général, $\rho = 0$, et l'on doit avoir par suite $q \geqq n - 3$.

c'est-à-dire, puisque l'on a

$$f(z) = \varphi(z)(\lambda_1 F^{(1)} + \ldots + \lambda_m F^{(m)})^r = \varphi(z)\psi^r(z),$$

$$0 = \psi^{r-1}(e_1)\left[\varphi'(e_1)\psi(e_1) + r\varphi(e_1)\psi'(e_1) - q\frac{x'_1(e_1)}{x_1(e_1)}\varphi(e_1)\psi(e_1)\right];$$

$\psi(e_1)$ ne peut être nul que si la courbe $f = 0$ passe par le point de rebroussement (e_1), ce qu'on ne suppose pas; en égalant à zéro la quantité entre crochets, on trouve une relation linéaire et homogène en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

On conclut de là que le nombre des groupes que comprend un des r^{2p} systèmes de courbes de contact est égal à

$$r^{d-R-k_1} \quad \text{si} \quad q \geqq n-2$$

et à

$$r^{nq-\frac{1}{2}(q+1)(q+2)-k_1-p-R+1} \quad \text{si} \quad q < n-2.$$

PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES DE POINTS DE CONTACT.

44. On peut donner, relativement à la distribution des points où les courbes de contact touchent la courbe considérée, quelques propositions simples, qui sont l'extension de quelques résultats énoncés par Clebsch dans le cas où les courbes de contact sont des courbes adjointes.

Ces recherches mettront en évidence l'existence d'une classe de fonctions uniformes intéressantes, et dont l'étude est liée à celle des fonctions fuchsiennes.

Soient deux courbes de contact appartenant à un même système, $f = 0$ et $f_1 = 0$. On a

$$f(z) = \varphi(z)[\lambda_1 F^{(1)} + \lambda_2 F^{(2)} + \ldots]^r = \varphi(z)\psi^r(z),$$

$$f_1(z) = \varphi(z)[\mu_1 F^{(1)} + \mu_2 F^{(2)} + \ldots]^r = \varphi(z)\psi_1^r(z);$$

$\varphi = 0$ est l'équation d'une quelconque des courbes du système considéré, ψ et ψ_1 sont des fonctions fuchsiennes ayant mêmes infinis.

La fonction $\left(\frac{f_1}{f}\right)^{\frac{1}{r}}$, c'est-à-dire $\frac{\psi_1}{\psi}$, est donc une fonction fuchsienne, dont les zéros et les infinis sont respectivement les arguments des l points de contact de S avec les courbes f et f_1.

Cherchons ce que devient la fonction $\left(\frac{f_1}{f}\right)^{\frac{1}{r}}$ dans le cas où $f_1 = 0$ est une courbe de contact appartenant à un autre système que la courbe $f = 0$. Soit posé, pour abréger,

$$\mathfrak{F}_1(z) = \left[\frac{f_1(z)}{f(z)}\right]^{\frac{1}{r}},$$

La fonction $\mathfrak{F}_1^r(z)$ est uniforme dans l'intérieur du cercle fondamental; je dis qu'il en est de même de la fonction $\mathfrak{F}_1(z)$.

En effet, les zéros de $f(z)$ [ou $f_1(z)$] sont : 1° les k zéros communs à $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$, chacun au degré q de multiplicité; 2° les $2k_1 + k_2$ arguments qui correspondent aux points fixes de S par lesquels passent les courbes de contact de la famille considérée; 3° les arguments des l points de contact de $f = 0$ [ou $f_1 = 0$] et de S, chacun au degré r de multiplicité.

Il résulte de là que les zéros et les infinis de la fonction $\frac{f_1(z)}{f(z)}$ sont tous d'un degré de multiplicité égal à r, et par conséquent la fonction $\mathfrak{F}_1(z)$ reste monodrome dans le domaine de l'un quelconque des points correspondants; elle est donc uniforme dans l'intérieur du cercle fondamental.

D'un autre côté, on a, en désignant par $\left(z, \frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right)$ une quelconque des $2p$ substitutions fondamentales du groupe G, générateur des fonctions fuchsiennes considérées

$$\frac{f_1}{f}\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \frac{f_1}{f}(z)$$

et, par suite,

$$\mathfrak{F}_1\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \mathfrak{F}_1(z)\, e^{2h_j\frac{i\pi}{r}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p),$$

h_j étant un entier, qui est évidemment unique et déterminé quand la substitution $\left(z, \frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right)$ est donnée.

Si l'on remplace la courbe $f_1 = 0$ par une autre courbe de contact, $f_1' = 0$ appartenant au même système, on a une nouvelle fonction

$$\mathfrak{F}_1'(z) = \left[\frac{f_1'(z)}{f(z)}\right]^{\frac{1}{r}},$$

et je dis qu'elle satisfait aux relations

$$\mathfrak{F}_1'\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \mathfrak{F}_1'(z)\, e^{2h_j \frac{i\pi}{r}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p),$$

où h_j est le même que pour la fonction $\mathfrak{F}_1(z)$; le quotient $\frac{\mathfrak{F}_1'(z)}{\mathfrak{F}_1(z)}$, c'est-à-dire $\left[\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\right]^{\frac{1}{r}}$, est en effet une fonction fuchsienne de groupe G, d'après ce qui a été dit plus haut, puisque les courbes $f_1' = 0$ et $f_1 = 0$ appartiennent au même système.

Considérons maintenant une courbe de contact $f_2 = 0$ appartenant à un nouveau système; et soit $\mathfrak{F}_2(z) = \left[\frac{f_2(z)}{f(z)}\right]^{\frac{1}{r}}$ la fonction correspondante. On a

$$\mathfrak{F}_2\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \mathfrak{F}_2(z)\, e^{2g_j \frac{i\pi}{r}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Je dis que la suite $(g_1, g_2, \ldots, g_{2p})$ diffère de la suite $(h_1, \ldots, h_{2p})$; s'il en était autrement, la fonction uniforme

$$\frac{\mathfrak{F}_2(z)}{\mathfrak{F}_1(z)} = \left[\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right]^{\frac{1}{r}}$$

serait en effet une fonction fuchsienne de groupe G, et l'on aurait, en désignant par $\beta_1, \ldots, \beta_l$ les arguments des points de contact de S et de f_1, par $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ ceux des points de contact de S et de f_2,

$$\int_{\beta_1}^{\gamma_1} \theta_i(z)\, dz + \ldots + \int_{\beta_l}^{\gamma_l} \theta_i(z)\, dz = h\,\omega_i + h'\,\omega_i' + \ldots$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p).$$

Les groupes $(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ et $(\gamma_1, \ldots, \gamma_l)$ seraient alors équivalents, ce qui est impossible, puisque les courbes $f_2 = 0$ et $f_1 = 0$ font partie de deux systèmes de contact différents (**38**).

Il résulte de là que, si l'on considère successivement les r^{2p} systèmes de courbes de contact, on forme r^{2p} systèmes de fonctions $\mathfrak{F}(z)$, satisfaisant aux relations

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \mathfrak{F}(z) e^{2h_j \frac{i\pi}{r}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p),$$

et pour chacun de ces r^{2p} systèmes, les suites $(h_1, h_2, \ldots, h_{2p})$ sont différentes. Or le nombre de suites différentes qu'on peut former en donnant à $h_1, \ldots, h_{2p}$ les valeurs $0, 1, \ldots, r-1$ est précisément égal à r^{2p} : on voit ainsi qu'il existe un système de fonctions $\mathfrak{F}(z)$ satisfaisant à des relations de la forme précédente, où $h_1, \ldots, h_{2p}$ sont des entiers *choisis arbitrairement.*

45. Nous pouvons par suite énoncer le théorème algébrique suivant :

Soit G *un groupe fuchsien, dérivant de* $2p$ *substitutions* (¹). *On peut former des fonctions uniformes dans l'intérieur du cercle fondamental,* $\mathfrak{F}(z)$ *satisfaisant aux relations*

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \mathfrak{F}(z) e^{2h_j \frac{i\pi}{r}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p),$$

où $\left(z, \frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right)$ *est une quelconque des substitutions fondamentales du groupe* G, *et où* h_j *est un entier choisi arbitrairement.*

Les considérations géométriques qui précèdent mettent en évidence l'existence et la forme de pareilles fonctions : toutes les fonctions de même nature s'obtiennent d'ailleurs en multipliant l'une des précédentes par une fonction fuchsienne quelconque, de groupe G.

(¹) Il s'agit toujours, bien entendu, des groupes G qui donnent naissance à un polygone R_0 de la nature indiquée au n° **2**.

46. Au point de vue géométrique, on peut déduire de ce qui précède quelques conséquences intéressantes.

Soient $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots, f_r = 0$, r courbes de contact quelconques, appartenant *aux systèmes*

$$(h_1, h_2, \ldots h_{2p}), \quad (g_1, g_2, \ldots g_{2p}), \quad \ldots, \quad (l_1, l_2, \ldots l_{2p}),$$

c'est-à-dire telles qu'on ait

$$\left.\begin{array}{l} \left[\dfrac{f_1}{f}\left(\dfrac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right)\right]^{\frac{1}{r}} = \left[\dfrac{f_1}{f}(z)\right]^{\frac{1}{r}} e^{2h_j \frac{i\pi}{r}} \\ \dotfill \\ \left[\dfrac{f_r}{f}\left(\dfrac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right)\right]^{\frac{1}{r}} = \left[\dfrac{f_r}{f}(z)\right]^{\frac{1}{r}} e^{2l_j \frac{i\pi}{r}}, \end{array}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, 2p),$$

et considérons la fonction

$$\Phi(z) = f_1^{\frac{1}{r}}(z) f_2^{\frac{1}{r}}(z) \ldots, f_r^{\frac{1}{r}}(z).$$

On peut écrire

$$\Phi(z) = f(z)\left(\frac{f_1}{f}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{f_2}{f}\right)^{\frac{1}{r}} \cdots \left(\frac{f_r}{f}\right)^{\frac{1}{r}},$$

et, sous cette forme, on voit que $\Phi(z)$ est une fonction uniforme, sans infinis dans l'intérieur du cercle fondamental, et satisfaisant, puisque $f(z)$ est une fonction thêtafuchsienne de degré μq, aux relations

$$\Phi\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \Phi(z)(\nu z + \varpi)^{2\mu q} e^{2(h_j + g_j + \ldots + l_j)\frac{i\pi}{r}}.$$

Au point de vue analytique, on est ainsi en présence d'une fonction holomorphe, analogue aux fonctions thêtafuchsiennes sans infinis, et il est clair, d'après ce qui précède, qu'on peut choisir la fonction $f_r(z)$ de façon que, quelles que soient $f_1(z), \ldots, f_{r-1}(z)$, la quantité

$$h_j + g_j + \ldots + l_j$$

ait, suivant le module r, une valeur entière quelconque ($j = 1, 2, \ldots, 2p$).

On peut, en particulier, étant donnés les systèmes auxquels appartiennent les courbes $f_1 = 0, \ldots, f_{r-1} = 0$, choisir le système auquel appartient la courbe $f_r = 0$ de façon que $\Phi(z)$ soit une fonction thêta-fuchsienne holomorphe.

Nous dirons en ce cas que les *r systèmes*

$$(h_1, h_2, \ldots, h_{2p}), \quad (g_1, g_2, \ldots, g_{2p}), \quad \ldots, \quad (l_1, l_2, \ldots, l_{2p})$$

sont *complémentaires*. Les conditions à vérifier sont pour cela

$$\begin{aligned} h_1 + g_1 + \ldots + l_1 \equiv h_2 + g_2 + \ldots + l_2 \equiv \ldots \\ \equiv h_{2p} + g_{2p} + \ldots + l_{2p} \equiv 0 \pmod{r}. \end{aligned}$$

On peut alors (§ VII) énoncer la proposition suivante :

Soient r courbes de contact appartenant à r systèmes complémentaires : par leurs points de contact avec S, *les points fixes donnés sur cette courbe, et* $2(p-1)$ *points simples de* S *situés sur une courbe adjointe quelconque* P, *d'ordre* $n-3$, *on peut mener une courbe adjointe* Φ *d'ordre* $n+q-3$.

Les tangentes menées aux courbes Φ et P, en l'un quelconque des points doubles de S, présentent une propriété intéressante.

Supposons en effet que les courbes $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_r = 0$ appartiennent respectivement, dans les systèmes complémentaires dont elles font partie, *aux groupes* $(s_1, s_2, \ldots, s_{d-k_1})$, $(t_1, t_2, \ldots, t_{d-k_1})$, $\ldots$, $(v_1, v_2, \ldots, v_{d-k_1})$, c'est-à-dire que l'on ait (note du n° **38**)

$$\left.\begin{aligned} f_1^{\frac{1}{r}}(e_i) &= \frac{x_1^{\frac{q}{r}}(e_i)}{x_1^{\frac{q}{r}}(e'_i)} e^{2s_i\frac{i\pi}{r}} f^{\frac{1}{r}}(e'_i), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_r^{\frac{1}{r}}(e_i) &= \frac{x_1^{\frac{q}{r}}(e_i)}{x_1^{\frac{q}{r}}(e'_i)} e^{2v_i\frac{i\pi}{r}} f^{\frac{1}{r}}(e'_i), \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, d-k_1);$$

on en tire

$$\Phi(e_i) = \frac{x_1^q(e_i)}{x_1^q(e'_i)} e^{2(s_i+t_i+\ldots+v_i)\frac{i\pi}{r}} \Phi(e'_i).$$

Cette relation peut recevoir une interprétation géométrique analogue à celle qui a été donnée au § XI; en prenant pour axes $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$ les tangentes à S au point double (e_i, e'_i), et en supposant que les équations des tangentes en ce point aux courbes Φ et P soient respectivement

$$x_2 + a_i x_3 = 0, \qquad x_2 + b_i x_3 = 0;$$

on voit comme au n° **31** que la relation qui précède donne

$$\frac{a_i}{b_i} = e^{2(s_i + t_i + \ldots + v_i)\frac{i\pi}{r}}.$$

En d'autres termes :

Les points de contact avec S *de* r *courbes appartenant à des systèmes complémentaires et faisant partie de groupes déterminés, sont situés, avec les points fixes donnés, et les* $2(p-1)$ *points simples où* S *est traversée par une courbe adjointe quelconque* P *d'ordre* $n-3$, *sur une courbe adjointe* Φ *d'ordre* $n+q-3$: *le rapport anharmonique du faisceau formé par les tangentes à la courbe* S *en un de ses points doubles, et les tangentes en ce même point aux courbes* Φ *et* P, *est égal à une des racines* $r^{\text{ièmes}}$ *de l'unité, et il reste fixe quand les courbes de contact considérées varient sans cesser d'appartenir aux systèmes et aux groupes primitivement fixés.*

On peut toujours, étant donnés les groupes auxquels appartiennent dans leurs systèmes, supposés toujours complémentaires, les courbes $f_1 = 0, \ldots, f_{r-1} = 0$, choisir le groupe de la courbe $f_r = 0$, de façon qu'on ait

$$s_i + t_i + \ldots + v_i \equiv 0 \pmod r); \qquad (i = 1, 2, \ldots, d - k_1),$$

et l'on a en ce cas

$$\Phi(e_i) = \frac{x_1^q(e_i)}{x_1^q(e'_i)} \Phi(e'_i).$$

Les points de contact des r courbes considérées sont alors situés, avec les points fixes, sur une courbe de degré q (n° **33**).

Nous dirons en ce cas que les *groupes* $(s_1, s_2 \ldots, s_{d-k_1}), (t_1, \ldots, t_{d-k_1}), \ldots, (v_1, v_2, \ldots, v_{d-k_1})$ sont *complémentaires*.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Les points de contact de r courbes appartenant à des systèmes et à des groupes complémentaires sont situés, avec les points fixes, sur une courbe de degré q.

En particulier :

Les points de contact de r courbes appartenant à un même système et à un même groupe sont situés, avec les points fixes, sur une courbe de degré q.

Il résulte également de là que :

Si par les points de contact de $r-1$ courbes quelconques de la famille considérée et par les points fixes, on mène une courbe de degré q, cette courbe coupe S en l nouveaux points, qui sont les points de contact d'une $r^{\text{ième}}$ courbe de la même famille. Le système et le groupe auxquels appartient cette courbe restent fixes quand les systèmes et les groupes auxquels appartiennent respectivement les $r-1$ premières courbes restent fixes eux-mêmes. Si les $r-1$ premières courbes appartiennent à un même système, la $r^{\text{ième}}$ courbe appartiendra à ce système.

47. L'équation de la courbe qui passe par les points fixes et les points de contact de r courbes du même système et du même groupe est facile à former.

Soient $f_1=0, \ldots, f_r=0$ ces courbes.

On a

$$
\begin{array}{l}
f_1(z)=\varphi(z)(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\ldots+\lambda_{m-d+k_1}\varphi_{m-d+k_1})^r, \\
f_2(z)=\varphi(z)(\mu_1\varphi_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^r, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
f_r(z)=\varphi(z)(\varpi_1\varphi_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^r.
\end{array}
$$

La fonction $\Phi(z)$ a ici pour expression

$$\Phi(z)=\varphi(z)(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\ldots)\ldots(\varpi_1\varphi_1+\ldots).$$

En développant le second membre et remplaçant, comme au n° **38**,

$$\begin{array}{lll} \varphi(z)\varphi_1^r\ (z) & \text{par} & A_{r,0,\ldots 0}, \\ \varphi(z)\varphi_1^{r-1}(z)\varphi_2(z) & \text{par} & A_{r-1,1,\ldots 0}, \\ \dots\dots\dots & & \end{array}$$

on obtiendra le premier membre de l'équation cherchée

$$0 = \lambda_1\mu_1\ldots\varpi_1 A_{r,0\ldots 0} + (\lambda_2\mu_1\ldots\varpi_1 + \lambda_1\mu_2\ldots\varpi_1 + \ldots + \lambda_1\mu_1\ldots\varpi_2)A_{r-1,1,\ldots 0} + \ldots$$
$$+ \lambda_{m-d+k_1}\mu_{m-d+k_1}\ldots\varpi_{m-d+k_1}A_{0,0,\ldots r}.$$

48. Dans le cas où les courbes de contact de degré q ne passent par aucun point fixe donné sur S, on a

$$rl = nq.$$

Supposons qu'on ait aussi

$$r'l = nq',$$

r' et q' étant des entiers inférieurs à r et à q.

Soient $f_1 = 0, \ldots, f_{r'} = 0$, r' courbes de contact quelconques; posons

$$\Phi'(z) = f_1^{\frac{1}{r}}(z) f_2^{\frac{1}{r}}(z) \ldots f_{r'}^{\frac{1}{r}}(z).$$

La fonction $f_1(z) f_2(z) \ldots f_{r'}(z)$ a pour zéros : 1° chacun des zéros communs à $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$ au degré qr' ou $q'r$ de multiplicité; 2° chacun des arguments des points de contact de S et des courbes de $f_1 = 0, \ldots f_{r'} = 0$, au degré r de multiplicité : il en résulte que $\Phi'(z)$ est une fonction uniforme, et l'on démontre comme plus haut les propositions suivantes :

Si par les points de contact de $r' - 1$ courbes quelconques de la famille considérée on mène une courbe de degré q', cette courbe coupe S *en l nouveaux points qui sont les points de contact d'une $r'^{\text{ième}}$ courbe de la même famille.*

Le système et le groupe auxquels appartient cette courbe restent fixes quand les systèmes et les groupes auxquels appartiennent respectivement les $r' - 1$ premières courbes restent fixes eux-mêmes.

CAS PARTICULIERS.

49. Supposons que les courbes de contact de degré q ne passent par aucun point fixe donné sur S, de sorte qu'on ait

$$rl = nq.$$

Admettons de plus que

$$q = q's,$$
$$r = r's,$$

s étant un entier, et r' et q' étant premiers entre eux.

Il est clair qu'on aura une courbe de contact de degré q, ayant avec S en l points un contact d'ordre $r-1$, en prenant une courbe de degré q', ayant en l points un contact d'ordre $r'-1$, et en comptant cette courbe s fois.

Soit $\varphi = 0$ l'équation d'une telle courbe de degré q'; désignons par $\beta_1, \ldots, \beta_l$ les arguments de ses points de contact avec S, et par $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ ceux des points de contact avec S d'une courbe de degré q.

On aura (§ III)

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_i(z)\, dz + \ldots + \int_{\alpha_l}^{\beta_l} \theta_i(z)\, dz = \frac{1}{r}(h\omega_i + h'\omega'_i + \ldots).$$

Si nous considérons le *système* de courbes pour lequel

$$h = h' = \ldots = 0,$$

on aura, $f = 0$ étant l'équation d'une d'entre elles,

$$f(z) = \varphi^s(z)\psi^r(z)$$

ou

$$f(z) = \varphi^s(z)\psi^{r's}(z),$$

$\psi(z)$ étant une fonction fuchsienne d'ordre l, ayant pour infinis $\beta_1, \ldots, \beta_l$ (n° **38**).

On a, de plus,

$$\varphi^s(e_i)\,\psi^{r's}(e_i) = \frac{x_1^{q's}(e_i)}{x_1^{q's}(e'_i)}\,\varphi^s(e'_i)\,\psi^{r's}(e'_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, d);$$

ou

$$(19) \qquad \varphi(e_i)\,\psi^{r'}(e_i) = \frac{x_1^{q'}(e_i)}{x_1^{q'}(e'_i)}\,\varphi(e'_i)\,\psi^{r'}(e'_i)\,e^{2t_i\frac{i\pi}{s}}.$$

Considérons celles de ces équations qui correspondent à

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_d = 0.$$

La fonction $\varphi(e_i)\psi^{r'}(e_i)$ est évidemment une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré $\mu q'$, admettant comme zéro de multiplicité q' chacun des k zéros communs à $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$: les relations précédentes expriment donc que les autres zéros de cette fonction sont les arguments de points de S situés sur une courbe de degré q'. En d'autres termes, la courbe $f = 0$ est une courbe de degré q' comptée s fois.

Les relations précédentes, où $t_1 = \ldots = t_d = 0$ peuvent s'écrire, en extrayant les racines $r'^{\text{ièmes}}$,

$$(20) \qquad \varphi^{\frac{1}{r'}}(e_i)\,\psi(e_i) = \frac{x_1^{\frac{q'}{r'}}(e_i)}{x_1^{\frac{q'}{r'}}(e'_i)}\,\varphi^{\frac{1}{r'}}(e'_i)\,\psi(e'_i)\,e^{2v_i\frac{i\pi}{r'}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, d).$$

Il en résulte que, parmi les r^d groupes de courbes que comprend le système considéré, il en est r'^d qui ne renferment que des courbes de degré q' comptées s fois; le nombre des groupes de degré q indécomposables, comprises dans le système considéré, se réduit ainsi à $r^d - r'^d$.

Mais il peut se présenter un cas important où ces résultats se modifient : c'est celui où q' est inférieur à $n - 2$.

En ce cas, il suffit que $nq' - \frac{1}{2}(q'+1)(q'+2) - p + 1$ des équations (19), où l'on a fait $t_1 = t_2 = \ldots = 0$, soient vérifiées pour que les zéros de $\varphi(z)\,\psi^{r'}(z)$, autres que les zéros communs de $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$, soient les arguments de points de S situés sur une courbe de degré q' (n° **33**); et, par suite, à tout groupe de d équations de la forme (19), pour lequel $nq' - \frac{1}{2}(q'+1)(q'+2) - p + 1$ au moins des entiers t seront nuls, correspondront des courbes de degré q' comptées s fois.

Le nombre de ces groupes est, comme on le voit aisément, égal à

$$1 + d(s-1) + \frac{d(d-1)}{1.2}(s-1)^2 + \ldots + \frac{d(d-1)\ldots(\lambda+1)}{1.2\ldots(d-\lambda)}(s-1)^{d-\lambda},$$

en posant, pour abréger,

$$\lambda = nq' - \tfrac{1}{2}(q'+1)(q'+2) - p + 1$$

et

$$d = \tfrac{1}{2}n(n-3) - p + 1.$$

Chaque groupe d'équations (19) donnant naissance à r'^d groupes d'équations (20), on voit ainsi que le système considéré renferme un nombre de groupes de courbes de contact indécomposables de degré q égal à

$$\begin{aligned} N = r^d - r'^d \Big[& 1 + d(s-1) + \frac{d(d-1)}{1.2}(s-1)^2 + \ldots \\ & + \frac{d(d-1)\ldots(\lambda+1)}{1.2\ldots(d-\lambda)}(s-1)^{d-\lambda} \Big]. \end{aligned}$$

Les autres groupes de ce système ne comprennent que des courbes de degré q' comptées s fois. Si λ est nul ou négatif, il est clair qu'on aura $N = 0$.

COURBES DE DEGRÉ $n-3$ TANGENTES A S EN TOUS LEURS POINTS DE RENCONTRE AVEC CETTE COURBE.

51. Cherchons le nombre des courbes du degré $n-3$ qui passent par k_1 points doubles de S et qui touchent cette courbe en tous leurs autres points de rencontre avec elle.

Il résulte du théorème général du n° **38** et de la remarque du n° **42** qu'*il y a* 2^{2p} *systèmes de telles courbes; les points de contact des courbes d'un même système forment des groupes équivalents.*

Chaque système comprend 2^{d-k_1-1} courbes, de sorte qu'il existe en tout 2^{2p+d-k_1-1} courbes répondant à la question.

On a, sur les systèmes de points de contact, des théorèmes analogues à ceux du n° **46**.

On voit, comme au n° **49**, que ces résultats se modifient si k_1 est nul et si $n-3$ est pair, c'est-à-dire si n est impair.

Soit $n-3=2\nu$, $k_1=0$.

Parmi les systèmes des courbes de degré $n-3$ tangentes à S en tous leurs points de rencontre avec cette courbe, il en est un pour lequel les groupes des points de contact sont équivalents au groupe de $\frac{(n-3)n}{2}$ points situés sur une courbe de degré ν.

Ce système ne comprend que N_1 courbes indécomposables de degré $n-3$, étant posé

$$N_1=2^{d-1}-\left[1+(d-1)+\frac{(d-1)(d-2)}{1.2}+\ldots+\frac{(d-1)\ldots(\lambda'+1)}{1.2\ldots(d-\lambda'-1)}\right]$$

et

$$\lambda'=\frac{3n^2-12n+1}{8}-p+1.$$

Il comprend, de plus, toutes les courbes de degré $\frac{n-3}{2}$ comptées deux fois.

Pour λ' nul ou négatif, on aura

$$N_1=0.$$

52. *Remarque.* — Ces résultats cessent d'être exacts si la courbe de degré $n-3$ doit passer par tous les points doubles de $S(d=k_1)$, car les équations (17) du n° **38** n'existent plus, et les équations (16) se réduisent à $p-1$ d'entre elles (n° **9**). En ce cas, les quantités h, h', ... qui figurent dans ces équations ne sont pas indépendantes, et le nombre des systèmes de courbes de contact est inférieur à r^{2p}.

APPLICATION AUX COURBES DU QUATRIÈME DEGRÉ.

53. Il est aisé de voir que les formules qui précèdent s'appliquent au cas qui semble échapper à la méthode de $p=0$.

Nous pouvons donc énoncer, pour toutes les courbes du quatrième degré, les propositions relatives aux systèmes de coniques quadritangentes.

I. *Courbes du quatrième degré sans point singulier.* — *Il y a 64 systèmes de coniques tangentes à la courbe en 4 points :* l'un de ces systèmes ne comprend que des droites comptées deux fois.

L'équation générale des coniques comprises dans l'un des 63 autres systèmes est de la forme

$$\lambda_1^2 A + 2\lambda_1\lambda_2 B + \lambda_2^2 C = 0, \tag{21}$$

λ_1 et λ_2 étant des constantes arbitraires.

Les points de contact de deux coniques du même système sont sur une conique.

II. *Courbe* S *du quatrième degré à un point double* (*e*). — *Il y a 16 systèmes de coniques de contact : chaque système comprend deux groupes de coniques,* et l'équation générale des courbes d'un groupe est de la forme (21). Toutefois, l'un des systèmes ne comprend que des droites, comptées deux fois.

Il n'y a donc, en réalité, que 30 *groupes de coniques de contact* [1].

Les points de contact de deux coniques de même système et du même groupe sont sur une conique.

Par les points de contact de deux coniques du même système et de groupes différents, on peut mener un faisceau de cubiques qui ont, comme neuvième point commun, le point double e.

Une quelconque de ces cubiques, C, *coupe en outre la courbe* S *en deux nouveaux points, déterminant une droite* D *qui passe par le point e. En ce point, la tangente à* C *est la conjuguée harmonique de* D *par rapport aux deux tangentes de la courbe* S.

III. *Courbe* S *du quatrième degré à deux points doubles.* — *Il y a*

---

[1] Et non 31, comme il est dit dans les *Leçons sur la Géométrie* de Clebsch, trad. Benoist, t. III, p. 278.

quatre systèmes de coniques de contact; trois d'entre eux renferment quatre groupes, et l'équation générale des courbes d'un des groupes est de la forme (21). Le dernier système ne comprend qu'un groupe de coniques proprement dites et renferme en outre les droites du plan, comptées deux fois. Il n'y a donc, en réalité, que 13 *groupes de coniques de contact.*

Les quatre points de contact d'une conique du dernier groupe sont sur une conique qui passe par les deux points doubles e_1 et e_2, et touche en chacun d'eux la conjuguée harmonique de la droite e_1e_2 par rapport aux deux tangentes menées à S *en ce point.*

Les points de contact de deux coniques du même système et du même groupe sont sur une conique.

Dans un même système, on peut distinguer les quatre groupes, suivant la notation du numéro, par les symboles (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) (n° **46**).

Les points de contact de deux coniques appartenant à un même système et aux deux groupes (α, β) et (α', β') sont situés, avec les points doubles e_1 et e_2, sur une cubique C.

Cette cubique touche au point e_1 la droite e_1e_2, si $\alpha + \alpha'$ est pair, et la conjuguée harmonique de e_1e_2 par rapport aux deux tangentes de S *en e_1, si $\alpha + \alpha'$ est impair.*

De même elle touche au point e_2 la droite e_1e_2, si $\beta + \beta'$ est pair, et la conjuguée harmonique de e_1e_2 par rapport aux tangentes de S *en e_2, si $(\beta + \beta')$ est impair.*

IV. *Courbe* S *du quatrième degré à trois points doubles. — Il n'y a qu'un seul système de coniques de contact; il renferme huit groupes de coniques,* et l'équation générale des courbes d'un groupe est de la forme (21). Toutefois, quatre de ces groupes ne comprennent que des droites comptées deux fois : il n'y a donc en réalité que *quatre groupes de coniques de contact* (1).

(1) Et non 7, comme il est dit dans les *Leçons sur la Géométrie* (*ibid.*, p. 306). Les trois groupes, désignés dans ce passage par les symboles (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), ne comprennent que des droites comptées deux fois.

Les points de contact de deux coniques appartenant à un même groupe sont sur une conique.

54. On peut donner des résultats analogues pour les cubiques osculatrices en quatre points à une courbe du quatrième degré. Nous ne les énoncerons que pour les courbes sans points doubles et les courbes à un point double.

Courbe S *du quatrième degré sans point singulier. — Il y a* 729 *systèmes de cubiques osculatrices à la courbe en quatre points :* l'un de ces systèmes ne comprend que des droites comptées trois fois. L'équation générale des cubiques comprises dans l'un des 728 *autres systèmes* est de la forme

$$(22)\qquad \lambda_1^3 A + 3\lambda_1^2\lambda_2 B + 3\lambda_1\lambda_2^2 C + \lambda_2^3 D = 0,$$

λ_1 et λ_2 étant des constantes arbitraires.

Toute cubique menée par les points de contact de deux cubiques coupe S *en quatre nouveaux points qui sont les points d'osculation d'une autre cubique : le système auquel appartient cette dernière reste fixe si les systèmes auxquels appartiennent respectivement les deux premières cubiques restent fixes.*

Les douze points de contact de trois cubiques d'un même système sont sur une cubique.

Toute conique menée par les points de contact d'une cubique coupe S *en quatre nouveaux points, qui sont les points d'osculation d'une autre cubique : le système auquel appartient cette dernière courbe reste fixe quand le système auquel appartient la première reste fixe* (n° **48**).

Courbe S *du quatrième degré à un point double, c. — Il y a* 81 *systèmes de cubiques osculatrices en quatre points : chaque système comprend* 3 *groupes,* et l'équation générale des courbes d'un des groupes est de la forme (22). Toutefois, l'un des systèmes, que nous désignerons par la notation (0, 0, 0, 0) ne comprend que des droites comptées trois fois.

Il n'y a donc en réalité que 240 *groupes de cubiques de contact.*

Désignons les systèmes par les symboles (a, b, c, d) et les groupes par les symboles (α) : a, b, c, d, α pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2 (n° **46**).

Soient trois cubiques appartenant respectivement aux systèmes

$$(a_1, b_1, c_1, d_1), \qquad (a_2, b_2, c_2, d_2),$$
$$(3 - a_1 - a_2, 3 - b_1 - b_2, 3 - c_1 - c_2, 3 - d_1 - d_2),$$

et aux groupes

$$(\alpha_1), \quad (\alpha_2), \quad (\alpha_3).$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0 \pmod 3$, les douze points d'osculation des trois cubiques sont sur une même cubique.

Dans le cas contraire, on pourra par ces points et le point double e mener un faisceau de courbes du quatrième ordre : l'une quelconque de ces courbes, C, coupe S en deux nouveaux points qui déterminent une droite D, passant par e. Le rapport anharmonique du faisceau formé par la tangente en e à la courbe C, les tangentes au même point à S, et la droite D, est égal à $e^{\frac{2i\pi}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$: il est donc équianharmonique.

Les douze points d'osculation de trois cubiques du même système et du même groupe sont sur une cubique.

Toute cubique menée par les points d'osculation de deux cubiques quelconques coupe S *en quatre nouveaux points qui sont les points d'osculation d'une nouvelle cubique : le système et le groupe auxquels appartient cette dernière restent fixes si le système et le groupe auxquels appartiennent les deux premières restent fixes eux-mêmes.*

Les points de contact de deux cubiques appartenant respectivement aux systèmes

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \quad \text{et} \quad (3 - a_1, 3 - b_1, 3 - c_1, 3 - d_1),$$

et aux groupes

$$(\alpha_1) \quad \text{et} \quad (3 - \alpha_1),$$

sont sur une conique.

Toute conique menée par les points d'osculation d'une cubique coupe S *en quatre nouveaux points qui sont les points d'osculation d'une autre cubique; le système et le groupe auxquels appartient cette dernière restent fixes si le système et le groupe auxquels appartient la première restent fixes eux-mêmes.*

CONIQUES TANGENTES EN CINQ POINTS A UNE COURBE DU CINQUIÈME DEGRÉ.

55. Nous ferons une application des résultats du n° **51** aux courbes du cinquième degré.

Courbe du cinquième degré à un point double (¹). — *Il y a* 1023 *coniques touchant la courbe en cinq points.*

Courbe du cinquième degré à deux points doubles. — *Les coniques tangentes en cinq points se répartissent en* 256 *systèmes; chaque système comprend deux coniques,* sauf un qui ne comprend que des droites comptées deux fois. *Il y a donc* 510 *coniques de contact.*

Courbe du cinquième degré à trois points doubles. — *Les coniques de contact se répartissent en* 64 *systèmes; chaque système comprend* 4 *coniques,* sauf un qui ne comprend que des droites comptées deux fois. *Il y a donc* 252 *coniques de contact.*

Courbe du cinquième degré à quatre points doubles. — *Les coniques de contact se répartissent en* 16 *systèmes; les quinze premiers comprennent chacun* 8 *coniques, le dernier ne comprend qu'une conique proprement dite. Par les cinq points de contact de cette conique et les quatre points doubles on peut faire passer un faisceau de cubiques : l'une quelconque de ces courbes* C *coupe en outre la courbe du cinquième degré en deux points, situés, avec les points doubles, sur une conique* H. *Les tangentes menées en un quelconque des points doubles aux courbes* C *et* H *sont conjuguées harmoniques*

(¹) Suivant la remarque du n° **53**, les formules qu'on y a données ne s'appliquent pas au cas de la courbe sans point double, puisque $d = k_1 = 0$.

par rapport aux tangentes menées à la courbe du cinquième degré en ce point.

Il y a en tout 121 *coniques de contact.*

Courbe du cinquième degré à cinq points doubles. — Les coniques de contact se répartissent en 4 *systèmes;* 3 *d'entre eux comprennent chacun* 16 *coniques; le dernier ne comprend que* 5 *coniques proprement dites. Par les cinq points de contact de l'une de ces coniques et les cinq points doubles on peut faire passer une cubique* C. *Les tangentes menées en quatre des points doubles à la courbe* C *et à la conique* H *des points doubles sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes de la courbe du cinquième degré au point considéré. Au cinquième point double, les courbes* C *et* H *se touchent.*

Il y a en tout 53 *coniques de contact.*

Courbe du cinquième degré à six points doubles. — Il y a 16 *coniques de contact.*

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES COURBES DE CONTACT.

56. Comme dernière application de la théorie des courbes de contact, nous donnerons quelques propriétés géométriques applicables aux courbes d'un même groupe, quand leur équation générale renferme un paramètre arbitraire [1].

Soit

$$nq = 2k_1 + k_2 + rl$$

et

$$l - p - d + k_1 + \rho = 1.$$

Les courbes considérées sont celles de degré q qui passent par k_1 points doubles et k_2 points simples donnés sur S, et ont avec cette courbe en l points, formant un groupe d'indice ρ, un contact d'ordre $r - 1$.

---

[1] Nous avons signalé ces propriétés dans le cas où la courbe S est de genre 1.

L'équation générale des courbes d'un même groupe sera de la forme

$$\lambda_1^r A_r + r\lambda_1^{r-1}\lambda_2 A_{r-1} + \frac{r(r-1)}{1.2}\lambda_1^{r-2}\lambda_2^2 A_{r-2} + \ldots + \lambda_2^r A_0 = 0.$$

Nous appellerons ces courbes, pour abréger, courbes A.

Soient r de ces courbes :

$$\begin{aligned}
0 = A &= \alpha^r A_r + r\alpha^{r-1} A_{r-1} + \ldots + A_0, \qquad \left(\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right),\\
0 = B &= \beta^r A_r + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
0 = L &= \lambda^r A_r + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

Les rl points de contact de ces courbes avec S sont (**46**) sur une courbe de degré q, qui passe par les points fixes donnés, et dont l'équation est (**47**)

$$0 = \alpha\beta\ldots\lambda\, A_r + (\alpha\beta\ldots + \ldots + \beta\ldots\lambda + \alpha\ldots\lambda + \ldots)A_{r-1} + \ldots + A_0.$$

Le coefficient de A_k est la somme des produits k à k des r quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

Courbes A *menées par un point du plan.* — Soit (x'_1, x'_2, x'_3) un point du plan ; on peut mener, par ce point, r courbes A : les valeurs correspondantes du paramètre sont données par l'équation

$$0 = \alpha^r A'_r + r\alpha^{r-1} A'_{r-1} + \ldots + A'_0,$$

en posant

$$A'_k = A_k(x'_1, x'_2, x'_3).$$

Soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les racines de l'équation précédente : la somme de leurs produits k à k étant

$$(-1)^k \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{12\ldots k}\frac{A'_{r-k}}{A'_r},$$

la courbe de degré r qui passe par les points fixes et les rl points de contact des r courbes A menées par le point (x'_1, x'_2, x'_3) aura pour équation

$$o = A'_0 A_r - r A'_1 A_{r-1} + \frac{r(r-1)}{1.2} A'_2 A_{r-2} + \ldots + (-1)^r A'_r A_0.$$

Le premier membre de cette équation ne change pas, ou change de signe, suivant que r est pair ou impair, quand on permute x_1, x_2, x_3 et x'_1, x'_2, x'_3.

Cela posé, appelons *courbe polaire* d'un point la courbe de degré q qui passe par les points fixes et les rl points de contact des r courbes A menées par le point. Ce point sera dit *pôle* de sa courbe polaire.

On a ce théorème :

Si la courbe polaire d'un point P *passe par un point* P', *la courbe polaire de* P' *passe par* P;

et, par suite :

Les courbes polaires de tous les points d'une courbe polaire passent par le pôle de celle-ci.

Les pôles de toutes les courbes polaires passant par un point sont sur la courbe polaire de ce point.

Si r est impair, l'équation de la courbe polaire du point (x'_1, x'_2, x'_3) peut s'écrire

$$o = (A'_0 A_r - A'_r A_0) + r(A'_1 A_{r-1} - A'_{r-1} A_1) + \ldots$$

et, par suite :

Si r est impair, toute courbe polaire passe par son pôle.

Ces résultats, y compris le dernier, s'appliquent en particulier aux cubiques osculatrices en quatre points à une courbe du quatrième degré.

XIII. — Des courbes hyperelliptiques.

57. On dit qu'une courbe S (de genre p et de degré n) est *hyperelliptique* quand il existe sur cette courbe un système simplement infini de groupe g_2^1 formés de deux points : nous dirons que les deux points d'un groupe sont *conjugués*.

Le système en question est un système spécial, d'indice $\rho = p - 1$, puisque dans les formules du n° **19** il faut faire $h = 2$ et $r = 1$.

D'après le théorème de Riemann et Roch, les courbes adjointes à S d'ordre $n-3$, qui passent par les deux points d'un groupe, forment un système $\rho - 1$, c'est-à-dire $p-2$ fois infini; leur équation générale est donc de la forme

$$o = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \ldots + a_{p-1} P_{p-1},$$

$a_1, \ldots$ étant des constantes arbitraires. En d'autres termes, les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré, qui s'annulent pour les arguments des deux points d'un groupe, ont pour expression

$$\theta(z) = a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2 + \ldots + a_{p-1} \theta_{p-1}.$$

Comme il n'y a que p fonctions thêtafuchsiennes du premier degré linéairement indépendantes, il résulte de là que :

Toute fonction thêtafuchsienne holomorphe du premier degré, qui s'annule pour l'argument d'un point, s'annule pour l'argument du point conjugué, et géométriquement :

Toute courbe adjointe d'ordre $n-3$, qui passe par un point d'une courbe hyperelliptique, passe par le conjugué de ce point.

Une courbe adjointe d'ordre $n-3$ passant par deux points conjugués coupe en outre S en $2(p-2)$ points, par lesquels on peut, d'après le théorème de Roch et Riemann, faire passer un faisceau de courbes adjointes d'ordre $n-3$. Soient θ_1 et θ_2 les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré qui correspondent à deux courbes de ce faisceau : la fonction fuchsienne $\frac{\theta_2(z)}{\theta_1(z)}$ n'a que deux infinis dans l'intérieur du polygone générateur; elle est donc d'ordre deux.

On peut dire, d'après cela, que :

Pour que deux fonctions fuchsiennes de même groupe G *soient liées par une relation hyperelliptique, $f = 0$, il faut et il suffit* *qu'une des fonctions fuchsiennes du même groupe soit du second ordre.*

La condition est suffisante, car, $F(z)$ étant cette fonction, les deux zéros de l'équation $F(z) = \text{const.}$ déterminent sur la courbe $f = 0$ un système de groupes g_2^1.

Équation générale et enveloppe des droites joignant deux points conjugués.

58. Une droite $f = 0$ joignant deux points conjugués coupe S en $n - 2$ autres points, déterminant un groupe dont la multiplicité est en général $n - p - 2$: il en résulte qu'en désignant par $\varphi = 0$ l'équation d'une droite analogue, on aura (n° **37**)

$$f(z) = \varphi(z)[\alpha_1 F_1^{(1)} + \alpha_2 F_1^{(2)}][\beta_1 F_2^{(1)} + \beta_2 F_2^{(2)} + \ldots + \beta_{n-p-1} F_2^{(n-p-1)}],$$

$F_1^{(1)}, F_1^{(2)}$ étant des fonctions fuchsiennes d'ordre deux, $F_2^{(1)}, \ldots, F_2^{(n-p-1)}$ des fonctions fuchsiennes d'ordre $n - 2$ ayant respectivement mêmes infinis. Ces infinis sont pour les F_1 les arguments des deux points conjugués situés sur la droite $\varphi = 0$, pour les F_2, ceux des $n - 2$ autres points de S situés sur cette droite.

Les constantes α et β seront liées par $n - p - 1$ relations de la forme (n° **37**)

$$\beta_1(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2) + \beta_2(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2) + \ldots = 0,$$

$m_1, n_1, \ldots$ étant des constantes. De ces $n - p - 1$ relations, on tirera les valeurs proportionnelles des β

$$\frac{\beta_1}{f_1} = \frac{\beta_2}{f_2} = \ldots,$$

$f_1, f_2, \ldots,$ étant des polynômes homogènes de degré $n - p - 2$ en α_1, α_2. On aura ainsi, sous forme symbolique,

$$f(z) = (\alpha_1, \alpha_2)(f_1, f_2, \ldots).$$

Dans le second membre, α_1 et α_2 entrent donc au degré $n - p - 1$, et l'équation générale des droites joignant deux points conjugués sera de la forme

$$o = x_1 \varphi_{n-p-1} + x_2 \psi_{n-p-1} + x_3 \chi_{n-p-1},$$

φ, ... étant des polynômes homogènes de degré $n-p-1$ en α_1, α_2.

Donc :

Les droites qui joignent deux points conjugués sur une courbe hyperelliptique, de degré n et de genre p, enveloppent une courbe unicursale de classe $n-p-1$ et de degré $2(n-p-2)$ en général.

59. Cette courbe, comme nous l'avons fait voir dans le cas des courbes de genre un, touche S en un certain nombre de points, que nous allons déterminer. Pour abréger, nous désignerons par *droites* D les droites joignant deux points conjugués.

Les valeurs proportionnelles de α_1 et α_2 qui correspondent aux $n-p-1$ droites D qu'on peut mener par un point de S, d'argument z, vérifient l'équation

$$(23)\quad \begin{cases} o = f(z) = \varphi(z)[\alpha_1 F_1^{(1)}(z) + \alpha_2 F_1^{(2)}(z)] \\ \qquad \times [f_1 F_2^{(1)}(z) + \ldots + f_{n-p-1} F_2^{(n-p-1)}(z)]. \end{cases}$$

$f_1, f_2, \ldots$ sont les valeurs proportionnelles trouvées plus haut pour β_1, β_2, ... Cette équation admet d'abord la solution

$$\alpha_1 = F_1^{(2)}(z), \quad \alpha_2 = -F_1^{(1)}(z),$$

qui correspond à la droite joignant le point z à son conjugué.

Remarquons maintenant que les points de S situés sur l'enveloppe des droites D sont tels que l'équation précédente ait deux racines égales en $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, et, en ces points, l'enveloppe touche la droite D qui correspond à la racine double. Or, parmi ces points, figurent ceux dont les arguments sont tels que les deux facteurs entre crochets dans le second membre de (23) aient deux racines égales, c'est-à-dire tels qu'on ait

$$\begin{aligned} o = f_1 [F_1^{(2)}(z), - F_1^{(1)}(z)] F_2^{(1)}(z) + \ldots \\ + f_{n-p-1} [F_1^{(2)}(z_1) - F_1^{(1)}(z)] F_2^{(n-p-1)}(z) = o. \end{aligned}$$

Soit z_0 une solution de cette équation : la droite D_0, qui joint le point z_0 à son conjugué, coupe S en des points dont les arguments vérifient la relation

$$(24)\quad o = \varphi(z)[\alpha_1^0 F_1^{(1)}(z) + \alpha_2^0 F_1^{(2)}(z)][f_1(\alpha_1^0, \alpha_2^0)F_2^{(1)}(z) + \ldots],$$

α_1^0 et α_2^0 étant liés par l'équation

$$\alpha_1^0 F_1^{(1)}(z_0) + \alpha_2^0 F_1^{(2)}(z_0) = o.$$

Or la fonction

$$f(\alpha_1^0, \alpha_2^0)F_2^{(1)}(z) + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$f[F_1^{(2)}(z_0), -F_1^{(1)}(z_0)]F_2^{(1)}(z) + \ldots,$$

s'annule, par hypothèse, pour $z = z_0$: les deux facteurs entre crochets du second membre de l'équation (24) s'annulent donc séparément pour $z = z_0$, et par suite la droite D_0 est tangente à S au point z_0.

Il en résulte que la courbe enveloppe des droites D touche S aux points dont les arguments vérifient l'équation

$$(25)\quad \begin{cases} o = f_1[F_1^{(2)}(z), F_1^{(1)}(z)]F_2^{(1)}(z) + \ldots \\ \qquad + f_{n-p-1}[F_1^{(2)}(z), -F_1^{(1)}(z)]F_2^{(n-p-1)}(z). \end{cases}$$

Les F_1 sont des fonctions fuchsiennes d'ordre deux; les F_2 des fonctions d'ordre $n-2$, ayant respectivement mêmes infinis; $f_1, f_2, \ldots,$ des polynômes d'ordre $n-p-2$: il en résulte que le second membre de l'équation précédente est une fonction fuchsienne d'ordre

$$2(n-p-2) + n - 2 = 3n - 2p - 6,$$

et par suite :

La courbe enveloppe des droites qui joignent deux points conjugués sur une courbe hyperelliptique, de degré n et de genre p, touche cette courbe en $3n - 2p - 6$ *points.*

On peut dire de plus, en remarquant que les infinis du second membre de (25) sont : 1° les arguments des deux points conjugués situés sur la droite $\varphi = 0$, au degré $n - p - 2$ de multiplicité; 2° les arguments des $n - 2$ autres points de S situés sur cette droite, que :

Le groupe déterminé par les $3n - 2p - 6$ points de contact est équivalent au groupe formé par $n - p - 2$ couples de points conjugués quelconques, et les $n - 2$ points où la droite qui joint deux de ces points coupe de nouveau la courbe hyperelliptique.

COURBES DE GENRE DEUX.

60. Toute courbe de genre deux est hyperelliptique, car ses courbes adjointes d'ordre $n - 3$ sont en nombre simplement infini et n'ont avec elle que deux points mobiles d'intersection : ces deux points déterminent un système de groupes g_2^1.

La courbe la plus simple de genre deux est la *courbe du quatrième degré à un point double :* toute droite menée par ce point coupe en outre la courbe en deux points qui sont conjugués.

Les coordonnées des points d'une courbe S du quatrième degré à un point double peuvent se mettre sous la forme

$$x_1 = \Theta_1(z), \qquad x_2 = \Theta_2(z), \qquad x_3 = \Theta_3(z);$$

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ étant des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré trois, ayant deux zéros communs, α_1 et α_2 [1] (§ VI).

Soient $\theta_1(z)$ et $\theta_2(z)$ les deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un : chacune d'elles a deux zéros dans le polygone générateur; et les deux zéros de toute fonction linéaire, de la forme

$$\lambda_1 \theta_1 + \mu_1 \theta_2,$$

sont les arguments de deux points conjugués de S (n° 4).

---

[1] D'après la théorie générale, il semble qu'on pourrait aussi prendre pour x_1, x_2, x_3 des fonctions thêtafuchsiennes de degré deux. Mais, si l'on désigne par θ_1 et θ_2 les deux fonctions thêtafuchsiennes de degré un et de genre deux, celles de degré deux, qui sont au nombre de trois, se réduisent évidemment aux fonctions θ_1^2, $\theta_1\theta_2$ et θ_2^2 : la courbe décrite par le point x_1, x_2, x_3 serait alors une conique.

Proposons-nous de chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que trois couples de points conjugués, dont les arguments vérifient respectivement les relations

$$\lambda_1 \theta_1 + \mu_1 \theta_2 = 0, \qquad \lambda_2 \theta_1 + \mu_2 \theta_2 = 0, \qquad \lambda_3 \theta_1 + \mu_3 \theta_2 = 0;$$

soient, sur une conique, $f = 0$.

On aura

$$f(z) = (\lambda_1 \theta_1 + \mu_1 \theta_2)(\lambda_2 \theta_1 + \mu_2 \theta_2)(\lambda_3 \theta_1 + \mu_3 \theta_2) \\ \times [a_1 \varphi(z) + a_2 \varphi_2(z) + \ldots + a_5 \varphi_5(z)]$$

ou

$$f(z) = (\alpha \theta_1^3 + \beta \theta_1^2 \theta_2 + \gamma \theta_1 \theta_2^2 + \delta \theta_2^3)[a_1 \varphi_1(z) + \ldots],$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ désignant cinq fonctions thêtafuchsiennes de degré trois linéairement distinctes, $a_1, \ldots, a_5$ des constantes.

Pour que $f(z)$ soit une fonction du second ordre de $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$, ..., il faut d'abord qu'elle admette comme zéro double chacune des quantités α_1, α_2; ce qui donne, en annulant pour ces valeurs la fonction $a_1 \varphi_1(z) + \ldots$ et sa dérivée, quatre relations linéaires en $a_1, \ldots, a_5$ qui déterminent les valeurs proportionnelles de ces quantités. Il reste ainsi

$$f(z) = \psi(z)(\lambda_1 \theta_1 + \mu_1 \theta_2)\ldots(\lambda_3 \theta_1 + \mu_3 \theta_2)$$

ou

$$f(z) = \psi(z)(\alpha \theta_1^3 + \ldots + \delta \theta_2^3).$$

On écrira ensuite la relation

$$f(e) : x_1^2(e) = f(e') : x_1^2(e'),$$

e, e' désignant les arguments qui correspondent au point double de S.

Cette équation est de la forme

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0,$$

ou

$$a\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + b(\lambda_1\lambda_2\mu_3 + \lambda_1\mu_2\lambda_3 + \mu_1\lambda_2\lambda_3) \\ + c(\lambda_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\lambda_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\lambda_3) + d\mu_1\mu_2\mu_3 = 0,$$

a, b, c, d étant des constantes : c'est la relation cherchée entre les quantités λ et μ.

Remarquons qu'en tenant compte de la relation précédente mise sous la première forme, on peut écrire

$$f(z) = \psi(z)[\alpha\psi_1(z) + \beta\psi_2(z) + \gamma\psi_3(z)];$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 sont des fonctions thêtafuchsiennes de degré trois; α, β, γ des constantes arbitraires, et $\psi(z)$ une fonction thêtafuchsienne de degré trois, qui a, en outre des quantités α_1 et α_2 comptées deux fois, deux zéros, σ_1 et σ_2.

61. De là résultent les conséquences suivantes :

Les coniques qui traversent trois couples de points conjugués, sur une courbe du quatrième degré à un point double, passent par deux points fixes de cette courbe et forment une famille linéaire deux fois infinie.

On en déduit sans difficulté que la droite qui joint les points fixes, σ_1 et σ_2, coupe en outre la courbe en deux points qui sont situés respectivement sur les tangentes menées à S au point double.

Si l'on fait une perspective de la courbe S de manière à faire coïncider les deux points fixes avec les points cycliques du nouveau plan, et si l'on se souvient que la droite joignant deux points conjugués passe par le point double, on voit que :

La nouvelle courbe est anallagmatique par rapport à son point double.

En d'autres termes :

Toute courbe de quatrième degré du second genre, qui passe par les points circulaires à l'infini et a en outre pour directions asymptotiques celles des tangentes au point double, est anallagmatique par rapport à ce point.

Cette proposition se vérifie directement sans difficulté.

62. Nous n'insisterons pas plus longtemps sur cette théorie, nous nous bornerons à énoncer la proposition suivante, qui est une conséquence des théorèmes généraux sur les courbes de contact (nº **38**).

Il existe trois coniques, osculatrices, en deux points conjugués à une courbe du quatrième degré, de genre deux : les six points d'osculation sont sur une conique.

Ces quatre coniques passent d'ailleurs par les deux points σ_1 et σ_2.

63. *La courbe du cinquième degré, de genre deux,* a quatre points doubles : les coniques menées par ces points coupent en outre la courbe en deux points, qui sont conjugués.

D'après les résultats du nº **27**, il y a deux espèces de courbes de degré cinq et de genre deux.

64. Pour *les courbes de première espèce,* les coordonnées d'un point sont des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré trois, ayant un zéro commun.

Sur une telle courbe, S, trois couples de points conjugués sont toujours sur une cubique, passant par les quatre points doubles et coupant en outre la courbe en un point fixe a (nº **27**) : si nous considérons une droite D, menée par a, et coupant S aux points a, b, c, d, e, la cubique qui passe par les points b, c, d et leurs conjugués se décompose évidemment en une droite, qui est D, et une conique qui passe par les points doubles. Il en résulte qu'il y a nécessairement sur D deux couples de points conjugués; en d'autres termes :

La droite qui joint deux points conjugués sur une courbe de cinquième degré, de genre deux et de première espèce, passe par un point fixe a, situé sur la courbe, qu'elle coupe en deux nouveaux points, également conjugués.

On démontrerait sans difficulté que :

Le point a est le point de concours de deux tangentes doubles, dont les deux points de contact avec la courbe du cinquième degré sont respectivement conjugués.

65. Pour *les courbes de seconde espèce*, les coordonnées d'un point sont des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré 4, ayant trois zéros communs α_1, α_2, α_3.

Les droites D *qui joignent deux points conjugués sur une courbe de seconde espèce enveloppent* (nos **58** et **59**) *une conique qui touche la courbe en cinq points.* Le groupe déterminé par ces cinq points est équivalent à celui des points communs à S et à une des droites D (n° **59**); en d'autres termes (n° **24**), par ces cinq points et les quatre points doubles, on peut mener un nombre simplement infini de cubiques coupant en outre la courbe en deux points conjugués.

La conique enveloppe des droites D est donc celle que nous avons rencontrée au n° **55**.

Sur une courbe de seconde espèce, trois couples de points conjugués ne peuvent jamais être sur une cubique passant par les points doubles.

66. Proposons-nous d'étudier les coniques $f = 0$ qui traversent quatre couples de points conjugués. On a

$$f(z) = (\lambda_1\theta_1 + \mu_1\theta_2)\ldots(\lambda_4\theta_1 + \mu_4\theta_2)(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_7\varphi_7)$$

ou

$$f(z) = (\alpha\theta_1^4 + \beta\theta_1^3\theta_2 + \ldots + \varepsilon\theta_2^4)(a_1\varphi_1 + \ldots),$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_7$ étant sept fonctions thêtafuchsiennes holomorphes linéairement distinctes, de degré quatre. Pour que $f(z)$ soit une fonction du second ordre de $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$, il faut d'abord qu'elle admette comme zéro double chacune des quantités α_1, α_2, α_3 : ces conditions déterminent les valeurs proportionnelles de $a_1, \ldots, a_7$, et l'on a

$$f(z) = (\alpha\theta_1^4 + \ldots + \varepsilon\theta_2^4)\,\psi(z).$$

Il faut ensuite que $f(z)$ satisfasse à trois équations (n° **53**) de la forme

$$f(e_i) : x_1^2(e_i) = f(e'_i) : x_1^2(e'_i),$$

(e_i, e'_i) étant les arguments d'un des points doubles. Ces relations déterminent γ, δ et ε en fonction linéaire homogène de α, β, et il reste

$$f(z) = \psi(z)(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2),$$

les constantes α et β étant arbitraires.

La fonction $\psi(z)$ a, outre les quantités α_1, α_2, α_3, comptées deux fois, deux autres zéros σ_1 et σ_2; il résulte, par suite de l'expression précédente, que :

Les coniques qui traversent quatre couples de points conjugués passent par quatre points fixes, dont deux sont situés sur la courbe du cinquième degré considérée; et, réciproquement, toute conique menée par ces quatre points coupe, en outre, la courbe en huit points mobiles, qui sont deux à deux conjugués.

On démontrerait de même que :

Les coniques menées par un des points doubles de la courbe, et traversant trois couples de points conjugués, passent par quatre points fixes, dont trois (y compris le point double) sont situés sur la courbe, et réciproquement.

Les coniques menées par deux points doubles et traversant deux couples de points conjugués passent par quatre points fixes situés sur la courbe, et réciproquement.

67. Dans ce dernier cas, en désignant par

$$\lambda_1\theta_1 + \mu_1\theta_2, \quad \lambda_2\theta_1 + \mu_2\theta_2$$

les fonctions qui ont pour zéros les arguments des deux couples de points conjugués, on a, entre les quantités μ et λ, une relation involutive de la forme

$$(26) \qquad a\lambda_1\lambda_2 + b(\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2) + c\mu_1\mu_2 = 0.$$

Les équations des deux droites qui joignent les deux points de ces couples sont de la forme (n° **58**)

$$0 = \lambda_1^2 A + 2\lambda_1\mu_1 B + \mu_1^2 C,$$
$$0 = \lambda_2^2 A + 2\lambda_2\mu_2 B + \mu_2^2 C,$$

et il résulte de la relation (26) que le point d'intersection de ces droites décrit la droite

$$aC + cA - 2bB = 0.$$

Donc :

Les droites qui joignent les points conjugués de deux couples situés sur une même conique, menée par deux points doubles donnés, se coupent sur une droite fixe.

On verrait de même que :

Les droites qui joignent les points conjugués de trois couples situés sur une même conique, menée par un point double donné, se coupent deux à deux sur une conique fixe.

68. *Les courbes du sixième degré,* de genre 2, présentent les mêmes particularités que celles du cinquième degré : elles sont de deux espèces, et l'on voit, comme plus haut, que sur une courbe de première espèce, la droite qui joint deux points conjugués passe par un point fixe, et que les quatre nouveaux points où elle coupe la courbe sont deux à deux conjugués. Sur une courbe de seconde espèce, la droite qui joint deux points conjugués enveloppe une courbe du quatrième degré, de troisième classe, tangente à la courbe en huit points.

XIV. — De quelques courbes spéciales.

69. Nous avons dû réserver, au n° **14**, pour une étude ultérieure, le cas où les coordonnées x_1, x_2, x_3 des points d'une courbe de genre p sont proportionnelles à des fonctions thêtafuchsiennes du premier degré.

Nous distinguerons dans l'étude de ces courbes les deux cas suivants.

Dans les deux cas, x_1, x_2, x_3 sont trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un ayant k zéros communs, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$:

1° Il n'existe pas de système de groupes équivalents au groupe des quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$;

2° Le groupe des quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ détermine un système de multiplicité r.

70. Les courbes des deux catégories jouissent d'une propriété importante qui les caractérise au point de vue géométrique.

Supposons que le groupe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ détermine un système de multiplicité r.

La courbe S, dont l'équation est $f=0$, décrite par le point x_1, x_2, x_3, sera de degré $n=2(p-1)-k$ et de genre p (n° 4), et les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un pourront toujours se mettre sous la forme (§ I)

$$\theta_i(z) = \frac{P_i(x_1, x_2, x_3)}{f'_{x_3}}\left(x_1\frac{dx_2}{dx} - x_2\frac{dx_1}{dz}\right).$$

Il existe $r+1$ fonctions thêtafuchsiennes de degré un, linéairement distinctes, s'annulant pour les $2(p-1)-k$ zéros de x_3 autres que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; cette proposition résulte de l'hypothèse et du théorème du reste.

Soient $x_3, \theta_1, \ldots, \theta_r$ ces fonctions. On aura, en vertu de l'expression précédente,

$$\frac{x_3}{P} = \frac{\theta_1}{P_1} = \frac{\theta_2}{P_2} = \cdots = \frac{\theta_r}{P_r},$$

$P, P_1, \ldots, P_r$ étant les premiers membres des équations de $r+1$ courbes de degré $n-3$, adjointes à la courbe S. Les zéros de $x_3, \theta_1, \ldots, \theta_r$ sont respectivement (§ I) les arguments des $2(p-1)$ points simples communs à S et aux courbes $P=0$, $P_1=0$, $\ldots$, $P_r=0$. Parmi ces points figurent donc les $2(p-1)-k$ points de S situés sur la droite $x_3=0$, et par suite chacune des courbes $P=0, \ldots, P_r=0$ se décompose en une droite $x_3=0$ et en une courbe de degré $n-4$. Comme la droite x_3 peut être une droite quelconque du plan, la courbe de degré $n-4$ est une courbe adjointe de S.

Il y aura ainsi $r+1$ courbes adjointes de degré $n-4$; $Q=0$, $Q_1=0, \ldots, Q_r=0$ et les premiers membres de leurs équations seront linéairement distincts, sinon il existerait une relation linéaire et homogène entre $x_1(z)$, $\theta_1(z)$, $\ldots$, $\theta_r(z)$, ce qui n'est pas. De même, il n'existe pas de courbe adjointe de degré $n-4$, $Q_{r+1}=0$, dont l'équation ne rentre pas dans la forme $mQ + m_1 Q_1 + \ldots + m_r Q_r = 0$; $m, \ldots$ étant des constantes.

Les courbes $Q_i = 0$ coupent la courbe S aux points multiples et en k points dont les arguments forment un groupe équivalent au groupe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Dans le cas où le groupe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ ne détermine pas de système, il n'existe qu'une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré un s'annulant pour les $2(p-1) - k$ zéros de $x_3(z)$, autres que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; c'est la fonction $x_3(z)$ elle-même : si, en effet, il existait deux semblables fonctions $x_3(z)$ et $\theta(z)$, le groupe des zéros variables de la fonction $p_1 x_3(z) + p_2 \theta(z)$, qui est équivalent au groupe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ déterminerait un système de multiplicité un. Il en résulte qu'il n'y a qu'*une courbe adjointe de degré $n-4$*; elle coupe la courbe $f = 0$ aux points multiples et aux k points d'arguments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

71. Les réciproques de ces propositions sont vraies et se démontrent de la même manière. On peut donc dire que :

Si une courbe de degré n et de genre p admet une famille linéaire r fois infinie de courbes adjointes d'ordre $n-4$, les coordonnées des points de cette courbe sont proportionnelles à trois fonctions thêtafuchsiennes du premier degré dont les zéros communs déterminent un système de multiplicité r, et réciproquement.

72. Cette théorie se lie étroitement à celle des systèmes spéciaux : je dis, en effet, que si le groupe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ détermine un système de multiplicité r, ce système est nécessairement spécial.

La proposition est évidente si k est inférieur à $p+1$ (n° **20**); si l'on a $k \geqq p+1$, les $2(p-1) - k$ zéros variables de la fonction

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,$$

où a_1, a_2, a_3 sont des constantes, formeront un groupe qui appartiendra à un système de multiplicité 2 : ce système sera spécial, car la quantité

$$2 + p - 2(p-1) + k,$$

c'est-à-dire $k-p+4$ est positive par hypothèse ; d'après le théorème de Riemann et Roch le groupe formé par les zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ communs à x_1, x_2, x_3 sera également un système spécial.

73. On peut tirer de là quelques conséquences relatives aux transformations unidéterminatives d'une courbe quelconque de genre p.

On sait que, parmi ces transformations, les plus intéressantes sont celles où l'on fait usage de courbes adjointes d'ordre $n-3$: si C est une courbe quelconque, de genre p et de degré n, le point de la transformée C', de coordonnées ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, qui correspondra aux points ξ_1, ξ_2, ξ_3 de C sera donné par les relations

$$\xi'_1 = P_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$
$$\xi'_2 = P_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$
$$\xi'_3 = P_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

P_1, P_2, P_3 étant les premiers membres des équations de trois courbes de degré $n-3$ adjointes à C.

Cette transformation est unidéterminative en général, parce que, inversement, les fonctions fuchsiennes $\frac{\xi_2}{\xi_1}$ et $\frac{\xi_3}{\xi_1}$ sont fonctions rationnelles des fonctions fuchsiennes $\frac{\xi'_2}{\xi'_1}$ et $\frac{\xi'_3}{\xi'_1}$ (n° **5**, note).

Or $P_1(\xi_1, \ldots)$, $P_2(\xi_1, \ldots)$, $P_3(\xi_1, \ldots)$ sont proportionnels (n° **4**) à trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré, et l'on en conclut, en s'appuyant sur les résultats précédents, les propositions suivantes :

Toute transformation unidéterminative d'une courbe C, *de genre p et de degré n, à l'aide de courbes adjointes d'ordre $n-3$ passant par k points simples de* C, *fait correspondre à cette courbe une courbe* C' *de genre p et de degré n'*, $[n' = 2(p-1)-k]$, *dont les points doubles sont une courbe de degré $n'-4$* (¹).

(¹) Cette proposition constitue bien un théorème, car les points doubles de S' sont un nombre de $\frac{1}{2}(2p-k-3)(2p-k-4)-p$; le nombre des points qui

Ainsi, une courbe quelconque C, de genre quatre et de degré n, se transforme, à l'aide de courbes adjointes de degré $n-3$, n'ayant en dehors des points doubles aucun point commun sur C, en une courbe du sixième degré, dont les six points doubles sont sur une conique.

Une courbe de genre cinq devient, par une transformation analogue, une courbe du huitième degré, dont les seize points doubles sont sur une courbe du quatrième degré.

Plus généralement :

Toute transformation unidéterminative d'une courbe C de genre p et de degré n, à l'aide de courbes adjointes d'ordre $n-3$ passant par k points simples situés sur C et formant un groupe g, qui appartient à un système (spécial) *de multiplicité r, fait correspondre à cette courbe une courbe C', de degré n',* $[n' = 2(p-1)-k]$, *qui admet une famille linéaire r fois infinie de courbes adjointes de degré $n'-4$.*

A k points de C formant un groupe équivalent à g correspondent, sur C', k points situés sur une courbe adjointe de degré $n'-4$, et réciproquement.

Cette dernière proposition donne, au point de vue géométrique, une idée assez nette de la nature des groupes spéciaux sur une courbe algébrique.

Si $k=0$, la courbe adjointe de degré $2(p-1)-4$, qui passe par les points doubles de la courbe transformée de degré $2(p-1)$, ne coupe cette courbe qu'aux points singuliers, car on a identiquement

$$(2p-3)(2p-4)-2p=(2p-6)(2p-2).$$

Donc

Si x_1, x_2, x_3 sont trois fonctions thétafuchsiennes holomorphes

---

déterminent une courbe de degré $2p-k-6$ est d'ailleurs

$$\tfrac{1}{2}(2p-k-6)(2p-k-3),$$

et la différence de ces deux nombres est $p-3-k$.

de degré un n'ayant aucun zéro commun, la courbe S, *décrite par le point* x_1, x_2, x_3, *est de degré* $2(p-1)$: *ses points doubles sont une courbe adjointe de degré* $2(p-1)-4$, *qui ne la coupe qu'en ces points.*

74. Pour les courbes S, de degré n, qui admettent des courbes adjointes d'ordre $n-4$, les théorèmes du n° **16** sont remplacés par les suivants, qu'on démontrerait par une méthode analogue :

Soit C *une courbe adjointe à* S, *d'ordre* $n+q-4$ *passant par les points non singuliers communs à* S *et à une courbe adjointe d'ordre* $n-4$: *les arguments des autres points (non singuliers) où cette courbe coupe* S *annulent une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré* q, *dont les derniers zéros sont les quantités* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, *chacune au degré* q *de multiplicité.*

Inversement :

Soit $\Theta(z)$ *une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré* q, *admettant comme zéro multiple d'ordre* q *chacune des quantités* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$: *les autres zéros de cette fonction sont les arguments de points de* S *situés, avec les points simples où* S *est coupée par une courbe adjointe quelconque d'ordre* $n-4$, *sur une courbe adjointe d'ordre* $n+q-4$.

75. En partant de ces propositions, on peut répéter les raisonnements du § XI, en remplaçant simplement les courbes adjointes d'ordre $n-3$ de la théorie générale par des courbes adjointes d'ordre $n-4$; et les résultats géométriques du § XII subsistent sans modification.