JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LIPSCHITZ

Propositions arithmétiques tirées de la théorie de la fonction exponentielle

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 2 (1886), p. 219-237.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1886_4_2__219_0>

Propositions arithmétiques tirées de la théorie de la fonction exponentielle;

PAR M. LIPSCHITZ.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. HERMITE.)

En étudiant vos recherches sur la fonction exponentielle, par lesquelles vous avez dévoilé une liaison inattendue entre l'Analyse et l'Arithmétique, recherches appliquées si heureusement par M. *Lindemann* (¹), et traitées de nouveau dans un Mémoire récent de M. *Weierstrass* (²), je me suis demandé si les procédés caractéristiques qui y sont mis en jeu ne permettent pas de parvenir à des résultats arithmétiques, dans lesquels les fonctions transcendantes sont disparues. Cette voie prise, j'ai réussi à trouver un ensemble de théorèmes, qui se réfèrent à toutes les équations dont les coefficients sont des nombres entiers. Or veuillez me permettre de vous en informer.

1. Dans le cas le plus simple d'une équation quadratique pure, je m'appuie sur le développement en fraction continue, qui a été également le point de départ de votre travail, et qui, pour une variable quelconque z, s'exprime ainsi

$$(1)\qquad \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}=\cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\dots}}}$$

(¹) *Sitzungsbericht* de l'Académie de Berlin, du 22 juin 1882.

(²) *Sitzungsbericht* de l'Académie de Berlin, du 22 octobre 1885.

Aux fractions d'approximations successives

$$\frac{z}{1},\quad \frac{3z}{3+z^2},\quad \frac{15z+z^3}{15+6z^2},\quad \ldots$$

correspondent les fonctions entières de z

$$(2)\qquad \begin{cases} K_0(z)=1, \\ K_1(z)=1+z, \\ K_2(z)=3+3z+z^2, \\ K_3(z)=15+15z+6z^2+z^3, \end{cases}$$

qui sont déterminées dès l'indice $m=2$ par la relation récurrente

$$(3)\qquad K_m(z)=(2m-1)K_{m-1}(z)+z^2K_{m-2}(z),$$

de sorte que lesdites fractions naissent de l'expression

$$\frac{K_m(z)-K_m(-z)}{K_m(z)+K_m(-z)},$$

en faisant $m=1, 2, 3, \ldots$.

Cela étant, pour les racines de l'équation

$$z^2-D=0,$$

où D désigne un nombre entier positif non carré ou négatif quelconque, il est établi que le module de la différence

$$(4)\qquad K_m(\sqrt{D})e^{-\sqrt{D}}-K_m(-\sqrt{D})e^{\sqrt{D}},$$

si l'on assigne au nombre m une valeur assez grande, peut être fait plus petit qu'une quantité δ donnée aussi petite que l'on voudra.

Supposons, en premier lieu, que D soit positif et non carré, et dénotons par $\sqrt{D}$ la racine positive.

Comme les coefficients de la fonction $K_m(z)$ sont des nombres entiers, on a

$$(5)\qquad K_m(\sqrt{D})=t_0+\sqrt{D}t_1,\qquad K_m(-\sqrt{D})=t_0-\sqrt{D}t_1,$$

où t_0 et t_1 sont des nombres entiers. Alors t_0 et t_1 sont des nombres positifs, la quantité $t_0 + \sqrt{D}\, t_1$ est pareillement positive, la quantité $t_0 - \sqrt{D}\, t_1$ ne peut pas s'évanouir.

Partant, le produit des deux expressions

$$t_0^2 - D t_1^2 = M \tag{6}$$

a une valeur entière, qui diffère nécessairement de zéro. Mais parce que l'équation (6) entraîne

$$[K_m(\sqrt{D}) e^{-\sqrt{D}}][K_m(-\sqrt{D}) e^{\sqrt{D}}] = M,$$

et que ces deux facteurs, pour une valeur convenable de m, diffèrent entre eux aussi peu que l'on voudra, la quantité correspondante M doit être positive, et chacun des deux facteurs, dont le premier est certainement positif, ne peut différer de la racine carrée positive $\sqrt{M}$ que d'une quantité arbitrairement petite. Donc, si l'on divise la différence (4) par l'expression $K_m(-\sqrt{D}) e^{-\sqrt{D}}$, la valeur absolue du quotient

$$\frac{K_m(\sqrt{D})}{K_m(-\sqrt{D})} - e^{2\sqrt{D}} \tag{7}$$

peut également être abaissée à volonté par le choix du nombre m. Par conséquent, si nous introduisons au lieu de la fonction exponentielle la fonction inverse, ce fait se change dans le résultat, que le logarithme naturel

$$\log \frac{K_m(\sqrt{D})}{K_m(-\sqrt{D})} \tag{8}$$

pour une valeur assez grande de m sera rapproché de la valeur $2\sqrt{D}$ aussi près que l'on voudra.

C'est le logarithme naturel de ladite fraction, qui sert à la solution d'une question arithmétique, que nous attacherons comme d'usage à la Géométrie. Désignons par x_0, x_1 les coordonnées rectilignes d'un point dans un plan, et considérons l'hyperbole représentée par l'équation

$$(9) \qquad x_0^2 - Dx_1^2 = M.$$

Ensuite mesurons l'aire d'un secteur, dont deux côtés sont les lignes droites, tirées du centre de l'hyperbole jusqu'aux deux points t_0, t_1, et t_0, $-t_1$ et dont le troisième côté est l'arc de l'hyperbole compris entre ces deux points. On trouve facilement l'expression

$$(10) \qquad \frac{M}{2\sqrt{D}} \log \frac{t_0 + \sqrt{D}\,t_1}{t_0 - \sqrt{D}\,t_1},$$

dont la comparaison à (8) fait voir que, sous les suppositions faites, la valeur de (10) se rapproche de la valeur M. Les valeurs

$$x_0 = \sqrt{M}, \qquad x_1 = 0,$$

correspondant au sommet de la branche choisie de l'hyperbole, le nombre M détermine l'aire d'un triangle, dont deux côtés sont les lignes droites tirées du centre de l'hyperbole sous des angles égaux au demi d'un angle droit vers l'axe, et dont le troisième côté est la tangente à l'hyperbole, prise dans ledit sommet. D'ailleurs il est évident que l'aire d'une partie d'un plan, dont les dimensions vont toujours en croissant, donne une expression approchée du nombre des points à coefficients entiers qui sont contenus dans la partie en question. Pour en faire une application dans notre cas, il faut nous assurer que le nombre M reçoit successivement des valeurs de plus en plus grandes. A cet effet, supposons le contraire, que le nombre M ne surpasse jamais une certaine quantité L.

Admettons que le nombre m, qui est choisi d'abord assez grand, étant changé dans un nombre plus grand m', au lieu des nombres t_0, t_1, M, on obtienne respectivement t'_0, t'_1, M', mais que l'on ait en même temps M' = M. De là il suit que les expressions

$$\frac{t_0 + \sqrt{D}\,t_1}{\sqrt{M}} e^{-\sqrt{D}}, \qquad \frac{t_0 - \sqrt{D}\,t_1}{\sqrt{M}} e^{\sqrt{D}},$$

$$\frac{t'_0 + \sqrt{D}\,t'_1}{\sqrt{M}} e^{-\sqrt{D}}, \qquad \frac{t'_0 - \sqrt{D}\,t'_1}{\sqrt{M}} e^{\sqrt{D}}$$

se rapprochent de l'unité. Par conséquent les différences

$$\frac{t_0 - t'_0}{\sqrt{M}} e^{-\sqrt{D}}, \qquad \frac{t_1 - t'_1}{\sqrt{M}} e^{\sqrt{D}},$$

deviendraient numériquement aussi petites que l'on voudra, ce qui ne peut pas arriver, vu que le nombre M n'est jamais supérieur à L, sans que l'on ait pour les nombres entiers respectifs

$$t_0 - t'_0 = 0, \qquad t_1 - t'_1 = 0.$$

Il faudrait donc que les deux systèmes t_0, t_1 et t'_0, t'_1 fussent identiques. De l'autre côté, parce que la valeur de la différence (4) peut être abaissée sans limite, il est clair que, cette différence étant d'une certaine petitesse pour la valeur m, on pourrait arriver à une petitesse supérieure par le choix du nombre m', ce qui est incompatible avec les équations $t_0 - t'_0 = 0$, $t_1 - t'_1 = 0$, qui suivent de la supposition $M' = M$. Il faut donc que le nombre M' obtienne un nombre illimité de valeurs, différentes de M et différentes entre elles; par conséquent il croît nécessairement au delà de toute grandeur donnée. Cela étant, la proposition se trouve justifiée, que le rapport des points à coefficients entiers, qui sont situés dans les deux aires définies, se rapprochent de l'unité d'autant plus que le nombre m croît. Voilà un énoncé arithmétique, dans lequel n'entre aucune fonction transcendante.

2. Maintenant discutons le cas où D est égal à un nombre entier négatif quelconque $-\Delta$, et remplaçons $\sqrt{D}$ par la valeur imaginaire $i\sqrt{\Delta}$, la racine $\sqrt{\Delta}$ étant positive. Par conséquent, les expressions

$$(11)\quad K_m(i\sqrt{\Delta}) = \varepsilon(t_0 + i\sqrt{\Delta}t_1), \qquad K_m(-i\sqrt{\Delta}) = \varepsilon(t_0 - i\sqrt{\Delta}t_1),$$

où ε désigne une unité positive ou négative qui sera déterminée plus tard, ne sont pas susceptibles de s'évanouir, à moins que les deux nombres t_0 et t_1 soient égaux à zéro. Pour être convaincu que cela ne peut pas arriver non plus, il suffit d'avoir recours à la série connue d'équations

$$(12)\quad K_{m-1}(-z)K_m(z) - K_{m-1}(z)K_m(-z) = (-1)^{m-1}2z^{2m-1};$$

elles font voir que $K_m(z)$ et $K_m(-z)$ ne deviennent jamais égaux à zéro en même temps pour une valeur de z, qui diffère de zéro. Il est donc prouvé que le produit

$$t_0^2 + \Delta t_1^2 = M \tag{13}$$

donne un nombre entier positif M différent de zéro. Parce que les deux termes de la différence

$$K_m(i\sqrt{\Delta})e^{-i\sqrt{\Delta}} - K_m(-i\sqrt{\Delta})e^{i\sqrt{\Delta}} \tag{14}$$

sont conjugués, la propriété de son module, d'avoir zéro pour limite, entraîne que chaque terme se rapproche de la même quantité réelle; suivant qu'elle est positive ou négative, nous supposerons l'unité marquée par ε égale à $+1$ ou à -1, de sorte que les expressions

$$(t_0 + i\sqrt{\Delta}t_1)e^{-i\sqrt{\Delta}}, \qquad (t_0 - i\sqrt{\Delta}t_1)e^{i\sqrt{\Delta}}$$

convergeront vers une limite positive. En même temps, l'équation

$$\left[(t_0 + i\sqrt{\Delta}t_1)e^{-i\sqrt{\Delta}}\right]\left[(t_0 - i\sqrt{\Delta}t_1)e^{i\sqrt{\Delta}}\right] = M \tag{15}$$

fait voir que ladite quantité réelle positive coïncide avec la racine positive $\sqrt{M}$. Par conséquent, la différence (14), divisée par

$$K_m(-i\sqrt{\Delta})e^{-i\sqrt{\Delta}},$$

c'est-à-dire la quantité

$$\frac{t_0 + i\sqrt{\Delta}t_1}{t_0 - i\sqrt{\Delta}t_1} - e^{2i\sqrt{\Delta}} \tag{16}$$

a un module qui, pour une valeur assez grande de m, diffère de zéro d'une quantité petite donnée arbitrairement. En y appliquant, au lieu de la fonction exponentielle, le logarithme naturel qui, ici, n'est autre chose qu'une fonction inverse trigonométrique, on conclut que l'expression

$$\log\frac{t_0 + i\sqrt{\Delta}t_1}{t_0 - i\sqrt{\Delta}t_1} \tag{17}$$

approche aussi près que l'on voudra de la quantité imaginaire $2i\sqrt{\Delta}$.

Si nous désignons par $E\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right) = l$ *le nombre entier le plus grand contenu dans la fraction* $\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}$, le logarithme naturel en question est complètement déterminé par la condition d'être compris entre les quantités imaginaires $2li\pi$ et $2(l+1)i\pi$. On a donc pour $\Delta = 5$, $l = 0$, pour $\Delta = 11$, $l = 1$, pour $\Delta = 57$, $l = 2$. D'ailleurs il est clair que, puisque le nombre entier l s'obtient en divisant la quantité algébrique $\sqrt{\Delta}$ par π, cette quantité transcendante π constitue, pour ainsi dire, un élément nécessaire et inévitable dans nos recherches.

Pour arriver à l'énoncé d'un théorème d'Arithmétique, nous nous servirons de l'équation de l'ellipse

$$x_0^2 + \Delta x_1^2 = M. \tag{18}$$

Menons du centre de l'ellipse un rayon vecteur vers le sommet $x_0 = \sqrt{M}$, $x_1 = 0$, faisons marcher le point final sur l'ellipse dans un sens tel que x_1 commence à se mouvoir en croissant, et arrêtons-le au point $x_0 = t_0$, $x_1 = t_1$, après un nombre de demi-révolutions complètes, que nous avons déterminé antérieurement et désigné par $E\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right) = l$. Ensuite exécutons un mouvement pareil qui commence également au sommet $x_0 = \sqrt{M}$, $x_1 = 0$, mais qui procède dans le sens inverse jusqu'à ce qu'il ait atteint, d'après le même nombre l de demi-révolutions complètes, le point $x_0 = t_0$, $x_1 = -t_1$. Alors l'aire décrite par le mouvement total du rayon vecteur sera mesurée par l'expression

$$\frac{M}{2i\sqrt{\Delta}} \log \frac{t_0 + i\sqrt{\Delta}t_1}{t_0 - i\sqrt{\Delta}t_1}, \tag{19}$$

où la signification du logarithme naturel est exactement celle usitée en (17). Par contre, si nous tirons, comme dans le cas de l'hyperbole, du centre de l'ellipse, sous des angles égaux au demi d'un angle droit, vers l'axe, des lignes droites, ces lignes formeront, avec la tangente prise au sommet respectif de l'ellipse, un triangle dont l'aire est égale au nombre M. Or on démontre pareillement, comme auparavant, que le nombre M, pour les valeurs croissantes de m, doit surpasser toute limite. Donc on a, par un raisonnement semblable, le théorème que le rapport des deux nombres qui représentent le nombre des points à coefficients entiers contenus dans les deux aires définies, se rapproche de l'unité, pour une valeur de m assez grande, aussi près que l'on voudra. Il me semble bien remarquable que, dans le théorème actuel, il s'agit d'un groupe de points à coefficients entiers qui se trouvent dans une aire limitée par deux lignes droites et par un arc de l'ellipse, mais tellement définie que par cette aire l'intérieur de l'ellipse sera couvert plusieurs fois dans tous les cas où le nombre $E\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right) = l$ surpasse la valeur zéro. On se voit donc, par des considérations arithmétiques, conduit à une conception pareille à celle qui a été introduite dans l'Analyse par Riemann.

3. Afin d'étendre notre considération à une équation quelconque, nous ferons usage des significations introduites par M. Weierstrass dans le Mémoire cité. Soit $f(z)$ une fonction entière de z du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré à coefficients entiers, dont le premier a_0 est positif,

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_{n+1}. \tag{20}$$

Admettons que l'équation

$$f(z) = 0$$

soit irréductible, d'où suit que $f(z)$ ne peut pas avoir un diviseur commun avec sa première dérivée $f'(z)$, et par conséquent que les $(n+1)$ racines de ladite équation

$$z_0, \quad z_1, \quad \ldots, \quad z_n \tag{21}$$

diffèrent entre elles. Or on obtient, pour une valeur quelconque du nombre m, un système de $(n+1)$ fonctions

$$g_0(z, m), \quad g_1(z, m), \quad \ldots, \quad g_n(z, m) \tag{22}$$

qui jouissent des propriétés suivantes. Chacune d'elles est une fonction de z d'un degré qui n'est pas supérieur à n, les coefficients étant des nombres entiers; pour tous les couples de deux racines z_α, z_β, et pour un indice quelconque fixe ν, le module de la différence

$$g_\nu(z_\alpha, m)e^{-z_\alpha} - g_\nu(z_\beta, m)e^{-z_\beta} \tag{23}$$

peut être réduit de telle sorte qu'il tombe au-dessous d'une quantité δ donnée aussi petite que l'on voudra pour une valeur de m assez grande, tandis que le déterminant

$$(24)\qquad | g_\nu(z_\alpha, m) |$$

a toujours une valeur différente de zéro.

Vis-à-vis de cet ensemble de propriétés, faisons remarquer que l'irréductibilité de l'équation $f(z) = 0$ fait qu'aucune des fonctions du $n^{\text{ième}}$ degré $g_\nu(z, m)$ ne peut s'évanouir par la substitution d'une racine quelconque $z = z_\alpha$ sans que tous les coefficients entiers soient égaux à zéro. Mais il est également impossible que cela advienne; car, s'il en était ainsi, toutes les $(n+1)$ expressions qui naissent de la fonction $g_\nu(z, m)$, en posant $z = z_0, z_1, \ldots, z_n$, seraient égales à zéro. Cela entraînerait l'évanouissement du déterminant, qui ne s'annule jamais; donc notre assertion se trouve constatée. De là suit directement que le produit des $(n+1)$ facteurs

$$(25)\qquad \prod_{\alpha=0}^{\alpha=n} g_\nu(z_\alpha, m)$$

a toujours une valeur différente de zéro. Cette valeur est nécessairement égale à un nombre rationnel, et l'on conclut facilement d'une propriété connue de la résultante de deux fonctions algébriques entières que ce nombre, multiplié par la puissance a_0^n du coefficient entier a_0 de z^{n+1} dans (20), devient un nombre entier.

D'ailleurs on observe que dans (23) l'expression $g_\nu(z_\alpha, m)e^{-z_\alpha}$ pour une racine réelle z_α est réelle, et que pour deux racines complexes et conjuguées z_α et z_β les deux expressions correspondantes sont pareillement conjuguées. Donc la propriété indiquée de la différence (23) entraîne cette conséquence, que les expressions $g_\nu(z_\alpha, m)e^{-z_\alpha}$ pour toutes les racines z_α et pour une valeur de m assez grande ne peuvent différer d'une quantité réelle que d'une quantité dont le module est d'une petitesse arbitraire. Or le produit des $(n+1)$ expressions mentionnées a la valeur

$$(26)\qquad \prod_{\alpha=0}^{\alpha=n} g_\nu(z_\alpha, m)e^{-(z_0+z_1+\ldots+z_n)},$$

où le premier facteur coïncide avec le produit (25), qui est égal à un nombre entier, différent de zéro, divisé par la puissance a_0^n. Donc la quantité réelle, vers laquelle convergeront toutes les expressions $g_\nu(z_\alpha, m)e^{-z_\alpha}$ où $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n$, ne peut être jamais numériquement inférieure à la racine $(n+1)^{\text{ième}}$ de la valeur $\frac{1}{a_0^n} e^{-(z_0+z_1+\ldots+z_n)}$.

Maintenant désignons par ε l'unité positive ou négative selon que la quantité indiquée est positive ou négative; posons

$$(27) \qquad \varepsilon g_\nu(z_\alpha, m) = t_0 + z_\alpha t_1 + z_\alpha^2 t_2 + \ldots + z_\alpha^n t_n,$$

où $t_0, t_1, \ldots, t_n$ sont des nombres entiers, et formons *la norme de l'expression* (27)

$$(28) \qquad \prod_{\alpha=0}^{\alpha=n} (t_0 + z_\alpha t_1 + z_\alpha^2 t_2 + \ldots + z_\alpha^n t_n) = \frac{M}{a_0^n};$$

alors M sera un nombre entier positif. Il est donc clair que l'expression

$$(29) \qquad (t_0 + z_\alpha t_1 + \ldots + z_\alpha^n t_n)e^{-z_\alpha}$$

diffère aussi peu que l'on choisira de la racine positive $(n+1)^{\text{ième}}$ de la quantité

$$\frac{M}{a_0^n} e^{-(z_0+z_1+\ldots+z_n)},$$

que l'on peut exprimer, $z_0 + z_1 + \ldots + z_n$ étant égal à la fraction $\frac{a_1}{a_0}$, comme il suit

$$(30) \qquad \sqrt[n+1]{\frac{M}{a_0^n}}\, e^{-\frac{a_1}{(n+1)a_0}}.$$

Partant, l'expression

$$(31) \qquad \frac{t_0 + z_\alpha t_1 + \ldots + z_\alpha^n t_n}{\sqrt[n+1]{\frac{M}{a_0^n}}}\, e^{-\left[z_\alpha - \frac{a_1}{(n+1)a_0}\right]}$$

pour chaque indice α viendra aussi près que l'on voudra de l'unité.

Les combinaisons $z_\alpha - \frac{a_1}{(n+1)a_0}$, qui entrent ici comme des arguments de la fonction exponentielle, sont les racines de l'équation, dans laquelle s'échange notre équation par une substitution qui dans la fonction respective résultante fait égal à zéro le coefficient de la puissance $n^{\text{ième}}$ de la nouvelle variable. En appliquant l'interprétation usuelle des quantités imaginaires, évidemment le point $\frac{a_1}{(n+1)a_0}$ est le centre de gravité des points correspondant aux racines $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Par suite la différence $z_\alpha - \frac{a_1}{(n+1)a_0}$ exprime la position de la racine z_α par rapport au centre de gravité commun de toutes les racines.

Si, dans l'expression (31), nous passons de la fonction exponentielle au logarithme naturel, nous obtenons le résultat, que l'expression

$$(32) \qquad \log(t_0 + z_\alpha t_1 + \ldots + z_\alpha^n t_n) - \frac{1}{n+1} \log \frac{M}{a_0^n}$$

diffère pour une valeur convenable de m, assez peu de la différence

$$(33) \qquad z_\alpha - \frac{a_1}{(n+1)a_0}.$$

Pour les valeurs réelles z_α l'argument du logarithme est réel; pour les valeurs complexes z_α la signification du logarithme est déterminée par la nature de la relation actuelle et donne lieu à des considérations pareilles à celles qui sont exposées dans le n° 2.

Enfin, il importe de prouver que, l'indice ν étant fixé, les nombres entiers positifs, désignés par M, doivent croître au delà de toute limite pour des valeurs croissantes de m. Voyons ce qui suit de l'hypothèse que le nombre M ne soit jamais supérieur à une certaine quantité L. Supposons que dans l'expression (31) pour une valeur m', plus grande que la valeur assez grande m, les nombres $t_0, t_1, \ldots, t_n$, M acquièrent respectivement les valeurs $t'_0, t'_1, \ldots, t'_n$, M′, mais que le nombre M′ soit égal à M. Par conséquent l'expression

$$\frac{t'_0 + z_\alpha t'_1 + \ldots + z_\alpha^n t'_n}{\sqrt[n+1]{\frac{M}{a_0^n}}} e^{-\left[z_\alpha - \frac{a_1}{(n+1)a_0}\right]}$$

sera rapprochée de l'unité à volonté. Donc le module de la différence

$$(34) \qquad \frac{(t_0 - t'_0) + z_\alpha(t_1 - t'_1) + \ldots + z_\alpha^n(t_n - t'_n)}{\sqrt[n+1]{\frac{M}{a_0^n}}},$$

le facteur $e^{-\left[z_\alpha - \frac{a_1}{(n+1)a_0}\right]}$ étant omis, différera également de zéro d'une quantité arbitrairement petite, pour chaque indice α. Mais parce que le déterminant

$$(35) \qquad \mathfrak{O} = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \ldots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^n \\ . & .. & .. & \ldots & .. \\ . & .. & .. & \ldots & .. \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^n \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire le produit

$$(36) \qquad \mathfrak{O} = \Pi(z_\alpha - z_\beta),$$

pris par rapport à tous les couples d'indices différents α et β, est par notre hypothèse différent de zéro, on peut déduire de (34), en multipliant par des facteurs convenables et en faisant addition, $n+1$ expressions

$$\frac{\mathfrak{O}(t_\gamma - t'_\gamma)}{\sqrt[n+1]{\frac{M}{a_0^n}}},$$

où $\gamma = 0, 1, 2, \ldots, n$, dont les modules sont nécessairement aussi petits que l'on voudra. Mais parce que t_γ et t'_γ sont des nombres entiers, et que M ne surpasse jamais la quantité L, cela entraîne les $n+1$ équations exactes

$$(37) \qquad t_\gamma - t'_\gamma = 0.$$

Dès que ces équations sont dérivées de la supposition $M' = M$, et que le procédé, par lequel sont engendrés les nombres $t_0, t_1, \ldots, t_n$, si l'on remplace le nombre m par un nombre plus grand m' convenable, conduit à un système de nombres $t'_0, t'_1, \ldots, t'_n$, pour lequel les modules des différences (23) sont plus approchés de zéro, il est impossible que les $(n+1)$ équations (37) subsistent en même temps. Partant, le nombre correspondant M′ ne peut pas coïncider avec le nombre M antérieurement déterminé. Donc, parce que le nombre des entiers positifs, moindres que L, est fini et que le procédé en question peut être répété à l'infini, le nombre M′ doit croître au delà de toute mesure, ce qu'il fallait démontrer.

4. Les réflexions arithmétiques, que nous allons aborder maintenant, demandent la distinction entre les racines réelles et complexes conjuguées de l'équation $f(z)=0$. S'il y a le nombre p de la première, $2q$ de la seconde sorte, nous désignerons les racines réelles par

$$z_\lambda = z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_{p-1},$$

les racines complexes par

$$\begin{aligned} z_\mu &= z_p,\ z_{p+1},\ \ldots,\ z_{p+q-1},\\ z_{\mu+q} &= z_{p+q},\ z_{p+q+1},\ \ldots,\ z_{p+2q-1},\end{aligned}$$

où z_μ et $z_{\mu+q}$ sont conjugués, et la partie imaginaire de z_μ, divisée par i, est positive. Alors on a les équations

$$(38)\qquad \begin{cases} t_0 + z_\lambda t_1 + \ldots + z_\lambda^n t_n = u_\lambda,\\ t_0 + z_\mu t_1 + \ldots + z_\mu^n t_n = u_\mu + i u_{\mu+q},\\ t_0 + z_{\mu+q} t_1 + \ldots + z_{\mu+q}^n t_n = u_\mu - i u_{\mu+q},\end{cases}$$

où les p quantités u_λ sont positives, les q quantités $u_\mu^2 + u_{\mu+q}^2$ différentes de zéro. Par suite, l'équation (28) prend la forme

$$(39)\qquad u_0 u_1 u_2 \ldots u_{p-1}(u_p^2 + u_{p+q}^2)\ldots(u_{p+q-1}^2 + u_{p+2q-1}^2) = \frac{M}{a_0^n}.$$

Or introduisons un système de $n+1$ variables réelles, $x_0, x_1, \ldots, x_n$, liées avec un autre système de variables réelles $y_0, y_1, \ldots, y_n$ par un système d'équations, qui correspond exactement au système (38),

$$(40)\qquad \begin{cases} x_0 + z_\lambda x_1 + \ldots + z_\lambda^n x_n = y_\lambda,\\ x_0 + z_\mu x_1 + \ldots + z_\mu^n x_n = y_\mu + i y_{\mu+q},\\ x_0 + z_{\mu+q} x_1 + \ldots + z_{\mu+q}^n x_n = y_\mu - i y_{\mu+q}.\end{cases}$$

A présent choisissons une racine déterminée z_λ ou z_μ, et opérons distinctement selon les deux cas. Mais, parce qu'il n'y a pas de différence essentielle entre les individus des deux groupes, remplaçons z_λ par z_0, z_μ par z_p. Dans le premier cas fixons l'attention sur tous les systèmes de nombres entiers $x_0, x_1, \ldots x_n$, qui satisfont aux conditions que l'on ait

$$(41) \qquad y_0 y_1 \ldots y_{p-1}(y_p^2 + y_{p+q}^2)\ldots(y_{p+q-1}^2 + y_{p+2q-1}^2) < \frac{M}{a_0^n},$$

que $y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}$ soient positifs, et que $\frac{y_1}{y_0}$ soit contenu entre $\frac{u_1}{u_0}$ et 1, $\frac{y_2}{y_0}$ entre $\frac{u_2}{u_0}$ et $1, \ldots, \frac{y_{p-1}}{y_0}$ entre $\frac{u_{p-1}}{u_0}$ et 1. Supposé qu'il n'y ait pas de racines complexes, ou que q soit égal à zéro, ce sont les inégalités complètes dont il s'agit. Si q diffère de zéro, soit

$$(42) \qquad \begin{cases} y_\mu + i y_{\mu+q} = r_\mu(\cos\varphi_\mu + i\sin\varphi_\mu), \\ u_\mu + i u_{\mu+q} = s_\mu(\cos\psi_\mu + i\sin\psi_\mu), \end{cases}$$

les quantités r_μ et s_μ étant positives, les quantités ψ_μ déterminées de sorte qu'elles correspondent à la partie imaginaire de l'expression, dans laquelle se change (32) pour $\alpha = \mu$. Cela étant, nous ajoutons les conditions que, pour $\mu = p, p+1, \ldots, p+q-1$, le quotient $\frac{r_\mu}{y_0}$ doit être située entre $\frac{s_\mu}{u_0}$ et 1, et que la variable φ_μ doit être comprise entre les valeurs $-\psi_\mu$ et ψ_μ; par conséquent les systèmes définis de nombres entiers sont à mettre en compte autant de fois que le domaine respectif des variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est rempli par l'extension signalée des variables φ_μ.

Or il suit directement des principes des intégrales multiples que le nombre S_0 des systèmes définis de nombres entiers s'exprime par l'intégrale

$$(43) \qquad \Omega_0 = \int\int \ldots dx_0 dx_1 \ldots dx_n,$$

étendue sur le domaine défini par les inégalités mentionnées, de sorte que le rapport de S_0 et Ω_0 se rapproche de l'unité. Au lieu des variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ introduisons les variables $y_0, y_1, \ldots, y_n$. On conclut d'abord des équations (40) que l'élément de l'intégrale actuelle se change dans l'élément $dy_0 dy_1 \ldots dy_n$, multiplié par le quotient des déterminants

$$(44) \qquad \frac{(2i)^q}{\omega},$$

où le déterminant ω est formé de telle sorte, que ledit quotient devienne positif. Partant, on a l'équation

$$(45) \qquad \Omega_0 = \frac{(2i)^q}{\omega} \int\int \cdots dy_0 dy_1 \ldots dy_n,$$

qui, à l'aide des variables définies par (42), se change dans celle-ci

$$(46) \quad \Omega_0 = \frac{(2i)^q}{\omega} \int\int \cdots dy_0 dy_1 \ldots dy_{p-1} r_p dr_p d\varphi_p \ldots r_{p+q-1} dr_{p+q-1} d\varphi_{p+q-1}.$$

Maintenant remplaçons les variables $y_1, \ldots, y_{p-1}, r_p, \ldots, r_{p+q-1}$ par les quotients

$$(47) \quad \frac{y_1}{y_0} = \eta_1, \quad \ldots, \quad \frac{y_{p-1}}{y_0} = \eta_{p-1}, \quad \frac{r_p}{y_0} = \rho_p, \quad \ldots, \quad \frac{r_{p+q-1}}{y_0} = \rho_{p+q-1},$$

d'où il vient

$$(48) \quad \Omega_0 = \frac{(2i)^q}{\omega} \int\int \cdots y_0^{p+2q-1} dy_0 d\eta_1 \ldots d\eta_{p-1} \rho_p d\rho_p d\varphi_p \ldots \rho_{p+q-1} d\rho_{p+q-1} d\varphi_{p+q-1},$$

le nombre $p + 2q - 1$ étant égal à n.

L'intégration demandée par rapport à la variable y_0, accomplie de $y_0 = 0$ jusqu'à une valeur positive y_0, donne le facteur $\frac{y_0^{n+1}}{n+1}$, tandis que la juste valeur y_0 est déterminée en introduisant les variables (47) dans l'inégalité (41), de sorte qu'on a

$$(49) \qquad y_0^{n+1} \eta_1 \ldots \eta_{p-1} \rho_p^2 \ldots \rho_{p+q-1}^2 = \frac{M}{a_0^n}.$$

On arrive donc à l'équation

$$(50)\qquad \Omega_0 = \frac{(2i)^q}{\omega}\,\frac{M}{(n+1)a_0^n}\int\int\cdots\frac{d\eta_1}{\eta_1}\cdots\frac{d\eta_{p-1}}{\eta_{p-1}}\frac{d\rho_p}{\rho_p}\cdots\frac{d\rho_{p+q-1}}{\rho_{p+q-1}}d\varphi_{p-1}\cdots d\varphi_{p+q-1},$$

où toutes les intégrations séparées s'exécutent conformément aux inégalités données. Attendu que le quotient $\eta_1 = \frac{y_1}{y_0}$ doit être étendu entre les limites $\frac{u_1}{u_0}$ et 1, l'intégrale $\int\frac{d\eta_1}{\eta_1}$ devient égale à la valeur absolue du logarithme naturel de la fraction $\frac{u_1}{u_0}$. Les autres intégrations de la même forme donneront des résultats semblables, tandis que les intégrations respectives aux variables φ_μ s'achèvent immédiatement. En désignant par ε_0 l'unité positive ou négative, telle que le produit de tous les logarithmes par ε_0 devient positif, nous obtenons l'expression définitive

$$(51)\qquad \begin{cases} \Omega_0 = \dfrac{\varepsilon_0(2i)^q}{\omega}\,\dfrac{M}{(n+1)a_0^n}\log\left(\dfrac{u_1}{u_0}\right)\cdots\log\left(\dfrac{u_{p-1}}{u_0}\right)\log\left(\dfrac{s_p}{u_0}\right)\cdots \\ \qquad\times\log\left(\dfrac{s_{p+q-1}}{u_0}\right)2^q\psi_p\cdots\psi_{p+q-1}. \end{cases}$$

Dans le deuxième cas, où domine la racine choisie z_p, nous considérons tous les systèmes de nombres entiers $x_0, x_1, \ldots, x_n$, qui sont assujettis aux conditions de remplir l'inégalité (41), tandis que y_0, $y_1, \ldots, y_{p-1}$ sont positifs, les fractions

$$\frac{y_0}{r_p},\quad \frac{y_1}{r_p},\quad \ldots,\quad \frac{y_{p-1}}{r_p},\quad \frac{r_{p+1}}{r_p},\quad \ldots,\quad \frac{r_{p+q-1}}{r_p},$$

comprises respectivement entre l'unité positive et les limites

$$\frac{u_0}{s_p},\quad \frac{u_1}{s_p},\quad \ldots,\quad \frac{u_{p-1}}{s_p},\quad \frac{s_{p+1}}{s_p},\quad \ldots,\quad \frac{s_{p+q-1}}{s_p},$$

et les variables φ_μ déterminées comme dans le premier cas.

Le nombre S_p de ces systèmes de nombres est représenté dans une approximation de la sorte indiquée, par l'intégrale

$$(52)\qquad \Omega_p = \int\int\cdots dx_0\,dx_1\cdots dx_n,$$

étendue sur le domaine considéré. Par l'emploi des variables y_0, $y_1, \ldots, y_{p-1}, r_p, \varphi_p, \ldots, r_{p+q-1}, \varphi_{p+q-1}$, elle se change dans la suivante :

$$(53)\quad \Omega_p = \frac{(2i)^q}{\omega}\int\int\ldots dy_0\ldots dy_{p-1}\, r_p dr_p d\varphi_p \ldots r_{p+q-1} dr_{p+q-1} d\varphi_{p+q-1}.$$

En introduisant les quotients

$$(54)\quad \begin{cases} \dfrac{y_0}{r_p} = \zeta_0, & \ldots, & \dfrac{y_{p-1}}{r_p} = \zeta_{p-1}, \\ \dfrac{r_{p+1}}{r_p} = \sigma_{p+1}, & \ldots, & \dfrac{r_{p+q-1}}{r_p} = \sigma_{p+q-1}, \end{cases}$$

au lieu des variables $y_0, \ldots, y_{p-1}, r_{p+1}, \ldots, r_{p+q-1}$, il vient la transformation

$$(55)\quad \begin{cases} \Omega_p = \dfrac{(2i)^q}{\omega}\displaystyle\int\int\ldots r_p^{p+2q-1} dr_p d\zeta_0 \ldots d\zeta_{p-1} \\ \qquad\times\, d\varphi_p \sigma_{p+1} d\sigma_{p+1} d\varphi_{p+1}\ldots\sigma_{p+q-1} d\sigma_{p+q-1} d\varphi_{p+q-1}. \end{cases}$$

En intégrant par rapport à la variable r_p nous acquérons le facteur $\frac{r_p^{n+1}}{n+1}$, où l'inégalité (41) sert à la détermination de r_p

$$(56)\quad r_p^{n+1}\zeta_0\zeta_1\ldots\zeta_{p-1}\sigma_{p+1}^2\ldots\sigma_{p+q-1}^2 = \frac{M}{a_0^n}.$$

Partant il vient

$$(57)\quad \begin{cases} \Omega_p = \dfrac{(2i)^q}{\omega}\,\dfrac{M}{(n+1)a_0^n}\displaystyle\int\int\ldots\frac{d\zeta_0}{\zeta_0}\ldots\frac{d\zeta_{p-1}}{\zeta_{p-1}} \\ \qquad\times\,\dfrac{d\sigma_{p+1}}{\sigma_{p+1}}\ldots\dfrac{d\sigma_{p+q-1}}{\sigma_{p+q-1}}\, d\varphi_p\ldots d\varphi_{p+q-1}. \end{cases}$$

Les intégrations étant exécutées comme auparavant, et étant désignée par ε_p l'unité positive ou négative, dont l'apposition fait positif le produit de tous les logarithmes, on parvient au résultat

$$(58)\quad \begin{cases} \Omega_p = \varepsilon_p\,\dfrac{(2i)^q}{\omega}\,\dfrac{M}{(n+1)a_0^n}\log\left(\dfrac{u_0}{s_p}\right)\ldots \\ \qquad\times\log\left(\dfrac{u_{p-1}}{s_p}\right)\log\left(\dfrac{s_{p+1}}{s_p}\right)\ldots\log\left(\dfrac{s_{p+q-1}}{s_p}\right) 2^q\psi_p\ldots\psi_{p+q-1}. \end{cases}$$

Il paraît clairement que les expressions trouvées des intégrales Ω_0 et Ω_p sont composées par la multiplication des logarithmes des quotients, qui, pour une valeur croissante de m convergent vers des combinaisons très simples des racines z_α. Le rapport indiqué entre (32) et (33) donne les rapprochements requis, que nous dénoterons à l'aide du signe de l'égalité,

$$\log\left(\frac{u_1}{u_0}\right) = z_1 - z_0, \quad \ldots, \quad \log\left(\frac{u_{p-1}}{u_0}\right) = z_{p-1} - z_0,$$

$$\log\left(\frac{s_p}{u_0}\right) = \frac{z_p + z_{p+q}}{2} - z_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\log\left(\frac{s_{p+q-1}}{u_0}\right) = \frac{z_{p+q-1} + z_{p+2q-1}}{2} - z_0,$$

$$\log\left(\frac{u_0}{s_p}\right) = z_0 - \frac{z_p + z_{p+q}}{2}, \quad \ldots, \quad \log\left(\frac{u_{p-1}}{s_p}\right) = z_{p-1} - \frac{z_p + z_{p+q}}{2},$$

$$\log\left(\frac{s_{p+1}}{s_p}\right) = \frac{z_{p+1} + z_{p+q+1}}{2} - \frac{z_p + z_{p+q}}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\log\left(\frac{s_{p+q-1}}{s_p}\right) = \frac{z_{p+q-1} + z_{p+2q-1}}{2} - \frac{z_p + z_{p+q}}{2},$$

$$2\psi_p = \frac{z_p - z_{p+q}}{i}, \quad \ldots, \quad 2\psi_{p+q-1} = \frac{z_{p+q-1} - z_{p+2q-1}}{i}.$$

Moyennant cela, il se trouve constaté que *le nombre* S_0 *et le nombre* S_p *des systèmes définis de nombres entiers sont représentés d'une précision si exacte que l'on voudra, dans le sens expliqué, par les expressions algébriques*

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} S_0 &= \varepsilon_0 \frac{2^q}{\text{Ⓓ}} \frac{M}{(n+1)a_0^n}(z_1 - z_0)\ldots(z_{p-1} - z_0)\left(\frac{z_p + z_{p+q}}{2} - z_0\right)\ldots \\ &\quad\times\left(\frac{z_{p+q-1} + z_{p+2q-1}}{2} - z_0\right)(z_p - z_{p+q})\ldots(z_{p+q-1} - z_{p+2q-1}), \\ S_p &= \varepsilon_p \frac{2^q}{\text{Ⓓ}} \frac{M}{(n+1)a_0^n}\left(z_0 - \frac{z_p + z_{p+q}}{2}\right)\ldots \\ &\quad\times\left(z_{p-1} - \frac{z_p + z_{p+q}}{2}\right)\left(\frac{z_{p+1} + z_{p+q+1}}{2} - \frac{z_p + z_{p+q}}{2}\right)\ldots \\ &\quad\times\left(\frac{z_{p+q-1} + z_{p+2q-1}}{2} - \frac{z_p + z_{p+q}}{2}\right)\ldots(z_p - z_{p+q})\ldots(z_{p+q-1} - z_{p+2q-1}), \end{aligned}\right.$$

Vu que l'indice zéro peut être remplacé par les indices $1, 2, \ldots, p-1$, l'indice p par les indices $p+1, \ldots, p+q-1$, nous obtenons par le changement respectif une détermination tout à fait semblable des p nombres $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$ et des q nombres $S_p, S_{p+1}, \ldots, S_{p+q-1}$. Or, je ne manquerai pas de rappeler votre attention sur ce fait, que le nombre de ces nombres, $p+q$, surpasse de l'unité le nombre des unités fondamentales dans la théorie des nombres complexes, qui découlent de l'équation $f(z) = 0$, nombre fameux découvert par *Dirichlet*. Dans le cas traité séparément de $p = 0$, $q = 1$, il n'y a que le seul nombre S_0. Dans le cas également détaillé de $p = 2$, $q = 0$, il est clair que les deux nombres S_0 et S_1 coïncident. Dans le cas général on rencontre une relation très simple entre les intégrales $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{p-1}, \Omega_p, \ldots, \Omega_{p+q-1}$, qui ont servi à la représentation approximative des nombres $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}, S_p, \ldots, S_{p+q-1}$. En considérant que lesdites intégrales sont les produits du facteur commun

$$\frac{2^q}{\omega}\frac{M}{(n+1)a_0^n}(z_p - z_{p+q})\ldots(z_{p+q-1} - z_{p+2q-1}),$$

par des unités $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{p+q-1}$, et par des produits formés des différences des éléments réels

$$z_0, \quad z_1, \quad \ldots, \quad z_{p-1}, \quad \frac{z_p + z_{p+q}}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{z_{p+q-1} + z_{p+2q-1}}{2},$$

il suit d'un théorème algébrique connu, l'équation

$$(60) \qquad \frac{1}{\varepsilon_0 \Omega_0} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon_{p-1}\Omega_{p-1}} + \frac{1}{\varepsilon_p \Omega_p} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon_{p+q-1}\Omega_{p+q-1}} = 0,$$

qui ramène la connaissance de la valeur de chacune de ces expressions à la détermination de toutes les expressions restantes.