JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL GORDAN

Sur les équations du cinquième degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 1 (1885), p. 455-458.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1885_4_1__455_0>

Sur les équations du cinquième degré;

PAR M. PAUL GORDAN.

Soit

$$f = a \tag{I}$$

une équation du cinquième degré, ayant pour racines

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_4;$$

le discriminant Δ est le carré du produit D des différences $x_\mu - x_\nu$,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{vmatrix}, \quad \Delta = D^2. \tag{II}$$

Les fonctions rationnelles d'une racine x_ν peuvent être réduites, au moyen de l'équation (I), à la forme

$$\varphi_{\rho,\nu} = a_{\rho^0} + a_{\rho^1} x_\nu + a_{\rho^2} x_\nu^2 + a_{\rho^3} x_\nu^3 + a_{\rho^4} x_\nu^4. \tag{III}$$

Cinq de ces fonctions,

$$\varphi_{0,\nu},\ \varphi_{1,\nu},\ \varphi_{2,\nu},\ \varphi_{3,\nu},\ \varphi_{4,\nu},$$

linéairement indépendantes l'une de l'autre, forment un système par lequel on peut exprimer les autres. Elles donnent lieu à trois déterminants, c'est-à-dire celui des a_{ik}, celui des φ_{ik} et celui des $\sum_{\nu=0}^{\nu=4} \varphi_{i\nu}\varphi_{k\nu}$;

je les appelle A, U, V; ils sont liés l'un à l'autre par les relations

$$\text{(IV)} \qquad U = DA, \quad V = U^2 = \Delta A^2.$$

Choisissons six fonctions spéciales de nos φ, c'est-à-dire

$$\text{(V)} \begin{cases} 1, \quad p_\nu = x_\nu - \frac{1}{5}\Sigma x_\nu, \quad y_\nu = x_\nu^2 - \frac{1}{5}\Sigma x_\nu^2 + \rho_1 p_\nu, \\ q_\nu = x_\nu^3 - \frac{1}{5}\Sigma x_\nu^3 + \rho_2 p_\nu, \quad r_\nu = x_\nu^4 - \frac{1}{5}\Sigma x_\nu^4 + \rho_3 p_\nu, \quad z_\nu = q_\nu + \rho_4 r_\nu, \end{cases}$$

satisfaisant aux relations

$$\text{(VI)} \qquad \Sigma p_\nu = 0, \quad \Sigma y_\nu = 0, \quad \Sigma q_\nu = 0, \quad \Sigma r_\nu = 0, \quad \Sigma z_\nu = 0,$$

et qui soient soumises à celles-ci :

$$\text{(VII)} \qquad \Sigma y_\nu^2 = 0, \quad \Sigma q_\nu y_\nu = 0, \quad \Sigma r_\nu y_\nu = 0, \quad \Sigma z_\nu^2 = 0.$$

La première signifie une relation quadratique pour ρ_1, la deuxième et la troisième sont linéaires pour ρ_2 et ρ_3, et la dernière est quadratique pour ρ_4. Son discriminant $H = \Sigma q_\nu r_\nu \, \Sigma q_\nu r_\nu - \Sigma q_\nu^2 \, \Sigma r_\nu^2$ ayant évidemment la même valeur que le déterminant V des cinq premières des fonctions V, et le déterminant A de ces mêmes fonctions équivalant à l'unité, nous avons, d'après (IV),

$$H = \Delta.$$

Les formules (VII) se réunissent ainsi :

$$\text{(VII}^a\text{)} \qquad \Sigma(y_\nu + \lambda z_\nu)^2 = 0,$$

formule qui existe pour chaque valeur de λ, et qui signifie que les quantités $y_\nu + \lambda z_\nu$ sont les racines d'une équation principale (d'après Klein).

En laissant figurer λ dans l'équation cubique de Bring,

$$\Sigma(y_\nu + \lambda z_\nu)^3 = 0,$$

nous avons en $y_\nu + \lambda z_\nu$ la racine d'une équation

$$(y_\nu + \lambda z_\nu)^5 + a(y_\nu + \lambda z_\nu) + b = 0,$$

dont M. Hermite a fait usage pour résoudre l'équation générale du cinquième degré.

Comme M. Kronecker (*voir* le LIX^e vol. du *Journal de Borchardt*) l'a montré, on peut transformer l'équation générale du cinquième degré au moyen de racines carrées dans une équation avec un seul paramètre.

Pour trouver une telle équation, introduisons les fonctions

$$v_\nu = y_\nu + \lambda_1 z_\nu, \quad \bar{v}_\nu = y_\nu + \lambda_2 z_\nu,$$

pour lesquelles

$$(\text{VIII}^a) \qquad \Sigma y_\nu v_\nu \bar{v}_\nu = 0, \quad \Sigma z_\nu v_\nu \bar{v}_\nu = 0;$$

donc aussi

$$(\text{VIII}^b) \qquad \Sigma v_\nu^2 \bar{v}_\nu = 0, \quad \Sigma \bar{v}_\nu^2 v_\nu = 0.$$

Les formules (VIII^a) donnent, pour λ_1, λ_2, les équations

$$\Sigma y_\nu^3 + (\lambda_1 + \lambda_2) \Sigma y_\nu^2 z_\nu + \lambda_1 \lambda_2 \Sigma y_\nu z_\nu^2 = 0,$$
$$\Sigma y_\nu^2 z_\nu + (\lambda_1 + \lambda_2) \Sigma y_\nu z_\nu^2 + \lambda_1 \lambda_2 \Sigma z_\nu^3 \quad = 0,$$

ce qui nous montre que λ_1, λ_2 sont les racines de l'équation quadratique

$$\begin{vmatrix} \Sigma y^3 & \Sigma y^2 z & \Sigma y z^2 \\ \Sigma y^2 z & \Sigma y^2 z^2 & \Sigma z^3 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et voilà donc le déterminant de Hesse pour l'équation de Bring.

Nous pouvons donner aux formules (VI), (VII^a) et (VIII^a) la forme

$$(\text{IX}) \qquad \Sigma v_\nu = \Sigma_\nu^2 = \Sigma \bar{v}_\nu = \Sigma v_\nu \bar{v}_\nu = \Sigma \bar{v}_\nu^2 = \Sigma v_\nu^2 \bar{v}_\nu = \Sigma v_\nu \bar{v}_\nu^2 = 0;$$

les deux premières formules nous donnent v_ν, racine de l'équation principale

$$(\text{X}) \qquad v^5 + 5av^2 + 5bv + c = 0.$$

Ses coefficients ont, d'après les formules de Newton, les valeurs

$$-3a = \Sigma v_\nu^3, \quad -4b = \Sigma v_\nu^4, \quad -5c = \Sigma v_\nu^5.$$

Chaque fonction rationnelle de x_ν est aussi rationnelle en v_ν, et, pour cette raison, linéaire dans les cinq quantités

$$g_{\rho,\nu} = \frac{-v_\nu^\rho}{v_\nu^4 + 2av_\nu + b} = \frac{-v_\nu^{\rho+1}}{3av_\nu^2 + 4bv_\nu + c} \quad (\text{pour } \rho : 0, 1, 2, 3, 4).$$

Celles de ces φ_ν pour lesquelles $\Sigma\varphi_\nu = 0$ sont linéaires en g_0, g_1, g_2, g_3. D'après la formule (IX), $\bar{v}_\nu$, $v_\nu\bar{v}_\nu$, $v_\nu^2\bar{v}_\nu$, $\bar{v}_\nu^2$, $v_\nu\bar{v}_\nu^2$ y sont compris ainsi : $\bar{v}_\nu$ est linéaire en g_0, g_1, et $\bar{v}_\nu^2$ est linéaire en g_0, g_1, g_2. Il en résulte la relation

$$(g_0 + \alpha g_1)^2 = c_0 g_0 + c_1 g_1 + c_2 g_2$$

ou

$$\text{(XI)} \qquad v_\nu(v_\nu + \alpha)^2 = (c_0 + c_1 v_\nu + c_2 v_\nu^2)(3a v_\nu^2 + 4b v_\nu + c).$$

Vu l'irréductibilité de la formule (X), équation du cinquième degré, et en conséquence de celle-ci du quatrième degré, la dernière est identique pour tout v. En égalant les coefficients des puissances de v_ν, on trouve

$$c_0 = 0, \quad 3ac_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad b = \frac{3a}{2}\alpha, \quad c = 3a\alpha^2.$$

Nous substituons ces valeurs de b et c dans la formule (X), et remplaçons v_ν par la quantité

$$w_\nu = -\frac{2\alpha}{v_\nu},$$

ce qui nous donne l'équation

$$w_\nu^5 - 5w_\nu^4 + \frac{20}{3}w_\nu^3 = \frac{32\alpha^3}{3a},$$

qui n'a qu'un seul paramètre, et qui, par la substitution

$$w_\nu = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}u_\nu,$$

se transforme dans celle de Brioschi

$$u^5 - 10u^3 + 45u = \frac{24}{a}\sqrt{3}(4\alpha^3 - 1).$$