JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. DARBOUX

Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixé par un point de son axe

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 1 (1885), p. 403-430.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1885_4_1__403_0>

Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixé par un point de son axe;

PAR M. G. DARBOUX.

Dans le Tome II de la nouvelle édition des *Œuvres de Jacobi* ont paru, pour la première fois, des fragments, présentant le plus haut intérêt, d'un travail que l'illustre géomètre avait préparé sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, suspendu par un point de son axe. On a souvent attribué la solution de ce problème à Poisson, qui l'a traité en effet, en le considérant comme entièrement nouveau, dans un Mémoire inséré en 1813 au XVI^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Mais, en réalité, l'étude de cette belle question avait déjà été faite par Lagrange; elle est développée dans la première édition de la *Mécanique analytique*, qui a paru en 1788.

Dans les Mémoires dont nous devons la publication à M. Weierstrass, Jacobi énonce et démontre, on peut le dire, un remarquable théorème d'après lequel le mouvement de rotation du corps pesant peut se ramener à une combinaison des mouvements de rotation de deux solides différents sur lesquels n'agirait aucune force accélératrice. Tout récemment M. Halphen, dans une Note insérée au Tome C des *Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences*, a donné au théorème de Jacobi une forme nouvelle et énoncé une série de résultats que nous démontrerons dans ce travail. M. Halphen n'a pas fait connaître la méthode qu'il a suivie, et qui repose sans doute sur l'emploi des fonctions elliptiques. La démonstration que nous allons donner du théorème de Jacobi est directe et élémentaire : elle nous a conduit à quelques propositions nouvelles, relatives à la représentation cinématique du mouvement, propositions dont le développement est surtout le but de la présente étude.

I.

Nous rappellerons d'abord, en quelques mots, les formules de Lagrange et de Poisson. On rapporte le mouvement à un système d'axes fixes OX, OY, OZ, dans lequel l'axe des Z est dirigé vers le bas. Le corps est rapporté à un système d'axes Ox, Oy, Oz, pour lequel Oz coïncide avec l'axe du corps. Soient

A le moment d'inertie par rapport à Ox et Oy;
C le moment d'inertie par rapport à Oz;
p, q, r les composantes de la rotation relatives aux axes mobiles Ox, Oy, Oz;
u le cosinus variable des deux axes des z, c'est-à-dire de l'axe du corps avec la verticale;
enfin a'', b'', u les cosinus des angles de la verticale OZ avec les axes mobiles.

Les trois intégrales de Lagrange sont les suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} & r = n, \\ & Apa'' + Aqb'' + Cru = 2AL, \\ & A(p^2 + q^2) = 2ADu + 2AH. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, n, L, H sont les constantes introduites par l'intégration; D et $\frac{C}{A}$ dépendent de la constitution du corps et le définissent, au point de vue mécanique, dans le problème qui nous occupe. Si l'on introduit les trois angles d'Euler, φ, ψ étant les angles de Ox et de OX avec l'intersection des deux plans des xy, et θ l'angle des deux axes des z, on déduira des formules (1) les suivantes

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{du^2}{dt^2} = F(u) = (2Du + 2H)(1 - u^2) - 4(Bu - L)^2, \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{2Bu - 2L}{1 - u^2}, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = n - 2B + \dfrac{2B - 2Lu}{1 - u^2}, \end{cases}$$

où l'on a désigné par B le quotient

$$(3)\qquad B = \frac{Cn}{2A}.$$

Il ne restera plus qu'à effectuer des quadratures elliptiques pour obtenir t, φ, ψ en fonction de u, et ainsi le problème sera complètement résolu.

On déduit des équations précédentes une conséquence importante. Désignons par (P) le corps pesant, et considérons un corps auxiliaire (P') qui serait animé, par rapport au précédent, d'une vitesse constante de rotation

$$2B - n = \frac{C - A}{A} n$$

autour de l'axe. La position de ce corps auxiliaire, dont le mouvement est lié d'une manière si simple à celui de (P), sera déterminée par les trois angles d'Euler

$$\theta,\ \psi \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \varphi + (2B - n)t.$$

On aura donc, d'après la troisième formule (2),

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{2B - 2Lu}{1 - u^2}.$$

Par suite, les formules qui définissent le mouvement du corps (P') ne sont autres que les formules (1), où l'on supposerait

$$2B - n = 0 = \frac{(C - A)n}{A}.$$

Le mouvement du corps (P′) est donc celui que prendrait un corps pesant pour lequel l'ellipsoïde d'inertie du point fixe se réduirait à une sphère.

Ce mouvement jouit d'une propriété de réciprocité qu'il convient de signaler. Les formules qui donnent φ et ψ se changent l'une en l'autre, quand on remplace B, L respectivement par $-$L, $-$B. D'autre part, si, dans l'équation qui définit u, on pose

$$H = H' - 2B^2, \tag{4}$$

elle prend la forme

$$\frac{du^2}{dt^2} = (2Du + 2H')(1 - u^2) - 4B^2 - 4L^2 + 8BLu, \tag{5}$$

qui demeure invariable quand on y remplace B, L par $-$L, $-$B. Ces faits analytiques s'interprètent comme il suit :

Dans le cas, auquel on peut ramener tous les autres, où l'ellipsoïde central du point fixe est une sphère, le mouvement des axes fixes par rapport aux axes mobiles est un de ceux que prendrait le corps, si les conditions initiales étaient changées.

II.

Après avoir établi les résultats précédents, nous allons commencer la démonstration du théorème de Jacobi, sous la forme que lui a donnée M. Halphen.

L'énoncé le plus simple de cette belle proposition est le suivant :

Si l'on considère le mouvement du corps pesant (P) *de révolution fixé par le point* O, *on peut à chaque instant déterminer un système* (C) *d'axes* Ox_1, Oy_1, Oz_1 *mobiles autour du point* O, *tels que le mouvement absolu de* (C) *et le mouvement de* (C) *par rapport au corps* (P) *soient l'un et l'autre identiques au mouvement d'un corps solide fixé par le point* O, *et qui ne serait soumis à aucune force accélératrice. Le plan invariable est, dans le premier de ces mouvements, le plan horizontal; et, dans le second, c'est le plan perpendiculaire à l'axe du corps.*

Toutefois, il faut bien comprendre que, dans ces deux mouvements de (C), les moments d'inertie sont différents, et de plus qu'ils ne satisfont pas nécessairement aux relations d'inégalité qui caractérisent les moments d'inertie de tout corps réel. Ce sont des mouvements qui satisfont aux formules d'Euler, où l'on regarderait les constantes A, B, C comme pouvant prendre des valeurs quelconques. Si l'on se rappelle la représentation géométrique de Poinsot, on peut dire que l'on produirait ces mouvements en faisant rouler sur un plan, non plus un ellipsoïde d'inertie, mais un ellipsoïde quelconque ou toute autre surface à centre du second degré.

Il résulte d'une belle théorie de M. Sylvester que de tels mouvements peuvent toujours être ramenés au roulement d'un ellipsoïde d'inertie, accompagné d'une rotation constante autour de la perpendiculaire au plan invariable. Cette remarque établit le lien entre l'énoncé de Jacobi et celui de M. Halphen.

Considérons d'abord le mouvement absolu des axes (C). Si p, q, r désignent, dans ce mouvement, les composantes de la rotation relatives aux axes de (C), on aura des équations de la forme

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{a(c-b)}{bc}qr,\\ \frac{dq}{dt} &= \frac{b(a-c)}{ac}pr,\\ \frac{dr}{dt} &= \frac{c(b-a)}{ab}pq. \end{aligned}\right.$$

Comme elles ne contiennent que les rapports des constantes a, b, c, on peut, en multipliant ces trois constantes par un nombre convenable, écrire l'intégrale des aires sous la forme

$$(7)\qquad \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2}=1,$$

et l'intégrale des forces vives sera alors

$$(8)\qquad \frac{p^2}{a}+\frac{q^2}{b}+\frac{r^2}{c}=h.$$

Les quatre constantes a, b, c, h caractérisent le premier mouvement. On peut le produire en faisant rouler sur un plan, à une distance $\sqrt{h}$ du centre, une surface (E) dont les axes auraient pour carrés a, b, c, avec une vitesse constamment égale au produit de $\sqrt{h}$ par le rayon vecteur qui va au point de contact.

Si l'on désigne de même par p', q', r' les composantes de la rotation dans le mouvement de (C) par rapport au corps (P), on aura les équations suivantes

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp'}{dt} &= \frac{a'(c'-b')}{c'b'}q'r', \\ \frac{dq'}{dt} &= \frac{b'(a'-c')}{a'c'}p'r', \\ \frac{dr'}{dt} &= \frac{c'(b'-a')}{a'b'}p'q', \end{aligned}\right.$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{p'^2}{a'} + \frac{q'^2}{b'} + \frac{r'^2}{c'} = h', \\ &\frac{p'^2}{a'^2} + \frac{q'^2}{b'^2} + \frac{r'^2}{c'^2} = 1, \end{aligned}\right.$$

relatives à ce second mouvement (E′).

Les cosinus directeurs qui définissent, par rapport aux axes (C), la verticale, c'est-à-dire la normale au plan invariable du mouvement (E), sont évidemment

$$\frac{p}{a},\ \frac{q}{b},\ \frac{r}{c}.$$

De même, les cosinus directeurs, relatifs au même système de coordonnées, de l'axe de révolution, qui est la normale au plan invariable du second mouvement (E′), sont

$$\frac{p'}{a'},\ \frac{q'}{b'},\ \frac{r'}{c'}.$$

Il suit de là que l'équation de l'ellipsoïde central du corps (P), relatif au point O, sera

$$(11)\qquad A(X^2+Y^2+Z^2) - (A-C)\left(\frac{p'X}{a'} + \frac{q'Y}{b'} + \frac{r'Z}{c'}\right)^2 = 1,$$

A et C désignant les moments d'inertie déjà définis.

Cela posé, puisque p', q', r' désignent les rotations dans le mouvement (E') de (C) par rapport au corps, $-p'$, $-q'$, $-r'$ seront les rotations dans le mouvement inverse du corps par rapport à (C); et, pour avoir la rotation absolue du corps, il faudra composer les rotations précédentes avec celles qui correspondent au mouvement absolu de (C), et qui sont p, q, r. Nous obtenons donc le résultat suivant :

A un instant quelconque, les composantes de la rotation absolue de (P), relatives aux axes (C), sont

$$p - p', \quad q - q', \quad r - r'.$$

Nous pouvons, dès à présent, indiquer une première condition à laquelle devront satisfaire les six quantités p, p', ... Comme la projection de la rotation sur l'axe de révolution doit être constante dans le problème qui nous occupe, nous aurons, en nous rappelant que cette constante a été désignée par n, et que $\frac{p'}{a'}$, $\frac{q'}{b'}$, $\frac{r'}{c'}$ sont les cosinus directeurs de l'axe de révolution,

$$\frac{p'}{a'}(p - p') + \frac{q'}{b'}(q - q') + \frac{r'}{c'}(r - r') = n$$

ou, plus simplement,

$$\frac{pp'}{a'} + \frac{qq'}{b'} + \frac{rr'}{c'} = n + h'. \tag{12}$$

Pour établir les autres conditions, nous rappellerons la proposition suivante : Si

$$\varphi(X, Y, Z) = 1$$

est l'équation de l'ellipsoïde central, rapporté à des axes quelconques ayant pour origine le point fixe d'un corps mobile, et, si p, q, r sont les composantes de la rotation relatives aux mêmes axes, la force vive $2T$ est égale à

$$2T = \varphi(p, q, r),$$

et les projections de l'axe du couple des quantités de mouvement sont

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial p}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial q}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Or nous avons ici l'équation (11) de l'ellipsoïde central, et aussi les composantes de la rotation. Nous pouvons, par suite, appliquer la proposition précédente, et nous trouvons d'abord, pour la force vive du corps,

$$(13) \qquad 2T = A[(p-p')^2 + (q-q')^2 + (r-r')^2] - (A-C)n^2,$$

en tenant compte toutefois de l'équation (12).

Quant aux projections de l'axe du couple des quantités de mouvement, elles sont

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}_x &= A(p-p') - (A-C)n\frac{p'}{a'}, \\ \mathcal{L}_y &= A(q-q') - (A-C)n\frac{q'}{b'}, \\ \mathcal{L}_z &= A(r-r') - (A-C)n\frac{r'}{c'}. \end{aligned} \right.$$

Si nous conservons les notations de l'article I, il faut exprimer que la projection de l'axe de ce couple sur la verticale, dont les cosinus directeurs sont $\frac{p}{a}, \frac{q}{b}, \frac{r}{c}$, est constante et égale à $2AL$. On aura ainsi l'équation

$$\frac{p}{a}\mathcal{L}_x + \frac{q}{b}\mathcal{L}_y + \frac{r}{c}\mathcal{L}_z = 2AL$$

ou, en faisant les réductions,

$$(15) \qquad \frac{pp'}{a} + \frac{qq'}{b} + \frac{rr'}{c} + (n-2B)\left(\frac{pp'}{aa'} + \frac{qq'}{bb'} + \frac{rr'}{cc'}\right) = h - 2L,$$

B étant la constante définie par l'équation (3).

Il nous reste enfin à écrire l'équation des forces vives que l'on peut mettre sous la forme

$$\omega^2 = 2Du + 2H + n^2,$$

ω désignant le carré de la rotation totale. On a ici

$$\omega^2 = (p - p')^2 + (q - q')^2 + (r - r')^2$$

et

$$(16) \qquad u = \cos\theta = \frac{pp'}{aa'} + \frac{qq'}{bb'} + \frac{rr'}{cc'}.$$

On aura donc, pour l'équation des forces vives, la forme suivante :

$$(17) \qquad \begin{cases} (p-p')^2 + (q-q')^2 + (r-r')^2 \\ \quad = 2D\left(\dfrac{pp'}{aa'} + \dfrac{qq'}{bb'} + \dfrac{rr'}{cc'}\right) + 2H + n^2. \end{cases}$$

Pour démontrer complètement le théorème de Jacobi, il suffira de montrer que l'on peut disposer des fonctions p, q, r, p', q', r' de manière à satisfaire aux équations (12), (15), (17) qui représentent les trois intégrales premières du mouvement.

III.

Quelques considérations, que nous omettons, relatives aux infinis des fonctions, montrent immédiatement que l'on ne pourra satisfaire à la relation (17) qu'en posant

$$(18) \qquad p' = \alpha' p, \quad q' = \beta' q, \quad r' = \gamma' r,$$

α', β', γ' désignant des constantes. On peut remplacer les équations (9) par l'une d'entre elles, jointe aux équations (10); en sorte que les équations qui devront être vérifiées prendront la forme suivante

$$(19) \qquad \frac{a(b-c)}{bc}\,\frac{\alpha'}{a'} = \frac{\beta'\gamma'}{b'c'}(b'-c');$$

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha'^2 p^2}{a'} + \dfrac{\beta'^2 q^2}{b'} + \dfrac{\gamma'^2 r^2}{c'} = h', \\ \dfrac{\alpha'^2 p^2}{a'^2} + \dfrac{\beta'^2 q^2}{b'^2} + \dfrac{\gamma'^2 r^2}{c'^2} = 1; \end{cases}$$

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\alpha' p^2}{a'} + \frac{\beta' q^2}{b'} + \frac{\gamma' p^2}{c'} = n + h',\\
&\frac{\alpha' p^2}{a}\left(1 + \frac{n - 2B}{a'}\right) + \frac{\beta' q^2}{b}\left(1 + \frac{n - 2B}{b'}\right)\\
&\qquad\qquad + \frac{\gamma' r^2}{c}\left(1 + \frac{n - 2B}{c'}\right) = h - 2L,\\
&p^2(1 - \alpha')^2 + q^2(1 - \beta')^2 + r^2(1 - \gamma')^2\\
&\qquad\qquad - 2D\left(\frac{\alpha' p^2}{aa'} + \frac{\beta' q^2}{bb'} + \frac{\gamma' r^2}{cc'}\right) = 2H + n^2,
\end{aligned}
\right.
$$

et, comme p, q, r ne peuvent être constantes, il faudra que les cinq dernières soient toutes des combinaisons linéaires des équations (7) et (8), que nous écrirons sous la forme

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} = 1,\\
&\frac{p^2(a - h)}{a^2} + \frac{q^2(b - h)}{b^2} + \frac{r^2(c - h)}{c^2} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous sommes ainsi conduits aux systèmes suivants :

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\alpha'^2}{a'} = \frac{h' + \lambda(h - a)}{a^2},\\
&\frac{\beta'^2}{b'} = \frac{h' + \lambda(h - b)}{b^2},\\
&\frac{\gamma'^2}{c'} = \frac{h' + \lambda(h - c)}{c^2};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\alpha'^2}{a'^2} = \frac{1 + \mu(h - a)}{a^2},\\
&\frac{\beta'^2}{b'^2} = \frac{1 + \mu(h - b)}{b^2},\\
&\frac{\gamma'^2}{c'^2} = \frac{1 + \mu(h - c)}{c^2};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\alpha'}{a'} = \frac{n + h' + \nu(h - a)}{a^2},\\
&\frac{\beta'}{b'} = \frac{n + h' + \nu(h - b)}{b^2},\\
&\frac{\gamma'}{c'} = \frac{n + h' + \nu(h - c)}{c^2};
\end{aligned}
\right.
$$

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha'}{a}\left(1+\dfrac{n-2B}{a'}\right)=\dfrac{h-2L+\rho(h-a)}{a^2}, \\[2mm] \dfrac{\beta'}{b}\left(1+\dfrac{n-2B}{b'}\right)=\dfrac{h-2L+\rho(h-b)}{b^2}, \\[2mm] \dfrac{\gamma'}{c}\left(1+\dfrac{n-2B}{c'}\right)=\dfrac{h-2L+\rho(h-c)}{c^2}; \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} (1-\alpha')^2-\dfrac{2D\alpha'}{aa'}=\dfrac{2H+n^2+\sigma(h-a)}{a^2}, \\[2mm] (1-\beta')^2-\dfrac{2D\beta'}{bb'}=\dfrac{2H+n^2+\sigma(h-b)}{b^2}, \\[2mm] (1-\gamma')^2-\dfrac{2D\gamma'}{cc'}=\dfrac{2H+n^2+\sigma(h-c)}{c^2}. \end{cases}$$

On a ainsi, en tenant compte de l'équation (19), seize équations qui contiennent seize inconnues, a, b, c, h; a', b', c', h'; α', β', γ'; $\lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma$.

Nous allons montrer qu'on peut déterminer des valeurs réelles pour toutes ces inconnues.

En égalant d'abord les valeurs de $\dfrac{\alpha'}{a'}, \dfrac{\beta'}{b'}, \dfrac{\gamma'}{c'}$ données par les équations (24) et (25), on obtient trois relations; elles expriment que a, b, c sont les trois racines de l'équation

$$(28)\qquad [n+h'+\nu(h-x)]^2-x^2[1+\mu(h-x)]=0.$$

On doit donc avoir l'identité

$$(29)\quad \begin{cases} [n+h'+\nu(h-x)]^2 \\ \quad -x^2[1+\mu(h-x)]=\mu(x-a)(x-b)(x-c), \end{cases}$$

qui se résout dans les trois équations suivantes :

$$(30)\quad \begin{cases} (n+h'+\nu h)^2=-\mu R, \\ -2\nu(n+h'+\nu h)=\mu Q, \\ \nu^2-1-\mu h=-\mu P, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(31)\qquad a+b+c=P,\quad ab+ac+bc=Q,\quad abc=R.$$

La résolution du système (30) nous donne les résultats suivants : Soit Ω la quantité définie par la formule

$$\Omega^2 = Q^2 - 4R(P - h). \tag{32}$$

On trouve

$$\left\{\begin{aligned} & n + h' = \frac{2R - Qh}{\Omega}, \quad \mu = -\frac{4R}{\Omega^2}, \\ & \nu = \frac{Q}{\Omega}, \quad n + h' + \nu h = \frac{2R}{\Omega}. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Si nous divisons maintenant chaque équation du système (23) par l'équation correspondante du système (24), puis par l'équation correspondante du système (25), nous obtiendrons les formules

$$\left\{\begin{aligned} a' &= \frac{h' + \lambda(h - a)}{1 + \mu(h - a)}, \\ b' &= \frac{h' + \lambda(h - b)}{1 + \mu(h - b)}, \\ c' &= \frac{h' + \lambda(h - c)}{1 + \mu(h - c)}; \end{aligned}\right. \tag{34}$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha' &= \frac{h' + \lambda(h - a)}{n + h' + \nu(h - a)}, \\ \beta' &= \frac{h' + \lambda(h - b)}{n + h' + \nu(h - b)}, \\ \gamma' &= \frac{h' + \lambda(h - c)}{n + h' + \nu(h - c)}, \end{aligned}\right. \tag{35}$$

qui, jointes aux relations (33), pourront remplacer les systèmes (23), (24), (25).

En portant ces valeurs de α', a', ... dans la formule (19), et en tenant compte de ce que a est racine de l'équation (28), on remplacera l'équation (19) par la suivante

$$\left\{\begin{aligned} & R(\mu h' - \lambda) \\ & \quad = (n + h' + \nu h - \nu a)(n + h' + \nu h - \nu b)(n + h' + \nu h - \nu c), \end{aligned}\right. \tag{36}$$

que l'on peut simplifier de différentes manières.

Par exemple, si dans l'identité (29) on donne à x la valeur $\frac{n+h'+\nu h}{\nu}$, on est conduit à l'égalité

$$\begin{aligned} &-(n+h'+\nu h)^2[\nu-\mu(n+h')] \\ &\quad=\mu(n+h'+\nu h-\nu a)(n+h'+\nu h-\nu b)(n+h'+\nu h-\nu c). \end{aligned}$$

En remplaçant le second membre de l'équation (36) par sa valeur déduite de l'égalité précédente, et tenant compte des formules (30), on trouve

$$\mu h'-\lambda=\nu-\mu(n+h'). \tag{37}$$

On pourrait encore écrire l'équation (36) en y remplaçant directement $n+h'$ et ν par leurs valeurs déduites des formules (30). Elle prend alors la forme

$$\mu h'-\lambda=-\frac{\alpha\beta\gamma}{Q^3}, \tag{38}$$

où α, β, γ désignent des quantités qui joueront un rôle important dans les formules définitives, et qui s'expriment en fonction de a, b, c de la manière suivante :

$$\left\{\begin{aligned} \alpha&=a(b+c)-bc=Q-\frac{2R}{a}, \\ \beta&=b(a+c)-ac=Q-\frac{2R}{b}, \\ \gamma&=c(a+b)-ab=Q-\frac{2R}{c}. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Signalons, dès à présent, les identités

$$\left\{\begin{aligned} \alpha^2&=Q^2-4R(P-a), \\ \beta^2&=Q^2-4R(P-b), \\ \gamma^2&=Q^2-4R(P-c); \end{aligned}\right. \tag{40}$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha\beta\gamma&=4PQR-Q^3-8R^2, \\ \Sigma\alpha\beta&=4RP-Q^2, \\ \Sigma\alpha&=Q, \end{aligned}\right. \tag{41}$$

auxquelles elles donnent lieu.

Il nous reste à examiner les systèmes (26) et (27).

Si l'on remplace dans la première équation (26) α' et a' par leurs valeurs déduites des formules (34), (35), il vient

$$h' + \lambda(h-a) + (n-2B)[1+\mu(h-a)]$$
$$= \frac{h - 2L + \rho(h-a)}{a}(n + h' + \nu h - \nu a).$$

Cette équation est du second degré en a, et, comme elle doit être vérifiée quand on y remplace a par b et par c, elle devra avoir lieu pour toute valeur de a.

Cela donne les trois relations

$$(41)\quad \begin{cases} h - 2L + \rho h = 0, \\ \lambda + \mu(n-2B) + \nu\rho = 0, \\ h' + n - 2B + \rho(n+h') = 0. \end{cases}$$

En les associant à la formule (37), on trouve

$$(42)\quad \begin{cases} \rho = 1, \quad B = n + h', \\ L = h, \quad \lambda = -\frac{4Rh'}{\Omega^2} + \frac{2\beta\gamma}{\Omega^3}. \end{cases}$$

Ces relations, jointes aux formules (33), (34), (35), nous font connaître λ, μ, ν, ρ, a', b', c', α', β', γ' en fonction de a, b, c, h qui, elles-mêmes, satisfont aux deux équations

$$h = L, \quad B = \frac{2R - Qh}{\Omega}.$$

Il reste donc seulement deux arbitraires, dont il faudra disposer de manière à vérifier les trois équations (27), qui contiennent d'ailleurs une inconnue nouvelle σ.

Si nous remplaçons $n + h'$ et ν par leurs valeurs dans les formules (25), elles nous donnent

$$(43)\quad \frac{\alpha'}{a'} = -\frac{\alpha}{a\Omega} = \frac{2R}{a^2\Omega} - \frac{Q}{a\Omega},$$

et les équations analogues en β', γ'. Remarquons également les identités

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha'+1+(n-2B)\frac{\alpha'}{a'}=0,\\ &\beta'+1+(n-2B)\frac{\beta'}{b'}=0,\\ &\gamma'+1+(n-2B)\frac{\gamma'}{c'}=0; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on peut, dès à présent, déduire une importante conséquence.

Si, dans les formules (14), on remplace Cn par $2B$ et p', q', r' par leurs valeurs $\alpha' p$, $\beta' q$, $\gamma' r$, les relations précédentes nous donnent

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{L}_x=2Ap,\\ &\mathfrak{L}_y=2Aq,\\ &\mathfrak{L}_z=2Ar. \end{aligned}\right.$$

Par conséquent, l'axe du couple des quantités de mouvement du corps a, à chaque instant, la même direction que l'axe instantané de la rotation absolue du système mobile (C), et il est proportionnel à cette rotation.

IV.

Il nous reste à considérer le système (27). En tenant compte des formules (44), la première équation de ce système peut s'écrire

$$\left[2+(n-2B)\frac{\alpha'}{a'}\right]^2-\frac{2D\alpha'}{aa'}=\frac{2H+n^2+\sigma(h-a)}{a^2}.$$

Si l'on remplace $\frac{\alpha'}{a'}$ par sa valeur déduite de la formule (43), il viendra

$$\left[2+\frac{n-2B}{\Omega}\left(\frac{2R}{a^2}-\frac{Q}{a}\right)\right]^2-\frac{2D}{\Omega}\left(\frac{2R}{a^3}-\frac{Q}{a^2}\right)=\frac{2H+n^2+\sigma(h-a)}{a^2}.$$

Ordonnons suivant les puissances de $\frac{1}{a}$, et éliminons $\frac{1}{a^4}$, $\frac{1}{a^3}$ au moyen de l'équation

$$a^3 - Pa^2 + Qa - R = 0,$$

à laquelle satisfait a. Il viendra une équation du second degré en $\frac{1}{a}$, qui sera satisfaite quand on y remplacera a par b et c. Il faudra donc que les coefficients des différentes puissances de a soient nuls. On est ainsi conduit, après quelques réductions, aux formules

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &D = \Omega,\\ &4P + \sigma = \frac{4Q(h-2B)}{D} - \frac{4R(h-2B)^2}{D^2},\\ &2R - Qh = BD.\end{aligned}\right.$$

Tout se réduit donc à déterminer a, b, c, h par les quatre équations

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Omega = D, &\quad h = L,\\ &2R - Qh = BD, &\quad 2Ph - Q = H + 2B^2.\end{aligned}\right.$$

Il suffit de remplacer Ω par son expression en fonction de P, Q, R, h, et l'on trouvera les équations

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &Q^2 - 4R(P - L) = D^2,\\ &2R - QL = BD,\\ &2PL - Q = H + 2B^2,\end{aligned}\right.$$

qui détermineront P, Q, R. En les résolvant, on obtient les expressions suivantes de ces inconnues

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{(LD + BH)D + 2BD(B^2 - L^2)}{2L(L^2 - B^2) - BD - LH},\\ 2R &= \frac{D^2(L^2 - B^2)}{2L(L^2 - B^2) - BD - LH},\\ 2P &= \frac{D^2 - 2BDL + 2L^2(H + 2B^2) - (H + 2B^2)^2}{2L(L^2 - B^2) - BD - LH}.\end{aligned}\right.$$

et, par suite, on peut former l'équation du troisième degré qui fait connaître a, b, c. Mais il vaut mieux employer une autre méthode qui servira de vérification à nos calculs et aura l'avantage de mettre en évidence la réalité des racines de l'équation.

Nous avons déjà écrit, à l'article I, l'équation différentielle qui détermine le cosinus u de l'angle de la verticale et de l'axe du corps. Nous pouvons ici former cette équation d'une autre manière.

L'équation (16) nous donne, en remplaçant p', q', r' par leurs valeurs,

$$u = \frac{\alpha' p^2}{aa'} + \frac{\beta' q^2}{bb'} + \frac{\gamma' r^2}{cc'}. \tag{50}$$

En différentiant cette équation, nous trouverons

$$\frac{du}{dt} = \frac{4(a-b)(b-c)(c-a)}{abc\Omega} pqr. \tag{51}$$

D'autre part, on peut exprimer p, q, r en fonction de u, au moyen de l'équation (50), jointe aux intégrales des aires et des forces vives, ce qui donne

$$\frac{p^2}{a^2} = \frac{2ah - \alpha + \Omega u}{2(a-b)(a-c)}, \quad \frac{q^2}{b^2} = \frac{2bh - \beta + \Omega u}{2(b-a)(b-c)}, \quad \frac{r^2}{c^2} = \frac{2ch - \gamma + \Omega u}{2(c-a)(c-b)}. \tag{52}$$

En portant ces valeurs de p, q, r dans l'équation (51), on trouve

$$\Omega^2 \frac{du^2}{dt^2} = 2(\alpha - 2ah - \Omega u)(\beta - 2bh - \Omega u)(\gamma - 2ch - \Omega u). \tag{53}$$

Cette valeur de $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ est identique à celle qui a été donnée à l'article I, comme il est aisé de le vérifier. Nous pouvons en conclure que les racines de l'équation, entièrement connue,

$$F(u) = 2(1 - u^2)(Du + H) - 4(Bu - L)^2 = 0$$

ont pour expressions en fonction de a, b, c

$$\frac{\alpha - 2ah}{D}, \quad \frac{\beta - 2bh}{D}, \quad \frac{\gamma - 2ch}{D}.$$

Comme on a, en vertu de la définition de α,

$$\alpha - 2ah = 2h^2 - 2Ph + Q - 2\frac{(h-a)(h-b)(h-c)}{h-a},$$

on voit que l'on obtiendra l'équation aux carrés des axes a, b, c en effectuant dans l'équation

$$F(u) = 0$$

la substitution linéaire définie par la formule

$$Du = 2L^2 - PL + Q - \frac{2f(L)}{L-a},$$

$f(x)$ désignant le polynôme

$$f(x) = x^3 - Px^2 + Qx - R.$$

Or les coefficients de cette substitution linéaire peuvent se déduire des formules (48). Elles donnent pour $f(L)$ la valeur suivante

$$(54) \qquad 2f(L) = 2L(L^2 - B^2) - BD - LH,$$

et la substitution linéaire prend la forme

$$(55) \qquad Du + H = 2L^2 - 2B^2 - \frac{2f(L)}{L-a},$$

où tout est connu. C'est l'un des résultats donnés par M. Halphen, et, comme l'équation en u a ses racines réelles pour tous les mouvements réels, il en sera de même de l'équation aux carrés des axes.

Le théorème de Jacobi est donc complètement démontré.

On peut demander aussi l'équation du troisième degré qui fait connaître les quantités a', b', c' relatives au second mouvement (E').

On a d'abord

$$h' = B - n,$$

et les formules (34) nous donnent

$$(56) \qquad \frac{1}{L-a} = \frac{4R}{\Omega^2} - \frac{\alpha\beta\gamma}{\Omega^3}\frac{1}{h'-a'}.$$

En portant la valeur de $L - a$ dans la formule (55) et remarquant qu'on a

$$2f(L)\alpha\beta\gamma = - D^2(DL + BH),$$

nous trouvons

$$(57) \qquad Du + H = -\frac{DL + BH}{h' - a'}.$$

Telle est la substitution linéaire qui, effectuée dans l'équation en u, donnera l'équation aux carrés des axes a', b', c'. On peut également calculer la valeur de α' par la formule (35), et l'on trouve

$$(58) \qquad \alpha' = -1 + \frac{2B - n}{D}\frac{Du + H}{Bu - L},$$

$$(59) \qquad D\frac{\alpha'}{a'} = \frac{Du + H}{Bu - L} = -\frac{\alpha}{a}.$$

V.

Les constantes a, b, c, h, a', b', c', h', α', β', γ', relatives aux deux mouvements (E), (E'), doivent être liées évidemment par six relations. On peut se demander quelles doivent être ces relations. On les déduit aisément des formules précédentes. Les équations (34) nous donnent

$$h' - a' = \frac{(h\mu - \lambda)(h - a)}{1 + \mu(h - a)}$$

ou, en remplaçant $h'\mu - \lambda$ et μ par leurs valeurs en fonction de a, b, c,

$$h' - a' = -\frac{\beta\gamma}{\alpha\Omega}(h - a).$$

On a donc le système des relations

$$(60) \qquad \frac{\alpha^2(h' - a')}{h - a} = \frac{\beta^2(h' - b')}{h - b} = \frac{\gamma^2(h' - c')}{h - c} = -\frac{\alpha\beta\gamma}{\Omega},$$

auxquelles il faut joindre les formules (59), écrites comme il suit :

$$(61) \qquad \alpha' = -\frac{\alpha a'}{a\Omega}, \quad \beta' = -\frac{\beta b'}{b\Omega}, \quad \gamma' = \frac{-\gamma c'}{c\Omega}.$$

Si l'on ne considère que les mouvements d'un même corps, il faudra joindre deux équations, elles expriment en fonction de a, b, c, h les constantes qui caractérisent le corps D et $\frac{B}{n}$. Ce sont les suivantes :

$$(62)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Omega = D, \\ &h' = \frac{n-B}{DB}(Qh - 2R), \end{aligned} \right.$$

qui, jointes aux formules (60), ne laisseront plus subsister que trois arbitraires indépendantes a, b, c

Il nous reste maintenant à signaler quelques conséquences géométriques du théorème de Jacobi, qui conduisent à une représentation géométrique très simple du mouvement. Nous avons vu à l'article I, et il serait aisé de déduire ce résultat des formules précédentes, que le mouvement le plus général du corps pesant (P) se ramène par une transformation très simple à celui dans lequel on a

$$n = 2B.$$

Alors on a, d'après les formules (44),

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = -1$$

et, par conséquent,

$$p' = -p, \quad q' = -q, \quad r' = -r.$$

On voit donc que, dans les deux mouvements (E), (E'), la polhodie est la même, et, de plus, le pôle instantané occupe, à chaque instant, la même position sur cette courbe dans les deux mouvements. Désignons par (H) cette courbe et par (K) le cône du second degré décrit par l'axe instantané, qui a pour base cette polhodie. Le mouvement absolu du système (C) s'obtient en faisant rouler le cône (K) sur un certain cône fixe (Γ) ayant pour base une herpolhodie (H). Le mouvement de (C) relatif au corps (P) s'obtient en faisant rouler le cône du second degré (K) sur un autre cône (Γ') invariablement lié au corps et ayant pour base une herpolhodie (H'), et, de plus, *la génératrice de contact du cône* (K) *est la même à chaque instant dans les deux mouvements.*

Cela veut dire que les deux cônes (Γ) et (Γ') roulent l'un sur l'autre, et, par conséquent, le mouvement du corps (P) sera représenté par le roulement du cône (Γ') sur le cône (Γ); et la vitesse de rotation sera évidemment double du rayon vecteur qui va au point de contact des deux herpolhodies (H) et (H'). Ces deux courbes, qui sont les bases de ces deux cônes, roulent aussi l'une sur l'autre.

En rapprochant ces résultats de ceux qui ont été donnés à l'article I, nous obtenons le théorème suivant :

Étant donné le corps pesant (P) *de révolution, soumis à l'action de la pesanteur dans des conditions initiales quelconques, considérons un corps auxiliaire* (P') *qui soit animé par rapport au précédent d'une vitesse de rotation constante*

$$\frac{C-A}{A}n$$

autour de l'axe de révolution; C, A, *n étant les constantes définies précédemment, le mouvement du corps* (P') *pourra se représenter par le roulement d'un cône* (Γ'), *invariablement lié à ce corps et ayant pour base une herpolhodie* (H'), *sur un cône fixe* (Γ), *ayant pour base une autre herpolhodie* (H). *Les deux herpolhodies rouleront l'une sur l'autre, et la rotation du corps* (P') *sera, à chaque instant, double du rayon vecteur qui va du point fixe à leur point de contact.*

VI.

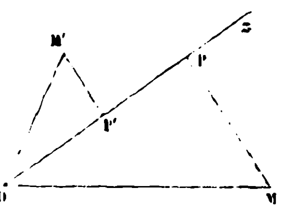
La proposition précédente donne la représentation la plus simple du mouvement. On peut cependant désirer une représentation directe du mouvement du corps (P); les relations données plus haut permettent, nous allons le voir, d'obtenir cette représentation.

D'abord les formules (45) nous montrent que l'axe du couple des quantités de mouvement a la direction de la rotation instantanée dans le mouvement (E), et qu'il est égal en grandeur à cette rotation, multipliée par 2A. Donc :

L'extrémité de l'axe du couple des quantités de mouvement parcourt *une herpolhodie, située dans un plan horizontal, et cela de la même manière que le pôle instantané, qui serait relatif à cette courbe.*

La tangente à cette courbe étant, comme on sait, perpendiculaire au plan du couple qui naît de la translation de la force au point fixe, sera donc normale à chaque instant au plan passant par l'axe de révolution du corps et par la verticale. Si l'herpolhodie n'a pas de point d'inflexion, ce plan tournera toujours dans le même sens; sinon, il aura un mouvement, tantôt direct et tantôt rétrograde.

Prenons maintenant l'axe de rotation OM du corps, dont la projection OP sur l'axe de révolution Oz est constante et égale à n, et soit



OM′ l'axe de la rotation dans le mouvement (E′) dont la projection sur Oz est également constante et égale à h'. Nous savons que le point M′ décrit une herpolhodie dans un plan perpendiculaire à Oz. Je vais démontrer qu'il en est de même du point M.

Les projections de MP sur les axes (C) sont

$$p - p' - n\frac{p'}{a'},\quad q - q' - n\frac{q'}{b'},\quad r - r' - n\frac{r'}{c'};$$

celles de M′P′ sont

$$p'\left(1 - \frac{h'}{a'}\right),\quad q'\left(1 - \frac{h'}{b'}\right),\quad r'\left(1 - \frac{h'}{c'}\right).$$

En vertu des formules (44), ces projections sont proportionnelles, et leur rapport est -2. Donc les points M, M′ décrivent des courbes homothétiques, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

L'extrémité de l'axe de rotation décrit dans le corps et sur un plan perpendiculaire à l'axe une herpolhodie; il parcourt d'ailleurs cette courbe, d'après la même loi que le pôle instantané dans le mouvement d'un corps solide qui n'est soumis à aucune force accélératrice.

Cette proposition nous fait connaître le cône de la rotation instantanée dans le corps. Celle que nous allons démontrer permet de définir le lieu décrit par cet axe dans l'espace.

Appelons, pour un instant, ξ, η, ζ les composantes de la rotation relatives aux axes fixes OX, OY, OZ. L'équation des forces vives nous donne

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=2Du+2H+n^2. \tag{63}$$

La projection ζ sur la verticale a évidemment pour expression

$$\zeta=(p-p')\frac{p}{a}+(q-q')\frac{p}{b}+(r-r')\frac{r}{c}$$

ou, d'après l'équation (15),

$$\zeta=2L-(2B-n)u. \tag{64}$$

Si nous éliminons u entre les relations (63), (64), nous obtenons l'équation d'une sphère ayant son centre sur la verticale. Donc :

Le mouvement le plus général du corps (P) *peut se représenter par le roulement d'un cône ayant pour base une herpolhodie, sur une sphère ayant son centre sur la verticale.*

La courbe décrite par le pôle instantané sur cette sphère pourrait être définie par la condition que son arc et le rayon vecteur qui va au point fixe soient liés par la même relation que dans l'herpolhodie attachée au corps.

VII.

Les propositions relatives à la représentation géométrique du mouvement peuvent d'ailleurs être démontrées directement à l'aide des formules données à l'article I, qui font connaître les trois angles d'Euler, θ, φ, ψ. Reprenons les notations de cet article et désignons maintenant par p, q, r les composantes de la rotation relatives aux axes du corps. Nous aurons

$$(65)\qquad \begin{cases} p^2+q^2=2Du+2H, \\ r=n; \end{cases}$$

$$(66)\qquad \begin{cases} p=\sin\varphi\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt}-\cos\varphi\dfrac{d\theta}{dt}, \\ q=\cos\varphi\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt}+\sin\varphi\dfrac{d\theta}{dt}. \end{cases}$$

Considérons la courbe décrite dans le corps par l'extrémité de l'axe instantané. La seconde équation (5) nous montre que cette courbe est située dans un plan perpendiculaire à l'axe. Si on la rapporte à des coordonnées polaires dont le pôle soit le point où ce plan rencontre l'axe, on aura, en désignant par ρ et ω les deux coordonnées d'un point de la courbe,

$$(67)\qquad \begin{cases} \rho^2=2Du+2H, \\ \omega=\operatorname{arc\,tang}\dfrac{q}{p}=-\varphi-\operatorname{arc\,tang}\dfrac{\sin\theta\, d\psi}{d\theta}. \end{cases}$$

En différentiant la seconde de ces équations, on trouve

$$(Du+H)\frac{d\omega}{dt}=(B-n)(Du+H)+BH+DL,$$

ou encore

$$(68)\qquad \rho^2\frac{d\omega}{dt}=(B-n)\rho^2+2BH+2DL.$$

Cette formule, jointe à celle qui donne ρ^2, permet de calculer la vitesse totale du pôle, pour laquelle on trouve l'expression

$$(69)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds^2}{dt^2}=D^2(1-u^2)+2n(n-2B)(Du+H) \\ \qquad -4(n-2B)(BH+DL). \end{cases}$$

La vitesse aréolaire $\rho^2\dfrac{d\omega}{dt}$ est une fonction du premier degré de ρ^2;

la vitesse totale, une fonction du second degré de u et par conséquent de ρ^2 dans laquelle le coefficient de ρ^4 est négatif. *Ces deux propriétés caractérisent l'herpolhodie considérée comme trajectoire du pôle instantané dans le mouvement d'un corps qui n'est soumis à aucune force.* Nous retrouvons ainsi une des propositions précédentes.

Étudions maintenant la courbe décrite par le pôle instantané dans l'espace. Ses coordonnées relatives aux axes fixes ont été désignées par ξ, η, ζ. On obtient aisément leurs expressions en fonction des angles d'Euler

$$(70)\qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \sin\psi \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} - \cos\psi \frac{d\theta}{dt}, \\ \eta &= \cos\psi \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} + \sin\psi \frac{d\theta}{dt}, \\ \zeta &= \qquad\qquad - \frac{d\psi}{dt} + \cos\theta \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \right.$$

On a d'abord

$$(71)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = p^2 + q^2 + r^2 = 2\mathrm{D}u + 2\mathrm{H} + n^2, \\ &\zeta = 2\mathrm{L} - (2\mathrm{B} - n)u. \end{aligned} \right.$$

Et en éliminant u on retrouve l'équation de la sphère ayant son centre sur la verticale. Pour définir complètement la route suivie par le pôle instantané, il suffira d'étudier sa projection sur le plan horizontal. Nous la rapporterons à des coordonnées polaires, l'origine étant choisie pour pôle. Si ρ' et ω' désignent ces coordonnées, on aura évidemment

$$\rho'^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

$$\omega' = \operatorname{arc\,tang} \frac{\eta}{\xi}.$$

Désignons par Δ et P les polynômes suivants

$$(72)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\Delta = 2\mathrm{D}u + 2\mathrm{H} + n^2 - [2\mathrm{L} - (2\mathrm{B} - n)u]^2, \\ &\mathrm{P} = (2\mathrm{B} - n)u^2 - 2\mathrm{L}u + n; \end{aligned} \right.$$

on aura

$$(73)\qquad \rho'^2 = \Delta,$$

et les deux premières formules (70) donneront

$$(74)\qquad \omega' = -\psi - \operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\theta\, d\varphi}{dt} = -\psi + \operatorname{arc\,tang}\frac{P}{\left(\frac{du}{dt}\right)}.$$

La différentiation de cette formule est très aisée, si l'on fait usage de l'identité

$$(75)\qquad \frac{du^2}{dt^2} + P^2 = (1 - u^2)\Delta,$$

à laquelle on est conduit en vérifiant l'équation

$$\xi^2 + \eta^2 = \sin\theta\,\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt^2};$$

on trouve ainsi

$$(76)\qquad \frac{d\omega'}{dt} = L + \frac{P'\Delta - P\Delta'}{2\Delta},$$

P' et Δ' désignant les dérivées de P et de Δ par rapport à u.

Dans le cas où l'on a $n = 2B$, on obtient encore une herpolhodie.

Nous terminerons ce sujet en donnant une définition directe et purement géométrique de cette courbe.

Considérons tous les mouvements pour lesquels les constantes B, D, H, L ont la même valeur. Si les corps correspondants ont au début le même axe de révolution, il résulte des formules (2) que cet axe leur demeurera commun dans tout le mouvement, et le mouvement de chacun d'eux par rapport à l'un quelconque des autres se réduira à une rotation constante autour de l'axe. Étudions les courbes décrites dans l'espace par les pôles instantanés des rotations relatives à ces divers mouvements. Il faudra pour cela faire varier n dans les formules (70) et (71).

Soient ξ_1, η_1, ζ_1 les valeurs de ξ, η, ζ relatives à l'hypothèse $n = 2B$. Dans ce cas la courbe décrite par le pôle est, nous le savons, une herpolhodie (H) qui, d'après la formule (71), sera située dans le plan

$$\zeta = 2L.$$

Comme elle demeure en contact avec une autre herpolhodie dont le plan est perpendiculaire à l'axe de révolution, *sa tangente sera nécessairement perpendiculaire à cet axe.*

Prenons maintenant une valeur quelconque de n. Les formules (70) nous donnent

$$(77)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + (n - 2B)\sin\psi\sin\theta, \\ \eta &= \eta_1 + (n - 2B)\cos\psi\sin\theta, \\ \zeta &= \zeta_1 + (n - 2B)\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Nous savons que, pour chaque valeur de n, cette courbe se trouve sur la sphère définie par les formules (71) et dont l'équation est

$$(78)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2H + n^2 + \frac{2D(2L - \zeta)}{2B - n}.$$

D'autre part, les relations (77) nous montrent, ce qui est évident par la Géométrie, qu'à un instant quelconque tous les pôles correspondants à des valeurs différentes de n se trouvent placés à des distances invariables les unes des autres, sur une même droite qui est parallèle à l'axe commun de révolution et par conséquent normale à l'herpolhodie (H). Or le mouvement de cette droite est défini par la condition que deux de ses points demeurent sur des sphères, qu'un autre point demeure dans le plan de l'herpolhodie (H) et enfin qu'elle soit normale à la trajectoire de l'un quelconque de ses points, par exemple de celui qui décrit un plan. On s'assure aisément qu'il n'y a, entre les deux sphères, le plan et les segments de la droite invariable, d'autre relation que la suivante : le plan est perpendiculaire à la ligne des centres des deux sphères. De là cette curieuse proposition :

Si trois points d'une droite invariable sont assujettis, les deux premiers à demeurer sur deux sphères différentes, le troisième à rester dans un plan perpendiculaire à la ligne des centres des deux sphères, si de plus la droite se déplace de manière à demeurer normale à la trajectoire de l'un de ses points, ce qui définit complètement son mouvement à partir d'une position donnée, le point de la droite assujetti à rester dans le plan décrira une herpolhodie, tous les autres décriront les courbes sphériques qui sont *les routes du pôle dans l'espace, pour le mouvement d'un corps pesant de révolution.*

Telle est la définition directe et purement géométrique que nous voulions obtenir de la route décrite par le pôle dans le problème de Lagrange, aussi bien que de l'herpolhodie de Poinsot. Nous signalerons, en terminant, le théorème suivant de Cinématique, qui se rattache directement à la proposition précédente et dont la démonstration n'offre aucune difficulté.

Si trois points d'une droite invariable sont assujettis à demeurer sur trois sphères dont les centres sont en ligne droite, tous les autres points de la droite décrivent des sphères; et, en écartant un cas exceptionnel où la droite fait un angle constant avec la ligne des centres, il y a toujours un point de la droite qui décrit un plan.

Si la droite, dans son mouvement, entraîne des plans qui lui soient perpendiculaires, ces plans envelopperont des sphères concentriques dont le centre commun sera sur la ligne des centres des sphères décrites par les différents points.

Remarquons que cette proposition donne le moyen de décrire un plan à l'aide d'un système articulé comprenant quatre tiges seulement ([1]).

([1]) On pourra consulter, relativement à ces propositions de Cinématique et au sujet traité dans ce travail, plusieurs articles publiés dans les Tomes C et CI des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.*