JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL LE CORDIER

Actions électrodynamiques renfermant des fonctions arbitraires : hypothèses qui déterminent ces fonctions

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 1 (1885), p. 357-401.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1885_4_1__357_0>

Actions électrodynamiques renfermant des fonctions arbitraires : hypothèses qui déterminent ces fonctions (1);

PAR M. PAUL LE CORDIER,
Docteur ès Sciences mathématiques,
Chargé du Cours de Mécanique à l'École des Sciences d'Alger.

INTRODUCTION.

Dans deux Mémoires antérieurs, les actions *pondéromotrices* les plus générales qu'on puisse observer ont été déduites de l'expérience seule et ramenées à l'action d'un courant fermé sur un élément de courant, à l'aide des hypothèses les plus incontestables; les neuf actions mutuelles entre les courants, les aimants et le magnétisme terrestre, dont six seulement sont observables, étant désignées collectivement sous le nom d'*actions pondéromotrices*, qui en exprime l'identité démontrée dans les deux Mémoires précédents, préférablement au nom d'*actions électrodynamiques*, qui explique cette identité par l'hypothèse des courants moléculaires d'Ampère.

Il s'agit maintenant de calculer l'action d'un élément de courant sur un autre. La solution, affranchie de toute hypothèse, renferme des fonctions arbitraires. On pourrait même se demander si l'action d'un courant non fermé, qui n'a jamais été observée, est autre chose qu'une fiction : car on ne sait pas si un courant électrique peut exister sans être fermé. Mais elle est réelle d'après l'hypothèse des actions directes à distance, qui ramène tout à des actions mutuelles de points, et

(1) Mémoire présenté à l'Académie des Sciences, le 2 juillet 1883.

d'après celle d'un milieu continu, qui propage les forces apparentes à distance avec une vitesse nécessairement finie : les actions envoyées simultanément par les différents éléments d'un courant fermé doivent ainsi arriver successivement à un élément linéaire d'un autre courant : on n'a pas encore conçu d'hypothèse permettant de les regarder comme fictives.

C'est pourquoi elles sont traitées comme réelles dans ce Mémoire, qui énonce les solutions déterminées d'Ampère et de M. Reynard, puis la solution générale renfermant des fonctions arbitraires, que M. Maurice Lévy a donnée dans son cours du Collège de France. L'hypothèse d'Ampère et celle de M. Reynard déterminent complètement ces fonctions, en sorte que les deux solutions respectives sont seules compatibles avec les hypothèses de leurs auteurs.

Un *courant fermé permanent à trois dimensions* étant défini *celui dont l'électricité ne traverse pas la surface,* on a vu, dans le premier Mémoire, que son action sur un élément de courant extérieur s'exprime par un potentiel. Mais la forme de ce potentiel n'y a pas été donnée. Elle se déduit immédiatement d'une hypothèse que des expériences assez nombreuses ont vérifiée pour le cas de deux dimensions : cette hypothèse consiste à admettre qu'*un courant permanent, à plusieurs dimensions, est décomposable en éléments de courants linéaires;* en sorte que rien n'y serait changé, si une surface quelconque du rhéophore, ayant pour génératrices des lignes du courant, devenait isolante.

Dans les deux Mémoires précédents, l'élément de courant qui reçoit l'action a été supposé extérieur au courant agissant. Cette lacune est comblée, dans le Mémoire actuel, au moyen de l'hypothèse suivante : *les actions électrodynamiques qui s'exercent à des distances insensibles, suivent toutes les lois observées à des distances sensibles.*

Mais ces deux hypothèses ont besoin de vérifications expérimentales : deux vérifications possibles, mais qui n'ont pas été faites, sont indiquées. La première, qui ne paraît pas facilement réalisable, est l'action d'un courant fermé, fixe et permanent, parcourant un liquide, sur un solénoïde fixe et fermé, plongé dans ce liquide. Le fil solénoïdal est supposé recouvert d'une couche isolante, dont le diamètre extérieur est assez petit pour que la présence du corps immergé ne change pas sensiblement les lignes du courant à trois dimensions. Soit μ la masse qu'aurait le pôle positif du solénoïde, s'il n'était pas fermé : l'action qui en sollicite l'axe est la même que si cet axe était parcouru par un courant linéaire idéal, d'intensité $4\pi\mu$, et si les lignes du courant à trois dimensions devenaient les lignes de force d'un champ magnétique fictif, ayant pour force directrice l'intensité cubique du courant.

Une seconde vérification expérimentale sera indiquée dans un Mémoire sur l'induction. On admet qu'un courant permanent, parcourant un fil homogène, passe uniformément dans une section droite. Il en résulte que les lignes de force, dans cette section, sont des circonférences concentriques; et que la force, constante sur chaque ligne, varie de l'une à l'autre proportionnellement à leurs rayons. Cette force intervient dans le calcul du coefficient de self-induction d'un fil fermé sur lui-même; et, comme on sait mesurer expérimentalement ce coefficient, on en déduit un nouveau moyen de vérifier les hypothèses déjà si bien vérifiées.

§ XIII. — Action d'un élément de courant sur un autre.

Solutions déterminées, mais hypothétiques, d'Ampère et de M. Reynard.

251 (¹). Au lieu des deux principes d'Ampère **21** et **24**, on peut en invoquer un seul, qui en a été déduit, et qui réciproquement les renferme, quand on réduit le système agissant à un courant linéaire fermé, et quand on admet le principe **25**, c'est-à-dire quand on traite l'action d'un courant linéaire fermé sur un élément de courant extérieur comme réductible à une force unique, appliquée à cet élément, ou, en d'autres termes, quand on regarde comme nul le couple qu'il faut adjoindre à cette force, pour représenter une action quelconque, appliquée à un corps rigide. On a vu que l'action mutuelle de deux courants linéaires fermés $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, d'intensités constantes I et I', dont les arcs s et s', faisant partie de leurs longueurs totales S et S', se terminent aux points (x, y, z) et (x', y', z'), séparés par la distance r,

(¹) Les numéros de ce Mémoire font suite à ceux du premier (3ᵉ série, tome X de ce Journal p. 43-96), et du deuxième (p. 113-146 et 281-328).

est représentée par l'énergie (109″)

$$(371)\quad W_{\mathfrak{S}',\mathfrak{S}} = -\mathrm{II}'\int_0^{\mathrm{S}} ds \int_0^{\mathrm{S}'} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right) ds'.$$

Cette formule, trouvée par Ampère, a été vérifiée avec beaucoup de soin par Weber, pour le cas où les deux lignes S et S′ sont rigides. Il en résulte qu'on peut invoquer, comme un des principes expérimentaux les mieux établis, l'énoncé suivant, exprimé par l'équation (143).

232. *Treizième principe expérimental.* — Le travail virtuel élémentaire $d\mathfrak{E}$ des actions mutuelles de deux courants linéaires fixes, fermés, permanents et rigides $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, est égal et de signe contraire à la variation de la fonction (371)

$$(372)\qquad d\mathfrak{E} = -\,d\mathrm{W}.$$

Des cinq principes de la page 50 (tome X de la 3[e] série), les deux suivants seulement doivent être adjoints à l'énoncé **232**.

233. *Quatorzième principe.* — Les actions mutuelles de deux éléments de courants linéaires, fixes et permanents, $\mathrm{I}\,ds$ et $\mathrm{I}'\,ds'$, sont proportionnelles au produit $\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{I}\,ds$; elles ne dépendent d'ailleurs que de la distance r qui les sépare, et des trois angles que font entre elles les directions r, ds, ds'.

234. L'action d'un courant linéaire $\mathfrak{S}'$ fixe, fermé et permanent, sur un élément de courant linéaire extérieur fixe $\mathrm{I}\,ds$, se réduit à une force unique $(\mathfrak{S}', ds)$, appliquée à cet élément. Cet énoncé est renfermé dans celui du n° **23**.

Les potentiels au point $\mathrm{M}(x, y, z)$, où commence ds, des composantes du courant $\mathfrak{S}'$, d'intensité I' et de longueur S', étant

$$(373)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F} &= \mathrm{I}'\int_0^{\mathrm{S}'} \frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\,ds', \\ \mathrm{G} &= \mathrm{I}'\int_0^{\mathrm{S}'} \frac{1}{r}\frac{\partial y'}{\partial s'}\,ds', \\ \mathrm{H} &= \mathrm{I}'\int_0^{\mathrm{S}'} \frac{1}{r}\frac{\partial z'}{\partial s'}\,ds', \end{aligned}\right\}\qquad (110)$$

les composantes de la force directrice D, au point M, du courant $\mathfrak{S}'$, seront

$$(374)\qquad A = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},\quad B = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x},\quad C = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y},\qquad (111)$$

expressions dont les signes supposent les axes disposés à gauche : considérant une aire A, que la ligne S' ne rencontre pas, et qu'engendrerait la ligne S, si une déformation continue en réduisait la longueur à zéro, et désignant par $\alpha = \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{L}}$, $\beta = \frac{\partial y}{\partial \mathfrak{L}}$, $\gamma = \frac{\partial z}{\partial \mathfrak{L}}$ les cosinus directeurs de la normale positive $\mathfrak{L}$ de l'élément dA, normale qu'un observateur, traversé des pieds à la tête par le courant I, verrait à sa gauche; on met la fonction (371) sous les deux formes suivantes (109 et 109‴),

$$(375)\qquad W = -I\iint_{A}(A\alpha + B\beta + C\gamma)\,dA,$$

$$(376)\qquad W = -I\int_0^S\left(F\frac{\partial x}{\partial s} + G\frac{\partial y}{\partial s} + H\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds.$$

Du principe **112** et de la formule (375), il résulte que les conditions **232**, **233** et **234** sont satisfaites, si le courant $\mathfrak{S}'$ produit sur $I\,ds$ la force définie par son point d'application $M(x, y, z)$, et par ses composantes (11),

$$(377)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{S}', I\,ds)_x = I(C\,dy - B\,dz),\\ (\mathfrak{S}', I\,ds)_y = I(A\,dz - C\,dx),\\ (\mathfrak{S}', I\,ds)_z = I(B\,dx - A\,dy).\end{cases}$$

Or, en substituant (373) dans (374), on a (77)

$$(378)\qquad \begin{cases} A = -I'\displaystyle\int_0^{S'}\left(\frac{z'-z}{r^3}\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{y'-y}{r^3}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)ds',\\ B = -I'\displaystyle\int_0^{S'}\left(\frac{x'-x}{r^3}\frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{z'-z}{r^3}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)ds',\\ C = -I'\displaystyle\int_0^{S'}\left(\frac{y'-y}{r^3}\frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{x'-x}{r^3}\frac{\partial y'}{\partial s'}\right)ds'.\end{cases}$$

Les formules (377) et (378) sont celles qu'Ampère a données pour exprimer l'action d'un courant linéaire fermé sur un élément d'un autre courant linéaire. Elles représentent (n° **112**) la seule force qui soit compatible avec les conditions **232** et **234**.

Sachant que les formules (377) et (378) satisfont aux conditions **232** et **234**, on en déduit immédiatement que ces conditions sont satisfaites, si l'élément $\mathrm{I}'\,ds'$ produit sur $\mathrm{I}\,ds$ une force unique, appliquée au point $\mathrm{M}(x, y, z)$, et ayant pour composantes

$$(379)\qquad \left\{\begin{aligned}
(\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_x &= \mathrm{I}\left(\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial s'}\,dy - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial s'}\,dz\right) ds',\\
(\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_y &= \mathrm{I}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial s'}\,dz - \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial s'}\,dx\right) ds',\\
(\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_z &= \mathrm{I}\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial s'}\,dx - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial s'}\,dy\right) ds',
\end{aligned}\right.$$

quand on pose

$$(380)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial s'} &= \mathrm{I}'\left(\frac{y'-y}{r^3}\,\frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{z'-z}{r^3}\,\frac{\partial y'}{\partial s'}\right),\\
\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial s'} &= \mathrm{I}'\left(\frac{z'-z}{r^3}\,\frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{x'-x}{r^3}\,\frac{\partial z'}{\partial s'}\right),\\
\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial s'} &= \mathrm{I}'\left(\frac{x'-x}{r^3}\,\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{y'-y}{r^3}\,\frac{\partial x'}{\partial s'}\right).
\end{aligned}\right.$$

La force (379, 380) est celle qui a été proposée par M. Reynard.

L'action (379, 380) de $\mathrm{I}'\,ds'$ sur $\mathrm{I}\,ds$ sera représentée par

$$(381)\qquad (\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds) = \mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{I}\,ds\,\mathrm{R}_0.$$

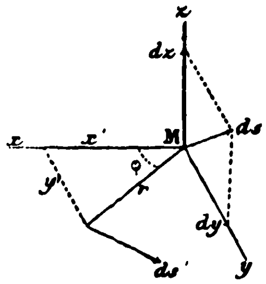
235. La force R_0 est appliquée à l'élément ds, normale à cet élément et située dans le plan qui passe par r et ds'.

Car, en prenant le point $\mathrm{M}(x, y, z)$ pour origine d'un système rectangulaire d'axes à gauche (*fig.* 19), disposé de manière que l'on ait

$$(382)\qquad z' = 0,\quad dz' = 0,\quad dx = 0,\quad dy > 0,\quad dz > 0,$$

c'est-à-dire prenant le plan (r, ds') pour celui des xy, la projection de *ds* sur ce plan pour axe des y, et pour axe des z la normale au plan

Fig. 19.



(r, ds') qu'un observateur, traversé des pieds à la tête par ds', verrait à sa gauche; on déduit des formules (380)

$$\frac{\partial A}{\partial s'} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial s'} = 0,$$

$$\frac{\partial C}{\partial s'} = I'\left(\frac{x'}{r^3}\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{y'}{r^3}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) = \frac{I'}{r}\,\frac{\partial \operatorname{arc\,tang}\dfrac{y'}{x'}}{\partial s'} = \frac{I'}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial s'} > 0,$$

et des formules (379)

$$(I'\,ds', I\,ds)_x = II'\frac{dy}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial s'}ds' > 0, \quad (I'\,ds', I\,ds)_y = 0, \quad (I'\,ds', I\,ds)_z = 0.$$

Ainsi, dans le système rectangulaire d'axes à gauche défini par les conditions (382), la force R_0 (381) a la direction positive de l'axe des x, et l'intensité

$$(383) \qquad R_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial \varphi}{\partial s'}.$$

On verra plus loin (**240**) que cette force est la seule compatible avec les hypothèses de M. Reynard et avec le principe **232**.

236. *Hypothèse d'Ampère*. — L'action de $I'\,ds'$ sur $I\,ds$ se réduit à une force unique $I\,ds\,I'\,ds'F$, appliquée à ds, dirigée suivant r, égale et de sens contraire à la réaction de $I\,ds$ sur $I'\,ds'$. D'ailleurs F ne dépend que de r et des angles que font entre elles les trois directions r, ds, ds'.

237. Cette force F étant prise pour inconnue et assujettie aux conditions **233** et **236**, le principe **232** admet une solution unique, qui est celle d'Ampère.

En effet, les quatre variables indépendantes

$$(384) \qquad r, \quad \frac{\partial r}{\partial s} = p, \quad \frac{\partial r}{\partial s'} = p', \quad \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} = \frac{\partial p}{\partial s'} = \frac{\partial p'}{\partial s} = q,$$

déterminant (53), sauf une ambiguïté de signe, les positions relatives des deux éléments, la force F, positive quand elle est répulsive, et sa composante tangentielle

$$(385) \qquad T = Fp$$

ne peuvent dépendre que de ces quatre variables.

Pour que la force F satisfasse à la condition **232**, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la première équation (377), quelle que soit la direction de l'axe des x; et pour cela :

238. Il faut et il suffit que la différence entre sa composante, parallèle à cet axe, et la première expression (379), soit la différentielle exacte d'une fonction des trois variables indépendantes x', y', z', qui ne renferme aucune autre variable relative au point (x', y', z').

Cette dernière condition montre que T est de la forme $\frac{\partial f(r, p, p', q)}{\partial s'}$; et, comme elle exige que f ne renferme ni $\frac{\partial r}{\partial s'}$ ni $\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$,

$$T = \frac{\partial f(r, p)}{\partial s'}.$$

L'hypothèse **236** de l'égalité de l'action $\frac{T}{p}$ et de la réaction $\frac{T'}{p'}$ donne

$$p'T = pT'$$

ou

$$p'\left[\frac{\partial f(r, p)}{\partial r} p' + \frac{\partial f(r, p)}{\partial p} q\right] = p\left[\frac{\partial f(r, p')}{\partial r} p + \frac{\partial f(r, p')}{\partial p'} q\right].$$

Cette équation, où la variable q, indépendante des trois autres, n'entre qu'explicitement, se décompose dans les deux suivantes

$$\frac{1}{p^2}\frac{\partial f(r,p)}{\partial r} = \frac{1}{p'^2}\frac{\partial f(r,p')}{\partial r}, \quad \frac{1}{p}\frac{\partial f(r,p)}{\partial p} = \frac{1}{p'}\frac{\partial f(r,p')}{\partial p'};$$

et celles-ci expriment que leurs premiers membres sont indépendants de p,

$$\frac{1}{p^2}\frac{\partial f(r,p)}{\partial r} = \frac{d\psi(r)}{dr}, \quad \frac{1}{p}\frac{\partial f(r,p)}{\partial p} = 2\varphi(r);$$

d'où

$$f(r,p) = p^2\psi(r) + \chi(p), \quad f(r,p) = p^2\varphi(r) + \varpi(r);$$

par suite $\psi(r) = \varphi(r)$, et $\chi(p) = \varpi(r) =$ une constante, qui disparaît dans les expressions

$$(386) \qquad \mathrm{T} = \frac{\partial p^2\varphi(r)}{\partial s'}, \quad \mathrm{F} = \frac{1}{p}\frac{\partial p^2\varphi(r)}{\partial s'}.$$

La même condition **258** va déterminer $\varphi(r)$. En prenant pour origine le point (x, y, z), et pour axe des z la tangente positive à ds, (379) et (380) donnent

$$(\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_x = \mathrm{I}\mathrm{I}'\left(\frac{x'}{r^3}\frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{z'}{r^3}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)ds'\,dz = -\,\mathrm{I}\,dz\,\mathrm{I}'\,ds'\frac{z'^2}{r^3}\frac{\partial\frac{x'}{z'}}{\partial s'};$$

et la composante de la force d'Ampère (**256**), dans la même direction, est

$$\begin{aligned} -\,\mathrm{I}\,dz\,\mathrm{I}'\,ds'\frac{x'}{r}\mathrm{F} &= -\,\mathrm{I}\,dz\,\mathrm{I}'\,ds'\frac{x'}{rp}\frac{\partial[p^2\varphi(r)]}{\partial s'} \\ &= \mathrm{I}\,dz\,\mathrm{I}'\,ds'\frac{x'}{z'}\frac{\partial\left[\left(\frac{z'}{r}\right)^2\varphi(r)\right]}{\partial s'}, \end{aligned}$$

en observant que rp ou $r\frac{\partial r}{\partial z}$, ou $-r\frac{\partial r}{\partial z'}$ se réduit à $-z'$.

La différence de ces deux expressions de $(\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_x$, divisée par $\mathrm{I}\mathrm{I}'\,dz$, est

$$\left[\frac{z'^2}{r^3}\frac{\partial\frac{x'}{z'}}{\partial s'} + \frac{x'}{z'}\frac{\partial\frac{z'^2\varphi(r)}{r^2}}{\partial s'}\right]ds';$$

augmentée de la différentielle exacte

$$-\frac{\partial\left[\frac{x'}{z'}\frac{z'^2\varphi(r)}{r^2}\right]}{\partial s'}ds'$$

ou

$$\left[-\frac{x'}{z'}\frac{\partial\frac{z'^2\varphi(r)}{r^2}}{\partial s'}-\frac{z'^2\varphi(r)}{r^2}\frac{\partial\frac{x'}{z'}}{\partial s'}\right]ds'.$$

elle devient

$$\frac{1-r\varphi(r)}{r^3}z'^2\frac{\partial\frac{x'}{z'}}{\partial s'}ds',$$

expression de la forme $\left(u\frac{\partial\frac{x'}{z'}}{\partial s'}+v\frac{\partial z'}{\partial s'}+w\frac{\partial r}{\partial s'}\right)ds'$, assujettie à être la différentielle exacte d'une fonction des trois variables indépendantes $\frac{x'}{z'}$, z' et r. L'une des trois équations différentielles qui en résultent,

$$\frac{\partial u}{\partial z'}=0 \quad \text{ou} \quad 2\frac{1-r\varphi(r)}{r^3}z'=0,$$

donne

$$\varphi(r)=\frac{1}{r},$$

et les équations (386) deviennent

$$(387)\qquad T=\frac{\partial\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right]}{\partial s'},\quad F=\frac{1}{\frac{\partial r}{\partial s}}\frac{\partial\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right]}{\partial s'}.$$

Soient (*fig.* 20)

$$(388)\qquad \theta,\ \theta',\ \varepsilon,\ \omega$$

les angles (r, ds), (r, ds'), (ds, ds'), et l'angle dièdre que font entre eux les plans des angles θ et θ'. On a les formules de transformation

$$(389)\qquad \cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s},\quad \cos\theta' = -\frac{\partial r}{\partial s'},$$

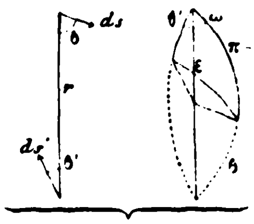
$$(390)\qquad \cos\varepsilon = -\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},$$

$$(391)\qquad \cos\varepsilon = -\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\omega,$$

$$(392)\qquad \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} = -\frac{1}{4r\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} = \frac{2r\dfrac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \dfrac{\partial r}{\partial s}\dfrac{\partial r}{\partial s'}}{4r\sqrt{r}}.$$

(390) se déduit de $r^2 = (x - x')^2 + \ldots$, en calculant $\frac{\partial^2 r^2}{\partial s\,\partial s'}$. La formule (391) est donnée par le triangle sphérique (*fig.* 20)

Fig. 20.



obtenu en menant dans une sphère, qui a l'unité pour rayon, trois rayons parallèles à r, ds et ds'; les côtés sont θ', $\pi - \theta$, ε; et ω est l'angle opposé à ε. (392) s'obtient en dérivant $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial s}$.

En substituant (389) dans (387), on a la formule d'Ampère

$$(393)\qquad \text{répulsion}\,(\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds) = -\frac{\mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'}{\cos\theta}\,\frac{\partial\dfrac{\cos^2\theta}{r}}{\partial s'};$$

et, en développant (387),

$$(394)\qquad \mathrm{F} = \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right),$$

puis substituant (392), on obtient cette autre formule d'Ampère :

$$(395)\qquad \text{répulsion}\,(\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds) = \frac{4\,\mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'}{\sqrt{r}}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}.$$

Substituant (389) et (390) dans (394), on trouve une troisième formule d'Ampère :

$$(396)\qquad \text{répulsion}\,(\mathrm{I}'\,ds',\ \mathrm{I}\,ds) = \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\frac{-2\cos\varepsilon - 3\cos\theta\cos\theta'}{r^2};$$

et, en substituant (391), on a cette quatrième formule d'Ampère :

$$(397)\qquad \text{répulsion}\,(\mathrm{I}'\,ds',\ \mathrm{I}\,ds) = \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\frac{-\cos\theta\cos\theta' - 2\sin\theta\sin\theta'\cos\omega}{r^2}.$$

Chacune des formules (393), (395), (396), (397) démontre **237**.

Solution générale, empruntée au cours de M. Maurice Lévy.

239. Soient

I, I' les intensités constantes;
S, S' les lignes fermées et rigides de deux courants ε, ε';
I ds, I' ds' deux éléments de ces courants;
x, y, z et x', y', z' leurs coordonnées rectangulaires, dans un système d'axes à gauche;
r leur distance mutuelle.

L'action la plus générale de I' ds' sur I ds, qui soit compatible avec les principes **232**, **233** et **234**, peut toujours être représentée par une force

$$(398)\qquad \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{R},$$

appliquée au point (x, y, z), ayant pour composantes

$$(399)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_x &= \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{X},\\ (\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_y &= \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{Y},\\ (\mathrm{I}'\,ds', \mathrm{I}\,ds)_{xy} &= \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\,ds'\,\mathrm{Z}, \end{aligned}\right.$$

et par un couple

$$(400) \qquad \mathrm{I}\, ds\, \mathrm{I}'\, ds' \mathrm{G}_1,$$

ayant pour moments, par rapport aux axes,

$$(401) \qquad \begin{cases} (\mathrm{I}'\, ds',\ \mathrm{I}\, ds)_{yz} = \mathrm{I}\, ds\, \mathrm{I}'\, ds'\, \mathrm{L}_1, \\ (\mathrm{I}'\, ds',\ \mathrm{I}\, ds)_{zx} = \mathrm{I}\, ds\, \mathrm{I}'\, ds'\, \mathrm{M}_1, \\ (\mathrm{I}'\, ds',\ \mathrm{I}\, ds)_{xy} = \mathrm{I}\, ds\, \mathrm{I}'\, ds'\, \mathrm{N}_1. \end{cases}$$

Or les conditions **232, 233** et **234** sont satisfaites par la solution de M. Reynard, dans laquelle l'action de $\mathrm{I}'\, ds'$ sur $\mathrm{I}\, ds$ est représentée par une force unique

$$(402) \qquad (\mathrm{I}'\, ds',\ \mathrm{I}\, ds) = \mathrm{I}\, ds\, \mathrm{I}'\, ds'\, \mathrm{R}_0. \qquad (381)$$

appliquée au point (x, y, z), ayant pour composantes les expressions (379), qu'on peut mettre sous la forme abrégée

$$(403) \qquad \mathrm{I}\, ds\, \mathrm{I}'\, ds'\, \mathrm{X}_0,\quad \mathrm{I}\, ds\, \mathrm{I}'\, ds'\, \mathrm{Y}_0,\quad \mathrm{I}\, ds\, \mathrm{I}'\, ds'\, \mathrm{Z}_0.$$

Soit

$$(404) \qquad \mathrm{X} = \mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_1,\quad \mathrm{Y} = \mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}_1,\quad \mathrm{Z} = \mathrm{Z}_0 + \mathrm{Z}_1.$$

La question est ramenée à trouver les expressions les plus générales des quantités

$$(405) \qquad \mathrm{R}_1,\ \mathrm{G}_1,$$

c'est-à-dire de la force complémentaire et du couple, qui ont pour composantes X_1, Y_1, Z_1 et L_1, M_1, N_1.

Or la première équation (377) peut s'écrire

$$\mathrm{I}\, ds\, \mathrm{I}' \int_0^{s'} \mathrm{X}_0\, ds' = \mathrm{I}(\mathrm{C}\, dy - \mathrm{B}\, dz).$$

Mais on a vu (n° **112**) que les seconds membres des équations (377) ne peuvent avoir qu'une valeur compatible avec les principes **232** et **234**. Donc on doit avoir aussi, en introduisant les notations (404),

$$\mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\int_0^{\mathrm{S}'}\mathrm{X}\,ds' \quad \text{ou} \quad \mathrm{I}\,ds\,\mathrm{I}'\int_0^{\mathrm{S}'}(\mathrm{X}_0+\mathrm{X}_1)\,ds' = \mathrm{I}(\mathrm{C}\,dy-\mathrm{B}\,dz).$$

Retranchant membre à membre ces deux expressions de la composante (C′, I ds), on trouve

$$(406) \qquad \int_0^{\mathrm{S}'}\mathrm{X}_1\,ds' = 0.$$

Il résulte aussi du principe **234** que le couple de l'action de ε' sur I ds est nul dans la solution générale. Comme il est nul dans la solution de M. Reynard, la différence des moments de ces deux couples, par rapport à l'axe des x, est nulle, quel que soit cet axe :

$$(407) \qquad \int_0^{\mathrm{S}'}\mathrm{L}_1\,ds' = 0.$$

Les identités (406), (407) ayant lieu quelle que soit la ligne fermée S′, on doit avoir

$$(408) \qquad \mathrm{X}_1 = \frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial s'}, \quad \mathrm{L}_1 = \frac{\partial \mathrm{L}_2}{\partial s'},$$

X_2 et L_2 ne pouvant dépendre que des positions et des directions de ds et de ds', c'est-à-dire de

$$(409) \qquad x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ \frac{\partial x}{\partial s},\ \frac{\partial y}{\partial s},\ \frac{\partial z}{\partial s}$$

et de $\frac{\partial x'}{\partial s'}, \frac{\partial y'}{\partial s'}, \frac{\partial z'}{\partial s'}$; mais ces trois dernières dérivées ne peuvent y entrer, en vertu de (406) et (407); et les variables (409) sont les seules dont X_2 et L_2 puissent dépendre.

Le calcul suivant de X_1 est emprunté à la Leçon faite au Collège de

France par M. Maurice Lévy le 11 février 1881, aussi exactement que j'ai pu le faire en complétant mes Notes.

On trouvera pareillement $Y_1 = \frac{\partial Y_2}{\partial s'}$, $Z_1 = \frac{\partial Z_2}{\partial s'}$, et le calcul de R_1 (405) est ramené à celui des trois fonctions X_2, Y_2, Z_2 des neuf variables (409), indépendantes de $\frac{\partial x'}{\partial s'}, \frac{\partial y'}{\partial s'}, \frac{\partial z'}{\partial s'}$, mais non complètement arbitraires, car la force complémentaire R_1 est assujettie à être indépendante du choix des axes; elle est définie en grandeur, direction et sens, par rapport aux éléments ds et ds', par leur position relative; et, comme ils n'ont que deux positions relatives déterminées par les quatre quantités

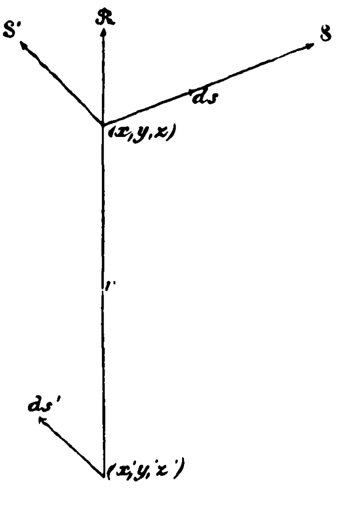
$$(410) \qquad r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'},$$

les composantes de R_1

$$(411) \qquad \mathfrak{R}, \; \mathfrak{S}, \; \mathfrak{S}' \quad (fig. 21)$$

dans le prolongement de r, suivant ds et parallèlement à ds', sont des

Fig. 21.



fonctions des quatre variables indépendantes (410) et ne peuvent dépendre d'aucune autre donnée, sauf le signe de ω (notation 388).

L'expression $X_1 = \mathcal{A}\cos(\mathcal{A}, x) + \mathcal{S}\cos(\mathcal{S}, x) + \mathcal{S}'\cos(\mathcal{S}', x)$, substituée dans (408), donne

$$(412) \qquad X_1 = \mathcal{A}\frac{x - x'}{r} + \mathcal{S}\frac{\partial x}{\partial s} + \mathcal{S}'\frac{\partial x'}{\partial s'} = \frac{\partial X_2}{\partial s'}.$$

Quand l'axe des x est perpendiculaire à r et à ds', cette équation se réduit à

$$\mathcal{S}\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial X_2}{\partial s'};$$

il en résulte

$$\frac{\partial x}{\partial s}\int_0^{S'} \mathcal{S}\, ds' = \int_0^{S'} \frac{\partial X_2}{\partial s'} ds' = 0;$$

et, cette équation devant être vérifiée quelle que soit la ligne fermée S', on doit avoir $\mathcal{S} = \frac{\partial K}{\partial s'}$. Mais, $\mathcal{S}$ ne pouvant dépendre que des quatre variables (410), les deux premières seules peuvent entrer dans la fonction K, indépendante de toute dérivée relative à s'; donc

$$(413) \qquad \mathcal{S} = \frac{\partial K\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}.$$

Dès lors, l'équation (412) exige que $\mathcal{A}\frac{x - x'}{r} + \mathcal{S}'\frac{\partial x'}{\partial s'}$ soit aussi la dérivée exacte, par rapport à s', d'une fonction $H(x - x')$ de x', y', z', indépendante de toute dérivée relative à s' :

$$\mathcal{A}\frac{x - x'}{r} + \mathcal{S}'\frac{\partial x'}{\partial s'} = \frac{\partial H}{\partial s'}(x - x') - H\frac{\partial x'}{\partial s'},$$

équation qui devient

$$(414) \qquad \frac{\mathcal{A}}{r} = \frac{\partial H}{\partial s'}$$

ou

$$(415) \qquad \mathcal{S}' = -H,$$

suivant que l'axe des x est perpendiculaire à ds' ou à r. D'ailleurs, $\mathfrak{A}$ ne pouvant dépendre que des quatre variables (410), l'équation (414) montre que H ne peut contenir que r et $\frac{\partial r}{\partial s}$. On a donc

$$(416)\qquad \mathfrak{s} = \frac{\partial \mathrm{K}\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'},$$

$$(417)\qquad \mathfrak{s}' = -\mathrm{H}\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right),$$

$$(418)\qquad \frac{\mathfrak{A}}{r} = \frac{\partial \mathrm{H}\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}.$$

On voit que les fonctions H et K restent complètement arbitraires.

En vertu de (416), (417) et (418), l'équation (412) devient

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s'}(x - x') + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial s'}\frac{\partial x}{\partial s} - \mathrm{H}\frac{\partial x'}{\partial s'} = \frac{\partial\left[\mathrm{H}(x - x') + \mathrm{K}\frac{\partial x}{\partial s}\right]}{\partial s'}.$$

Substituant dans (404), on obtient la première des trois équations (419)

$$(419)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= \mathrm{X}_0 + \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{H}}{2}\frac{\partial . r^2}{\partial x} + \mathrm{K}\frac{\partial x}{\partial s}\right)}{\partial s'},\\ \mathrm{Y} &= \mathrm{Y}_0 + \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{H}}{2}\frac{\partial . r^2}{\partial y} + \mathrm{K}\frac{\partial y}{\partial s}\right)}{\partial s'},\\ \mathrm{Z} &= \mathrm{Z}_0 + \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{H}}{2}\frac{\partial . r^2}{\partial z} + \mathrm{K}\frac{\partial z}{\partial s}\right)}{\partial s'}; \end{aligned}\right.$$

$$(420)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{L}_1 &= \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{P}}{2}\frac{\partial . r^2}{\partial x} + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial s}\right)}{\partial s'},\\ \mathrm{M}_1 &= \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{P}}{2}\frac{\partial . r^2}{\partial y} + \mathrm{Q}\frac{\partial y}{\partial s}\right)}{\partial s'},\\ \mathrm{N}_1 &= \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{P}}{2}\frac{\partial . r^2}{\partial z} + \mathrm{Q}\frac{\partial z}{\partial s}\right)}{\partial s'}. \end{aligned}\right.$$

La seconde équation (408) donnera (420), comme la première a donné (419), et H, K, P, Q sont quatre fonctions arbitraires de r et $\frac{\partial r}{\partial s}$.

240. *Les formules de M. Reynard sont les seules qui satisfassent à ses hypothèses et au principe* (n° **232**).

On va le voir par les formules (419) et (420). Les hypothèses de M. Reynard sont les suivantes :

241. L'action de I′*ds′* sur I *ds* se réduit à une force unique, appliquée à *ds*.

242. Cette action est normale à *ds*.

243. Elle est dans le plan passant par r et *ds′*.

244. Elle change seulement de sens, en même temps que I *ds*.

Voici la démonstration de l'énoncé **240** :

En vertu de l'hypothèse **241**, le couple (420) est nul. On déduit du n° **242**

$$X\frac{\partial x}{\partial s}+Y\frac{\partial y}{\partial s}+Z\frac{\partial z}{\partial s}=0, \tag{421}$$

du n° **243**, $\mathfrak{s}=0$ (notation 411), ou (413)

$$\frac{\partial K}{\partial s'}=0;$$

K disparaît donc des composantes (419) qui, substituées dans (421), donnent

$$X_0\frac{\partial x}{\partial s}+Y_0\frac{\partial y}{\partial s}+Z_0\frac{\partial z}{\partial s}+\frac{\partial\left[\frac{H}{2}\frac{\partial(r^2)}{\partial s}\right]}{\partial s'}=0.$$

En vertu des équations (379), la somme des trois premiers termes de cette équation est nulle, et elle exprime que la fonction $\frac{H}{2}\frac{\partial(r^2)}{\partial s}$, qui ne peut dépendre que de r et de $\frac{\partial r}{\partial s}$, en est indépendante, puisqu'elle l'est de s', et se réduit à une constante.

La condition (nº **244**) exige que X, Y, Z et, par suite, H soient des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$, par suite, de $\frac{\partial r}{\partial s}$; d'où

$$H\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right) = f(r)\frac{\partial r}{\partial s}.$$

Mais $\frac{H}{2}\frac{\partial(r^2)}{\partial s} = rf(r)\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2$ ne peut être constante sans être nulle; donc

$$H = 0,$$

et la force (419) se réduit à celle de M. Reynard; ce qui démontre (nº **240**).

§ XIV. — Actions pondéromotrices reçues et produites par les courants fermés permanents, a plusieurs dimensions.

245. *Quinzième principe.* — Un courant permanent, à plusieurs dimensions, est décomposable en courants linéaires, c'est-à-dire à sections infiniment petites.

Ce principe pourrait être démontré rigoureusement par des expériences précises, qui n'ont pas été faites, mais qui n'ont pas été jugées utiles : les physiciens l'admettent avec confiance comme suffisamment démontré par des conséquences variées, qui sont bien établies.

246. L'*intensité linéaire* d'un courant permanent isolé, soit matériellement dans un fil, soit par la pensée dans un tube de flux, sera définie, dans l'hypothèse de deux fluides, comme dans celle d'un seul, la somme des flux d'électricité, pris en valeur absolue, qui en traversent chaque section dans l'unité de temps.

247. Un courant à trois dimensions est *fermé* quand l'électricité n'en traverse pas la surface, et *permanent* quand il est composé de courants linéaires permanents, fixes par rapport à son volume.

248. Lemme. — *Si un courant fermé, à plusieurs dimensions, est décomposable en courants linéaires, il l'est aussi en courants linéaires fermés, pourvu qu'on lui adjoigne un certain système de courants fictifs, dont les éléments sont deux à deux égaux, superposés et de sens contraires.*

En effet, le volume ϖ d'un courant fermé $\mathcal{C}'$ peut toujours être décomposé en plusieurs parties ϖ_1, ϖ_2, ..., assez petites pour que toute ligne du courant, qui a des points dans l'une d'elles, ait un point d'entrée et un point de sortie sur sa surface. L'élément de surface $d\lambda_{pq}$, par lequel un courant linéaire, d'intensité I, sort de ϖ_p et entre dans ϖ_q, étant pris pour base d'un cône, dont le sommet O est arbitraire, soient deux courants fictifs, d'intensité I, passant dans ce cône en sens contraires. Cette construction, répétée pour tous les éléments de séparation $d\lambda$ et pour toutes les cloisons λ, fera correspondre à tout courant linéaire, d'intensité I, qui traverse ϖ_p de λ_{pq} à λ_{qr}, un courant linéaire, d'intensité I, circulant dans le canal fermé $O\lambda_{pq}\lambda_{qr}O$, et définit un système de courants linéaires fermés, satisfaisant à l'énoncé du n° **248**.

248'. On voit qu'un énoncé et une démonstration analogues s'appliquent au cas de deux dimensions.

Notations de l'intensité cubique et des composantes d'un courant à trois dimensions.

La notation

$$(422) \qquad \mathrm{I}\,ds$$

va désigner, comme précédemment, un élément de courant linéaire, d'intensité I et de longueur ds, mais faisant partie d'un courant à trois dimensions.

249. L'*intensité cubique* d'un courant à trois dimensions, au point (x, y, z), est l'intensité linéaire, rapportée à l'unité de surface, du courant linéaire I, qui traverse un élément $d\omega$ du plan normal à la ligne du courant passant par ce point :

$$i = \frac{I}{d\omega}. \tag{423}$$

L'élément I ds de courant linéaire, qui a pour section droite ω et pour longueur ds, ayant pour volume

$$d\varpi = d\omega\, ds, \tag{424}$$

on a, en multipliant membre à membre (423) et (424),

$$i\, d\varpi = I\, ds. \tag{425}$$

250. La *composante j* d'un courant à trois dimensions, au point $M(x, y, z)$, dans une direction $\mathfrak{L}$, définie par ses cosinus α, β, γ, et qu'on peut toujours regarder comme la normale positive d'une surface Λ, passant par M, est l'intensité I du courant linéaire qui traverse en ce point un élément $d\Lambda$ de cette surface, intensité rapportée à l'unité de surface et affectée du signe de la région où le courant s'introduit :

$$j = \pm \frac{I}{d\Lambda}. \tag{426}$$

251. Les *trois composantes u, v, w* d'un courant à trois dimensions, au point (x, y, z), sont les composantes de ce courant dans les directions positives des trois axes.

La formule (426), appliquée à un courant linéaire I, qui entre par la face rectangulaire $d\Lambda = dx\, dy$, appartenant au plan $z =$ une constante z_0, dans un parallélépipède oblique ayant pour arêtes latérales des lignes du courant, et qui en sort par la face comprise dans le plan $z = z_0 + dz$, devient

$$w = \pm \frac{I}{dx\, dy}.$$

Le volume du parallélépipède, essentiellement positif, ainsi que dx et dy, est

$$d\varpi = \pm\, dx\, dy\, dz.$$

Multipliant membre à membre ces deux équations et observant que leurs seconds membres ont tous deux le signe de dz en évidence, on obtient la troisième des formules suivantes :

$$(427) \qquad u\,d\varpi = \mathrm{I}\,dx, \quad v\,d\varpi = \mathrm{I}\,dy, \quad w\,d\varpi = \mathrm{I}\,dz;$$

et, en éliminant $\frac{1}{d\varpi}$ au moyen de l'équation (425),

$$(428) \qquad u = i\frac{\partial x}{\partial s}, \quad v = i\frac{\partial y}{\partial s}, \quad w = i\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Donc la composante 250 du courant, dans une direction quelconque $\mathfrak{L}$, est la projection de son intensité cubique sur cette direction

$$(429) \qquad j = i\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial s}$$

ou

$$j = i\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \dots\right)$$

ou, en substituant (428),

$$j = u\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \dots$$

ou [notations **250**]

$$(430) \qquad j = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Action d'un système M', fixe et invariable dans sa constitution physique, sur un élément extérieur $i\,d\varpi$ de courant à trois dimensions, fixe et permanent.

252. Les formules (11) et (50) donnent immédiatement, à l'aide des substitutions (425) et (427), les composantes de cette action, qui se réduit à une force unique appliquée à l'élément de volume $i\,d\varpi$,

$$(431) \qquad \begin{cases} (M', i\,d\varpi)_x = (\mathrm{C}_{M'}v - \mathrm{B}_{M'}w)\,d\varpi, \\ (M', i\,d\varpi)_y = (\mathrm{A}_{M'}w - \mathrm{C}_{M'}u)\,d\varpi, \\ (M', i\,d\varpi)_z = (\mathrm{B}_{M'}u - \mathrm{A}_{M'}v)\,d\varpi; \end{cases}$$

$$(431') \quad \begin{cases} (M', i\,d\varpi)_x = \left(\dfrac{\partial V_{M'}}{\partial y} w - \dfrac{\partial V_{M'}}{\partial z} v\right) d\varpi, \\ (M', i\,d\varpi)_y = \left(\dfrac{\partial V_{M'}}{\partial z} u - \dfrac{\partial V_{M'}}{\partial x} w\right) d\varpi, \\ (M', i\,d\varpi)_z = \left(\dfrac{\partial V_{M'}}{\partial x} v - \dfrac{\partial V_{M'}}{\partial y} u\right) d\varpi. \end{cases}$$

Propriétés de l'axe et du moment d'un courant fermé à trois dimensions.

253. Il résulte du lemme **248** que les actions d'un système fixe M', pouvant comprendre des courants fermés, des aimants dont l'aimantation est rigide, et le magnétisme terrestre, sur un courant fermé, fixe et permanent, $\mathfrak{C}$, à trois dimensions, se déduisent de (119) en remplaçant le courant $\mathfrak{C}$ par le système de courants linéaires dans lesquels on peut le décomposer. Il suffit de faire, dans les formules (119) et suivantes, les substitutions (425) et (427).

Soit ϖ le volume du courant $\mathfrak{C}$. Son *moment* k_0 et son *axe* ζ_0 sont définis par les formules (121), pourvu qu'on y fasse les substitutions (427), et qui deviennent les suivantes :

$$(432) \quad \begin{cases} \alpha_0 k_0 = \underset{\varpi}{\iiint} yw\,d\varpi = -\underset{\varpi}{\iiint} zv\,d\varpi, \\ \beta_0 k_0 = \underset{\varpi}{\iiint} zu\,d\varpi = -\underset{\varpi}{\iiint} xw\,d\varpi, \\ \gamma_0 k_0 = \underset{\varpi}{\iiint} xv\,d\varpi = -\underset{\varpi}{\iiint} yu\,d\varpi. \end{cases}$$

Soit M un point solidaire avec le corps rigide $\mathfrak{C}$. Dans chacun des deux cas **96** et **97**, c'est-à-dire lorsque les composantes A, B, C de la force directrice D du système M' sont constantes en tous les points d'un volume comprenant $\mathfrak{C}$ et M, ou lorsque ce volume est infiniment petit, l'action de M' sur $\mathfrak{C}$ est représentée par l'énergie (122)

$$(433) \quad W_{M',\mathfrak{C}} = -k_0(\alpha_0 A_0 + \beta_0 B_0 + \gamma_0 C_0) = -k_0 D_0 \cos(D_0, \zeta_0) = k_0 \frac{\partial V_0}{\partial \zeta_0},$$

dans laquelle A_0, B_0, C_0, D_0, V_0 désignent les valeurs, au point M, de A, B, C, D et du potentiel V de M'.

Les formules (432), et les propriétés qui s'en déduisent (nos **99** à **103**), s'appliquent au cas où $\mathfrak{S}$ désigne un système rigide quelconque de courants fermés, par exemple au système de courants fermés moléculaires qui constitue, dans l'hypothèse d'Ampère, un aimant doué d'un magnétisme rigide, placé dans un champ de force uniforme. Elles s'appliquent aussi à chaque molécule magnétique d'un aimant réel, quand on la suppose mobile autour du point M, lié invariablement à la molécule et à l'aimant, conformément à la théorie de Weber.

Calcul de la partie bien définie $\mathfrak{V}_{\mathfrak{S}'}$ du potentiel, au point (x, y, z), d'un courant fermé infiniment petit $\mathfrak{S}'$, à trois dimensions.

254. Le moment k'_0, l'axe $\mathfrak{L}'_0$ et les cosinus directeurs de cet axe, $\alpha'_0, \beta'_0, \gamma'_0$, étant définis par les formules (432), en y accentuant toutes les lettres, et r désignant la distance du point (x, y, z) au courant $\mathfrak{S}'$, soient μ un pôle de solénoïde indéfini, placé en ce point, et V'_0 son potentiel au point (x'_0, y'_0, z'_0) du même courant. On a (433)

$$\mathrm{W}_{\mu,\mathfrak{S}'} = \mathrm{k}'_0 \frac{\partial \mathrm{V}'_0}{\partial \mathfrak{L}'_0}$$

et, en substituant (234) $\frac{\mu}{r}$ à V'_0,

$$\mathrm{W}_{\mu,\mathfrak{S}'} = \mu \mathrm{k}'_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{L}'_0};$$

mais on a aussi (253)

$$\mathrm{W}_{\mu,\mathfrak{S}'} = \mu \mathfrak{V}_{\mathfrak{S}'};$$

d'où, en identifiant,

$$\mathfrak{V}_{\mathfrak{S}'} = \mathrm{k}'_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{L}'_0}. \tag{434}$$

Deux systèmes équivalents, dans un volume donné, ayant été définis (no **146**) ceux dont les potentiels ont une différence constante, en tous les points de ce volume, l'équation (434) exprime que l'élément k'_0 de solénoïde, dont l'axe $\mathfrak{L}'_0$ et le moment k'_0 sont définis par les formules (432), équivaut au courant fermé $\mathfrak{S}'$ qui est infiniment petit et à trois dimensions; et l'équation (433), que l'énergie de $\mathcal{C}'$, dans le champ de force du système M', est égale à celle de l'élément équivalent de solénoïde.

Calcul des composantes A, B, C *de la force directrice* D *d'un courant* $\mathcal{C}'$ *à trois dimensions, fermé, fixe et permanent, en un point fixe* (x, y, z), *extérieur à son volume* ϖ'.

255. L'artifice **248**, et la substitution (427) faite dans les formules (82), donnent, pour ces composantes, les expressions (72). D'ailleurs, la méthode (n° **53**), qui a donné le potentiel d'un courant linéaire, s'étend au cas actuel, sans adjonction de courants fictifs.

Soit k (25) le moment d'un élément k de solénoïde fictif dont l'axe ζ commencerait au point (x, y, z) et aurait pour cosinus directeurs α, β, γ. Son potentiel aurait pour partie bien définie (52), au point (x', y', z') où se trouve l'élément $i'\,d\varpi'$ du courant $\mathcal{C}'$,

$$(435)\qquad \varphi_k = \mathrm{k}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta},$$

et il produirait sur cet élément une force unique, appliquée au point (x', y', z'), ayant (431' et 435) pour projection sur l'axe des x

$$(k, i'\,d\varpi')_x = d\varpi'\left(w'\frac{\partial}{\partial y'} - v'\frac{\partial}{\partial z'}\right)\varphi_k$$
$$= \mathrm{k}\,d\varpi'\left(w'\frac{\partial}{\partial y'} - v'\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} = -\,\mathrm{k}\,d\varpi'\left(w'\frac{\partial}{\partial y} - v'\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}$$

ou

$$(436)\qquad (k, i'\,d\varpi')_x = -\,\mathrm{k}\,\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \frac{w'}{r}\,d\varpi'}{\partial y} - \frac{\partial \frac{v'}{r}\,d\varpi'}{\partial z}\right).$$

Posant

$$(437)\qquad \mathrm{F}_{\mathcal{C}'} = \iiint_{\varpi'} \frac{u'}{r}\,d\varpi', \quad \mathrm{G}_{\mathcal{C}'} = \iiint_{\varpi'} \frac{v'}{r}\,d\varpi', \quad \mathrm{H}_{\mathcal{C}'} = \iiint_{\varpi'} \frac{w'}{r}\,d\varpi',$$

et intégrant (436) pour tous les éléments du volume ϖ' de $\mathfrak{S}'$, on

$$(438)\qquad (k, \mathfrak{S}')_x = \mathrm{k}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \mathrm{G}_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{H}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y}\right),$$

et (55″)

$$(439)\qquad (\mathfrak{S}', k)_x = \mathrm{k}\frac{\partial}{\partial \xi}\mathrm{A}_{\mathfrak{S}'}.$$

Ajoutant les formules (438) et (439), dont les premiers membres se détruisent en vertu du principe de l'action et de la réaction, on a

$$(440)\qquad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \mathrm{G}_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{H}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y} + \mathrm{A}_{\mathfrak{S}'}\right) = 0.$$

Or les expressions (437) étant les potentiels, au point (x, y, z), de trois masses fictives, de volume ϖ' et de densités u', v', w', on sait que leurs dérivées partielles du premier ordre convergent vers zéro avec $\frac{1}{r}$; et $\mathrm{A}_{\mathfrak{S}'}$ ou $-\frac{\partial \mathrm{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial x}$ jouit (n° 49) de la même propriété. D'ailleurs, la direction de ξ étant arbitraire dans (440), la parenthèse, à la fois constante en tous les points de l'espace extérieur à $\mathfrak{S}'$ et infiniment petite à l'infini, est identiquement nulle; ce qui démontre la première des trois équations

$$(441)\qquad \mathrm{A}_{\mathfrak{S}'} = \frac{\partial \mathrm{H}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{G}_{\mathfrak{S}'}}{\partial z},\quad \mathrm{B}_{\mathfrak{S}'} = \frac{\partial \mathrm{F}_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{H}_{\mathfrak{S}'}}{\partial x},\quad \mathrm{C}_{\mathfrak{S}'} = \frac{\partial \mathrm{G}_{\mathfrak{S}'}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{F}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y}.$$

Il en résulte (76) l'expression suivante de la partie bien définie du potentiel de $\mathfrak{S}'$ au point (x, y, z), où se termine une ligne l, menée arbitrairement d'un point quelconque, pris à l'infini,

$$(442)\qquad \mathfrak{V}_{\mathfrak{S}'} = -\int_{\infty}^{l}\left(\mathrm{A}_1\frac{\partial x_1}{\partial l_1} + \mathrm{B}_1\frac{\partial y_1}{\partial l_1} + \mathrm{C}_1\frac{\partial z_1}{\partial l_1}\right)dl_1,$$

$\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1$ désignant les valeurs des fonctions (441) au point (x_1, y_1, z_1), où se termine l'arc l_1 qui fait partie de l.

Les formules (23)

$$(443)\qquad \frac{\partial \mathfrak{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial x} = -\mathrm{A}_{\mathfrak{S}'},\quad \frac{\partial \mathfrak{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y} = -\mathrm{B}_{\mathfrak{S}'},\quad \frac{\partial \mathfrak{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} = -\mathrm{C}_{\mathfrak{S}'}$$

donnent

$$(444)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial x} &= \frac{\partial G_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} - \frac{\partial H_{\mathfrak{S}'}}{\partial y},\\ \frac{\partial \mathfrak{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial y} &= \frac{\partial H_{\mathfrak{S}'}}{\partial x} - \frac{\partial F_{\mathfrak{S}'}}{\partial y},\\ \frac{\partial \mathfrak{V}_{\mathfrak{S}'}}{\partial z} &= \frac{\partial F_{\mathfrak{S}'}}{\partial y} - \frac{\partial G_{\mathfrak{S}'}}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

Les formules (437), (441) et (444) pouvaient aussi se déduire immédiatement des formules (82), (73) et (72), à l'aide de la substitution (427) et du lemme **248**.

Énergie de l'action mutuelle de deux courants fermés $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, fixes, permanents et à trois dimensions.

256. Soient ϖ et ϖ' leurs volumes, x, y, z et x', y', z' les coordonnées rectangulaires, dans un système d'axes à gauche, des éléments $i\,d\varpi$, $i'\,d\varpi'$ de ces courants; l'adjonction des courants fictifs du lemme **248** et les substitutions (425), (427) permettent de déduire immédiatement des formules (118) et (118')

$$(445)\qquad W_{\mathfrak{S}',\mathfrak{S}} = -\iiint_{\varpi} (F_{\mathfrak{S}'}u + G_{\mathfrak{S}'}v + H_{\mathfrak{S}'}w)\,d\varpi,$$

$$(446)\quad \left\{\begin{aligned} W_{\mathfrak{S}',\mathfrak{S}} &= -\iiint_{\varpi} d\varpi \iiint_{\varpi'} \frac{uu' + vv' + ww'}{r}\,d\varpi'\\ &= -\iiint_{\varpi} i\,d\varpi \iiint_{\varpi'} i'\,d\varpi' \frac{\cos(i, i')}{r}. \end{aligned}\right.$$

Énergie de l'action mutuelle d'un aimant A', doué d'une aimantation rigide, et d'un courant fermé $\mathfrak{S}'$, permanent et à trois dimensions.

257. On ne change pas (n° **162**) cette énergie en remplaçant les éléments magnétiques de l'aimant par le système équivalent $\mathfrak{S}'$ d'éléments de solénoïdes. On a vu que, en désignant l'aimantation de A' au point (x', y', z') par Φ', ses composantes par $\alpha'\Phi'$, $\beta'\Phi'$, $\gamma'\Phi'$, et posant (199)

$$(447) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \displaystyle\iiint_{\varpi'} \frac{\alpha'\Phi'}{r}\, d\varpi', \quad \eta = \iiint_{\varpi'} \frac{\beta'\Phi'}{r}\, d\varpi', \quad \zeta = \iiint_{\varpi'} \frac{\gamma'\Phi'}{r}\, d\varpi', \\ r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \end{array} \right.$$

les fonctions (437), relatives à ce système $\mathfrak{S}'$, ont (204) pour expressions, au point (x, y, z),

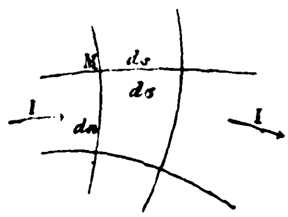
$$(448) \qquad F_{A'} = \frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}, \quad G_{A'} = \frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \quad H_{A'} = \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}.$$

Donc la formule (445) s'applique à l'énergie demandée, quand on y remplace $\mathfrak{S}'$ par A',

$$(449) \qquad W_{A',\mathfrak{S}} = -\iiint_{\varpi} (F_{A'}u + G_{A'}v + H_{A'}w)\, d\varpi.$$

258. L'*intensité superficielle* I_2, en un point M d'un courant à trois dimensions, parcourant une surface donnée, peut être définie l'intensité,

Fig. 22.



rapportée à l'unité de longueur, du courant linéaire I, qui traverse un élément dn (*fig.* 22) de la trajectoire orthogonale des lignes du courant passant en M :

$$(450) \qquad I_2 = \frac{I}{dn}.$$

L'élément rectangulaire I ds du courant linéaire, qui a pour dimensions dn et ds, ayant pour surface

$$(451) \qquad d\sigma = dn\, ds,$$

on a, en multipliant membre à membre (450) et (451),

$$\mathrm{I}_2\, d\sigma = \mathrm{I}\, ds. \tag{452}$$

La bobine sphérique $\mathfrak{S}'$ (n° **201**) a été considérée comme un système de courants linéaires, de même intensité linéaire I', parcourant, dans le sens xy, les petits cercles d'intersection de la sphère, qui a pour centre l'origine et pour rayon ρ', avec des plans, perpendiculaires à l'axe $\mathrm{O}z'$ de la bobine, qui partagent cet axe en éléments égaux dz'. En posant $z' = \rho' \cos\theta'$, on voit que l'élément de méridien projeté suivant dz' a pour longueur $dn' = \frac{dz'}{\sin\theta'}$. A toute distance finie de la sphère, la bobine agit, à l'intérieur et à l'extérieur, comme un courant à deux dimensions, dont les lignes sont de révolution autour de $\mathrm{O}z$, et dont l'intensité superficielle est $\mathrm{I}'_2 = \frac{\mathrm{I}'}{dn'}$ ou $\mathrm{I}'_2 = \frac{\mathrm{I}'}{dz'} \sin\theta'$. Posant

$$p' = \frac{\mathrm{I}'}{dz'}, \tag{453}$$

on a donc

$$\mathrm{I}'_2 = p' \sin\theta'. \tag{454}$$

259. Soient O et R', r' le centre commun et les rayons d'une sphère creuse, parcourue en tous ses points, dans le sens xy, par un courant $\mathfrak{S}'$ à trois dimensions, dont les lignes sont de révolution autour de son rayon $\mathrm{O}z$. Pour qu'elle soit décomposable en bobines sphériques, dont l'une $d\mathfrak{S}'$, comprise entre les sphères de rayons ρ' et $\rho' + d\rho'$, ait pour intensité superficielle l'expression (454), il faut et il suffit que le coefficient p' soit constant dans toute cette bobine $d\mathfrak{S}'$, c'est-à-dire que ce coefficient, d'ailleurs proportionnel à $d\rho'$, soit de la forme

$$p' = f(\rho')\, d\rho';$$

d'où

$$\mathrm{I}'_2 = f(\rho') \sin\theta'\, d\rho', \tag{455}$$

ou que l'expression (423) de l'intensité cubique,

$$i' = \frac{\mathrm{I}'}{dn'\, d\rho'} = \frac{\mathrm{I}'_2}{d\rho'}, \tag{456}$$

ainsi transformée par la formule (450), soit de la forme

$$(457) \qquad i' = f(\rho')\sin\theta'.$$

Soit

$$(458) \qquad f(\rho') = q'\rho', \quad q' = \text{const.};$$

d'où

$$(459) \qquad i' = q'\rho'\sin\theta',$$

$$(460) \qquad I'_2 = q'\rho'\sin\theta'\,d\rho',$$

$$(461) \qquad \frac{I'}{d\varepsilon'} = q'\rho'\,d\rho'.$$

Au point (x, y, z), dont la distance $a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ au centre de la sphère est plus grande que son rayon R′, la partie bien définie du potentiel du courant (n° **259**) est (260 et 282)

$$(462) \qquad \mathfrak{V}_{ext} = K'_0\frac{z}{a^3},$$

$$(463) \qquad K'_0 = \frac{4}{3}\pi\int_{r'}^{R'}\rho'^3\frac{I'}{d\varepsilon'},$$

ou, en substituant (461),

$$(464) \qquad K'_0 = \frac{4}{3}\pi q'\int_{r'}^{R'}\rho'^4\,d\rho' = \frac{4}{15}\pi q'(R'^5 - r'^5).$$

260. Pour $a < R'$, c'est-à-dire en un point (x, y, z) intérieur à la sphère, l'action qu'elle exerce ne peut être calculée sans hypothèse. Celle qui va être faite (n° **262**) revient ici à supposer que la bobine sphérique $d\mathfrak{S}'$ (n° **259**), qui est comprise entre les sphères de rayons $a + \varepsilon$ et $a - \varepsilon$, et qui produit des actions infiniment petites, comme proportionnelles à son épaisseur 2ε, en tout point, soit intérieur à la plus petite, soit extérieur à la plus grande, produit aussi une action infiniment petite au point (x, y, z); et l'action de $\mathfrak{S}'$ en ce point se calculera en faisant abstraction de $d\mathfrak{S}'$.

Alors la partie restante de $\mathfrak{S}'$ aura, au point (x, y, z) de sa cavité, un potentiel, dont la partie bien définie sera

$$(465)\qquad \mathfrak{V}_{\mathfrak{C}'} = \mathfrak{V}_e + \mathfrak{V}_i,$$

$\mathfrak{V}_e$ provenant de la sphère creuse, de rayons r' et $a_1 = a - \varepsilon$, et $\mathfrak{V}_i$ de la partie comprise entre les surfaces sphériques qui ont pour rayons $a_2 = a + \varepsilon$ et R'; et l'action du courant $\mathfrak{C}'$ sur un élément de courant ou une molécule magnétique, placés au point (x, y, z), se calculera par les composantes

$$(466)\qquad A_{\mathfrak{C}'} = -\frac{d\mathfrak{V}_{\mathfrak{C}'}}{dx},\quad B_{\mathfrak{C}'} = -\frac{d\mathfrak{V}_{\mathfrak{C}'}}{dy},\quad C_{\mathfrak{C}'} = -\frac{d\mathfrak{V}_{\mathfrak{C}'}}{dz}$$

de la force directrice de $\mathfrak{C}'$ en ce point, en traitant a_1 et a_2 comme des constantes dans les dérivations. Alors on déduira de (462) et (464)

$$(467)\qquad \mathfrak{V}_e = \frac{4}{15}\pi q'(a_1^5 - r'^5)_{a_1=a}\frac{z}{a^3},$$

et de (281)

$$(468)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{V}_i &= -\frac{8}{3}\pi z\int_{\rho'=a_2}^{\rho'=R'}\frac{\mathrm{V}'}{dz'}\\ &= -\frac{8}{3}\pi q' z\int_{a_2}^{R'}\rho'\,d\rho' = -\frac{4}{3}\pi q' z(R'^2 - a_2^2)_{a_2=a}.\end{aligned}\right.$$

(465) devient

$$(469)\qquad \mathfrak{V} = \frac{4}{3}\pi q' z\left(\frac{a_1^5 - r'^5}{5a^3} - R'^2 + a_2^2\right)_{a_1=a_2=a};$$

d'où (466)

$$(470)\qquad \left\{\begin{aligned} A_{\mathfrak{C}'} &= \frac{4}{15}\pi q'\, 3xz\left(1 - \frac{r'^5}{a^5}\right),\\ B_{\mathfrak{C}'} &= \frac{4}{15}\pi q'\, 3yz\left(1 - \frac{r'^5}{a^5}\right),\\ C_{\mathfrak{C}'} &= \frac{4}{15}\pi q'\left[3z^2\left(1 - \frac{r'^5}{a^5}\right) - 6a^2 + 5R'^2\right].\end{aligned}\right.$$

Pour une sphère pleine,

$$(471)\quad \left\{ \begin{aligned} D_{\zeta'} &= \sqrt{(A^2_{\zeta'} + B^2_{\zeta'} + C^2_{\zeta'})}_{r=0} \\ &= \tfrac{1}{15}\pi q' \sqrt{3(10R'^2 - 9a^2)z^2 + (5R'^2 - 6a^2)^2}. \end{aligned} \right.$$

261. La fonction (469) ne satisfait pas à la définition (23) d'un potentiel : elle renferme, outre x, y et z, deux variables a_1, a_2, indépendantes des trois premières dans le calcul des dérivées qui représentent l'action au point (x, y, z) : en sorteque, pour calculer l'action en un autre point, il faudrait donner à a_1 et a_2 d'autres valeurs. On va voir en effet (§ XV) qu'un courant fermé, à trois dimensions, n'a pas de potentiel en un point intérieur, et il n'y aura pas de contradiction. La fonction (469) est de même nature que celle qui a été définie (n° **171**) sous le nom de *potentiel local* du magnétisme terrestre, sans examiner si le magnétisme terrestre a un potentiel.

L'équation (471) donne, pour la force directrice à la surface, en y faisant $a = R'$,

$$(472)\qquad D = \tfrac{4}{15}\pi q' R' \sqrt{3z^2 + R'^2}.$$

Au pôle,

$$z^2 = R'^2;$$

d'où

$$D = \tfrac{8}{15}\pi q' R'^2.$$

Or, au pôle magnétique de la Terre, l'intensité totale a été trouvée égale à 14 unités anglaises ou $10^{\bar{1},81\ldots}$ C.G.S. Si donc on attribuait le magnétisme terrestre à un courant sphérique, et, si la loi de l'intensité cubique satisfaisait à l'équation (459), cette intensité, à la surface, serait $i' = q' R' \sin\theta'$; d'où, en substituant la valeur de q', tirée de l'équation (472),

$$i' = \frac{15 D}{8\pi R'} \sin\theta'$$

et, en adoptant la valeur $D = 10^{\bar{1},81\ldots}$,

$$i' = 10^{\bar{9},781\ldots} \sin\theta' \text{ C.G.S.} = 10^{\bar{8},781\ldots} \sin\theta'^{\text{amp}}.$$

Cette intensité est rapportée au centimètre carré; ce qui donne $6^{\text{amp}},04 \sin\theta'$, soit $6^{\text{amp}} \sin\theta'$ par hectare. Ce courant marcherait vers l'ouest magnétique.

§ XV. — Actions pondéromotrices d'un courant permanent, à trois dimensions, sur les courants intérieurs a son volume.

Actions sur un élément de courant intérieur.

Un seul principe (nº **245**) a suffi pour calculer les forces pondéromotrices reçues et produites par les courants fermés permanents, dans le cas où le corps, qui reçoit l'action, ne fait pas partie du système agissant. Une hypothèse est indispensable pour aborder le cas contraire.

262. L'action d'un courant fermé, à trois dimensions, $\mathfrak{C}'$, sur un élément de courant intérieur

$$I\,ds = i\,d\varpi \qquad (425),$$

sera regardée comme calculable par les équations (11) ou (431), démontrées pour le cas où l'élément est en dehors du courant agissant.

Cette hypothèse est vérifiée par toutes les formules proposées jusqu'ici pour représenter l'action mutuelle de deux éléments de courants; car elles donnent, pour l'action d'une partie infiniment petite de $\mathfrak{C}'$ sur un élément de courant intérieur, une force unique, appliquée à cet élément, infiniment petite par rapport au produit $i\,d\varpi$, et dès lors par rapport à l'action du reste de $\mathfrak{C}'$.

Il résulte de l'hypothèse **262** que l'action d'un courant fermé permanent $\mathfrak{C}'$, à trois dimensions, sur un de ses éléments $i\,d\varpi$, se réduit à une force unique, représentée, dans un système rectangulaire d'axes à gauche, par les formules (431)

$$(473)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{C}', i\,d\varpi)_x = (\mathrm{C}v - \mathrm{B}w)\,d\varpi, \\ (\mathfrak{C}', i\,d\varpi)_y = (\mathrm{A}w - \mathrm{C}v)\,d\varpi, \\ (\mathfrak{C}', i\,d\varpi)_z = (\mathrm{B}u - \mathrm{A}w)\,d\varpi, \end{cases}$$

en posant

$$(474)\qquad A = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},\quad B = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x},\quad C = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\qquad (441)$$

et

$$(475)\quad F = \iiint_{\varpi'} \frac{u'}{r}\, d\varpi',\quad G = \iiint_{\varpi'} \frac{v'}{r}\, d\varpi',\quad H = \iiint_{\varpi'} \frac{w'}{r}\, d\varpi'\quad (437),$$

formules dans lesquelles ϖ' désigne le volume de $\mathfrak{S}'$, r la distance du point (x, y, z) de l'élément $d\varpi$ au point (x', y', z') de l'élément $d\varpi'$, et u', v', w' les composantes du courant en ce dernier point.

L'hypothèse **262** est admissible, pourvu que les fonctions (474) soient finies et déterminées. Or c'est ce qui résulte de la théorie bien connue des attractions réciproques aux carrés des distances, dans laquelle les fonctions (475) sont les potentiels, au point (x, y, z), de trois masses fictives, de volume ϖ', ayant, au point (x, y, z), les densités u', v', w'. On sait que leurs dérivées partielles du premier ordre sont finies et déterminées, même à l'intérieur des masses agissantes.

263. Quand on admet les formules de M. Reynard (379 et 380), les formules (473), (474) et (475) s'étendent au cas où le courant $\mathfrak{S}'$ n'est pas fermé; car alors les formules (373), (374), (377) et (378) s'étendent au cas où la ligne S' n'est pas fermée. Si on la désigne par s', on déduit des équations (377)

$$(476)\qquad \begin{cases} (\Sigma I's', I\,ds)_x = I(C\,dy - B\,dz), \\ (\Sigma I's', I\,ds)_y = I(A\,dz - C\,dx), \\ (\Sigma I's', I\,ds)_z = I(B\,dx - A\,dy), \end{cases}$$

en étendant le signe Σ à tous les courants linéaires non fermés $I's'$ dans lesquels $\mathfrak{S}'$ se décompose, et posant (374 et 373)

$$(474')\qquad A = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},\quad B = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x},\quad C = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$(477)\quad F = \sum I' \int_0^{s'} \frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\, ds',\quad G = \sum I' \int_0^{s'} \frac{1}{r}\frac{\partial y'}{\partial s'}\, ds',\quad H = \sum I' \int_0^{s'} \frac{1}{r}\frac{\partial z'}{\partial s'}\, ds'.$$

On voit que les formules (476), (474′) et (477) deviennent (473), (474) et (475), quand on y substitue (427),

$$(478)\qquad \mathrm{I}\,dx = u\,d\varpi,\quad \mathrm{I}\,dy = v\,d\varpi,\quad \mathrm{I}\,dz = w\,d\varpi.$$

Énergie $W_{\mathfrak{C}',\mathfrak{C}}$ *de l'action d'un courant fermé permanent* $\mathfrak{C}'$, *à trois dimensions, sur un courant fermé* $\mathfrak{C}$, *dont la ligne* S *est flexible et inextensible, mais dont l'intensité* I *reste constante.*

264. Cette énergie a été calculée (n° **89**) en supposant tous les points du courant, qui reçoit l'action, extérieurs à $\mathfrak{C}'$. Il s'agit uniquement d'étendre tout ce qui a été établi, dans le § IV, au cas où la ligne S est, tout entière ou en partie, à l'intérieur de $\mathfrak{C}'$. Par une conception abstraite, il faut réduire S à une ligne géométrique, dont le courant est parfaitement isolé de $\mathfrak{C}'$, de manière que les deux courants coexistent, sans que la présence de l'un modifie la marche de l'autre. Or toutes les propriétés établies dans le § IV reposent sur les formules (11) et (20) : les premières ont lieu, par hypothèse (n° **262**), dans le cas actuel; et la dernière,

$$(479)\qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

se déduit immédiatement des équations (474). L'action de $\mathfrak{C}'$ sur $\mathfrak{C}$ est donc encore exprimable par une énergie

$$(480)\qquad W_{\mathfrak{C}',\mathfrak{C}} = -\,\mathrm{I}\iint_{\Lambda}(A\alpha + B\beta + C\gamma)\,d\Lambda$$

ou

$$(481)\qquad W_{\mathfrak{C}',\mathfrak{C}} = -\,\mathrm{I}\varepsilon_{\Lambda} = -\,\mathrm{I}\varepsilon_{S};$$

$$(482)\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma \quad\text{et}\quad \varepsilon_{\Lambda} \quad\text{ou}\quad \varepsilon_{S}$$

désignant les cosinus directeurs de la normale positive de $d\Lambda$, et le flux de force que $\mathfrak{C}'$ envoie sur la face négative de Λ, et qui ne dépend que du contour S de cette aire, comme l'exprime la notation ε_S.

265. L'énergie (480) représente encore le travail virtuel de l'action de $\mathcal{C}'$ sur le courant $\mathcal{C}$, déformé sans faire varier I, jusqu'à ce que son aire A s'évanouisse. Elle a encore pour expression (109‴)

$$(483)\qquad W_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} = -\mathrm{I}\int_0^{\mathrm{S}}\left(\mathrm{F}\frac{\partial x}{\partial s} + \mathrm{G}\frac{\partial y}{\partial s} + \mathrm{H}\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds,$$

F, G, H étant les fonctions (475); d'où

$$(484)\qquad W_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} = -\mathrm{I}\int_0^{\mathrm{S}} ds \underbrace{\iiint}_{\varpi'} \frac{d\varpi'}{r}\left(u'\frac{\partial x}{\partial s} + v'\frac{\partial y}{\partial s} + w'\frac{\partial z}{\partial s}\right),$$

$$(485)\qquad W_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} = -\mathrm{I}\int_0^{\mathrm{S}} ds \underbrace{\iiint}_{\varpi'} \frac{i'}{r}\cos(\mathrm{I}, i')\,d\varpi'.$$

Au moyen des substitutions (427), les trois formules (483), (484), (485) donnent, pour l'énergie des actions électrodynamiques qu'un courant fermé $\mathcal{C}'$ exerce sur lui-même, $d\varpi$, $d\varpi'$ désignant deux éléments de son volume ϖ' :

$$(486)\qquad \begin{cases} W_{\mathcal{C}',\mathcal{C}'} = -\underbrace{\iiint}_{\varpi'} (\mathrm{F}u' + \mathrm{G}v' + \mathrm{H}w')\,d\varpi' \\[2ex] \qquad = -\underbrace{\iiint}_{\varpi'} d\varpi \underbrace{\iiint}_{\varpi'} \dfrac{uu' + vv' + ww'}{r}\,d\varpi' \\[2ex] \qquad = -\underbrace{\iiint}_{\varpi'} i\,d\varpi \underbrace{\iiint}_{\varpi'} i'\,d\varpi' \dfrac{\cos(i, i')}{r}. \end{cases}$$

L'équation (480) comprend le cas d'un élément k de solénoïde, rigide et permanent, dont l'intensité I est constante, et dont le fil conducteur est réduit à une ligne géométrique S, parfaitement isolée, en sorte que les deux courants $\mathcal{C}'$ et k coexistent, sans que l'un modifie la marche de l'autre. λ désignant son aire, $\mathrm{k} = \mathrm{I}\lambda$ son moment, et α, β, γ les cosinus directeurs de son axe $\mathfrak{L}$, (480) devient

$$(487)\qquad W_{\mathcal{C}',k} = -\mathrm{k}(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma),$$

$$(487')\qquad W_{\mathcal{C}',k} = -\mathrm{k}\mathrm{D}\cos(\mathrm{D}, \mathfrak{L}).$$

Les équations (487) et (122) étant de même forme, l'action de $\mathfrak{C}'$ sur k rigide se réduit à une force appliquée à k et à un couple, exprimés par les formules (124) et (125) ou (127).

266. Quand on admet les formules (379) et (380) de M. Reynard, les propriétés et les formules qui précèdent, (480), (482), (483), (484), (485), subsistent pour un courant non fermé et permanent $\mathfrak{C}'$, à trois dimensions.

267. *Lemme.* — Étant donné un courant permanent non fermé $\mathfrak{C}'$, à trois dimensions, les fonctions (474), quand on y substitue (475), satisfont à l'identité

$$(488)\quad \int_0^{L} \frac{A\,\partial x + B\,\partial y + C\,\partial z}{\partial l}\,dl = 4\pi \underset{\Lambda}{\int\int} j\,d\Lambda - \underset{\Lambda}{\int\int} d\Lambda \frac{\partial}{\partial \mathfrak{L}} \underset{\sigma'}{\int\int} \frac{j'\,d\sigma'}{\rho};$$

les notations

$$(489)\qquad \Lambda,\ L,\ \varpi',\ \sigma',\ \mathfrak{L},\ \mathfrak{L}',\ \rho,\ j,\ j' \quad \text{et} \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

étant définies de la manière suivante : Λ désigne une aire quelconque, L son périmètre, parcouru des pieds à la tête d'un observateur qui voit à sa gauche la normale positive $\mathfrak{L}$ de $d\Lambda$; ϖ' le volume du courant $\mathfrak{C}'$, et σ' sa surface, dont l'élément $d\sigma'$ a sa normale extérieure $\mathfrak{L}'$ positive; ρ la distance de $d\sigma'$ à $d\Lambda$; j, j' (n° **250**) les composantes du courant $\mathfrak{C}'$ suivant $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$; et α, β, γ les cosinus directeurs de $\mathfrak{L}$.

En effet, on a, pour un système rectangulaire d'axes à gauche, l'identité (7)

$$(490)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{L} \frac{A\,\partial x + B\,\partial y + C\,\partial z}{\partial l}\,dl \\ &\quad = \sum_{\Lambda}\left[\alpha\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)\right] d\Lambda \end{aligned} \right.$$

et, en vertu des équations (474),

$$(491)\quad \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right).$$

Or la fonction F (475) est le potentiel, au point (x, y, z), de la masse fictive, de volume ϖ', qui a pour densité u en ce point et u' au point (x', y', z'); d'où

(492) $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -4\pi u.$$

On peut décomposer le volume ϖ' en plusieurs autres ϖ'_p, ϖ'_q, ..., auxquels correspondent autant de fonctions F_p, F_q, ... de la forme (475), et assez petits pour que toute ligne du courant, qui a des points dans ϖ'_p, ait un point d'entrée 1 et un point de sortie 2 sur sa surface σ'_p, et l'on aura

(493) $$\varpi' = \varpi'_p + \varpi'_q + \ldots,$$

(494) $$F = F_p + F_q + \ldots, \quad G = G_p + G_q + \ldots, \quad H = H_p + H_q + \ldots.$$

Or

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\iiint_{\varpi'_p} \frac{u'}{r}\,d\varpi' = \sum I'_p \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dx' = -\sum I'_p \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\,dx',$$

en faisant la substitution (478) et étendant le signe Σ à tous les canaux tronqués qui conduisent les courants d'intensités linéaires I'_p, et dont les volumes ont pour somme ϖ'_p :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial G_p}{\partial y} + \frac{\partial H_p}{\partial z} &= -\sum I'_p \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\,dx' + \ldots\right) \\
&= -\sum I'_p \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\,ds' = \sum I'_p\left(\frac{1}{r_{p,1}} - \frac{1}{r_{p,2}}\right), \\
&= \sum\left(-\frac{j'_{p,1}}{r_{p,1}}\,d\sigma'_{p,1} - \frac{j'_{p,2}}{r_{p,2}}\,d\sigma'_{p,2}\right),
\end{aligned}$$

en vertu de (426); d'où

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial G_p}{\partial y} + \frac{\partial H_p}{\partial z} = -\sum_{\sigma'_p} \frac{j'_p}{r_p}\,d\sigma'_p,$$

$$\frac{\partial F_q}{\partial x} + \frac{\partial G_q}{\partial y} + \frac{\partial H_q}{\partial z} = -\sum_{\sigma'_q} \frac{j'_q}{r_q}\,d\sigma'_q,$$

....

Ajoutant toutes ces équations membre à membre, et observant qu'à chaque élément $d\sigma'_{p,2} = d\sigma'_{q,1}$ de la cloison $\sigma'_{p,q}$, qui sépare deux volumes contigus ϖ'_p, ϖ'_q, élément par lequel un même courant, d'intensité I', sort de ϖ'_p et entre dans ϖ'_q, correspondent, sous les signes Σ'_p et Σ'_q, deux termes $\frac{j'_{p,2}}{r_{p,2}} d\sigma'_{p,2}$ ou $\frac{\mathrm{I}'}{r_{p,2}}$ et $\frac{j'_{q,1}}{r_{q,1}} d\sigma'_{q,1}$ ou $\frac{\mathrm{I}'}{r_{q,1}}$ qui se détruisent, $r_{p,2}$ et $r_{q,1}$ étant identiques; on aura (494), en ne conservant que les éléments de σ',

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} = -\sum_{\sigma'} \frac{j'}{\rho} d\sigma'. \tag{495}$$

Substituant (492) et (495) dans (491), on trouve la première des relations suivantes :

$$(496)\quad \left\{ \begin{array}{l|l} \dfrac{\partial \mathrm{C}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial z} - 4\pi u = -\dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\sum_{\sigma'} \frac{j'}{\rho} d\sigma' & \alpha\, d\Lambda = \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} d\Lambda, \\ \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{C}}{\partial x} - 4\pi v = -\dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\sum_{\sigma'} \frac{j'}{\rho} d\sigma' & \beta\, d\Lambda = \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} d\Lambda, \\ \dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} - 4\pi w = -\dfrac{\partial}{\partial z} \displaystyle\sum_{\sigma'} \frac{j'}{\rho} d\sigma' & \gamma\, d\Lambda = \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} d\Lambda. \end{array} \right.$$

Multipliant chaque équation par celle qui se trouve sur la même ligne, et ajoutant les trois produits, on trouve une équation relative à un élément quelconque $d\Lambda$, dans laquelle on substituera (430); et la somme de toutes les équations analogues, étendue à tous les éléments de l'aire Λ, donne

$$(497)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\Lambda} \left[\alpha\left(\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)\right] d\Lambda \\ &\quad = 4\pi \sum_{\Lambda} j\, d\Lambda - \sum_{\Lambda} d\Lambda \frac{\partial}{\partial \zeta} \sum_{\sigma'} \frac{j'}{\rho} d\sigma'. \end{aligned} \right.$$

On voit que (490) et (497) démontrent (488).

Conséquences du lemme **267**, *dans le cas où le courant $\mathfrak{C}'$ est fermé.*

268. Si le courant $\mathfrak{C}'$ est fermé, on a, par définition, $j'=0$ pour tous les éléments $d\sigma'$ de sa surface; alors les équations (490) et (496) deviennent

$$(498)\qquad \int_0^{L} \frac{A_{\mathfrak{C}'}\,\partial x + B_{\mathfrak{C}'}\,\partial y + C_{\mathfrak{C}'}\,\partial z}{\partial l}\,dl = 4\pi\sum_{\Lambda} j\,d\Lambda,$$

$$(499)\quad \frac{\partial C_{\mathfrak{C}'}}{\partial y} - \frac{\partial B_{\mathfrak{C}'}}{\partial z} = 4\pi u,\quad \frac{\partial A_{\mathfrak{C}'}}{\partial z} - \frac{\partial C_{\mathfrak{C}'}}{\partial x} = 4\pi v,\quad \frac{\partial B_{\mathfrak{C}'}}{\partial x} - \frac{\partial A_{\mathfrak{C}'}}{\partial y} = 4\pi w.$$

Dans ces formules (498) et (499), rien n'empêche de supposer que le courant fermé $\mathfrak{C}'$ est composé de plusieurs parties séparées, et comprend tous les courants existant dans l'espace. Soient

$$(500)\qquad D_{A'} \text{ et } A_{A'},\ B_{A'},\ C_{A'};\quad D_{T'} \text{ et } A_{T'},\ B_{T'},\ C_{T'}$$

les forces directrices et leurs composantes, au point (x, y, z), forces dues au système A' de tous les aimants existant dans l'espace, et du magnétisme terrestre T'. Le système A' ayant un potentiel en tout point de l'espace, on a, en tous les points de l'aire Λ,

$$(501)\quad \frac{\partial C_{A'}}{\partial y} - \frac{\partial B_{A'}}{\partial z} = 0,\qquad \frac{\partial A_{A'}}{\partial z} - \frac{\partial C_{A'}}{\partial x} = 0,\qquad \frac{\partial B_{A'}}{\partial x} - \frac{\partial A_{A'}}{\partial y} = 0;$$

et l'équation (490) donne

$$(502)\qquad \int_0^{L} \frac{A_{A'}\,\partial x + B_{A'}\,\partial y + C_{A'}\,\partial z}{\partial l}\,dl = 0.$$

Si l'aire Λ a des dimensions assez petites, par rapport à celles de la Terre, $A_{T'}$, $B_{T'}$, $C_{T'}$ peuvent y être regardées comme constantes, et leurs dérivées comme nulles. Dans ce cas, on a sensiblement, en vertu de (490),

$$(503)\qquad \int_0^{L} \frac{A_{T'}\,\partial x + B_{T'}\,\partial y + C_{T'}\,\partial z}{\partial l}\,dl = 0.$$

La force directrice $D_{M'}$ du système M' de tous les corps existant dans l'espace, et agissant au point (x, y, z), a pour composantes, en ce point,

$$(504)\qquad \left\{\begin{aligned} A_{M'} &= A_{\Sigma'} + A_{A'} + A_{T'},\\ B_{M'} &= B_{\Sigma'} + B_{A'} + B_{T'},\\ C_{M'} &= C_{\Sigma'} + C_{A'} + C_{T'}. \end{aligned}\right.$$

Ajoutant membre à membre (498), (502) et (503) et substituant (504), on a

$$(505)\qquad \int_0^L \frac{A_{M'}\,\partial x + B_{M'}\,\partial y + C_{M'}\,\partial z}{\partial l}\,dl = 4\pi \sum_{\Lambda} j\,d\Lambda.$$

Ajoutant membre à membre (499) et (501), et considérant seulement le cas où l'on peut traiter comme nulles les dérivées premières de $A_{T'}$, $B_{T'}$ et $C_{T'}$, on a, en substituant (504),

$$(506)\quad \frac{\partial C_{M'}}{\partial y} - \frac{\partial B_{M'}}{\partial z} = 4\pi u,\quad \frac{\partial A_{M'}}{\partial z} - \frac{\partial C_{M'}}{\partial x} = 4\pi v,\quad \frac{\partial B_{M'}}{\partial x} - \frac{\partial A_{M'}}{\partial y} = 4\pi w.$$

On déduit de (505) le principe suivant :

269. Pour que le système M' de tous les corps produisant des forces pondéromotrices observables ait un potentiel V, bien déterminé en tous les points d'un volume donné ϖ, il faut et il suffit qu'il n'existe pas de courant électrique à l'intérieur de ce volume.

Cette condition est nécessaire; car, si l'aire Λ a tous ses points dans un volume ϖ, où elle est satisfaite, l'intégrale (505), étendue à tout le périmètre d'un élément de surface $d\Lambda$, intérieur à ϖ, sera identiquement nulle; et, le second membre $4\pi j\,d\Lambda$ l'étant aussi, on aura $j = 0$. Ainsi l'électricité ne peut traverser aucun élément de surface intérieur à ϖ.

Réciproquement, s'il n'existe aucun courant dans le volume ϖ, on a vu (22) que le système M' a, en tout point (x, y, z) de ce volume, un potentiel V, fonction des trois variables indépendantes (x, y, z), ayant pour différentielle totale

$$dV = -A_{M'}\,dx - B_{M'}\,dy - C_{M'}\,dz.$$

Les équations (506) ont été données par Maxwell (vol. II, p. 231), sous le nom d'*équations des courants électriques*.

270. Si l'aire Λ a des dimensions comparables à celles de la Terre, on ne peut plus y regarder A_T, B_T, C_T comme constantes; et l'usage de l'équation (505) cesse d'être légitime. Alors, soient $\mathfrak{M}'$ le système de tous les courants et de tous les aimants existant dans l'univers, $D_{\mathfrak{M}'}$ sa force directrice au point (x, y, z); les composantes de cette force sont

$$(507)\quad A_{\mathfrak{M}'} = A_{\mathfrak{C}'} + A_{\mathcal{A}'},\quad B_{\mathfrak{M}'} = B_{\mathfrak{C}'} + B_{\mathcal{A}'},\quad C_{\mathfrak{M}'} = C_{\mathfrak{C}'} + C_{\mathcal{A}'}.$$

Au moyen de ces notations, on a, en ajoutant membre à membre (498) et (502), puis (499) et (501),

$$(508)\qquad \int_0^L \frac{A_{\mathfrak{M}'}\,\partial x + B_{\mathfrak{M}'}\,\partial y + C_{\mathfrak{M}'}\,\partial z}{\partial l}\,dl = 4\pi \sum_{\Lambda} j\,d\Lambda,$$

$$(509)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial C_{\mathfrak{M}'}}{\partial y} - \frac{\partial B_{\mathfrak{M}'}}{\partial z} &= 4\pi u,\\ \frac{\partial A_{\mathfrak{M}'}}{\partial z} - \frac{\partial C_{\mathfrak{M}'}}{\partial x} &= 4\pi v,\\ \frac{\partial B_{\mathfrak{M}'}}{\partial x} - \frac{\partial A_{\mathfrak{M}'}}{\partial y} &= 4\pi w.\end{aligned}\right.$$

271. L'équation (508) pourrait servir à calculer l'intensité totale du courant électrique qui traverse, à un instant donné t, une aire Λ, prise à la surface ou dans l'intérieur de la Terre, en assimilant le magnétisme terrestre au système $\mathfrak{M}'$, c'est-à-dire en admettant qu'il soit dû uniquement à des courants électriques et à des aimants, seuls corps connus qui produisent des forces pondéromotrices, si l'on pouvait en mesurer les composantes $A_{\mathfrak{M}'}$, $B_{\mathfrak{M}'}$, $C_{\mathfrak{M}'}$, à l'instant t, en des points pris sur le contour L de Λ, et assez nombreux pour donner une valeur approchée de l'intégrale (508). Les équations (509) donneraient les composantes, en un point, de l'intensité cubique des courants, soit telluriques, soit atmosphériques, si l'on connaissait les lois des variations des composantes $A_{\mathfrak{M}'}$, $B_{\mathfrak{M}'}$, $C_{\mathfrak{M}'}$, en fonction des coordonnées géographiques et de l'altitude. Les physiciens regardent aujourd'hui les courants atmosphériques comme nuls, ce qui fournirait des relations entre les observations magnétiques. Mais il en est autrement des courants telluriques : par des mesures simultanées, faites à la surface et à l'intérieur de la Terre, on étudierait ces courants; ce qu'on ne peut faire par la différence de potentiel entre le sol et une extrémité d'un fil métallique isolé, dont l'autre extrémité communique avec la Terre.

Action d'un courant fermé fixe et permanent $\mathfrak{C}'$, à trois dimensions, sur un solénoïde fixe et fermé $\mathfrak{S}$.

272. Soient L une ligne fermée, et $\mathfrak{L}$ un arc qui en fait partie. Si les tangentes positives de L sont les axes d'autant d'éléments *k* de solénoïdes, d'intensités I, dont les aires λ partagent L en éléments $\delta\mathfrak{L}$, et si, en tous les points de L,

$$\frac{I\lambda}{\delta\mathfrak{L}} = \text{une constante } \mu, \tag{510}$$ (8)

tous les éléments *k* de solénoïde constitueront un solénoïde fermé $\mathfrak{S}$, dont l'axe sera L. Il faut supposer encore que ces courants, parfaitement isolés, sont des lignes géométriques, dont la présence ne modifie en rien la marche de $\mathfrak{C}'$. Il résulte de la formule (247) que $\mathfrak{C}'$ n'agit pas sur le solénoïde $\mathfrak{S}$, quand celui-ci est tout entier en dehors de $\mathfrak{C}'$. Mais on va voir qu'il agit dans le cas contraire.

En effet, les actions mutuelles de $\mathfrak{C}'$ et d'un élément *k* du solénoïde $\mathfrak{S}$ étant représentées par l'énergie (487)

$$W_{\mathfrak{C}',k} = -\mu\frac{A\,\partial x + B\,\partial y + C\,\partial z}{\partial\mathfrak{L}}\delta\mathfrak{L}, \tag{511}$$

les actions mutuelles des corps $\mathfrak{C}'$ et $\mathfrak{S}$ le sont par l'énergie

$$W_{\mathfrak{C}',\mathfrak{S}} = -\mu\int_0^{\mathrm{L}}\frac{A\,\partial x + B\,\partial y + C\,\partial z}{\partial\mathfrak{L}}d\mathfrak{L}, \tag{512}$$

et, en substituant (498),

$$W_{\mathfrak{C}',\mathfrak{s}} = -4\pi\mu \iint_{\Lambda} j \, d\Lambda, \tag{513}$$

Λ désignant une nappe de surface assujettie uniquement à avoir $\mathfrak{L}$ pour périmètre. L'équation (429) pouvant s'écrire

$$j = i \cos(i, \mathfrak{L}), \tag{514}$$

on a aussi

$$W_{\mathfrak{C}',\mathfrak{s}} = -4\pi\mu \iint_{\Lambda} i \cos(i, \mathfrak{L}) \, d\Lambda. \tag{515}$$

Or l'énergie de l'action de $\mathfrak{C}'$ sur un courant linéaire fictif $\mathfrak{C}$, d'intensité $4\pi\mu$, qui parcourrait L dans le sens positif, est

$$W_{\mathfrak{C}',\mathfrak{C}} = -4\pi\mu \iint_{\Lambda} D \cos(D, \mathfrak{L}) \, d\Lambda, \tag{516}$$ (480)

en observant que $A\alpha + B\beta + C\gamma = D\cos(D, \mathfrak{L})$. On passe de (516) à (515), en remplaçant la force directrice D de $\mathfrak{C}'$ par l'intensité cubique i au même point, pris sur l'élément $d\Lambda$, ou encore le flux de force $\iint_{\Lambda} D\cos(D, \mathfrak{L})\, d\Lambda$ par le flux d'électricité $\iint_{\Lambda} i\cos(i, \mathfrak{L})\, d\Lambda$, entrant par la face négative de la même aire Λ. On peut donc faire cette substitution dans l'énoncé **265**, et l'on obtient le suivant.

273. L'énergie $W_{\mathfrak{C}',\mathfrak{s}}$ (515) représente le travail virtuel de l'action de $\mathfrak{C}'$ sur le solénoïde $\mathfrak{s}$, déformé sans faire varier $\mu = \frac{I\lambda}{\delta \mathfrak{L}}$, jusqu'à ce que l'aire Λ, limitée par son axe $\mathfrak{L}$, s'annule, lors même que I, λ et $\delta\mathfrak{L}$ varieraient.

274. *En supposant, comme précédemment, que la présence du solénoïde $\mathfrak{s}$, à l'intérieur de $\mathfrak{C}'$, ne change pas les lignes de ce courant, et* *de plus que ce solénoïde soit continu, c'est-à-dire sa surface parcourue par un courant à deux dimensions, d'intensité superficielle (définition 450)*

$$I_2 = \frac{dI}{\partial \mathfrak{L}},$$

dI *étant l'intensité linéaire de la partie comprise entre les sections droites qui interceptent sur* L *l'élément* $d\mathfrak{L}$; *si l'on décompose le courant* $\mathfrak{C}'$ *et son volume* Π *chacun en deux parties* c *et* c', ϖ *et* ϖ' *l'une intérieure à* s, *l'autre extérieure et accentuée; alors les actions de* $\mathfrak{C}'$ *sur* s *et de* s *sur* c *sont de nature à se faire équilibre sur un système rigide.*

En effet, les actions mutuelles des deux courants fermés $\mathfrak{C}'$ et s jouissent de cette propriété; et tout revient à démontrer que s n'agit pas sur c'. Or son action sur un courant linéaire fictif, fermé et rigide, placé dans ϖ', est nulle, en vertu du principe **25**, combiné avec celui de l'action et de la réaction. Donc son action sur un élément du courant c', réductible à une force appliquée à son milieu (n° **25**), est nulle (n° **115**); et dès lors son action sur c' l'est aussi.