JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Application géométrique d'un théorème de Jacobi

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 1 (1885), p. 347-356.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1885_4_1__347_0>

Application géométrique d'un théorème de Jacobi;

PAR M. G. HUMBERT.

Le théorème dont il s'agit, et dont nous empruntons l'énoncé à Clebsch et Gordan (*Abelsche Functionen*, p. 44), est le suivant [1] :

f et F étant deux fonctions homogènes, de degrés m et n, en x, y, z, soient

$$X = Af + BF = 0,$$
$$Y = Cf + DF = 0$$

les équations obtenues en éliminant successivement y et x entre les équations $f = 0$, $F = 0$; α le coefficient commun de la plus haute puissance de x, (x^{mn}), dans X et de y^{mn} dans Y;

$$\Delta = AD - BC;$$

soit enfin U une fonction entière quelconque de degré $m + n - 2$ en x, y, z; Δ_0 et U_0 les valeurs de Δ et U pour $z = 0$; on a

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{i=mn} \frac{U_i}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)} = \frac{(-1)^{mn}}{\alpha^2}\left[\frac{\Delta_0 U_0}{(xy)^{mn}}\right]_{x^{-1}y^{-1}},$$

---

(1) JACOBI, *Theoremata nova algebraica* (*Journal de Crelle*, t. 14).

Dans cette formule, la Σ s'étend aux mn points communs aux deux courbes $f = 0$ et $F = 0$; dans le second membre, l'expression

$$\left[\frac{\Delta_0 U_0}{(xy)^{mn}}\right]_{x^{-1}y^{-1}}$$

désigne le coefficient du terme en $\frac{1}{xy}$ dans le développement de $\frac{\Delta_0 U_0}{(xy)^{mn}}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

Nous ferons, au sujet de la formule (1), les remarques suivantes. Soient, d'après les notations de Clebsch,

$$f = x_0 + x_1 y + x_2 y^2 + \ldots + x_n y^n,$$
$$F = X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + \ldots + X_m y^m.$$

On a (Clebsch et Gordan, *loc. cit.*, p. 40)

$$X = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \ldots \\ 0 & x_0 & x_1 & \ldots \\ 0 & 0 & x_0 & \ldots \\ . & . & .. & \ldots \\ X_0 & X_1 & X_2 & \ldots \\ 0 & X_0 & X_1 & \ldots \\ . & .. & .. & \ldots \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \ldots \\ y & x_0 & x_1 & \ldots \\ y^2 & 0 & x_0 & \ldots \\ .. & . & .. & \ldots \\ 0 & X_1 & X_2 & \ldots \\ 0 & X_0 & X_1 & \ldots \\ . & .. & .. & \ldots \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \ldots \\ 0 & x_0 & x_1 & \ldots \\ 0 & 0 & x_0 & \ldots \\ . & . & .. & \ldots \\ 1 & X_1 & X_2 & .. \\ y & X_0 & X_1 & \ldots \\ . & .. & .. & \ldots \end{vmatrix},$$

et, en posant

$$f = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \ldots + y_n x^n,$$
$$F = Y_0 + Y_1 x + Y_2 x^2 + \ldots + Y_m x^m,$$

on a des expressions analogues pour Y, C et D.

Soient enfin f_0 et F_0 les valeurs de f et F pour $z = 0$; on a

$$f_0 = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} x + \ldots + a_n x^n,$$
$$F_0 = b_0 y^m + b_1 y^{m-1} x + \ldots + b_m x^m$$

et

$$\alpha = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots \\ . & .. & .. & \ldots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots \\ . & .. & .. & \ldots \end{vmatrix}.$$

Cela posé, remarquons que, dans le second membre de la relation (1), figure Δ_0, c'est-à-dire la valeur de AD — BC pour $z = 0$.

Faisons $z = 0$ dans l'expression de A; $x_0, x_1, \ldots, X_0, X_1, \ldots$, qui sont des fonctions de x et de z seuls, se réduiront à leurs termes de degré le plus élevé en x, c'est-à-dire à leurs termes en $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^m, x^{m-1}, \ldots$ respectivement, et, par conséquent, la valeur A_0 de A pour $z = 0$ ne dépend que des termes du degré le plus élevé en x et y dans f et dans F. Il en est de même pour B_0, C_0, D_0 et, par suite, pour Δ_0; on peut donc dire que Δ_0 ne dépend que des coefficients de f_0 et de F_0.

Il en est de même de α, d'après l'expression même de cette constante, donnée plus haut, et par suite :

La valeur de l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \frac{U_i}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i}$$

ne dépend que des termes du degré le plus élevé en x et y dans les trois fonctions f, F, U, *de degrés respectifs n, m, $m + n - 2$.*

Ce résultat peut s'interpréter géométriquement dans un cas particulier.

Faisons, en effet, $z = 1$ et supposons les axes de coordonnées rectangulaires.

Soit m un point commun aux courbes $f = 0$, $F = 0$; nous appellerons angle des deux tangentes aux deux courbes au point m l'angle aigu de ces droites, que nous affecterons d'un signe selon la convention suivante :

Faisons tourner autour du point m la tangente à la courbe $f=0$, de manière à la faire coïncider avec la tangente à la courbe $F=0$ en décrivant l'angle aigu que font les deux droites; si le sens de cette rotation est le sens trigonométrique, l'angle aura le signe $+$, sinon il aura le signe $-$.

D'après cette convention, on aura, pour la tangente de cet angle,

$$\operatorname{tang} V = \frac{\dfrac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} + \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}}{1 + \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial y}}}$$

ou

$$\cot V = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Le numérateur de $\cot V$ est de degré $m+n-2$; on peut donc faire dans la formule (1)

$$U = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}$$

et l'on aura

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{mn} \cot V_i = \frac{(-1)^{mn}}{2i}\left|\frac{\Delta_0 U_0}{(xy)^{mn}}\right|_{t^2=-1}.$$

La formule de Jacobi permet donc de calculer la somme des cotangentes des mn angles d'intersection de deux courbes algébriques quelconques, ces angles étant définis, comme on l'a fait plus haut.

Le second membre de (2) ne dépend que des termes du degré le plus élevé en x et y dans f, F et U, c'est-à-dire dans f et dans F; en d'autres termes, il ne dépend que des directions asymptotiques des deux courbes $f=0$ et $F=0$; d'où cette proposition :

THÉORÈME I. — *La somme des cotangentes des angles d'intersection* *de deux courbes algébriques est égale à la somme analogue pour deux courbes quelconques, respectivement asymptotiques aux premières.*

En particulier :

COROLLAIRE. — *La somme des cotangentes des angles d'intersection de deux courbes algébriques est égale à la somme des cotangentes des angles sous lesquels les asymptotes de l'une coupent les asymptotes de l'autre.*

On peut faire de ces principes quelques applications intéressantes.

1° *La courbe* $F = 0$ *est une droite.* — *La somme des cotangentes des angles d'intersection d'une droite et d'une courbe algébrique reste fixe quand la droite se déplace parallèlement à elle-même.*

Cette proposition revient au théorème bien connu sur les diamètres; prenons, en effet, la direction des sécantes pour celle de Ox et considérons deux sécantes situées à la distance dy l'une de l'autre. On a, en chaque point d'intersection de l'une d'elles et de la courbe $f = 0$,

$$dy = dx_i \operatorname{tang} V_i;$$

d'où

$$\cot V_i = \frac{dx_i}{dy}.$$

La relation $\Sigma \cot V_i = \text{const.}$ donne ainsi

$$\Sigma\, dx_i = A\, dy,$$

d'où

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = ay + b;$$

en d'autres termes, le centre des moyennes distances des points communs à une sécante et à une courbe algébrique décrit une droite quand la sécante se déplace parallèlement à elle-même : c'est le théorème de Newton.

2° *La courbe* $F = 0$ *est un cercle.* — Les asymptotes du cercle sont parallèles aux droites $y = ix$, $y = -ix$; elles font, avec la droite

$$y = mx,$$

des angles V′ et V″, tels que

$$\cot V' = \frac{1+mi}{m-i} = \quad i,$$

$$\cot V'' = \frac{1-mi}{m+i} = -i.$$

La somme de ces cotangentes est nulle, quel que soit m, sauf pour $m = \pm i$, une des cotangentes se présentant alors sous la forme $\frac{0}{0}$.

Il en résulte que la somme des cotangentes des angles sous lesquels les asymptotes du cercle coupent les asymptotes d'une courbe quelconque est nulle, à moins que cette courbe ne passe par un des points circulaires à l'infini; et, par suite, d'après le corollaire du théorème I :

THÉORÈME II. — *Un cercle coupe, sous des angles dont les cotangentes ont une somme nulle, toute courbe algébrique ne passant par aucun des points circulaires à l'infini du plan.*

Ainsi, étant donnés sur un cercle $2n$ points appartenant à une courbe algébrique d'ordre n, on ne peut se donner arbitrairement les tangentes en ces points à la courbe algébrique, quel que soit le degré de celle-ci : une des $2n$ tangentes est déterminée par les $2n-1$ autres.

Ce théorème donne lieu à quelques développements intéressants. Soient

ρ le rayon du cercle considéré ;
$\theta_1, \theta_2, \ldots$ les angles que font Ox, les $2n$ rayons allant du centre de ce cercle aux $2n$ points d'intersection du cercle et de la courbe $f = 0$;
$V_1, V_2, \ldots$ les angles d'intersection du cercle et de la courbe ;
$\rho + d\rho$ le rayon d'un cercle concentrique au premier et infiniment voisin ;
$d\theta_1, d\theta_2, \ldots$ les variations des angles $\theta_1, \theta_2, \ldots$, quand on passe du cercle ρ au cercle $\rho + d\rho$.

On a évidemment

$$\cot V_i = \rho \frac{d\theta_i}{d\rho} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n).$$

La relation

$$\Sigma \cot V_i = 0$$

donne ainsi

$$\Sigma d\theta_i = 0,$$

ou

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n = \text{const.},$$

ce qu'on peut énoncer géométriquement.

Soient p points situés sur un cercle; $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ étant les angles que font avec une droite fixe les rayons qui joignent le centre du cercle à ces points, appelons *centres des moyennes distances circulaires* des p points les p points du cercle qui correspondent aux p rayons faisant avec la droite fixe des angles θ donnés par la formule

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_p}{p} + 2h\frac{\pi}{p} \quad (h = 0, 1, \ldots, p-1).$$

La relation $\theta_1 + \theta_2 + \ldots = \text{const.}$ montre que les centres des moyennes distances circulaires des $2n$ points communs à une courbe algébrique et à une série de cercles concentriques décrivent n droites (ou $2n$ rayons).

Je dis que les directions de ces n droites ne dépendent que de celles des asymptotes de la courbe considérée, et sont indépendantes de la position du centre commun des cercles sécants.

Remarquons, en effet, que si le rayon du cercle sécant augmente indéfiniment, son centre restant fixe, ses points d'intersection avec la courbe s'éloignent à l'infini, et à la limite les $2n$ rayons qui joignent ces points au centre du cercle coïncident avec les n droites, formant $2n$ rayons, menées par le centre parallèlement aux asymptotes de la courbe. Soient $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_n$ les angles que font ces droites avec Ox; on a

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{2n} = \theta'_1 + (\theta'_1 + \pi) + \theta'_2 + (\theta'_2 + \pi) + \ldots \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On a donc la proposition suivante :

THÉORÈME III. — *Les centres des moyennes distances circulaires des points communs à une courbe algébrique d'ordre n, ne passant par aucun des points cycliques du plan et à un cercle décrivent n droites quand le rayon du cercle varie, son centre restant fixe.*

Ces n droites concourent au centre commun des cercles sécants; leurs directions sont indépendantes de la position de ce point et ne dépendent que des directions des asymptotes de la courbe considérée.

Ces propositions correspondent à celles de Newton sur les diamètres, quand on considère des cercles concentriques au lieu des droites parallèles.

On peut donner au théorème précédent une autre forme.

Appelons *axes d'orientation* de p rayons concourants, et faisant avec Ox des angles $\theta_1, \ldots, \theta_p$, les p rayons concourant au même point, et faisant avec Ox des angles θ, tels que

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_p}{p} + 2h\frac{\pi}{p} \quad (h = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Les axes d'orientation des $2n$ rayons qui joignent un point quelconque aux points d'intersection d'un cercle, ayant ce point pour centre, et d'une courbe algébrique, sont parallèles aux axes d'orientation des n droites, formant $2n$ rayons, menées par un point du plan parallèlement aux asymptotes de la courbe considérée.

On suppose toujours que cette courbe ne passe par aucun des points circulaires à l'infini.

Ainsi pour que $2n$ points donnés sur un premier cercle, et $2n$ points situés sur un second, soient sur une courbe algébrique indécomposable d'ordre n, il est nécessaire (mais non suffisant) que les axes d'orientation des $2n$ rayons joignant le centre de chaque cercle aux $2n$ points donnés sur ce cercle forment deux faisceaux de rayons parallèles entre eux : cette condition détermine un des $4n$ points en fonction des $4n - 1$ autres.

De même, on ne peut pas se donner arbitrairement les $2n$ points où un cercle est traversé par une courbe d'ordre n, et les directions asymptotiques de cette courbe, c'est-à-dire les n points où elle coupe la droite de l'infini : un des $3n$ points dont il s'agit est déterminé par les $3n - 1$ autres, en vertu de la proposition précédente.

On peut déduire du théorème II une formule simple relative aux rayons de courbure d'une courbe algébrique en $2n$ points situés sur un cercle.

On a en effet, en coordonnées polaires, pour l'expression du rayon de courbure en un point,

$$R = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}}.$$

Si $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2n}$ sont les angles que font avec l'axe polaire les rayons vecteurs des $2n$ points de la courbe situés sur un cercle ayant son centre au pôle et de rayon ρ, on a

$$\Sigma\, d\theta_i = 0,$$

$d\theta_i$ désignant la variation de θ_i quand on passe du cercle ρ au cercle $\rho + d\rho$; et, par suite,

$$(A) \qquad \sum \frac{d^2\theta_i}{d\rho^2} = 0.$$

Or on a

$$\frac{d^2\theta}{d\rho^2} = -\left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right) \times \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^3},$$

et, d'après l'expression de R, en posant $\frac{d\rho}{d\theta} = \rho'$,

$$-\rho\frac{d^2\theta}{d\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho'^3} + \frac{2}{\rho'} - \frac{1}{R\rho'^3}(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}};$$

on a, de plus,

$$\cot V = \frac{\rho}{\rho'},$$

d'où l'on conclut, en vertu de (A), la relation

$$\sum_{i=1}^{i=mn}\left(\frac{\cot^3 V_i}{\rho} + \frac{2\cot V_i}{\rho}\right) = \sum \frac{1}{R_i \sin^3 V_i},$$

ou, puisque

$$\Sigma \cot V_i = 0,$$

il reste

$$\frac{1}{\rho}\sum \cot^3 V_i = \sum \frac{1}{R_i \sin^3 V_i},$$

relation qui lie les angles sous lesquels une courbe est coupée par un cercle de rayon ρ, et les rayons de courbure aux points d'intersection.

3° *La courbe* $F = 0$, *de degré* $2m$, *a* m *points communs avec la droite de l'infini en chacun des deux points cycliques du plan.* — Les termes du plus haut degré dans F sont alors $(x^2 + y^2)^m$, et les asymptotes de la courbe $F = 0$ sont parallèles deux à deux aux droites $y = ix$, $y = -ix$: la démonstration du théorème II subsiste évidemment, et par suite :

THÉORÈME IV. — *Une courbe algébrique de degré* $2m$, *ayant* m *points communs avec la droite de l'infini en chacun des points cycliques du plan, coupe une courbe algébrique, ne passant par aucun de ces points, sous des angles dont les cotangentes ont une somme nulle.*

4° *Application aux coniques.* — Considérons deux coniques; les axes de coordonnées étant parallèles aux axes de l'une d'elles, on aura, pour leurs équations,

$$0 = Ax^2 + Cy^2 + \ldots,$$
$$0 = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + \ldots$$

La somme des cotangentes des angles V_i sous lesquels elles se coupent est égale à la somme correspondante pour leurs asymptotes, somme que l'on calcule sans difficulté. On trouve ainsi

$$\sum_{i=1}^{i=4} \cot V_i = \frac{4(A - C)B'(AC' + CA')}{(AC' - CA')^2 - 4ACB'^2}.$$

Cette somme sera nulle dans trois cas :

1° Si $A = C$, c'est-à-dire si l'une des coniques est un cercle, ce que nous savons déjà;

2° Si $B' = 0$, c'est-à-dire si les deux coniques ont leurs axes parallèles, condition qui comprend la précédente;

3° Si $AC' + CA' = 0$, c'est-à-dire si les parallèles menées par l'origine aux asymptotes des deux coniques forment un faisceau harmonique.