

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL LE CORDIER

**Théorie des actions électrodynamiques les plus générales
qui puissent être observées**

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 10 (1884), p. 43-96.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10_43_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Théorie des actions électrodynamiques les plus générales
qui puissent être observées (1);*

PAR M. PAUL LE CORDIER,

Docteur ès Sciences mathématiques.

§ I. — INTRODUCTION.

1. Le présent Mémoire a pour objet d'établir, avec plus de rigueur qu'on ne l'a fait jusqu'ici, les formules découvertes par Ampère et représentant l'action électrodynamique la plus générale que l'on puisse observer sur un élément linéaire de courant fixe, d'intensité constante, et ne faisant pas partie du système agissant. Celui-ci pourra comprendre des courants fermés, des aimants et le magnétisme terrestre.

2. En créant l'Électrodynamique, Ampère a résolu un problème plus général, celui de l'action mutuelle de deux éléments de courants linéaires; puis, Grassmann et M. Reynard en ont proposé une solution différente. Le désaccord disparaît quand on calcule la résultante des actions de tous les éléments d'un contour fermé sur un élément de courant; mais les données seules de l'expérience peuvent le faire disparaître indépendamment de toute hypothèse : je n'en connais pas

(1) Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 22 janvier 1883.

de démonstration plus ancienne que celle que j'ai donnée en 1874, et que je reproduis dans ce Mémoire. M. Maurice Lévy a déduit ce résultat d'un autre beaucoup plus général en 1881, mais en réduisant le système agissant à un courant fermé linéaire. Ma démonstration s'étend au cas où ce système peut renfermer aussi des courants fermés à trois dimensions, des aimants et le magnétisme terrestre.

3. Deux méthodes sont successivement employées : la première repose, comme celle d'Ampère, sur les cas d'équilibre les plus simples, et la seconde sur des données expérimentales incontestables : Weber a vérifié, en effet, avec beaucoup de précision, que les actions mutuelles de deux courants fermés linéaires sont celles qu'Ampère a fait connaître. Des vérifications ultérieures ont prouvé que les actions d'un aimant et du magnétisme terrestre sur un courant fermé sont aussi celles qui résultent des formules d'Ampère. Cela posé, la seconde méthode exige uniquement que l'on admette que l'action cherchée se réduit, comme la première le démontre, à une force unique, appliquée à l'élément qui la reçoit. La seconde est actuellement la meilleure au point de vue de la certitude des données expérimentales; mais la première sera préférable, quand deux anciennes expériences auront été refaites avec toute la précision désirable : elle établira les mêmes formules avec la même rigueur et plus de généralité.

4. L'action est calculée en fonction explicite du potentiel du système agissant, potentiel dont l'existence est démontrée dans tous les cas, mais dont la forme n'est trouvée que dans celui où le système se réduit à un courant fermé linéaire.

5. Le calcul des potentiels d'un aimant et du magnétisme terrestre sera fait dans un autre Mémoire, et identifiera ces potentiels avec ceux qui représentent les actions de l'aimant et du magnétisme terrestre sur un autre aimant : d'où résultera la possibilité, admise jusqu'ici sans démonstration, et quelquefois contestée, de réduire à un seul système d'unités absolues toutes les actions observables entre les courants, les aimants et le magnétisme terrestre.

6. Les axes étant supposés fixes, ainsi que la ligne fermée et rigide

d'un courant; le potentiel de celui-ci est une fonction périodique des coordonnées, c'est-à-dire peut se décomposer en deux parties : l'une bien définie, infiniment petite à l'infini, et identique avec le potentiel d'un système fictif, qu'on appelle un *feuillelet magnétique*; l'autre $\pm 4m\pi I'$, dans laquelle I' désigne l'intensité du courant, et m un nombre entier. Cette périodicité résulte de la loi d'Ørstedt, en vertu de laquelle un courant exerce sur le pôle nord d'un solénoïde (il faudrait dire d'un aimant, s'il en était question dans ce Mémoire) une force dont le travail est toujours positif, quand le pôle se déplace vers la gauche du courant. Ainsi un courant électrique permanent peut entretenir un travail perpétuel; propriété qui prouve par elle-même, comme on le sait d'ailleurs, que l'entretien d'un tel courant exige alors un certain travail perpétuel.

7. On obtient une autre propriété importante de la même *force directrice* d'Ampère, en la considérant comme la vitesse d'un fluide fictif : elle satisfait à l'équation différentielle exprimant que ce fluide est incompressible, et par suite définit ce qu'on appelle le *flux de force* envoyé, par le système agissant, sur la face négative du feuillelet magnétique équivalent à un courant linéaire fermé. Lorsque l'intensité de celui-ci demeure égale à l'unité et que le système agissant est fixe et permanent, on sait que la variation de ce flux exprime le travail virtuel des actions qui solliciteraient la ligne du courant, supposée mobile, si elles conservaient, dans chaque position successive, les valeurs qu'on y observe au repos. La réalité de cette hypothèse, ne pouvant être démontrée dans ce Mémoire, le sera dans un autre sur l'induction.

8. Deux hypothèses sont aujourd'hui en présence dans la théorie des forces physiques, et en particulier de l'Électrodynamique : celle des actions directes à distance et celle d'un milieu continu qui les propage. Ampère a adopté la première, et M. Reynard la seconde : de là vient le désaccord de leurs formules élémentaires. Mais, pour la question restreinte qui fait l'objet de ce Mémoire, on n'a jamais proposé d'autre solution que celle d'Ampère. C'est pourquoi il convient de n'admettre, outre les données de l'expérience, que des principes qui résultent de la première hypothèse, et aussi de la seconde. Comme

l'une ou l'autre est nécessairement vraie, l'exactitude des résultats sera subordonnée uniquement à celle des observations.

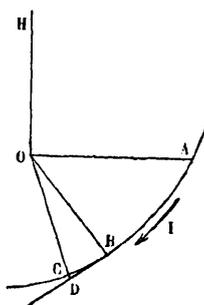
9. Voici les résultats des deux expériences qu'il faudrait refaire pour démontrer, dans toute leur généralité, les principes invoqués dans la première méthode.

10. L'action d'un système fixe et permanent, susceptible de comprendre des courants fermés, des aimants et le magnétisme terrestre, ne peut faire tourner un arc circulaire de rhéophore, mobile dans son plan autour de son centre.

11. Elle ne peut faire tourner autour de son axe de révolution un fil cylindrique, parcouru longitudinalement par un courant.

La détermination de l'action du système sur un élément de courant $I.BC$ (*fig. 1*), d'intensité I et de longueur BC , est un problème à six in-

Fig. 1.



connues : cette action étant réductible à une force appliquée en B et à un couple, soient X, Y, Z les composantes de la force, et L, M, N celles du couple, quand on prend B pour origine, et la tangente BD pour axe des x . Il résulte des équilibres nos **10** et **11** que les six inconnues se réduisent à deux Y et Z , c'est-à-dire que les quatre autres sont nulles. Voici comment cette réduction peut se faire, en apportant dans la démonstration que j'en ai donnée en 1874 une simplification que $M. Maurice Lévy$ a bien voulu indiquer dans son Cours du Collège de France.

L'action du système, ne pouvant faire tourner autour de son axe de révolution OH (*fig. 1*) l'arc circulaire AB d'Ampère, quelle qu'en soit

la longueur, ne peut faire tourner AC, ni l'élément BC, ni l'élément rectiligne BD de la tangente en B, qui peut être pareillement substitué à tout arc infiniment petit tangent en B, quels qu'en soient le plan et le rayon. Donc le système ne peut faire tourner l'élément de courant I.BD autour d'aucun axe OH, situé dans le plan qui lui est perpendiculaire au point B, et ne passant pas par ce point : mais la continuité écarte cette restriction; et l'action, nécessairement réductible à une force appliquée en B et à un couple, doit avoir un moment nul par rapport à cet axe : ce qui démontre, quand l'axe passe par B, que le couple est dans le plan normal, et quand il n'y passe pas, que la force est dans ce même plan. L'équilibre (11) démontre ensuite que le couple est nul.

§ II. — ACTIONS SUR UN ÉLÉMENT DE COURANT, EN FONCTION DU POTENTIEL DE TOUT SYSTÈME EXTÉRIEUR QUI LES PRODUIT, ET DÉTERMINATION DU POTENTIEL D'UN ÉLÉMENT DE SOLÉNOÏDE, C'EST-À-DIRE D'UN COURANT LINÉAIRE FERMÉ, PLAN ET INFINIMENT PETIT.

Notations et définitions.

12. Soient

(1) M' et $I ds$

le système le plus général dont l'action soit observable, et l'élément de courant linéaire qui la reçoit; ce qui exige que M' soit un système rigide et invariable dans sa constitution physique, c'est-à-dire ne comprenant que des courants fermés permanents, des aimants dont le magnétisme est réduit à sa partie rigide, et le magnétisme terrestre; que l'intensité I soit constante, et que l'élément linéaire ds soit fixe par rapport à M' .

13. Le *travail virtuel* d'un système quelconque de forces électrodynamiques sera défini en convenant de considérer les forces telles qu'elles seraient, dans chaque position successive, si les corps qui réagissent étaient en repos, et si leurs constitutions physiques étaient invariables pendant toute la durée du mouvement. Les phénomènes de l'induction prouveront que la première hypothèse est vraie; on sait que la seconde ne l'est pas.

14. La notation

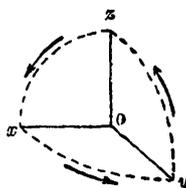
$$(2) \quad (\pi', \pi)$$

représentera l'action d'un système π' sur un autre π ; le système agissant π' sera écrit le premier; il sera généralement accentué.

15. Les moments des forces auront les signes des rotations qu'elles tendent à produire : les rotations d'un quadrant yz, zx, xy (*fig. 2*) seront positives dans les trois plans coordonnés. La partie positive d'un axe sera prise pour normale positive du plan des deux autres.

16. Les axes seront toujours rectilignes, rectangulaires et disposés à *gauche* (*fig. 2*), ou de manière qu'un observateur puisse avoir les

Fig. 2.



parties positives des axes des x , des y et des z devant lui, à *sa gauche* et sur sa tête; ou encore qu'il voie la partie positive de l'un de ces axes à *sa gauche*, quand il est parcouru des pieds à la tête en vertu d'une rotation positive dans le plan perpendiculaire.

17. En vertu des deux conventions (n^{os} **15** et **16**), la *normale positive*

$$(3) \quad \mathcal{L}$$

de l'élément $\lambda = d\Lambda$ d'une aire Λ , plane ou courbe, dont le périmètre S est parcouru dans le *sens positif* par un point mobile des pieds à la tête d'un observateur, sera visible à *sa gauche*. Dans le cas d'un courant fermé infiniment petit, ce point représentera une molécule d'électricité positive.

17'. Cette normale serait dirigée (**15**) en sens contraire, dans un système d'axes à droite.

18. La normale positive ξ d'un élément de solénoïde sera appelée son *axe*, ainsi que toute courbe L ayant cette normale pour tangente positive. Soient

$$(4) \quad x, y, z \quad \text{et} \quad x_s, y_s, z_s$$

les coordonnées d'un point fixe sur l'élément plan $\lambda = d\Lambda$, et celles d'un point mobile dans le sens positif sur son contour S, dont il termine la partie s;

$$(5) \quad u, v, w \quad \text{et} \quad u_s, v_s, w_s$$

les valeurs de trois fonctions quelconques des coordonnées en ces deux points; et

$$(6) \quad \alpha = \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \beta = \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \gamma = \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

les *cosinus directeurs* de son axe ξ , c'est-à-dire les cosinus des angles qu'il fait avec les axes des coordonnées. On a identiquement, avec des axes à gauche,

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^s \left(u_s \frac{\partial x_s}{\partial s} + v_s \frac{\partial y_s}{\partial s} + w_s \frac{\partial z_s}{\partial s} \right) ds \\ = \iint_{\Lambda} \left[\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\Lambda, \end{array} \right.$$

formule qui subsiste (nos **13** et **16**) avec des axes à droite. Le choix des axes à gauche, indifférent au point de vue purement géométrique, a pour unique but la conformité à l'usage de donner le signe + au pôle nord d'un solénoïde.

19. Soit s un solénoïde, défini un système d'*éléments k de solénoïde*, c'est-à-dire de courants linéaires fermés, plans et infiniment petits, d'intensités constantes I, d'aires λ , ayant pour axe commun (n° **18**) une ligne L, appelée aussi l'*axe* du solénoïde, dont ξ désigne un arc, et partagée par les aires λ en éléments $\delta\xi$, assujettis à la relation

$$(8) \quad \frac{I\lambda}{\delta\xi} = \text{une constante } \mu.$$

Démonstration de l'existence du potentiel V du système M' .

20. Cette démonstration repose sur le principe de l'indépendance des actions simultanées, qui sera passé sous silence, parce qu'il est incontestable. Il se déduit immédiatement de l'hypothèse des actions directes à distance, et résulte aussi de celle d'un milieu continu qui les propage, en vertu du principe de la superposition des petits mouvements : il ne pourrait être en défaut que pour des intensités trop grandes, et c'est ce qu'on n'a jamais observé.

La démonstration repose en outre sur cinq principes expérimentaux, dont quatre seulement sont distincts. Voici comment on peut les énoncer.

21. L'action du système M' [notation (1)] sur un système de deux éléments de courants linéaires égaux, superposés et de sens contraires, est nulle. Cet équilibre, qu'Ampère a découvert par une expérience grossière, est démontré par des expériences très précises.

22. Il en résulte qu'en désignant par x, y, z et $x + dx, y + dy, z + dz$ les coordonnées du commencement et de la fin de ds , par rapport à trois axes rectangulaires fixés à M' , ce système agit sur l'élément de courant linéaire $I ds$ [notation (1)] comme sur l'ensemble de ses trois composantes $I dx, I dy$ et $I dz$. La démonstration peut se faire en déduisant du principe (n° 21) que l'action de M' sur un courant linéaire, d'intensité I , parcourant le périmètre du quadrilatère gauche qui a pour côtés dx, dy, dz et ds , est du même ordre de grandeur que $I(ds)^2$. Elle est préférable à l'expérience directe, mais grossière, par laquelle Ampère a découvert le principe.

23. L'action de M' sur $I ds$ se réduit à une force unique, appliquée en un point de ds , par exemple au point (x, y, z) .

24. Cette force est normale à ds .

Ces deux derniers principes résultent des cas d'équilibre (nos 10 et 11).

25. Le système M' n'agit point sur un solénoïde extérieur, fermé, rigide, et fixe par rapport à lui.

26. L'expérience d'Ampère, sur laquelle repose le principe (n° 24), n'ayant jamais été faite d'une manière satisfaisante, permettrait de douter de ce principe, si la seconde méthode ne le démontrât *a posteriori*, comme elle démontre tous les autres, excepté le principe (n° 25). Il serait à désirer qu'elle fût refaite, non seulement parce qu'elle démontrerait ce dernier, qui, d'ailleurs, n'a jamais été contesté, mais parce qu'elle s'étendrait au cas de l'action d'un courant fermé permanent à trois dimensions, cas qui échappe à la seconde méthode, à moins qu'on ne fasse une hypothèse, dont elle affranchirait la théorie.

27. Voici comment l'existence de la fonction V peut se déduire des quatre principes (n°s 21, 23, 24, 25) et du principe (n° 22), qui en résulte. Chacune des actions de M' sur

$$I dx, \quad I dy, \quad I dz$$

se réduit (n° 23) à une force unique, appliquée au point (x, y, z) , ayant pour projections :

Sur l'axe des x	$G I dx, \quad C I dy, \quad B' I dz;$
Sur l'axe des y	$C' I dx, \quad H I dy, \quad A I dz;$
Sur l'axe des z	$B I dx, \quad A' I dy, \quad K I dz,$

lorsque dx, dy et dz sont positives, et, par suite (n° 21), quels qu'en soient les signes; les neuf fonctions

$$(9) \quad A, B, C; \quad A', B', C'; \quad G, H, K$$

de x, y, z étant évidemment bien déterminées, quand on donne, en outre, les quantités géométriques et physiques qui déterminent M' . Ce système produit (n° 23) sur $I ds$ une force unique, appliquée au point (x, y, z) , et ayant (n° 22) pour projections sur les axes

$$(10) \quad \begin{cases} \xi I ds = I(G dx + C dy + B' dz), \\ \eta I ds = I(C' dx + H dy + A dz), \\ \zeta I ds = I(B dx + A' dy + K dz). \end{cases}$$

On exprime que M' agit (n° 24) normalement sur dx , dy , dz et ds , en posant

$$G = 0, \quad H = 0, \quad K = 0 \quad \text{et} \quad \xi dx + \eta dy + \zeta dz = 0.$$

En vertu des trois premières équations, la quatrième, quand on y substitue (10), se réduit à

$$(A + A') dy dz + (B + B') dz dx + (C + C') dx dy = 0,$$

puis celle-ci, pour $dx = 0$, à $A + A' = 0$; pour $dy = 0$, à $B + B' = 0$; et pour $dz = 0$, à $C + C' = 0$: d'où résultent les formules d'Ampère

$$(11) \quad \begin{cases} (M', Ids)_x & \text{ou} \quad \xi Ids = I(Cdy - Bdz), \\ (M', Ids)_y & \text{ou} \quad \eta Ids = I(A dz - Cdx), \\ (M', Ids)_z & \text{ou} \quad \zeta Ids = I(Bdx - A dy). \end{cases}$$

La méthode qui va déterminer V est empruntée à un autre calcul, fait en 1869 par M. Bertrand, dans son Cours du Collège de France.

28. En supposant que l'élément Ids fasse partie d'un courant linéaire fermé et rigide \mathcal{C} , d'intensité constante I et de longueur S , animé, à l'instant t , d'une vitesse de translation v à l'origine, et d'une vitesse angulaire ω , ayant pour composantes

$$v_x, v_y, v_z \quad \text{et} \quad \omega_x, \omega_y, \omega_z,$$

le travail élémentaire *virtuel* (n° 13) des actions de M' sur Ids , dans le temps dt , est

$$(12) \quad \begin{cases} d\mathcal{G}(M', Ids) = I [\xi v_x + \eta v_y + \zeta v_z + (\zeta y - \eta z) \omega_x \\ \quad + (\xi z - \zeta x) \omega_y + (\eta x - \xi y) \omega_z] ds dt, \end{cases}$$

ce qui donne, pour le travail élémentaire *virtuel* des actions de M' sur \ominus ,

$$(12') \quad d\bar{c}(M', \ominus) = \mathbf{I} \left\{ \begin{array}{l} v_x \int_0^s \xi_s ds + \omega_x \int_0^s (\zeta_s y_s - \eta_s z_s) ds \\ + v_y \int_0^s \eta_s ds + \omega_y \int_0^s (\xi_s z_s - \zeta_s x_s) ds \\ + v_z \int_0^s \zeta_s ds + \omega_z \int_0^s (\eta_s x_s - \xi_s y_s) ds \end{array} \right\} dt.$$

On déduit des équations (11) et (12'), pour la somme des composantes et pour la somme des moments, par rapport à l'axe des x , des actions de M' sur \ominus ,

$$(13) \quad (M', \ominus)_x = \mathbf{I} \int_0^s \xi_s ds = \mathbf{I} \int_0^s \left(C_s \frac{\partial y_s}{\partial s} - B_s \frac{\partial z_s}{\partial s} \right) ds,$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (M', \ominus)_{yz} = \mathbf{I} \int_0^s (\zeta_s y_s - \eta_s z_s) ds \\ = \mathbf{I} \int_0^s \left[(B_s y_s + C_s z_s) \frac{\partial x_s}{\partial s} - A_s y_s \frac{\partial y_s}{\partial s} - A_s z_s \frac{\partial z_s}{\partial s} \right] ds. \end{array} \right.$$

Soit Λ une aire assujettie uniquement à avoir S pour périmètre. Transformant les troisièmes membres de (13) et (14) au moyen de l'identité (7), appliquée aux fonctions $u = 0$, $v = C$, $w = -B$, puis aux fonctions $u = By + Cz$, $v = -Ay$, $w = -Az$, et posant

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = y \frac{\partial A}{\partial z} - z \frac{\partial A}{\partial y}, \quad Y = z \frac{\partial A}{\partial x} + y \frac{\partial B}{\partial z} + z \frac{\partial C}{\partial z} + C, \\ Z = -y \frac{\partial A}{\partial x} - y \frac{\partial B}{\partial y} - z \frac{\partial C}{\partial y} - B, \end{array} \right.$$

on a

$$(16) \quad (M', \ominus)_x = \mathbf{I} \int_{\Lambda} \int \left[-\alpha \left(\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) + \beta \frac{\partial B}{\partial x} + \gamma \frac{\partial C}{\partial x} \right] \lambda,$$

$$(17) \quad (M', \ominus)_{yz} = \mathbf{I} \int_{\Lambda} \int \frac{\lambda}{\delta \mathcal{L}} \left(X \frac{\partial x}{\partial \mathcal{L}} + Y \frac{\partial y}{\partial \mathcal{L}} + Z \frac{\partial z}{\partial \mathcal{L}} \right) \delta \mathcal{L}.$$

29. Dans le cas où le courant \ominus se réduit à un élément k de solé-

noïde, et Λ à l'élément plan λ , l'intégrale de l'expression (17), étendue à tous les éléments de l'axe L du solénoïde s , extérieur à M' , donne, en y substituant (8),

$$(18) \quad (M', s)_{yz} = \mu \int_0^L \left(X \frac{\partial x}{\partial \xi} + Y \frac{\partial y}{\partial \xi} + Z \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) d\xi.$$

Du principe (n° 25), établi par l'expérience pour des solénoïdes fermés, dans lesquels I , λ et $\delta \xi$ sont trois constantes, satisfaisant dès lors à la condition (8), il résulte que l'intégrale (18) est nulle, toutes les fois que la ligne fermée L est susceptible d'engendrer une aire ayant tous ses points en dehors de M' , par une déformation continue qui en réduit la longueur à zéro; ce qui démontre l'existence, en tout point (x, y, z) extérieur à M' , d'une fonction des trois variables indépendantes x, y, z , ayant pour dérivée totale $X dx + Y dy + Z dz$. Donc, en tout point (x, y, z) extérieur à M' , on a les trois identités

$$(19) \quad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0,$$

et, en substituant (15) dans les deux premières,

$$\begin{aligned} & -2 \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\ & - y \left(\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \right) - z \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z} \right) = 0, \\ & \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) + y \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} \right) + z \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z} \right) = 0, \end{aligned}$$

équations qui doivent subsister indépendamment du choix des axes. En les déplaçant parallèlement à eux-mêmes, on voit que les six parenthèses sont identiquement nulles, et l'on a

$$(20) \quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

$$(21) \quad \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 0,$$

en déduisant, par permutation tournante, les deux premières équations

tions (21) de la troisième. Ces trois équations démontrent l'existence, en tout point (x, y, z) extérieur à M' , d'une fonction

$$(22) \quad V_{M'}(x, y, z) \quad \text{ou simplement} \quad V,$$

dite le *potentiel* du système M' au point (x, y, z) , ayant pour dérivées

$$(23) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -A, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -B, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -C;$$

et en substituant (23) dans (20), on obtient l'équation de Laplace, que cette fonction identifie en tout point (x, y, z) extérieur à M' ,

$$(24) \quad \Delta_2 V = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

50. *Calcul de l'énergie $W_{M',k}$ de l'action du système M' sur l'élément k de solénoïde, en fonction du potentiel de M' . — Le moment de l'élément k de solénoïde est défini par le produit*

$$(25) \quad k = 1\lambda,$$

et l'énergie de l'action du système M' sur l'élément k de solénoïde, par la fonction

$$(26) \quad W_{M',k} = k \frac{\partial V}{\partial \zeta} = k \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right] = -k(A\alpha + B\beta + C\gamma),$$

dans laquelle entrent les formules (25), (23) et les notations (22), (9) et (6). Elle jouit de la propriété suivante : le rapport

$$(27) \quad \frac{W}{k} = \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \text{une fonction isotrope de } x, y, z, \alpha, \beta, \gamma \text{ seulement,}$$

c'est-à-dire que ce rapport est indépendant du choix des axes, et de toute quantité, géométrique ou physique, relative à k , et indépendante de $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$.

On peut donc, pour simplifier, prendre le point (x, y, z) pour origine; et si le déplacement de k , dans le temps dt , se réduit à la rotation $d(yz) = \omega_x dt$, effectuée autour de l'axe des x , la variation de la

fonction $-W$, dans laquelle A, B, C ne dépendent que de x, y, z , sera

$$(28) \quad -\frac{\partial W}{\partial(yz)} \omega_x dt = k \left[A \frac{\partial x}{\partial(yz)} + B \frac{\partial \beta}{\partial(yz)} + C \frac{\partial \gamma}{\partial(yz)} \right] \omega_x dt = k(\beta C - \gamma B) \omega_x dt.$$

Or, en ajoutant et retranchant $\alpha \frac{\partial A}{\partial x}$ dans le crochet (16), on obtient, en vertu de (13), (20), (25) et (26), lorsque Λ se réduit à un seul élément λ ,

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^s \xi_s ds &= (M', k)_x = k \left(\alpha \frac{\partial A}{\partial x} + \beta \frac{\partial B}{\partial x} + \gamma \frac{\partial C}{\partial x} \right) \\ &= k \frac{\partial(A\alpha + B\beta + C\gamma)}{\partial x} = -\frac{\partial W}{\partial x}. \end{aligned} \right.$$

Les fonctions (15) se réduisent à $X = 0$, $Y = C$, $Z = -B$; et l'on déduit de (14), (17), (25), (6) et (28)

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^s (\zeta_s y_s - \eta_s z_s) ds &= (M', k)_{yz} = k \left(C \frac{\partial \gamma}{\partial yz} - B \frac{\partial z}{\partial yz} \right) \\ &= k(\beta C - \gamma B) = -\frac{\partial W}{\partial(yz)}. \end{aligned} \right.$$

Substituant dans (12'), on trouve

$$d\bar{\varepsilon}(M', k) = \left(-\frac{\partial W}{\partial x} v_x - \dots - \frac{\partial W}{\partial(yz)} \omega_x - \dots \right) dt,$$

ou

$$(31) \quad d\bar{\varepsilon}(M', k) = -\frac{\partial W}{\partial t} dt,$$

$$(32) \quad \Delta\bar{\varepsilon}(M', k) = W_1 - W_2.$$

L'équation (32), obtenue en intégrant (31) de $t = t_1$ à $t = t_2$, exprime que le travail virtuel (n° 13) des actions du système rigide M' sur k , dans le mouvement de k relatif à M' , est indépendant des positions relatives intermédiaires, propriété qui va servir à déterminer la forme de

la fonction (26), dans le cas où M' se réduit à un élément k' de solénoïde, auquel s'appliqueront les définitions (3), (n° 18), (4), (6), (n° 19), (8) et (25), avec les mêmes notations accentuées.

Détermination du potentiel $V_{k'}$ d'un élément k' de solénoïde, et de l'énergie $W_{k',k}$ de l'action d'un élément k' de solénoïde fixe sur un autre k .

31. La propriété (27) s'étend au rapport $\frac{1}{kk'} W_{k',k}$: il est indépendant de toute quantité relative à k et indépendante de $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$; et, à cause de sa symétrie, il l'est aussi de toute quantité relative à k' et indépendante de $x', y', z', \alpha', \beta', \gamma'$. Donc

$$(33) \quad \frac{W_{k',k}}{kk'} = \mathbf{F}(x, y, z, x', y', z', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$$

est indépendant de toute quantité relative soit à k , soit à k' , et indépendante des douze variables (33).

32. Si k et k' sont des éléments des deux solénoïdes s et s' , on a, en vertu des équations (8) et (25),

$$(34) \quad k = \mu \delta \xi, \quad k' = \mu' \delta \xi',$$

et l'on déduit de (31)

$$(35) \quad d\mathfrak{E}(s', s) = - \frac{dW_{s',s}}{dt} dt,$$

en posant

$$(36) \quad W_{s',s} = \int_0^L \int_0^{L'} \frac{W_{k',k}}{\delta \xi \delta \xi'} d\xi d\xi'.$$

Cette fonction (36), à cause de la propriété (35), est l'énergie de l'action du solénoïde s' sur le solénoïde s ; et l'on déduit de (33) et (34)

$$(37) \quad W_{s',s} = \mu \mu' \int_0^L \int_0^{L'} \mathbf{F}(x, y, z, x', y', z', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') d\xi d\xi'.$$

Si la ligne L' est fermée, et si I' , λ' et $d\zeta'$ sont trois constantes, s' n'agit pas sur k , puisque k n'agit pas (n° 25) sur s' . L'équation (28) et les deux autres analogues montrent que les fonctions A , B , C sont alors nulles, et l'équation (26), que $W_{s',k}$ l'est aussi. Donc l'intégrale double (37), étant l'intégrale par rapport à L de $W_{s',k}$, est nulle, quand la ligne d'intégration L' est fermée. On verra pareillement qu'elle est nulle, quand la ligne L est fermée. Or on sait que, lorsqu'une intégrale double, de la forme (37), jouit de ces deux propriétés, la fonction F est de la forme $\frac{\partial^2 f(x, y, z, x', y', z')}{\partial \zeta' \partial \zeta'}$, et que f est une fonction bien définie des six coordonnées, indépendante de leurs dérivées d'ordre quelconque et particulièrement des six cosinus directeurs $\alpha = \frac{\partial x}{\partial \zeta'}$, $\beta = \frac{\partial y}{\partial \zeta'}$, $\gamma = \frac{\partial z}{\partial \zeta'}$, $\alpha' = \frac{\partial x'}{\partial \zeta'}$, \dots : (33) devient

$$(38) \quad W_{k',k} = kk' \frac{\partial^2 f(x, y, z, x', y', z')}{\partial \zeta' \partial \zeta'}$$

Mais on a vu (27) que la fonction W est indépendante du choix des axes. Donc f ne peut dépendre que des quatre variables

$$(39) \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial \zeta'}, \quad \frac{\partial r}{\partial \zeta'}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta' \partial \zeta'}$$

qui définissent les positions relatives des axes de deux éléments de solénoïdes. D'ailleurs f est indépendante des trois dernières, fonctions des coordonnées et des cosinus directeurs; par suite

$$(38') \quad W_{k',k} = kk' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial \zeta' \partial \zeta'}$$

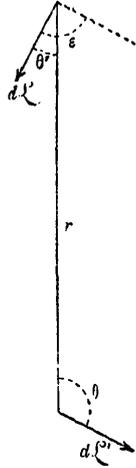
Or on a, en substituant (24) dans (27), $\Delta_2 W_{k',k} = 0$, puis cette relation dans (38'),

$$\frac{\partial^2 \Delta_2 \varphi(r)}{\partial \zeta' \partial \zeta'} = 0.$$

$\frac{\partial \Delta_2 \varphi(r)}{\partial \zeta'}$, fonction de r indépendante du déplacement $d\zeta$ de l'extré-

mité (x, y, z) de r , ne peut être qu'une constante, laquelle, assujettie

Fig. 3.



en même temps à changer de signe avec $d\xi'$, ne peut être différente de zéro :

$$\Delta_2 \varphi(r) = \text{une constante } 6h,$$

ou

$$2r\varphi' + r^2\varphi'' + 6hr^2 = 0,$$

équation dont l'intégrale première est $r^2\varphi' + 2hr^3 = \text{une constante } -f$;

d'où $\varphi' = -2hr - \frac{f}{r^2}$ et

$$(40) \quad \varphi = \varphi_0 - hr^2 + \frac{f}{r}.$$

En désignant par

$$(41) \quad \varepsilon, \theta \text{ et } \theta' \text{ (fig. 3)}$$

les angles que $d\xi$ et $d\xi'$ font entre eux et avec r , (38') devient

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} W_{K,h} &= kk' \left(-h \frac{\partial^2 r^2}{\partial \xi \partial \xi'} + f \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \partial \xi'} \right) \\ &= kk' \left(h \cos \varepsilon + f \frac{\cos \varepsilon + 3 \cos \theta \cos \theta'}{r^3} \right). \end{aligned} \right.$$

Le terme en f est infiniment petit avec $\frac{1}{r}$ dans le moment (30), calculé en prenant le point (x, y, z) pour origine; et le terme en h , $-kk'h \frac{\partial \cos \varepsilon}{\partial (yz)}$, doit l'être aussi, toute action physique observable étant infiniment petite à l'infini. Mais ce terme est indépendant de la distance : donc $h = 0$; et la fonction (40), débarrassée du terme inutile φ_0 , qui n'entre pas dans (38'), se réduit à

$$(43) \quad \varphi = \frac{f}{r}.$$

53. Le coefficient f est positif. En effet, le pôle négatif et le pôle positif

$$(44) \quad n \text{ ou } n', \quad p \text{ ou } p'$$

d'un solénoïde s (n° 19) ou s' étant définis le commencement et la fin de son axe L (n° 19) ou L' , l'équation (37) devient

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} W_{s',s} &= f\mu\mu' \int_0^{l'} \int_0^l \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi' \partial \xi} d\xi d\xi' \\ &= f\mu\mu' \left(\frac{1}{r_{p,p'}} - \frac{1}{r_{p,n'}} - \frac{1}{r_{n,p'}} + \frac{1}{r_{n,n'}} \right); \end{aligned} \right.$$

d'où, en appliquant (35),

$$(46) \quad d\mathfrak{C}(s',s) = f\mu\mu' \left(\frac{d}{dt} \frac{r_{p,p'}}{r_{p,p'}^2} - \frac{d}{dt} \frac{r_{p,n'}}{r_{p,n'}^2} - \frac{d}{dt} \frac{r_{n,p'}}{r_{n,p'}^2} + \frac{d}{dt} \frac{r_{n,n'}}{r_{n,n'}^2} \right) dt,$$

expression du travail élémentaire virtuel (n° 15) du solénoïde fixe s' sur le solénoïde s , mobile de manière que son axe L , déformé ou non, conserve une longueur invariable. On voit que les actions exercées par s' sur s se réduisent à quatre forces entre leurs pôles, dont deux sont attractives et deux répulsives, et que les pôles p et p' s'attiraient si le coefficient f était négatif. L'expérience apprend qu'ils se

repoussent; donc f est positif et (42) devient

$$(47) \quad W_{k',k} = f k k' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta' \partial \zeta'} = f k k' \frac{\cos \varepsilon + 3 \cos \theta \cos \theta'}{r^3}, \quad f > 0.$$

Mais (26)

$$W_{k',k} = k \frac{\partial V_{k'}}{\partial \zeta'};$$

d'où

$$0 = k \frac{\partial \left(V_{k'} - f k' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta'} \right)}{\partial \zeta'}$$

et, par suite,

$$(48) \quad V_{k'} = f k' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta'} + V_0.$$

34. On verra que la constante arbitraire V_0 a une infinité de valeurs en progression arithmétique. On voit actuellement qu'on peut la supprimer, sans rien changer aux actions de k' , $V_{k'}$ n'y entrant que par ses dérivées, et réduire cette fonction à la suivante :

$$(49) \quad v_{k'} = f k' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta'},$$

qui sera appelée *la partie bien définie du potentiel* de l'élément k' de solénoïde au point (x, y, z) .

35. En substituant (23) dans (11), on trouve

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} (M', Ids)_x \quad \text{ou} \quad \xi I ds = I \left(\frac{\partial V}{\partial y} dz - \frac{\partial V}{\partial z} dy \right), \\ (M', Ids)_y \quad \text{ou} \quad \eta I ds = I \left(\frac{\partial V}{\partial z} dx - \frac{\partial V}{\partial x} dz \right), \\ (M', Ids)_z \quad \text{ou} \quad \zeta I ds = I \left(\frac{\partial V}{\partial x} dy - \frac{\partial V}{\partial y} dx \right). \end{array} \right.$$

Réductions des formules précédentes à leurs formes les plus simples.

56. On appelle *électromagnétique* le système d'unités absolues qu'il faut adopter pour réduire à l'unité le coefficient f de la formule (49).

La répulsion des pôles positifs de deux solénoïdes, étant (46) $\frac{f I \lambda \lambda'}{r^2}$ ou (8) $\frac{f I' \lambda \lambda'}{\delta \zeta' \delta \zeta' r^2}$, devient $f \left(\frac{I \lambda}{\delta \zeta' r} \right)^2$ pour $I = I'$, $\lambda = \lambda'$ et $\delta \zeta = \delta \zeta'$. Cette répulsion F est alors proportionnelle à I^2 ; et il suffit de régler l'intensité I d'un courant passant dans deux solénoïdes identiques, pour rendre F égale à l'unité, lorsque $\lambda = r \delta \zeta$. Comme elle devient $f I^2$, on a $f = 1$ en prenant cette intensité pour unité.

57. L'unité *électromagnétique* d'intensité des courants électriques est celle d'un courant qui, passant dans deux solénoïdes identiques, produit une répulsion égale à l'unité de force entre leurs pôles positifs, séparés par la distance $\frac{\lambda}{\delta \zeta}$, quotient de l'aire d'un élément d'un solénoïde par la distance de deux éléments consécutifs.

58. Quand on adopte cette unité, (47) et (49) deviennent, en récrivant (25) et observant que la symétrie permet d'intervertir k et k' ,

$$(51) \quad W_{k',k} = W_{k,k'} = k k' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta' \partial \zeta} = k k' \frac{\cos \varepsilon + 3 \cos \theta \cos \theta'}{r^3}, \quad k = I \lambda, \quad k' = I' \lambda',$$

$$(52) \quad \varphi_{k'} = k' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta'} = k' \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad \varphi_k = k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} = k \frac{\cos \theta'}{r^2}.$$

On obtient les derniers membres par les formules de transformation

$$(53) \quad \frac{\partial r}{\partial \zeta} = -\cos \theta', \quad \frac{\partial r}{\partial \zeta'} = -\cos \theta, \quad \frac{\partial \cos \theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial \cos \theta'}{\partial \zeta'} = \frac{\cos \varepsilon + \cos \theta \cos \theta'}{r}.$$

59. Soient encore α, β, γ les cosinus (6); on a (26)

$$(54) \quad W_{M,k} = k \frac{\partial V_M}{\partial \zeta} = -k (A \alpha + B \beta + C \gamma).$$

L'action de M' sur k est représentée par une force appliquée au centre de gravité de k , et ayant (29) pour composantes

$$(55) \quad (M', k)_x = - \frac{\partial W_{M',k}}{\partial x}, \quad (M', k)_y = - \frac{\partial W_{M',k}}{\partial y}, \quad (M', k)_z = - \frac{\partial W_{M',k}}{\partial z},$$

ou (54)

$$(55') \quad (M', k)_x = -k \frac{\partial V_{M'}}{\partial x'}, \quad (M', k)_y = -k \frac{\partial V_{M'}}{\partial y'}, \quad (M', k)_z = -k \frac{\partial V_{M'}}{\partial z'},$$

ou (23)

$$(55'') \quad (M', k)_x = k \frac{\partial A_{M'}}{\partial x'}, \quad (M', k)_y = k \frac{\partial B_{M'}}{\partial y'}, \quad (M', k)_z = k \frac{\partial C_{M'}}{\partial z'},$$

et, par un couple ayant (30) pour moments par rapport aux axes,

$$(56) \quad (M', k)_{yz} = - \frac{\partial W_{M',k}}{\partial (yz)}, \quad (M', k)_{zx} = - \frac{\partial W_{M',k}}{\partial (zx)}, \quad (M', k)_{xy} = - \frac{\partial W_{M',k}}{\partial (xy)},$$

$$(56') \quad \begin{cases} (M', k)_{yz} = k(\beta C_{M'} - \gamma B_{M'}), \\ (M', k)_{zx} = k(\gamma A_{M'} - \alpha C_{M'}), \\ (M', k)_{xy} = k(\alpha B_{M'} - \beta A_{M'}), \end{cases}$$

ou (23)

$$(56'') \quad \begin{cases} (M', k)_{yz} = k\left(\gamma \frac{\partial V_{M'}}{\partial y'} - \beta \frac{\partial V_{M'}}{\partial z'}\right), \\ (M', k)_{zx} = k\left(\alpha \frac{\partial V_{M'}}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial V_{M'}}{\partial x'}\right), \\ (M', k)_{xy} = k\left(\beta \frac{\partial V_{M'}}{\partial x'} - \alpha \frac{\partial V_{M'}}{\partial y'}\right). \end{cases}$$

40. Définition d'Ampère. — La force directrice du système M' est la force essentiellement positive $D_{M'}$ appliquée au point (x, y, z) , et qui a pour composantes les fonctions (9) $A_{M'}$, $B_{M'}$, $C_{M'}$. Elle a donc pour expression

$$(57) \quad D_{M'} = \sqrt{A_{M'}^2 + B_{M'}^2 + C_{M'}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial V_{M'}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_{M'}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_{M'}}{\partial z}\right)^2}.$$

41. *Définition de Faraday.* — Toute ligne N qui a pour tangente positive, en chaque point, la force directrice $D_{M'}$ du système M' est une *ligne de force* de ce système.

42. En prenant $D_{M'}$ pour la direction positive de l'axe des x , on a $D_{M'} = A_{M'}$, et la première équation (23) devient

$$(58) \quad D_{M'} = - \frac{\partial V_{M'}}{\partial N},$$

relation qui subsiste quels que soient les axes, les trois quantités D, V, N étant indépendantes du choix qu'on en fait. Elle montre que dV et dN sont de signes contraires.

43. La force directrice est donc dirigée dans le sens où le potentiel décroît.

44. En désignant un élément k de solénoïde par la notation $I\lambda$ (25) de son moment, l'analogie des expressions (11) et (56'),

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} (M', I ds)_x = I \left(C \frac{\partial y}{\partial s} - B \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds, \dots, \\ (M', I \lambda)_{yz} = I \left(C \frac{\partial y}{\partial \xi} - B \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \lambda, \dots \end{array} \right.$$

conduit à l'énoncé suivant.

45. Si l'élément $I ds$ de courant fictif coïncidait avec le premier élément $d\xi$ de l'élément de solénoïde k ou $I\lambda$, ce qui donnerait $\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial \xi}$, et si l'on représentait l'action de M' sur k par une force appliquée à λ et par un couple, l'axe du couple et la force exercée par M' sur $I ds$ coïncideraient en direction et sens, et le moment du couple serait à la force dans le rapport numérique de λ à ds .

Propriétés de l'énergie (26), dans le cas où M' et k satisfont au principe de l'action et de la réaction.

46. Soit

$$(60) \quad \mathfrak{M}'$$

ce que devient le système $M'(1)$, quand le magnétisme terrestre n'en fait pas partie, c'est-à-dire un système de courants fermés et d'aimants, rigide et invariable dans sa constitution physique. L'équation (54) devient

$$(61) \quad W_{\mathfrak{M}',k} = k \frac{\partial V_{\mathfrak{M}'}}{\partial \mathfrak{M}'}$$

47. L'énergie $W_{\mathfrak{M}',k}$ représente la somme des travaux virtuels (n° 15) des actions mutuelles des deux corps \mathfrak{M}' et k , transportés de leurs positions actuelles à deux autres, pour lesquelles leur distance mutuelle est infinie; par suite,

$$(62) \quad W_{\mathfrak{M}',k} = W_{k,\mathfrak{M}'}$$

48. En effet, dans l'équation (32), $\mathfrak{E}(\mathfrak{M}'k)$ désigne le travail virtuel de l'action de \mathfrak{M}' sur k , rapporté à des axes mobiles et solidaires avec \mathfrak{M}' . C'est aussi la somme $\mathfrak{E}(\mathfrak{M}',k) + \mathfrak{E}(k,\mathfrak{M}')$ des travaux virtuels de l'action et de la réaction, rapportés à des axes fixes, et qui alors se feraient équilibre sur un système rigide. D'ailleurs, le second membre de (32) étant (27) indépendant du choix des axes, (31) et (32) deviennent, par rapport à des axes fixes,

$$(63) \quad d\mathfrak{E}(M',k) + d\mathfrak{E}(k,M') = -\frac{dW}{dt} dt,$$

$$(64) \quad \Delta\mathfrak{E}(M',k) + \Delta\mathfrak{E}(k,M') = W_1 - W_2.$$

49. Les dérivées partielles $\frac{\partial V_{\mathfrak{M}'}}{\partial x}$, $\frac{\partial V_{\mathfrak{M}'}}{\partial y}$, $\frac{\partial V_{\mathfrak{M}'}}{\partial z}$ du potentiel $V_{\mathfrak{M}'}$ du système \mathfrak{M}' (60) sont infiniment petites à l'infini.

50. En effet, toute action physique observable jouissant de cette propriété, elle s'applique aux premiers membres des expressions, déduites de (56''),

$$(65) \quad \begin{cases} \frac{1}{k} (\partial \mathcal{U}', k_{\beta=1})_{xy} = \frac{\partial V \partial \mathcal{U}'}{\partial x}, \\ \frac{1}{k} (\partial \mathcal{U}', k_{\gamma=1})_{yz} = \frac{\partial V \partial \mathcal{U}'}{\partial y}, \\ \frac{1}{k} (\partial \mathcal{U}', k_{\alpha=1})_{zx} = \frac{\partial V \partial \mathcal{U}'}{\partial z}. \end{cases}$$

§ III. — CALCUL ET PROPRIÉTÉS DU POTENTIEL D'UN COURANT LINÉAIRE FERMÉ.

Expression la plus générale du potentiel d'un courant linéaire fermé, au moyen d'une intégrale définie.

51. Soient \mathcal{C}' ce courant, I' son intensité constante, S' sa longueur, et $V_{\mathcal{C}'}$ l'expression la plus générale de son potentiel au point (x, y, z) , non situé sur S' :

52. Cette expression est définie toute fonction continue de x, y, z , qui a pour dérivées partielles (23)

$$(66) \quad \frac{\partial V_{\mathcal{C}'}}{\partial x} = -A_{\mathcal{C}'}, \quad \frac{\partial V_{\mathcal{C}'}}{\partial y} = -B_{\mathcal{C}'}, \quad \frac{\partial V_{\mathcal{C}'}}{\partial z} = -C_{\mathcal{C}'}$$

Cette définition équivaut à la formule

$$(67) \quad V_{\mathcal{C}'}(x, y, z) = V_{\mathcal{C}'}(x_0, y_0, z_0) - \int_0^L \left(A_1 \frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B_1 \frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C_1 \frac{\partial z_1}{\partial l_1} \right) dl_1,$$

dans laquelle L désigne une ligne assujettie uniquement à aller, sans rencontrer S' , du point arbitraire $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au point $M(x, y, z)$, et qui passe par le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$, quand il a parcouru sur L l'arc l_1 . Voilà l'expression la plus générale de $V_{\mathcal{C}'}$: le calcul en est ramené à celui de ses trois dérivées (66).

53. Soit k (25) le moment d'un élément fictif k de solénoïde, dont l'axe \mathcal{L} commencerait au point M , et aurait pour cosinus directeurs α ,

β, γ . Son potentiel ayant (52) pour partie bien définie, au point (x', y', z') de S' , où commence l'élément $I' ds'$,

$$(68) \quad \mathfrak{V}_k = k \frac{\partial^1}{\partial r^1},$$

il produirait sur cet élément une force appliquée en ce point, et dont la projection sur l'axe des x , obtenue en substituant (68) dans (50), est

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} (k, I' ds')_x &= I' k \frac{\partial}{\partial r^1} \left(\frac{\partial^1}{\partial y^1} dz' - \frac{\partial^1}{\partial z^1} dy' \right) \\ &= I' k \frac{\partial}{\partial r^1} \left(\frac{\partial^1}{\partial z} \frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{\partial^1}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) ds'. \end{aligned} \right.$$

Posant

$$(70) \quad F_{\mathfrak{E}'} = I' \int_0^S \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds', \quad G_{\mathfrak{E}'} = I' \int_0^S \frac{1}{r} \frac{\partial y'}{\partial s'} ds', \quad H_{\mathfrak{E}'} = I' \int_0^S \frac{1}{r} \frac{\partial z'}{\partial s'} ds',$$

supprimant l'indice \mathfrak{E}' quand il n'y aura pas d'ambiguïté, et intégrant (69) pour tous les éléments du contour S' , on trouve

$$(k, \mathfrak{E}')_x = k \frac{\partial}{\partial r^1} \left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} \right).$$

Mais (55')

$$(\mathfrak{E}', k)_x = -k \frac{\partial}{\partial r^1} \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Le principe de l'action et de la réaction ayant lieu entre les courants fermés \mathfrak{E}' et k , la somme des premiers membres des deux dernières équations est identiquement nulle; ce qui donne la première des trois équations suivantes :

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r^1} \left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r^1} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r^1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Or les fonctions (70) sont les potentiels qu'aurait, au point (x, y, z) , la matière du rhéophore, si elle avait respectivement pour densité linéaire, au point (x', y', z') , $I \frac{\partial x'}{\partial s'}$, $I \frac{\partial y'}{\partial s'}$ et $I \frac{\partial z'}{\partial s'}$. On sait que les dérivées partielles du premier ordre de ces trois potentiels sont infiniment petites à l'infini. Celles de $V_{\mathcal{E}}$ jouissent de la même propriété (n° 49). D'ailleurs, le déplacement $d\mathcal{E}$ étant arbitraire dans les équations (71), les parenthèses de ces équations ont des valeurs à la fois constantes en tous les points de l'espace non situés sur S' et infiniment petites à l'infini, par suite identiquement nulles : ce qui donne les trois équations

$$(72) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}$$

ou (66)

$$(73) \quad A = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad B = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad C = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Expression de la partie bien définie du potentiel d'un courant linéaire fermé.

54. La partie bien définie $\varphi_{\mathcal{E}}$ du potentiel d'un système \mathcal{E}' de courants linéaires fermés, pouvant se réduire à un seul \mathcal{E}'_n , d'intensité constante I'_n et de longueur S'_n , est définie la somme algébrique des parties bien définies (49) des potentiels des éléments de solénoïdes dans lesquels le système est décomposable par la construction suivante, due à Ampère.

55. On appelle *décomposition d'un courant linéaire fermé en éléments de solénoïdes* la substitution à ce courant \mathcal{E} , d'intensité I et de longueur S , d'un système d'éléments de solénoïdes, obtenus en décomposant une aire Λ , dont le contour S est seul déterminé, en éléments $d\Lambda$, autour desquels on fait tourner, dans le même sens que le proposé, autant de courants fictifs, de même intensité que lui, I . La *face positive* de Λ est celle qu'un observateur, traversé des pieds à la tête par ce courant, verrait à sa gauche : elle est donc formée par l'ensemble des faces positives des éléments de solénoïdes, déjà définies (n° 17).

56. Cette décomposition ne change aucune action observable entre le courant \mathfrak{e} et un corps extérieur.

Elle ne change, en effet, aucune des actions produites sur \mathfrak{e} par le système M' (1), car elle adjoint à \mathfrak{e} un système d'éléments de courants linéaires, deux à deux égaux, superposés et de sens contraires, sur lesquels les actions de M' se détruisent (n° 21). Dès lors, en vertu du principe de l'action et de la réaction, la décomposition (n° 55) ne change pas non plus l'action de \mathfrak{e}' sur le système \mathfrak{N} (60), particulièrement sur un élément de solénoïde, ni, par suite, sur un élément de courant extérieur (n° 45) coïncidant avec le premier élément de l'axe d'un élément fictif de solénoïde.

57. En décomposant le courant fermé linéaire \mathfrak{e}' , d'intensité I' et de longueur S' , en éléments k' de solénoïdes, dans l'aire Λ' terminée à S' , on a (52), pour la partie bien définie du potentiel d'un de ces courants,

$$(74) \quad \varphi_{k'} = I' d\Lambda' \frac{\cos(\xi', r)}{r^2},$$

d'où (n° 54)

$$(75) \quad \varphi_{\mathfrak{e}'} = I' \int_{\Lambda'} \int d\Lambda' \frac{\cos(\xi', r)}{r^2}.$$

58. Cette fonction (75) est infiniment petite à l'infini; car on a, en valeur absolue,

$$\varphi_{\mathfrak{e}'} < I' \int_{\Lambda'} \int \frac{d\Lambda'}{r^2} < \frac{I' \Lambda'}{(\text{minimum de } r)^2},$$

inégalité dont le troisième membre jouit évidemment de la propriété énoncée.

59. La fonction $\varphi_{\mathfrak{e}'}$ (n° 54) est continue en tout point de l'espace extérieur à Λ' , et présente, lorsque le point $M(x, y, z)$ traverse cette aire, la discontinuité $4\pi I'$, affectée du signe où il se trouve après le passage.

En effet, dans le cas où l'aire Λ' est plane, l'expression $\varphi_{\mathfrak{e}'}$, divisée par I' , représente l'angle solide sous lequel on la voit du point M , affecté du signe (n° 55) de la région où se trouve ce point, et prend la

valeur ambiguë $\pm 2\pi$, si M est dans l'aire Λ' . Donc elle présente, quand le point M franchit Λ' , la discontinuité 4π , différence de ces deux valeurs, affectée du signe de la face visible du point M après le passage.

Dans le cas général où S' et Λ' sont quelconques, tous les éléments de la somme (75) sont des fonctions continues de x, y, z , sans exception, lorsque le point M ne franchit pas Λ' , et cette somme jouit de la même propriété. Lorsque M franchit Λ' , un seul élément est excepté, celui dont il traverse l'aire $d\Lambda'$, et qui, traité comme plan, présente la discontinuité $4\pi I'$. Donc la discontinuité de la fonction φ , somme des discontinuités de ses éléments, est aussi $4\pi I'$ et a le signe de la région où pénètre le point M . L'énoncé du n° 59 est ainsi démontré.

Expression la plus générale du potentiel d'un courant linéaire fermé, au moyen de sa partie bien définie.

60. La fonction $V_{\mathcal{C}'}$ (67) est continue en tout point de l'espace non situé sur S' , et la fonction $\varphi_{\mathcal{C}'}$ (n° 54) en tout point de l'espace non situé sur Λ' . Mais, si la ligne L est remplacée par une ligne l , assujettie à la nouvelle condition de ne pas franchir Λ' , les deux fonctions ne diffèrent plus que par une constante, car elles sont finies, continues, et ont les mêmes dérivées (66) en tout point mobile dans l'espace et ne traversant pas Λ' . Après avoir substitué l à L dans la fonction $V_{\mathcal{C}'}$, on peut donc, par le choix de la constante arbitraire $\varphi_{\mathcal{C}'}(x_0, y_0, z_0)$, l'identifier avec $\varphi_{\mathcal{C}'}$, et l'écrire

$$\varphi_{\mathcal{C}'}(x, y, z) = \varphi_{\mathcal{C}'}(x_0, y_0, z_0) - \int_0^l \left(A, \frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B, \frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C, \frac{\partial z_1}{\partial l_1} \right) dl_1.$$

Le premier membre étant nul (n° 58), si le point (x, y, z) est à l'infini, on a, en prolongeant l jusqu'à l'infini, dans le sens des arcs négatifs, et changeant les signes,

$$0 = -\varphi_{\mathcal{C}'}(x_0, y_0, z_0) - \int_{-\infty}^0 \left(A, \frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B, \frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C, \frac{\partial z_1}{\partial l_1} \right) dl_1,$$

et, en ajoutant membre à membre,

$$(76) \quad \varphi_{\mathcal{C}'}(x, y, z) = - \int_{-\infty}^l \left(A, \frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B, \frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C, \frac{\partial z_1}{\partial l_1} \right) dl_1,$$

ou, en substituant successivement (73) et (70),

$$(76') \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{\mathcal{E}'} &= \int_{-\infty}^l \left[\left(\frac{\partial G_1}{\partial z_1} - \frac{\partial H_1}{\partial y_1} \right) \frac{dx_1}{dl_1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \right) \frac{dy_1}{dl_1} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} - \frac{\partial G_1}{\partial x_1} \right) \frac{dz_1}{dl_1} \right] dl_1, \\ (76'') \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{\mathcal{E}'} &= I' \int_{-\infty}^l dl_1 \int_0^{s'} \left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial l_1} \frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{\partial z_1}{\partial l_1} \frac{\partial y'}{\partial s'} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial z_1}{\partial l_1} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial x_1}{\partial l_1} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial x_1}{\partial l_1} \frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{\partial y_1}{\partial l_1} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right] ds' \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

ou

$$(76''') \quad \varphi_{\mathcal{E}'} = I' \int_{-\infty}^l dl_1 \int_0^{s'} \frac{\left[(x' - x_1)(\partial y_1 \partial z' - \partial z_1 \partial y') + (y' - y_1)(\partial z_1 \partial x' - \partial x_1 \partial z') \right. \\ \left. + (z' - z_1)(\partial x_1 \partial y' - \partial y_1 \partial x') \right]}{r^3 \partial l_1 \partial s'} ds'.$$

On déduit de (70) et (73), ou de (76) et (76'''),

$$(77) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{\mathcal{E}'} &= I' \int_0^s \left(\frac{y' - y}{r^3} \frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{z' - z}{r^3} \frac{\partial y'}{\partial s'} \right) ds', \\ B_{\mathcal{E}'} &= I' \int_0^s \left(\frac{z' - z}{r^3} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{x' - x}{r^3} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) ds', \\ C_{\mathcal{E}'} &= I' \int_0^s \left(\frac{x' - x}{r^3} \frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{y' - y}{r^3} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) ds'. \end{aligned} \right.$$

61. Soient ΔV et $\Delta \varphi$ les variations des fonctions (67) et (75) des coordonnées x_1, y_1, z_1 du point mobile M_1 , lorsqu'il revient à sa position initiale $M_0(x_0, y_0, z_0)$, après avoir parcouru une ligne fermée L , qui ne rencontre pas S' , mais qui peut traverser $p + n$ fois l'aire Λ' , entrer dans la région positive en p points et dans la région négative en n points. La fonction φ est continue en tous les points de L , excepté aux points d'intersection, où elle présente (n° 59) autant de disconti-

nuités $\pm 4\pi I'$. D'ailleurs, n'ayant (75) qu'une valeur en chaque point, elle reprend celle qu'elle avait en M_0 ,

$$\Delta\varphi = \int_0^L \frac{\partial\varphi_1}{\partial l_1} dl_1 + 4(p - n)\pi I' = 0;$$

taudis que la fonction V n'a (67), sur L , aucune discontinuité,

$$\Delta V = \int_0^L \frac{\partial V_1}{\partial l_1} dl_1.$$

Mais, les dérivées partielles $\frac{\partial\varphi_1}{\partial l_1}$ et $\frac{\partial V_1}{\partial l_1}$ étant égales en tous les points de L , les intégrales qui figurent dans ces deux expressions le sont aussi. Donc

$$(78) \quad \Delta V = 4(n - p)\pi I'.$$

62. En prenant le point (x_0, y_0, z_0) à l'infini, et transportant, sur la ligne L , l'origine des arcs en un autre point, situé à distance finie, l'équation (67) prend la forme

$$(79) \quad V = V_0 - \int_{-\infty}^L \left(A_1 \frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B_1 \frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C_1 \frac{\partial z_1}{\partial l_1} \right) dl_1.$$

La ligne L , assujettie uniquement à ne pas rencontrer S' , peut traverser Λ' en $p + n$ points, entrer dans la région positive en p points, et dans la région négative en n points. La valeur de l'intégrale (79) est la même que si la ligne L , après le dernier passage, au lieu d'aller d'un seul trait au point $M(x, y, z)$, allait, sans franchir Λ' , à son point de départ M_0 , situé à l'infini, et de là au point M par une ligne l (n° 60). Donc, en continuant de désigner par ΔV la partie de l'intégrale (79) dont la ligne L a ses extrémités réunies en M_0 , on a

$$V = V_0 + \Delta V - \int_{-\infty}^l \left(A_1 \frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B_1 \frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C_1 \frac{\partial z_1}{\partial l_1} \right) dl_1 = V_0 + \Delta V + \varphi$$

ou, en substituant (78),

$$(80) \quad V_{\varphi'} = V_0 + 4(n - p)\pi I' + \varphi_{\varphi'}.$$

Voilà la forme la plus générale du potentiel d'un courant fermé linéaire \mathcal{C} , en un point extérieur $M(x, y, z)$. Elle exprime que ce potentiel est une fonction périodique des coordonnées x, y, z , dont la période est $4\pi\Gamma$.

Potential d'un système \mathcal{C}' de courants fermés linéaires.

65. En vertu de la définition du n° 54, la partie bien définie du potentiel d'un système rigide \mathcal{C}' de courants fermés linéaires $\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \dots$, d'intensités constantes I'_1, I'_2, \dots , et de longueurs S'_1, S'_2, \dots , en un point $M(x, y, z)$ non situé sur une des lignes S'_1, S'_2, \dots , est la somme des parties bien définies des potentiels de ces courants :

$$(81) \quad \varphi_{\mathcal{C}'} = \sum_{n'} \varphi_{\mathcal{C}'_{n'}}.$$

64. Ce potentiel $\varphi_{\mathcal{C}'}$ est, comme toutes ses parties (n° 58), infiniment petit à l'infini.

65. Les formules (66), (72), (73) et (76') s'appliquent au système \mathcal{C}' , en remplaçant les fonctions (70) par

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{\mathcal{C}'} = \sum_{n'} I'_{n'} \int_0^{S'_{n'}} \frac{1}{r'_{n'}} \left(\frac{\partial x'}{\partial s'} \right)_{n'} ds'_{n'}, \\ G_{\mathcal{C}'} = \sum_{n'} I'_{n'} \int_0^{S'_{n'}} \frac{1}{r'_{n'}} \left(\frac{\partial y'}{\partial s'} \right)_{n'} ds'_{n'}, \\ H_{\mathcal{C}'} = \sum_{n'} I'_{n'} \int_0^{S'_{n'}} \frac{1}{r'_{n'}} \left(\frac{\partial z'}{\partial s'} \right)_{n'} ds'_{n'}. \end{array} \right.$$

La formule (80) se généralise au moyen du lemme suivant.

66. Le potentiel V de tout système rigide M' , pouvant comprendre des courants fermés permanents, des aimants dont le magnétisme est rigide, et le magnétisme terrestre, en un point $M(x, y, z)$ extérieur au système, est la somme des potentiels $V_1, V_2, \dots, V_{m'}$ des différents corps du système, et d'une constante arbitraire V_0 :

$$(83) \quad V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{m'} = V_0 + \Sigma V_{n'}.$$

67. En effet, les composantes $\xi I ds, \dots$ de l'action de M' sur un élément de courant extérieur $I ds$, commençant au point M , sont les sommes des projections $\xi_{n'} I ds, \dots$ des actions des différents corps dont M' se compose

$$(84) \quad \xi = \Sigma \xi_{n'}, \quad \eta = \Sigma \eta_{n'}, \quad \zeta = \Sigma \zeta_{n'}.$$

Or les formules (50) donnent

$$\xi_{n'} ds = \frac{\partial V_{n'}}{\partial y} dz - \frac{\partial V_{n'}}{\partial z} dy, \quad \dots;$$

d'où

$$(\Sigma \xi_{n'}) ds = \frac{\partial \Sigma V_{n'}}{\partial y} dz - \frac{\partial \Sigma V_{n'}}{\partial z} dy, \quad \dots;$$

mais elles donnent aussi

$$\xi ds = \frac{\partial V}{\partial y} dz - \frac{\partial V}{\partial z} dy, \quad \dots$$

Or les premiers membres de ces deux derniers groupes d'équations étant (84) identiques, et les seconds linéaires par rapport aux trois variables indépendantes dx, dy et dz , il en résulte les trois identités

$$(85) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \Sigma V_{n'}}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial \Sigma V_{n'}}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial \Sigma V_{n'}}{\partial z}.$$

Donc les deux fonctions V et $\Sigma V_{n'}$, continues en tous les points de l'espace extérieur à M' , et ayant en tous ces points les mêmes dérivées (85), ne peuvent différer que par une constante V_0 , ce qui démontre (83).

68. L'équation (80) donne, pour les différents corps du système ε' ,

$$V_1 = V_{01} + 4(n_1 - p_1)\pi I'_1 + \varphi_1,$$

$$V_2 = V_{02} + 4(n_2 - p_2)\pi I'_2 + \varphi_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

Ajoutant ces équations membre à membre et appliquant (83), on ob-

tient l'expression la plus générale du potentiel d'un système \mathcal{E}' de m' courants linéaires $\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, \dots$, fermés et permanents,

$$(86) \quad V_{\mathcal{E}'} = V_0 + 4\pi \sum_{h'} (n_{h'} - p_{h'}) I'_{h'} + \varphi_{\mathcal{E}'}$$

Cette fonction (86) admet donc les m' périodes

$$4\pi I'_1, \quad 4\pi I'_2, \quad \dots, \quad 4\pi I'_{m'}$$

Propriété géométrique des surfaces de niveau d'un courant linéaire fermé.

69. Chaque *surface de niveau*

$$(87) \quad V = \text{une constante } V_b$$

d'un courant linéaire fermé \mathcal{E}' , d'intensité I' et de longueur S' , passe par tous les points de S' , se termine à cette ligne, et fait avec une autre $V = V_a$ l'angle constant

$$(88) \quad \psi_b - \psi_a = \frac{V_a - V_b}{4\pi I'}$$

70. En effet, si, dans le plan normal en un point O' de S' , on décrit une circonférence l , de centre O' et de rayon R' infiniment petit, le potentiel V du courant, en un point M qui décrit cette circonférence, augmente ou diminue, suivant le sens du mouvement, de $4\pi I'$ à chaque révolution (80); et si la rotation se continue indéfiniment, V varie d'une manière continue, jusqu'à $+\infty$ ou $-\infty$. Donc toute surface de niveau $V = V_b$ passe par un point de cette circonférence; étant fixe et passant infiniment près du point O' , elle passe rigoureusement par ce point; ce qui démontre une partie de l'énoncé du n° 69.

71. La surface $\varphi = 0$, la seule qui ait des points à l'infini (n° 58), a donc aussi un point M_0 sur la circonférence $2\pi R$ (*fig. 4*). La portion de l'intégrale (76) dont la ligne d'intégration va de l'infini au point M_0 est donc infiniment petite; et si ce point est pris pour origine de l'arc l ,

par sa partie située à distance finie, dont la courbure totale est infiniment petite, puis cette partie par sa tangente en O' .

73. La fonction (90) diffère donc infiniment peu du potentiel en M (*fig. 4*) d'un courant rectiligne indéfini, d'intensité I' , coïncidant avec l'axe des z . Il faut faire, dans l'équation (90), $z_1 = 0$, $dz_1 = 0$, $x' = y' = 0$, $dx' = dy' = 0$, et elle devient

$$\begin{aligned} \varphi &= I' \int_0^l dl_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y_1}{r^3} \frac{\partial x_1}{\partial l_1} - \frac{x_1}{r^3} \frac{\partial y_1}{\partial l_1} \right) dz' \\ &= I' \int_0^l \left(y_1 \frac{\partial x_1}{\partial l_1} - x_1 \frac{\partial y_1}{\partial l_1} \right) dl_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{r^3}, \end{aligned}$$

ou

$$(91) \left\{ \begin{aligned} \varphi &= I' \int_0^l \left(y_1 \frac{\partial x_1}{\partial l_1} - x_1 \frac{\partial y_1}{\partial l_1} \right) dl_1 \left[\frac{z'}{rR^2} \right]_{-\infty}^{\infty} = 2I' \int_0^l \frac{y_1 \partial x_1 - x_1 \partial y_1}{R^2 \partial l_1} dl_1 \\ &= -2I' \operatorname{arc tang} \frac{y}{x} = -2I' \cdot \text{MO}'M_0 = -2I'\psi. \end{aligned} \right.$$

On a donc, en deux points M_a et M_b de la circonférence, les valeurs $\varphi_a = -2I'\psi_a$ et $\varphi_b = -2I'\psi_b$, dont la différence est $V_a - V_b = 2I'(\psi_b - \psi_a)$; ce qui démontre (88).

§ IV. — ÉNERGIE DE L'ACTION D'UN SYSTÈME QUELCONQUE M' , SUSCEPTIBLE DE PRODUIRE DES FORCES OBSERVABLES, SUR UN COURANT LINÉAIRE, EXTÉRIEUR ET FERMÉ, \ominus , DONT LA LIGNE S EST FLEXIBLE ET EXTENSIBLE, MAIS DONT L'INTENSITÉ I RESTE CONSTANTE.

Flux de force envoyé dans l'espace par le système M' (notation 1).

74. Le système M' est supposé rigide, permanent et solidaire avec trois axes à gauche rectangulaires. L'action cherchée est exprimable par une énergie $W_{M', \ominus}$: celle-ci peut être représentée géométriquement, dans tous les cas, par un flux de force, traversant une aire de périmètre S ; et analytiquement, dans le cas où M' se réduit à un système de courants linéaires fermés, par une intégrale double.

75. La représentation géométrique repose sur une propriété de la

force directrice D (n° 40) du système M' : c'est la permanence du mouvement d'un fluide fictif, mouvement défini par la double condition qu'il ait en chaque point la direction D , et que D soit l'expression du flux dans cette direction, c'est-à-dire $Dd\omega$ la masse fluide qui traverse, dans l'unité de temps, l'élément $d\omega$ de surface de niveau.

76. Le flux D_{ξ} , suivant la normale positive ξ à l'élément $d\Lambda$ d'une surface quelconque, est défini le coefficient du flux $D_{\xi} d\Lambda$ traversant $d\Lambda$, c'est-à-dire la masse fluide qui franchit $d\Lambda$ dans l'unité de temps, affectée du signe de la région où elle s'introduit. Il en résulte que le flux est représenté avec son signe par la projection de D sur ξ

$$(92) \quad D_{\xi} = D \cos(D, \xi)$$

ou

$$(93) \quad D_{\xi} = A\alpha + B\beta + C\gamma,$$

$$(94) \quad A, B, C \quad \text{et} \quad \alpha, \beta, \gamma$$

désignant les composantes de D et les cosinus directeurs de ξ ; et que les flux, dans les directions positives des axes, sont les composantes de D dans ces mêmes directions

$$(95) \quad D_x = A, \quad D_y = B, \quad D_z = C.$$

77. Le fluide fictif étant conçu comme représentant, par son mouvement, le champ de force du système M' , soit ρ la densité de ce fluide, à l'instant t , au point M , dont les coordonnées x, y, z sont fixes. C'est une fonction des quatre variables indépendantes x, y, z, t . Le mouvement satisfait à l'équation générale de continuité $\frac{\partial D_x}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ou (95)

$$(96) \quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0;$$

mais (20)

$$(97) \quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

et l'équation de continuité se réduit à

$$(98) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Cette propriété (98), adjointe à la fixité, par rapport aux axes, des lignes de flux, qui coïncident avec les lignes de force de M' , établit la permanence (n° 75) du mouvement du fluide fictif.

78. On appelle *flux de force* émanant du système M' le flux défini par le mouvement permanent de ce fluide fictif; et *flux de force traversant une aire* Λ , dont ϱ désigne la normale positive, l'intégrale

$$(99) \quad \varepsilon_{M', \Lambda} = \iint_{\Lambda} D_{\varrho} d\Lambda.$$

des flux de force $D_{\varrho} d\Lambda$ qui en traversent tous les éléments $d\Lambda$. Faraday l'a considéré le premier sous le nom de *nombre de lignes de force traversant* Λ ; puis Maxwell l'a appelé *induction magnétique traversant* Λ . La dénomination de *flux de force* a été adoptée par MM. Mascart et Joubert.

79. La propriété unique qui sera invoquée est représentée par l'équation

$$(100) \quad \varepsilon_{M', S} = \varepsilon_{M', \Lambda}.$$

Elle exprime que le flux de force, traversant une aire Λ , ne dépend que de son périmètre S . Elle se démontre en considérant une autre aire Λ_1 , terminée au même contour S . La masse du fluide fictif, contenue dans un élément du volume compris entre Λ_1 et Λ_2 , étant constante avec sa densité ρ (98), la masse contenue dans tout ce volume l'est aussi : donc la masse entrant dans ce volume, pendant l'unité de temps, par Λ , est égale à celle qui en sort par Λ_1 , ce qui donne l'identité $\varepsilon_{M', \Lambda} - \varepsilon_{M', \Lambda_1} = 0$, équivalente à l'équation (100).

80. On a donc, pour le flux de force envoyé par M' sur la face

négative d'une aire Λ , de périmètre S , les notations et les expressions diverses, déduites de (92), (93), (99) et (100),

$$(101) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{M',S} = \varepsilon_{M',\Lambda} &= \frac{\iint \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\xi}}{\Lambda} d\Lambda = \frac{\iint \mathbf{D} \cos(\mathbf{D}, \boldsymbol{\xi})}{\Lambda} d\Lambda \\ &= \iint (A\alpha + B\beta + C\gamma) d\Lambda. \end{aligned} \right.$$

81. *Représentation, par un flux de force, de l'énergie des actions du système M' sur un courant linéaire extérieur, fermé et permanent.*

82. L'énergie $W_{M',\ominus}$ des actions du système M' sur le courant permanent, linéaire et extérieur \ominus , est définie le travail virtuel (n° 13), par rapport à trois axes rectangulaires, fixés à M' , des actions de ce système, toujours rigide et permanent, sur la ligne S , lorsque celle-ci, restant fermée, se déplace, en changeant ou non de longueur, mais l ne variant pas, jusqu'à ce qu'elle se réduise à un point, ou à deux lignes superposées et de sens contraires, ou à un système de plusieurs de ces figures, et engendre une aire Λ .

83. Si le magnétisme terrestre ne fait pas partie du système agissant \mathfrak{M}' , le travail virtuel relatif des actions de \mathfrak{M}' sur \ominus , par rapport à des axes fixés à \mathfrak{M}' , est égal à la somme des travaux virtuels absolus, rapportés à des axes fixes, de l'action et de la réaction, et l'énergie des actions mutuelles est représentée indifféremment par les deux notations $W_{\mathfrak{M}',\ominus}$ et $W_{\ominus,\mathfrak{M}'}$.

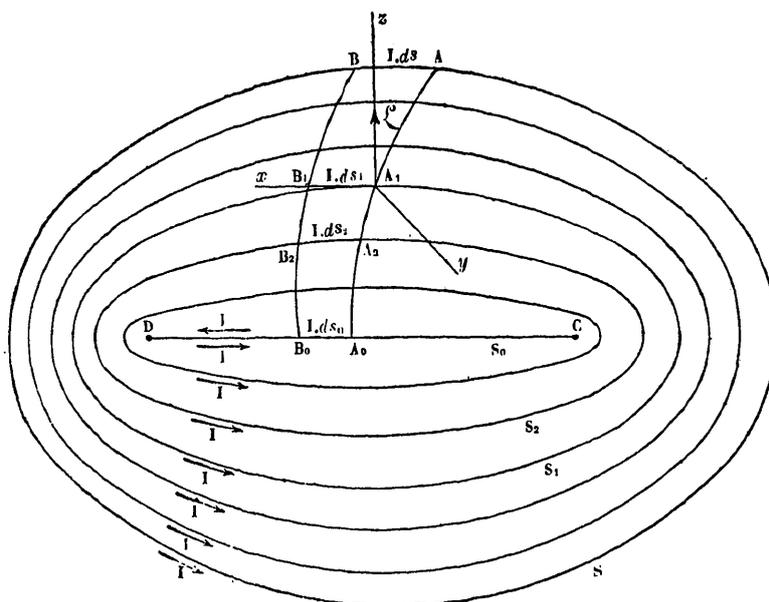
Il s'agit d'établir, entre l'énergie $W_{M',\ominus}$ (n° 82) et le flux de force $\varepsilon_{M',S}$ (101), la relation

$$(102) \quad W_{M',\ominus} = -I\varepsilon_{M',S}.$$

84. L'aire Λ contient la figure initiale S (*fig. 5*), deux figures consécutives quelconques S_1, S_2 , et la figure finale S_0 de la ligne du courant, cette dernière pouvant se réduire à un point ou à deux arcs superposés, comme CD et DC . Sur ces quatre lignes se trouvent les quatre positions successives, généralement inégales, $AB = ds$, $A_1B_1 = ds_1$,

$A_2B_2 = ds_2$, $A_0B_0 = ds_0$, d'un même élément, de même intensité I . En prenant A_1 pour origine d'un système rectangulaire d'axes à gauche, la normale positive ξ en ce point pour axe des z , et la tangente posi-

Fig. 5.



tive de S_1 pour axe des x , on aura pour axe des y une tangente intérieure à l'aire comprise dans S_1 , en vertu de la convention du n° 55. En désignant par δx , δy et $\delta z = 0$ les composantes du déplacement A_1, A_2 , le travail virtuel élémentaire de l'action fictive (n° 13) de M' sur l'élément de courant $I. A_1B_1$, transporté en A_2B_2 , est

$$(103) \quad d\tilde{c}(M', I ds_1) = (M', I ds_1)_x \delta x + (M', I ds_1)_y \delta y.$$

Mais (n° 24) $(M', I ds_1)_x = 0$, et le terme $(M', I ds_1)_y \delta y$ devient $(11) - I C ds_1 \delta y$ ou $- I D_{\xi} ds_1 \delta y$ ou $- I D_{\xi} d\Lambda$ ou $(101) - I \epsilon_{M', d\Lambda}$; (103) donne ainsi

$$(104) \quad d\tilde{c}(M', I ds_1) = - I D_{\xi} d\Lambda = - I \epsilon_{M', d\Lambda}.$$

En intégrant (104) pour tous les éléments de S_1 , puis pour toutes

les figures successives S_1 , de la ligne du courant, on trouve (102) en vertu de la définition du n° 82.

85. Si la ligne fermée S devient S_1 , sans que l'intensité I varie, le travail $\Delta\mathfrak{C}(M', \mathfrak{C})$ de l'action de M' sur le courant \mathfrak{C} , évalué par rapport aux axes fixés à M' , sera égal à la variation de la fonction $-W_{M', \mathfrak{C}}$; ce qui s'exprime, selon que le déplacement est infiniment petit ou fini, par l'une des équations

$$(105) \quad d\mathfrak{C}(M', \mathfrak{C}) = -dW_{M', \mathfrak{C}}$$

ou

$$(106) \quad \Delta\mathfrak{C}(M', \mathfrak{C}) = W_{M', \mathfrak{C}} - W_{M', \mathfrak{C}_1},$$

$$(107) \quad d\mathfrak{C}(M', \mathfrak{C}) = I d\varepsilon_{M', S}$$

ou

$$(108) \quad \Delta\mathfrak{C}(M', \mathfrak{C}) = I \Delta\varepsilon_{M', S} = I(\varepsilon_{M', S_1} - \varepsilon_{M', S}).$$

86. En effet, si, par suite de deux déplacements, S devient successivement S_1 , S_0 , et son aire Λ_1 , $\Lambda_0 = 0$, le travail virtuel (n° 13) des actions de M' sur le courant \mathfrak{C} , d'intensité constante I , sera $\Delta\mathfrak{C}(M', \mathfrak{C})$ dans la première phase, et W_{M', \mathfrak{C}_1} dans la seconde : il aura donc pour expression totale

$$W_{M', \mathfrak{C}} = \Delta\mathfrak{C}(M', \mathfrak{C}) + W_{M', \mathfrak{C}_1},$$

ce qui démontre (106); les trois autres équations en résultent.

87. Dans le cas du n° 83, où le magnétisme terrestre ne fait pas partie du système agissant \mathfrak{M}' , les équations (105), (106), (107), (108), démontrées pour les travaux relatifs à des axes solidaires avec \mathfrak{M}' , deviennent, quand on rapporte les mêmes travaux virtuels à des axes

fixes,

$$(105') \quad d\bar{c}(\mathfrak{N}', \varrho) + d\bar{c}(\varrho, \mathfrak{N}') = -dW_{\mathfrak{N}', \varrho},$$

$$(106') \quad \Delta\bar{c}(\mathfrak{N}', \varrho) + \Delta\bar{c}(\varrho, \mathfrak{N}') = W_{\mathfrak{N}', \varrho} - W_{\mathfrak{N}', \varrho, 1},$$

$$(107') \quad d\bar{c}(\mathfrak{N}', \varrho) + d\bar{c}(\varrho, \mathfrak{N}') = I d\varepsilon_{\mathfrak{N}', S},$$

$$(108') \quad \Delta\bar{c}(\mathfrak{N}', \varrho) + \Delta\bar{c}(\varrho, \mathfrak{N}') = I \Delta\varepsilon_{M', S} = I(\varepsilon_{M', S} - \varepsilon_{M', S}).$$

88. *Représentation, par une intégrale double, de l'énergie de l'action mutuelle de deux courants linéaires, fermés et permanents.*

89. Quand le système agissant \mathfrak{N}' se réduit à un second courant linéaire ϱ' , d'intensité constante I' , parcourant la ligne fermée et rigide S' , l'énergie (102), qui devient, en substituant (101),

$$(109) \quad W_{\varrho', \varrho} = -I \int_{\Lambda} (A\alpha + B\beta + C\gamma) d\Lambda,$$

peut être mise sous l'une des formes

$$(109') \quad W_{\varrho', \varrho} = -I' \int_0^S ds \int_0^{S'} ds' \frac{\cos(ds, ds')}{r} = W_{\varrho, \varrho'},$$

en posant.

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

$$(109'') \quad W_{\varrho', \varrho} = -I' \int_0^S ds \int_0^{S'} ds' \frac{ds'}{r} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right),$$

$$(109''') \quad W_{\varrho', \varrho} = -I \int_0^S \left(F_{\varrho'} \frac{dx}{ds} + G_{\varrho'} \frac{dy}{ds} + H_{\varrho'} \frac{dz}{ds} \right) ds;$$

dans la dernière figurent les trois potentiels (70) des composantes du

courant

$$(110) \quad F_{\mathcal{E}'} = I' \int_0^{S'} \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds', \quad G_{\mathcal{E}'} = I' \int_0^{S'} \frac{1}{r} \frac{\partial y'}{\partial s'} ds', \quad H_{\mathcal{E}'} = I' \int_0^{S'} \frac{1}{r} \frac{\partial z'}{\partial s'} ds'.$$

90. En effet on a (73)

$$(111) \quad A_{\mathcal{E}'} = \frac{\partial H_{\mathcal{E}'}}{\partial y} - \frac{\partial G_{\mathcal{E}'}}{\partial z}, \quad B_{\mathcal{E}'} = \frac{\partial F_{\mathcal{E}'}}{\partial z} - \frac{\partial H_{\mathcal{E}'}}{\partial x}, \quad C_{\mathcal{E}'} = \frac{\partial G_{\mathcal{E}'}}{\partial x} - \frac{\partial F_{\mathcal{E}'}}{\partial y},$$

et, en substituant ces fonctions dans (109),

$$(112) \quad \left\{ \begin{aligned} W_{\mathcal{E}', \mathcal{E}} = & -I \iint_{\Lambda} \left[\left(\frac{\partial H_{\mathcal{E}'}}{\partial y} - \frac{\partial G_{\mathcal{E}'}}{\partial z} \right) \alpha \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial F_{\mathcal{E}'}}{\partial z} - \frac{\partial H_{\mathcal{E}'}}{\partial x} \right) \beta + \left(\frac{\partial G_{\mathcal{E}'}}{\partial x} - \frac{\partial F_{\mathcal{E}'}}{\partial y} \right) \gamma \right] d\Lambda. \end{aligned} \right.$$

Or, S étant le périmètre de Λ , les seconds membres de (109''') et (112) sont identiques (7), quelles que soient les trois fonctions continues F, G, H de x, y, z . L'équation (109''') est donc démontrée : elle devient (109'') en y substituant (110); et l'équation (109') est la même que (109'').

Les définitions des nos 82 et 85, appliquées à l'énergie $W_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}$, supposent la ligne S' rigide. En écartant cette restriction, on obtient l'énoncé suivant :

91. L'énergie $W_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}$ des actions que deux courants linéaires $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$, d'intensités I, I' constantes, exercent l'un sur l'autre, est la somme des travaux virtuels (n° 15) de ces actions mutuelles, lorsque, I et I' restant fixes, les lignes S et S' de ces courants, toujours fermées, se déplacent, en changeant ou non de longueurs et de figures, jusqu'à ce que l'une des aires Λ, Λ' , dont elles sont les périmètres, s'évanouisse.

92. Pour le démontrer (n° 91), soit

$$(113) \quad d\mathcal{E} = d\mathcal{E}(\mathcal{E}', \mathcal{E}) + d\mathcal{E}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$$

la somme des travaux élémentaires virtuels des actions mutuelles, dans le temps dt , après lequel ϱ et ϱ' sont devenus ϱ_1 et ϱ'_1 . Cette somme est la même que si les deux déplacements étaient successifs; et comme on aurait alors (106)

$$d\bar{\omega}(\varrho', \varrho) = W_{\varrho', \varrho} - W_{\varrho', \varrho_1}$$

et

$$d\bar{\omega}(\varrho_1, \varrho') = W_{\varrho', \varrho_1} - W_{\varrho'_1, \varrho_1},$$

on a en réalité

$$d\bar{\omega} = W_{\varrho', \varrho} - W_{\varrho'_1, \varrho_1} = -dW_{\varrho', \varrho},$$

et, en intégrant de t à t_2 ,

$$(114) \quad \Delta\bar{\omega} = W_{\varrho', \varrho} - W_{\varrho'_1, \varrho_1} = -\Delta W_{\varrho', \varrho},$$

ϱ_2, ϱ'_2 étant ce que deviennent ϱ et ϱ' à l'instant t_2 . Et si, à cet instant, l'aire Λ est nulle, le flux de force (99) qui la traverse l'est aussi, et (102) donne $W_{\varrho'_2, \varrho_2} = 0$. La forme symétrique (109'') de cette fonction montre qu'elle s'annule aussi avec Λ'_2 . Alors (114) se réduit à l'équation, qui démontre l'énoncé du n° 91,

$$(115) \quad \bar{\omega} = W_{\varrho', \varrho}.$$

93. L'énergie $W_{\mathfrak{N}', \varrho}$ (n° 85) exprime le travail virtuel (n° 15), par rapport à des axes fixés à \mathfrak{N}' , de l'action de \mathfrak{N}' sur ϱ ; elle exprime aussi la somme des travaux virtuels absolus des actions réciproques entre le système rigide et permanent \mathfrak{N}' et le courant ϱ , lorsqu'ils sont transportés à une distance mutuelle infinie, sans variation de l'intensité I , mais la ligne S pouvant changer de longueur et de figure.

Car, en vertu de l'équation (106'), tout se réduit à prouver que, en transportant ϱ à l'infini, on rend infiniment petit $W_{\mathfrak{N}', \varrho_1}$, ou (108') $\varepsilon_{\mathfrak{N}', S_1}$, ou (101) les trois fonctions $A_{\mathfrak{N}'}, B_{\mathfrak{N}'}, C_{\mathfrak{N}'}$, ou les dérivées premières de $V_{\mathfrak{N}'}$. C'est ce qui a été démontré (n° 49).

94. L'énergie $W_{\mathcal{E}', \mathcal{E}} = W_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}$ des actions mutuelles de deux systèmes

$$(116) \quad \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'$$

comprenant respectivement les courants

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n, \dots, \mathcal{E}_\nu \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, \dots, \mathcal{E}'_{n'}, \dots, \mathcal{E}'_{\nu'},$$

d'intensités constantes

$$I_1, I_2, \dots, I_n, \dots, I_\nu \quad \text{et} \quad I'_1, I'_2, \dots, I'_{n'}, \dots, I'_{\nu'},$$

dont les lignes fermées

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots, S_\nu \quad \text{et} \quad S'_1, S'_2, \dots, S'_{n'}, \dots, S'_{\nu'},$$

peuvent se mouvoir en changeant de longueurs et de figures, sera définie la somme des travaux virtuels (n° 13) des actions mutuelles de toutes les combinaisons d'un courant du système \mathcal{E} avec un courant du système \mathcal{E}' , lorsque les deux systèmes se déforment simultanément, jusqu'à ce que toutes les aires ayant pour périmètres $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots, S_\nu$ s'annulent à la fois; et si l'on pose

$$(117) \quad \left\{ \begin{aligned} F_n &= \sum_{n'=1}^{n'=\nu'} I'_{n'} \int_0^{S'_{n'}} \frac{1}{r_{n, n'}} \left(\frac{\partial x'}{\partial s'} \right)_{n'} ds'_{n'}, \\ G_n &= \sum_{n'=1}^{n'=\nu'} I'_{n'} \int_0^{S'_{n'}} \frac{1}{r_{n, n'}} \left(\frac{\partial y'}{\partial s'} \right)_{n'} ds'_{n'}, \\ H_n &= \sum_{n'=1}^{n'=\nu'} I'_{n'} \int_0^{S'_{n'}} \frac{1}{r_{n, n'}} \left(\frac{\partial z'}{\partial s'} \right)_{n'} ds'_{n'}, \end{aligned} \right.$$

on aura

$$(118) \quad W_{\mathcal{E}', \mathcal{E}} = W_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'} = - \sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int_0^{S_n} \left(F_n \frac{\partial x_n}{\partial s_n} + G_n \frac{\partial y_n}{\partial s_n} + H_n \frac{\partial z_n}{\partial s_n} \right) ds_n$$

ou

$$(118') \left\{ \begin{aligned} W_{\mathcal{E}', \mathcal{E}} = W_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'} = & - \sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int_0^{s_n} ds_n \sum_{n'=1}^{n'=\nu} I_{n'} \\ & \times \int_0^{s_{n'}} \frac{ds_{n'}}{r_{n,n'}} \left(\frac{\partial x_n}{\partial s_n} \frac{\partial x_{n'}}{\partial s_{n'}} + \frac{\partial y_n}{\partial s_n} \frac{\partial y_{n'}}{\partial s_{n'}} + \frac{\partial z_n}{\partial s_n} \frac{\partial z_{n'}}{\partial s_{n'}} \right), \end{aligned} \right.$$

$r_{n,n'}$ désignant la distance de ds_n à $ds_{n'}$.

Cette généralisation de l'énoncé du n° 91 s'en déduit immédiatement par une double sommation. Elle n'est écrite qu'en vue des applications ultérieures.

95. L'énergie $W_{M', \mathcal{E}}$ des actions du système M' sur le système \mathcal{E} (116) de ν courants fermés permanents se déduit aussi, par une sommation, des formules (102) et (101)

$$(119) W_{M', \mathcal{E}} = - \sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int \int \frac{(\Lambda_{M'} \alpha_n + B_{M'} \beta_n + C_{M'} \gamma_n) d\Lambda_n}{\Lambda} = \sum_{n=1}^{n=\nu} W_{M', \mathcal{E}_n}.$$

Cette équation ne suppose pas le système \mathcal{E} rigide; mais, quand il l'est, on aperçoit immédiatement deux cas où les fonctions $\Lambda_{M'}$, $B_{M'}$, $C_{M'}$ peuvent sortir des signes sommatoires, et être remplacés par leurs valeurs Λ_0 , B_0 , C_0 en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$, invariablement lié à \mathcal{E} .

96. Le premier cas est celui où les trois fonctions $\Lambda_{M'}$, $B_{M'}$, $C_{M'}$ sont constantes en tous les points d'un volume comprenant \mathcal{E} et M_0 .

97. Le second cas est celui où le système \mathcal{E} est infiniment petit et infiniment voisin du point M_0 .

Dans ces deux cas, soient

$$\alpha_0 k_0, \quad \beta_0 k_0, \quad \gamma_0 k_0$$

les projections, sur trois axes à gauche rectangulaires, de la résultante

$$(120) \quad k_0 = I_0 \Lambda_0$$

de toutes les forces fictives

$$k_n = I_n d\Lambda_n,$$

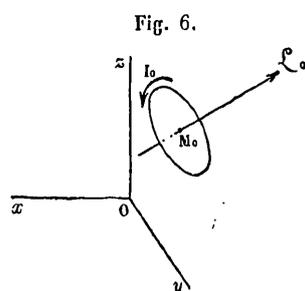
appliquées à tous les éléments $d\Lambda_n$, dans les directions de leurs normales positives ξ_n , définies par leurs cosinus directeurs $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$; d'où

$$(121) \left\{ \begin{aligned} \alpha_0 k_0 &= \alpha_0 I_0 \Lambda_0 = \sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int \int_{\Delta_n} \alpha_n d\Lambda_n = \sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int_0^{s_n} \gamma_n \frac{\partial z_n}{\partial s_n} ds_n = - \sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int_0^{s_n} z_n \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_n} ds_n, \\ \beta_0 k_0 &= \beta_0 I_0 \Lambda_0 = \sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int \int_{\Delta_n} \beta_n d\Lambda_n = \sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int_0^{s_n} z_n \frac{\partial x_n}{\partial s_n} ds_n = - \sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int_0^{s_n} x_n \frac{\partial z_n}{\partial s_n} ds_n, \\ \gamma_0 k_0 &= \gamma_0 I_0 \Lambda_0 = \sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int \int_{\Delta_n} \gamma_n d\Lambda_n = \sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int_0^{s_n} x_n \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_n} ds_n = - \sum_{n=1}^{n=\nu} I_n \int_0^{s_n} \gamma_n \frac{\partial x_n}{\partial s_n} ds_n. \end{aligned} \right.$$

Dans les deux cas des nos 96 et 97, (119) devient

$$(122) \quad W_{M, \ominus} = -k_0 (A_0 \alpha_0 + B_0 \beta_0 + C_0 \gamma_0).$$

98. C'est pourquoi l'élément fictif de solénoïde k_0 , d'intensité constante I_0 et de moment k_0 (120), dont l'aire Λ_0 est plane et contient le point M_0 , et dont l'axe ξ_0 (fig. 6) a pour direction celle de la force k_0



(121), sera appelé l'élément de solénoïde correspondant au système \ominus : son axe ξ_0 et son moment k_0 seront, par définition, l'axe et le moment du système \ominus .

La formule (122) résulte immédiatement des notations (121), en vertu desquelles les seconds membres de (119) et (122) sont identi-

ques. Elle peut s'écrire

$$(123) \quad W_{M', \varepsilon} = W_{M', k_0};$$

et elle peut s'énoncer ainsi :

99. M' agit sur ε comme sur k_0 .

100. L'énergie (122) étant de la forme (26), l'action de M' sur ε se réduit à une force appliquée au point M_0 , ayant pour composantes (55'')

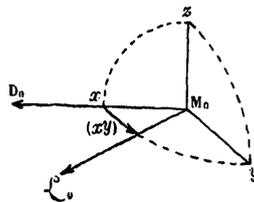
$$(124) \quad (M', \varepsilon)_x = k_0 \frac{\partial A_0}{\partial \xi_0}, \quad (M', \varepsilon)_y = k_0 \frac{\partial B_0}{\partial \xi_0}, \quad (M', \varepsilon)_z = k_0 \frac{\partial C_0}{\partial \xi_0},$$

et pour moments par rapport aux axes, quand on prend M_0 pour origine (56, 56' et 123),

$$(125) \quad \left\{ \begin{array}{l} (M', \varepsilon)_{yz} = - \frac{\partial W_{M', \varepsilon}}{\partial (yz)} = k_0 (\beta_0 C_0 - \gamma_0 B_0), \\ (M', \varepsilon)_{zx} = - \frac{\partial W_{M', \varepsilon}}{\partial (zx)} = k_0 (\gamma_0 A_0 - \alpha_0 C_0), \\ (M', \varepsilon)_{xy} = - \frac{\partial W_{M', \varepsilon}}{\partial (xy)} = k_0 (\alpha_0 B_0 - \beta_0 A_0). \end{array} \right.$$

Dans le premier cas (n° 96), la force (124) est nulle; dans les deux cas (nos 96 et 97), en prenant pour origine O (fig. 6) le point M_0

Fig. 7.



(fig. 7), pour axe des x la force directrice D_0 du système M' en ce point, et pour plan des xy celui de l'angle $(D_0, \xi_0) = (xy)$, les équations

tions (122) et (125), dans lesquelles il faut faire $A_0 = D_0$, $B_0 = C_0 = 0$, $\alpha_0 = \cos(xy)$, $\beta_0 = \sin(xy)$, $\gamma_0 = 0$, deviennent

$$(126) \quad W_{M', \varpi} = -k_0 D_0 \alpha_0,$$

$$(127) \quad (M', \varpi)_{yz} = 0, \quad (M', \varpi)_{zx} = 0, \quad (M', \varpi)_{xy} = -k_0 D_0 \sin(xy).$$

101. Donc, dans les deux cas, le couple est dans le plan de l'angle (D_0, ϱ_0) , tend à diminuer cet angle, et a pour moment

$$(128) \quad (M', \varpi)_{xy} = -k_0 D_0 \sin(D_0, \varrho_0).$$

Ce couple (128) est de même forme que celui qui déterminerait le mouvement d'un pendule mobile autour du même axe Oz , si la pesanteur agissait dans la direction D_0 . Donc :

102. Si le système rigide ϖ pouvait osciller, sous l'action de M' , autour d'un axe fixe passant par le point M_0 , sans variation des intensités I_n , contrairement aux lois de l'induction, les petites oscillations en seraient isochrones. On sait d'ailleurs que l'induction donne naissance à une force proportionnelle à la vitesse angulaire, amortissant les oscillations, mais n'en troublant pas l'isochronisme.

103. Si le système rigide ϖ est assujéti à tourner autour de son centre de gravité M_0 , il résulte des équations (127) que son axe oscillera autour de la force directrice D_0 , au point M_0 , du système extérieur M' .

Dans les deux cas des nos 96 et 97, l'énergie (126) peut s'écrire

$$(129) \quad W_{M', \varpi} = -k_0 D_0 \cos(D_0, \varrho_0),$$

et l'on a (106)

$$(130) \quad \Delta \bar{c}(M', \varpi) = W - W_0,$$

W désignant la valeur initiale, et W_0 la valeur finale de la fonction

(129). Lorsque la valeur finale est nulle,

$$(131) \quad W_0 = 0,$$

l'équation (130) devient

$$(132) \quad \mathfrak{E}(M', \varepsilon) = W.$$

Or la condition (131) est satisfaite (129) pour

$$(133) \quad (D, \varrho) = \frac{\pi}{2},$$

et pour

$$(134) \quad D = 0.$$

104. Soit \mathfrak{N}' le système M' , quand le magnétisme terrestre n'en fait pas partie.

105. L'énergie (129) représente, dans tous les cas, le travail virtuel, par rapport à des axes fixés à M' , de l'action de M' sur le système ε , tournant autour de son centre de gravité, jusqu'à ce que son axe ϱ y devienne perpendiculaire à la force directrice D du système agissant M' .

106. Dans le cas du n° 104, l'énergie (129) représente le travail virtuel, par rapport à des axes fixés à \mathfrak{N}' , des actions de \mathfrak{N}' sur le système ε , transporté à une distance infinie de \mathfrak{N}' .

Car, à cette distance, l'action mutuelle étant infiniment petite, le travail virtuel de la rotation (128), et, par suite, le facteur D_0 de l'équation (129) est infiniment petit, et la condition (134) est satisfaite.

107. Dans le même cas particulier (n° 104), les équations (130) et

(132) deviennent

$$(135) \quad \Delta \mathfrak{E}(\mathfrak{N}', \mathfrak{E}) + \Delta \mathfrak{E}(\mathfrak{E}, \mathfrak{N}') = W - W_0,$$

$$(136) \quad \mathfrak{E}(\mathfrak{N}', \mathfrak{E}) + \mathfrak{E}(\mathfrak{E}, \mathfrak{N}') = W;$$

et les premiers membres représentent la somme des travaux virtuels absolus des actions mutuelles des deux systèmes, transportés de leurs positions initiales à leurs positions finales, que sépare, dans (136), une distance infinie. En effet, ils représentent la somme des travaux virtuels relatifs des actions de \mathfrak{N}' sur \mathfrak{E} , par rapport à trois axes fixés à \mathfrak{N}' ; et cette seconde somme est égale à la première, les actions mutuelles des deux systèmes étant de nature à se faire équilibre sur un système rigide.

108. La partie bien définie $V_{\mathfrak{E}'}$ du potentiel d'un système rigide et infiniment petit \mathfrak{E}' de courants linéaires fermés et permanents est égale à celle de l'élément correspondant k'_0 de solénoïde (n° 98).

En effet, en prenant pour M' un élément de solénoïde k , de moment k et d'axe \mathcal{L} , et permutant les accents, (123) devient

$$(137) \quad W_{k, \mathfrak{E}'} - W_{k, k'_0} = 0.$$

Mais (61) et (62)

$$W_{k, \mathfrak{E}'} = W_{\mathfrak{E}', k} = k \frac{\partial V_{\mathfrak{E}'}}{\partial \mathcal{L}} = k \frac{\partial \mathfrak{V}_{\mathfrak{E}'}}{\partial \mathcal{L}}$$

et pareillement

$$W_{k, k'_0} = k \frac{\partial \mathfrak{V}_{k'_0}}{\partial \mathcal{L}},$$

et, en substituant dans (137), $\frac{\partial(\mathfrak{V}_{\mathfrak{E}'} - \mathfrak{V}_{k'_0})}{\partial \mathcal{L}} = 0$. Donc la différence $\mathfrak{V}_{\mathfrak{E}'} - \mathfrak{V}_{k'_0}$, à la fois constante en un point quelconque, où l'on peut toujours placer k , et infiniment petite (n° 58) à l'infini, est identi-

quement nulle, ce qui démontre (n° 108)

$$(138) \quad V_{\varrho'} = V_{A_0}.$$

§ V. — SECONDE MÉTHODE POUR LA SOLUTION DU MÊME PROBLÈME.

109. En vertu de la théorie qui précède et conformément à celle d'Ampère, l'action du système extérieur M' , rigide et invariable dans sa constitution physique, pouvant comprendre des courants fermés, des aimants et le magnétisme terrestre, sur un courant fermé et rigide ϱ , d'intensité constante I et de longueur S , fixe par rapport à M' , a (105) pour travail élémentaire virtuel (n° 13), par rapport à des axes fixés à M' ,

$$(139) \quad d\tilde{\epsilon}(M', \varrho) = - dW_{M', \varrho},$$

et l'énergie de l'action de M' sur ϱ est (102)

$$(140) \quad W_{M', \varrho} = - I\epsilon_{M', S};$$

le flux de force envoyé par M' sur la face négative d'une aire Λ , terminée au périmètre S étant (101)

$$(141) \quad \epsilon_{M', S} = \int_{\Lambda} (A\alpha + B\beta + C\gamma) d\Lambda,$$

A, B, C désignant les composantes de la force directrice D du système M' en un point de l'élément $d\Lambda$, et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale positive en ce point, normale qu'un observateur, traversé des pieds à la tête par le courant I , verrait à sa gauche. Ces trois formules équivalent à la formule unique

$$(142) \quad d\tilde{\epsilon}(M', \varrho) = Id \int_{\Lambda} (A\alpha + B\beta + C\gamma) d\Lambda.$$

110. Les cas d'équilibre invoqués dans le § II n'ayant pas tous été

observés d'une manière satisfaisante, on pourrait douter de l'exactitude de l'équation (142), en partie déduite de ces équilibres. Mais Weber a vérifié avec beaucoup de soin la formule d'Ampère (105 et 109')

$$(143) \quad d\mathfrak{e}(\mathfrak{e}', \mathfrak{e}) = II' d \int_0^s ds \int_0^s ds' \frac{\cos(ds, ds')}{r},$$

à laquelle se réduit (142), dans le cas où M' est un courant fermé linéaire \mathfrak{e}' , d'intensité I' ; et, par suite de vérifications ultérieures, cette formule (142), malgré sa complication, est un des principes expérimentaux les mieux établis. Posant comme un postulat le principe suivant :

111. L'action du système M' sur un élément $I ds$ de courant linéaire extérieur se réduit à une force unique, appliquée à ds et proportionnelle au produit $I ds$; il s'agit de démontrer cet autre énoncé :

112. Le problème de l'action du système M' sur un élément $I ds$ de courant linéaire extérieur n'a qu'une solution compatible avec les principes exprimés par l'équation (142) et le n° 111 : elle est donnée par les formules (11) d'Ampère

$$(144) \quad \begin{cases} (M', I ds)_x = I(C dy - B dz) = I \xi ds, \\ (M', I ds)_y = I(A dz - C dx) = I \eta ds, \\ (M', I ds)_z = I(B dx - A dy) = I \zeta ds. \end{cases}$$

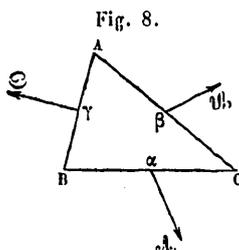
La démonstration de l'énoncé **112** repose sur le suivant :

113. Lemme. — Lorsqu'un système M' de plusieurs corps, susceptible de se réduire à un seul, et dont chacun ne peut produire, sur tout élément de courant linéaire extérieur, qu'une force unique, appliquée à son milieu, n'a pas d'action sur les courants linéaires extérieurs, fermés et rigides, il n'en a pas non plus sur un élément extérieur de courant linéaire.

Il suffit de démontrer que les trois forces \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} (*fig.* 8), produites

par M' sur les milieux α , β , γ des côtés infiniment petits d'un courant fermé triangulaire rigide I.ABCA, et s'y faisant équilibre, sont nulles.

Supposons, si c'est possible, que \mathfrak{L} ne le soit pas. Ayant un moment nul par rapport à $\beta\gamma$, elle est dans le plan du triangle, et doit y rester,



s'il tourne autour de BC. Donc elle est tangentielle, et, composée avec \mathfrak{L} , qui est nulle ou dirigée suivant AC, elle donne une résultante, qui ne peut être nulle, et qui passe par le point C. Or la force \mathfrak{L} , qui ne peut agir que suivant AB, ne peut détruire cette résultante; ce qui contredit l'hypothèse et démontre le lemme par l'absurde.

114. Ce lemme établit l'énoncé **112**, c'est-à-dire l'identité de deux forces définies par les expressions générales de leurs composantes

$$I\xi ds, \quad I\eta ds, \quad I\zeta ds \quad (\text{solution d'Ampère})$$

et

$$I(\xi + \xi_1) ds, \quad I(\eta + \eta_1) ds, \quad I(\zeta + \zeta_1) ds,$$

appliquées au milieu de ds , et représentant des actions de M' sur $I ds$, compatibles avec la formule (142) et le principe du n° 111.

Car les intégrales des travaux élémentaires virtuels de ces deux forces, étendues à tous les éléments d'une ligne quelconque S, fermée et rigide, dont ds fait partie, sont égales (142) pour tout déplacement infiniment petit de cette ligne. Donc leur différence, ou l'intégrale, par rapport à S, du travail élémentaire de la force complémentaire, qui a pour composantes $\xi_1 I ds$, $\eta_1 I ds$, $\zeta_1 I ds$, est identiquement nulle pour le même déplacement; un système fictif, qui produirait sur $I ds$ cette force complémentaire, ne pourrait agir sur aucun courant linéaire

fermé et rigide, ni par suite (n° 113) sur $I ds$. Donc

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = 0,$$

ce qui démontre l'énoncé du n° 112.

115. Ainsi, à l'ensemble des principes du § II, qui renferment deux postulata (nos 23 et 24), on peut substituer la relation (142) et l'énoncé du n° 111, qui n'en renferment qu'un (n° 111), et qui sont incompatibles avec toute solution différente de celle d'Ampère.

116. Ce résultat a été démontré analytiquement par M. Maurice Lévy au Collège de France (Leçon du 11 février 1881), pour le cas où le système agissant est un courant fermé linéaire. Le lemme (113) en fournit une démonstration synthétique, applicable à l'action du système général M' , qui peut comprendre aussi des aimants et le magnétisme terrestre.