SAUVAGE

Intégration d'un système d'équations aux différentielles totales

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 10 (1884), p. 387-406.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10__387_0>

Intégration d'un système d'équations aux différentielles totales;

PAR M. SAUVAGE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier.

---

1. On peut étendre les procédés d'intégration qui conviennent aux équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients constants à des systèmes d'équations à une ou plusieurs variables indépendantes. C'est ce que je me propose de montrer en m'appuyant sur les principes généraux de la théorie des équations linéaires aux différentielles totales (*Annales de l'Ecole Normale supérieure*, février 1882.)

2. Considérons d'abord le système

$$dy_i = (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n)dx, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont l'intégration est bien connue, lorsqu'on suppose constants les coefficients $a_{i1}, \ldots, a_{in}$.

On pose

$$y_i = A_i e^{rx};$$

r satisfait à l'équation algébrique de degré n

$$F_r(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0,$$

appelée équation caractéristique.

Si les n racines sont distinctes, les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont déterminés pour chaque racine (à un facteur constant près), et l'on peut former *un système fondamental de solutions*.

Supposons que r soit une racine multiple d'ordre k de l'équation $F_y(r) = 0$; on démontre que la racine r fournit les k solutions

$$(A_i e^{rx}), \quad \frac{\partial}{\partial r}(A_i e^{rx}), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}}(A_i e^{rx}),$$

où l'on considère $A_1, A_2, \ldots, A_n$ comme des fonctions de r. Soient $\varphi_1(r), \varphi_2(r), \ldots, \varphi_n(r)$ ces fonctions; on peut encore former un système fondamental de solutions.

3. Cette dernière règle peut se trouver en défaut. Considérons les équations linéaires et homogènes auxquelles doivent satisfaire les quantités $A_1, A_2, \ldots, A_n$, qui correspondent à une même racine r de l'équation caractéristique.

On a

$$\begin{aligned}
&A_1(a_{11} - r) + A_2 a_{12} + \ldots + A_n a_{1n} = 0,\\
&A_n a_{21} + A_2(a_{22} - r) + \ldots + A_n a_{2n} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&A_1 a_{n1} + A_2 a_{n2} + \ldots + A_n(a_{nn} - r) = 0.
\end{aligned}$$

Si r est une racine simple de l'équation caractéristique, tous les mineurs du premier ordre de $F_y(r)$ ne sont pas nuls en même temps. En effet, la dérivée

$$F'_y(r) = \begin{vmatrix} -1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - r & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} - r & 0 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & -1 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} + \ldots$$

se compose linéairement au moyen des déterminants mineurs qui ont la diagonale commune avec le déterminant principal. Or $F'_y(r)$

n'est pas nul; donc tous ces déterminants ne peuvent être nuls à la fois. Soit

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

un de ces déterminants non nul; le système d'équations correspondant permettra de déterminer les valeurs proportionnelles des quantités $A_1, A_2, \dots, A_n$ d'une seule manière.

Supposons que tous les mineurs soient nuls jusqu'à ceux de l'ordre k exclusivement. L'un de ces déterminants d'ordre k non nul correspondra par exemple aux inconnues $A_1, A_2, \dots, A_{n-k}$. Pour satisfaire au système d'équations du premier degré, on prendra arbitrairement $A_{n-k+1}, A_{n-k+2}, \dots, A_n$ et ensuite les $n-k$ équations correspondant au déterminant considéré détermineront les quantités A_1, $A_2, \dots, A_{n-k}$.

En prenant la valeur de r qui annule $F_y(r)$ et ses déterminants mineurs jusqu'à ceux de l'ordre k, nous aurons pour toutes les valeurs de h inférieures à k

$$\varphi_i^{(h)}(r)=0, \quad \varphi_i^{(h-1)}(r)=0, \quad \dots, \quad \varphi_i'(r)=0, \quad \varphi_i(r)=0,$$

c'est-à-dire que l'application de la règle deviendra illusoire.

Pour $h=k$ on aura une solution

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k}(A_i e^{rx}) = e^{rx}\varphi_i^{(k)}(r).$$

Si r est une racine multiple d'ordre $k'>k$, on aura les $k'-k$ solutions linéairement indépendantes

$$e^{rx}\left[\varphi_i^{(h)}(r)+\frac{h}{1}\varphi_i^{(h-1)}(r)x+\dots+\frac{h(h-1)\dots(k+1)}{1.2\dots(h-k)}\varphi_i^{k}(r)x^{h-k}\right],$$
$$[h=k,\ k+1,\ \dots,\ (k'-1)],$$

On peut en outre former k groupes de valeurs de $A_{n-k+1}, \dots, A_n$ telles que les k solutions $y_{in}=A_{in}e^{rx}$ correspondantes soient linéairement indépendantes. On aura donc un ensemble de k solutions linéairement indépendantes correspondant à la racine r d'un ordre k de multiplicité, et l'on pourra former un système fondamental de solutions.

Nous dirons que nous sommes dans *le cas d'exception* lorsque les singularités précédentes se présenteront.

On voit que les k solutions correspondant à une racine multiple r d'ordre k n'ont pas leurs formes toutes distinctes dans le cas d'exception.

4. Il sera utile pour la suite d'étudier l'intégration du système proposé en ramenant ce système à d'autres systèmes de plus en plus simples, comme nous allons le montrer. D'abord tout système de la forme

$$dy_i = (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n)\,dx$$

admet au moins une solution de la forme $y_i = A_i e^{rx}$, et r satisfait à l'équation caractéristique $F_y(r) = 0$,

Supposons trouvée une solution $A_i e^{r'x}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Supposons que les coefficients différents de zéro soient $A_1, A_2, \ldots, A_s$; par conséquent $A_{s+1}, A_{s+2}, \ldots, A_n$ sont nuls.

Posons $u_i = A_i e^{r'x}$, en convenant de remplacer $A_{s+1}, \ldots, A_n$ par l'unité, et $y_i = u_i q_i$, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ étant de nouvelles inconnues. Nous aurons

$$u_i \frac{dq_i}{dx} = a_{i1} u_1 q_1 + \ldots + \left(a_{ii} u_i - \frac{du_i}{dx}\right) q_i + \ldots + a_{in} u_n q_n.$$

Or on a

$$\frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dx} = r'.$$

Le système d'équation devient donc

$$\frac{dq_i}{dx} = a_{i1}\frac{u_1}{u_i} q_1 + \ldots + (a_{ii} - r') q_i + \ldots + a_{in}\frac{u_n}{u_i} q_n.$$

Ce système admet la solution

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 = \ldots = q_s = 1, \\ q_{s+1} &= q_{s+2} = \ldots = q_n = 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$a_{i1}\frac{u_1}{u_i}+\ldots+a_{is}\frac{u_s}{u_i}=0.$$

En tenant compte de ces relations, nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{dq_i}{dx}&=a_{i2}\frac{u_2}{u_i}(q_2-q_1)+\ldots+a_{is}\frac{u_s}{u_i}(q_s-q_1)\\&\quad+a_{i,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_i}q_{s+1}+\ldots+a_{in}\frac{u_n}{u_i}q_n.\end{aligned}$$

Retranchons la première de ces équations des $s-1$ suivantes. Posons

$$q_h-q_1=z_h\quad\text{et}\quad q_{s+k}=z_{s+k},$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{dz_h}{dx}&=\left(a_{h2}\frac{u_2}{u_h}-a_{12}\frac{u_2}{u_1}\right)z_2+\ldots+\left(a_{hh}-r'-a_{1h}\frac{u_h}{u_1}\right)z_h+\ldots\\&\quad+\left(a_{h,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_h}-a_{1,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_1}\right)z_{s+1}+\ldots+\left(a_{hn}\frac{u_n}{u_h}-a_{1n}\frac{u_n}{u_1}\right)z_n,\\&\qquad(h=2,3,\ \ldots,\ s),\end{aligned}$$

et

$$\frac{dz_{s+k}}{dx}=a_{s+k,2}\frac{u_2}{u_{s+k}}z_2+\ldots+(a_{s+k,s+k}-r')z_{s+k}+\ldots+a_{s+k,n}\frac{u_n}{u_{s+k}}z_n,$$
$$s+k=s+1,\ s+2,\ \ldots,\ n).$$

Pour intégrer les systèmes en $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et en $z_2, z_3, \ldots, z_n$, nous formerons leurs équations caractéristiques $F_q(r)=0$ et $F_z(r)=0$, car ces systèmes sont de même nature que le système proposé.

On a, pour le système en $q_1, q_2, \ldots, q_n$,

$$F_q(r)=\begin{vmatrix}a_{11}-r'-r & a_{12}\frac{u_2}{u_1} & \cdots & a_{1n}\frac{u_n}{u_1}\\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1}\frac{u_1}{u_n} & a_{n2}\frac{u_2}{u_n} & \cdots & a_{nn}-r'-r\end{vmatrix}=0.$$

Or $\frac{u_p}{u_q} = \frac{A_p}{A_q}\cdot$ On a donc

$$F_q(r) = \begin{vmatrix} A_1(a_{11} - r' - r) & A_2 a_{12} & \dots & A_n a_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1 a_{n1} & A_2 a_{n2} & \dots & A_n(a_{nn} - r' - r) \end{vmatrix} = 0,$$

ou simplement

$$F_q(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r' - r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - r' - r \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation caractéristique du système primitif où r est remplacé par $r + r'$.

Prenons le système en $z_2, z_3, \dots, z_n$. Son équation caractéristique $F_z(r) = 0$ peut s'écrire en introduisant immédiatement une nouvelle ligne et une nouvelle colonne

$$rF_z(r) = \begin{vmatrix} r & a_{12}\frac{u_2}{u_1} & \dots & a_{1s}\frac{u_s}{u_1} & a_{1,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_1} & \dots & a_{1n}\frac{u_n}{u_1} \\ 0 & a_{22} - r' - a_{12}\frac{u_2}{u_1} - r & \dots & a_{2s}\frac{u_s}{u_2} - a_{1s}\frac{u_s}{u_1} & a_{2,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_2} - a_{1,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_1} & \dots & a_{2n}\frac{u_n}{u_2} - a_{1n}\frac{u_n}{u_1} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & a_{s2}\frac{u_2}{u_s} - a_{12}\frac{u_2}{u_1} & \dots & a_{ss} - r' - a_{1s}\frac{u_s}{u_1} - r & a_{s,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_s} - a_{1,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_1} & \dots & a_{sn}\frac{u_n}{u_s} - a_{1n}\frac{u_n}{u_1} \\ 0 & a_{s+1,2}\frac{u_2}{u_{s+1}} & \dots & a_{s+1,s}\frac{u_s}{u_{s+1}} & a_{s+1,s+1} - r' - r & \dots & a_{s+1,n}\frac{u_n}{u_{s+1}} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & a_{n2}\frac{u_2}{u_n} & \dots & a_{ns}\frac{u_s}{u_n} & a_{n,s+1}\frac{u_{s+1}}{u_n} & \dots & a_{nn} - r' - r \end{vmatrix} = 0.$$

Ajoutons la première ligne horizontale à chacune des $s - 1$ premières, il viendra

$$rF_z(r) = \begin{vmatrix} r & a_{12}\frac{u_2}{u_1} & \dots & a_{1n}\frac{u_n}{u_1} \\ . & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ r & a_{s2}\frac{u_2}{u_s} & \dots & a_{sn}\frac{u_n}{u_s} \\ 0 & a_{s+1,2}\frac{u_2}{u_{s+1}} & \dots & a_{s+1,n}\frac{u_n}{u_{s+1}} \\ . & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & a_{n2}\frac{u_2}{u_n} & \dots & a_{nn} - r' - r \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons maintenant que l'on a identiquement

$$(a_{11}-r')+a_{12}\frac{u_2}{u_1}+\ldots+a_{1s}\frac{u_s}{u_1}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_{s1}\frac{u_1}{u_s}+\ldots+(a_{ss}-r')=0,$$
$$a_{s+1,1}\frac{u_1}{u_{s+1}}+\ldots+a_{s+1,s}\frac{u_s}{u_{s+1}}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_{n1}\frac{u_1}{u_n}+\ldots+a_{ns}\frac{u_s}{u_n}=0,$$

et ajoutons les s premières colonnes en tenant compte de ces relations, nous aurons

$$r\,\mathrm{F}_z(r)=\begin{vmatrix} a_{11}-r-r' & a_{12}\frac{u_2}{u_1} & \cdots & a_{1n}\frac{u_n}{u_1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}\frac{u_1}{u_n} & a\;\frac{u_2}{u_n} & \cdots & a_{nn}-r'-r \end{vmatrix}=0.$$

C'est l'équation caractéristique du système en $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Donc, quand on introduit la solution $r=0$ dans l'équation $\mathrm{F}_z(r)=0$, on obtient l'équation $\mathrm{F}_q(r)=0$, c'est-à-dire que, lorsqu'on connaît les racines de l'équation $\mathrm{F}_y(r)=0$, on a, par un calcul très simple, les racines des équations $\mathrm{F}_q(r)=0$ et $\mathrm{F}_z(r)=0$.

Ajoutons que, si r' est une racine multiple d'ordre k de $\mathrm{F}_y(r)=0$, zéro sera une racine multiple d'ordre $k-1$ de $\mathrm{F}_z(r)=0$.

Aux équations en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ il faut joindre l'équation

$$\frac{dq_1}{dx}=a_{12}\frac{u_2}{u_1}z_2+\ldots+a_{1n}\frac{u_n}{u_1}z_n.$$

Cela posé, le système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ admet au moins une solution constante si r' est une racine multiple de $\mathrm{F}_y(r)=0$, car l'équation $\mathrm{F}_z(r)=0$ admettra alors la racine zéro.

On aura donc

$$\frac{dq_1}{dx}=\mathrm{C},$$

C étant une constante déterminée; on tire de là

$$q_1 = Cx + C_1,$$

C_1 étant une constante arbitraire. On peut remonter aux inconnues primitives et l'on aura

$$q_h = z_h + q_i = Cx + C_h \quad (h = 1, 2, \ldots, s)$$

et

$$q_{s+k} = z_{s+k} = C_{s+k} \quad (s + k = s + 1, s + 2, \ldots, n),$$

les quantités $C_h - C_1$ étant des constantes dont les valeurs proportionnelles sont déterminées. On aura ensuite

$$y_i = u_i q_i = A_i e^{r'x}(Cx + C_i),$$

en supposant maintenant $A_{s+1}, A_{s+2}, \ldots, A_n$ identiquement nulles.

Supposons que l'on forme le système différentiel qui est au système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ ce que celui-ci est au système primitif. Soit k le degré de multiplicité de la racine r', et soit $k \geqq 3$. La nouvelle équation caractéristique admettra encore la racine zéro.

On en tirera pour le système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ une relation de la forme

$$z_i = D_i + D'_i x,$$

D_i et D'_i représentant des constantes.

Si nous convenons de représenter par $P^k(x)$ un polynôme entier et rationnel de degré k en x, nous aurons, après avoir intégré,

$$q_1 = P_1^2(x),$$

d'où

$$q_h = q_1 + z_h = P_h^2(x) \quad (h = 1, 2, \ldots, s)$$

et

$$q_{s+k} = z_{s+k} = P_{s+k}^{(1)}(x) \quad (s + k = s + 1, s + 2, \ldots, n);$$

d'où enfin

$$y_i = u_i q_i = A_i e^{r'x} P_i^2(x),$$

$A_{s+1}, A_{s+2}, \ldots, A_n$ étant supposées identiquement nulles.

Le raisonnement se continuera de la même manière tant qu'on n'aura pas épuisé le degré k de la racine r'. Nous retrouvons donc les formes des intégrales données par la première méthode d'intégration.

Ajoutons une remarque importante. Soit

$$y_i = A_i e^{r'x}(\alpha_0^i x^m + \alpha_1^i x^{m-1} + \ldots + \alpha_m^i)$$

une solution; $\overline{y_i} = A_i \alpha_0^i e^{r'x}$ est aussi une solution. Il en résulte que dans les solutions successives correspondant à une racine multiple r', les coefficients des plus hautes puissances sont différents de zéro en même temps. On remarque ce fait également dans la première méthode.

Il est évident qu'en ramenant le système en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ à des systèmes de plus en plus simples par le procédé que nous venons d'indiquer, on arrivera à construire n solutions du système primitif en y_1, $y_2, \ldots, y_n$. Ces n solutions formeront *un système fondamental de solutions*.

5. Il peut être utile de changer l'équation caractéristique en une autre. On emploiera la substitution $y_i = u_i e^{\lambda x}$, λ étant une constante arbitraire. On aura

$$\frac{du_i}{dx} = a_{i1} u_1 + \ldots + (a_{ii} - \lambda) u_i + \ldots + a_{in} u_n.$$

L'équation caractéristique $F_u(r) = 0$ a pour racines les racines de $F_y(r) = 0$ diminuées de λ.

On remarquera que, si la racine r' correspond à un cas d'exception, la racine $r' - \lambda$ correspondra aussi à un cas d'exception, et réciproquement.

6. Pour que le système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ présente le cas d'exception pour la racine zéro, il faut que le système en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ présente le cas d'exception pour la racine r'.

En effet, supposons que le système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ offre le cas d'exception pour la racine zéro. Il existera au moins deux solutions linéairement indépendantes dont les éléments seront constants. Entre ces deux solutions

$$z_i = \alpha_i, \quad z'_i = \alpha'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

il ne pourra exister aucune relation à coefficients constants de la forme

$$\omega\alpha_i + \omega'\alpha'_i = 0.$$

Introduisons les deux symboles α_1 et α'_1 en leur donnant pour valeur zéro. Aux deux solutions considérées correspondent deux solutions dans le système en $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et deux solutions dans le système en $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Nous aurons

$$q_i = \alpha x + \alpha_i + C, \qquad q'_i = \alpha' x + \alpha'_i + C',$$
$$y_i = A_i e^{r'x}(\alpha x + \alpha_i + C), \quad y'_i = A_i e^{r'x}(\alpha' x + \alpha'_i + C'),$$

C et C′ étant deux constantes arbitraires.

Choisissons deux nombres β et β', tels que $\alpha\beta + \alpha'\beta' = 0$. La solution $\beta y_i + \beta' y'_i = A_i e^{r'x}(\beta\alpha_i + \beta'\alpha'_i + C\beta + C'\beta')$ sera de la même forme que la solution $A_i e^{r'x}$. Il n'y aura entre ces deux solutions aucune relation linéaire à coefficients constants; car les quantités

$$\beta\alpha_i + \beta'\alpha'_i + C\beta + C'\beta'$$

devraient être toutes égales. On aurait

$$\beta\alpha_i + \beta'\alpha'_i + C\beta + C'\beta' = \beta\alpha_1 + \beta'\alpha'_1 + C\beta + C'\beta' = C\beta + C'\beta'$$

et par suite

$$\beta\alpha_i + \beta'\alpha'_i = 0,$$

ce qui est impossible par hypothèse.

Donc le système en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ admettrait au moins deux solutions linéairement indépendantes de la forme $y_i = A_i e^{r'x}, y'_i = A'_i e^{r'x}$, c'est-à-dire que la racine r' correspondrait à un cas d'exception.

7. S'il n'y a pas exception pour la racine r' de $F_y(r) = 0$, la constante $C = \frac{dq_1}{dx}$ ne sera pas nulle. En effet, on aurait la solution

$y_i = A_i C_i e^{r'x}$, si C était nul. Elle ne se confondra avec la solution $y_i = A_i e^{r'x}$ que si l'on a

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_s.$$

On aurait alors

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_s = C_1 = C_2 = \ldots = C_s \quad \text{et} \quad q_{s+1} = q_{s+2} = \ldots = q_n = 0$$

comme solution du système en $q_1, q_2, \ldots, q_n$. On en tirerait

$$z_2 = z_3 = \ldots = z_s = 0 \quad \text{et} \quad z_{s+1} = \ldots = z_n = 0$$

comme solution du système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$. Or on n'a pas pris une solution en $z_2, \ldots, z_n$, dont tous les éléments soient nuls pour former la solution y'_i. Donc cette solution y'_i, devant être linéairement indépendante de la solution y_i, ne peut exister, puisqu'il n'y a pas exception, et C n'est pas nul.

8. Considérons maintenant le système d'équations aux différentielles totales

$$(1) \quad \begin{cases} dy_i = (a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n) dx_1 + \ldots + (l_{i1} y_1 + \ldots + l_{in} y_n) dx_p \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

où les lettres $a, b, \ldots, l$ représentent des constantes. Nous supposons les conditions d'intégrabilité identiquement satisfaites en vertu des équations proposées.

Si les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ se déplacent respectivement dans leurs plans, il existe des fonctions intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$, uniformes dans tout le plan, satisfaisant aux équations proposées. Imaginons un système fondamental de solutions. Il suffit, pour le déterminer, de fixer un déterminant de valeurs initiales différent de zéro. Pour avoir les valeurs des solutions en *un point* $(x_1 x_2 \ldots x_p)$ quelconque, on pourra arriver en ce point avec un choix de chemins et de marches absolument arbitraires. Supposons donc que la variable x_1 décrive son chemin, les autres variables indépendantes $x_2, \ldots, x_p$ restant à leurs positions initiales. Les éléments d'une solution quelconque satisferont, dans cette hypothèse, aux équations

$$(2)\qquad dy_i = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

à une seule variable indépendante.

Soit r'_1 une racine de l'équation caractéristique $F_1(r_1) = 0$ relative aux équations (2). On aura une solution de la forme

$$y_i = A\varphi_i(r'_1)e^{r'_1 x_1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$\varphi_i(r'_1)$ est un nombre que donne le calcul quand on connaît r'_1; A est une quantité indépendante de x_1. Si maintenant on fait varier les autres variables $x_2, x_3, \ldots, x_p$, A variera seule et sera une fonction de ces variables.

Exprimons alors que $y_i = A\varphi_i(r'_1)e^{r'_1 x_1}$ satisfait aux équations (2). Nous aurons

$$\begin{aligned} dy_i = {} & A r'_1 \varphi_i(r'_1)e^{r'_1 x_1}dx_1 + \varphi_i(r'_1)e^{r'_1 x_1}\left(\frac{\partial A}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial A}{\partial x_p}dx_p\right) \\ = {} & A e^{r'_1 x_1}\{[a_{i1}\varphi_1(r'_1) + \ldots + a_{in}\varphi_n(r'_1)]\,dx_1 \\ & + [b_{i1}\varphi_1(r'_1) + \ldots + b_{in}\varphi_n(r'_1)]\,dx_2 + \ldots \\ & + [l_{i1}\varphi_1(r'_1) + \ldots + l_{in}\varphi_n(r'_1)]\,dx_p\}. \end{aligned}$$

Ces équations se ramènent, à cause du choix de r'_1, à la forme

$$\begin{aligned} & \varphi_i(r'_1)\left(\frac{\partial A}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial A}{\partial x_p}dx_p\right) \\ & \quad = A\{[b_{i1}\varphi_1(r'_1) + \ldots + b_{in}\varphi_n(r'_1)]\,dx_2 + \ldots \\ & \qquad + [l_{i1}\varphi_1(r'_1) + \ldots + l_{in}\varphi_n(r'_1)]\,dx_p\}, \end{aligned}$$

et, comme la fonction A doit exister, on aura

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial A}{\partial x_p}dx_p\right) = r'_2\,dx_2 + \ldots + r'_p\,dx_p,$$

$r'_2, \ldots, r'_p$ étant des constantes déterminées par le calcul précédent, d'où l'on tirera

$$A = B e^{r'_2 x_2 + \ldots + r'_p x_p},$$

B étant une constante arbitraire.

Ainsi les équations (1) admettent au moins une solution de la forme

$$y_i = A_i e^{r'_1 x_1 + r'_2 x_2 + \ldots + r'_p x_p},$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant des constantes dont les rapports sont donnés par le calcul.

En exprimant ce fait, nous trouverons les relations qui doivent nécessairement exister entre $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p$. Nous aurons

$$\begin{aligned} dy_i &= A_i e^{r'_1 x_1 + \ldots + r'_p x_p}(r'_1 dx_1 + \ldots + r'_p dx_p) \\ &= (A_1 a_{i1} + \ldots + A_n a_{in}) e^{r'_1 x_1 + \ldots + r'_p x_p} dx_1 + \ldots \\ &\quad + (A_1 l_{i1} + \ldots + A_n l_{in}) e^{r'_1 x_1 + \ldots + r'_p x_p} dx_p, \end{aligned}$$

équations qui entraînent les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} A_1 a_{i1} + \ldots + A_i(a_{ii} - r'_1) + \ldots + A_n a_{in} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 l_{i1} + \ldots + A_i(l_{ii} - r'_p) + \ldots + A_n l_{in} = 0 \end{array}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n).$$

De ces équations du premier degré, il résulte d'abord que chaque nombre r'_k doit satisfaire à une équation de la forme

$$F_k(r_k) = \begin{vmatrix} g_{11} - r_k & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} - r_k & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} - r_k \end{vmatrix} = 0,$$

que nous appellerons une équation caractéristique.

Ensuite ces systèmes doivent être satisfaits par un même système de valeurs proportionnelles de $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Supposons expressément que $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p$ n'annulent pas respectivement tous les mineurs du premier ordre de $F_1(r_1), F_2(r_2), \ldots, F_p(r_p)$. Alors les équations du premier degré admettront un système unique de solutions communes $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

En comparant ces équations, on en tirera

$$\frac{r'_1}{A_1 a_{i1} + \ldots + A_n a_{in}} = \frac{r'_2}{A_1 b_{i1} + \ldots + A_n b_{in}} = \ldots = \frac{r'_p}{A_1 l_{i1} + \ldots + A_n l_{in}}.$$

On peut toujours supposer qu'aucun des nombres $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p$ n'est nul; car, si l'on pose $y_i = u_i e^{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p}$, le système (1) deviendra

$$du_i = [a_{i1} u_1 + \ldots + (a_{ii} - \lambda_1) u_i + \ldots + a_{in} u_n] dx_1 + \ldots \\ + [l_{i1} u_1 + \ldots + (l_{ii} - \lambda_p) u_1 + \ldots + l_{in} u_n] dx_p,$$

et les équations caractéristiques de ce nouveau système n'admettront plus de racines nulles, si l'on choisit convenablement $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

La racine r'_1 n'étant pas nulle, on peut toujours trouver une quantité $A_1 a_{i1} + \ldots + A_n a_{in} = A_i r'_1$ différente de zéro, car tous les nombres $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ne sont pas nuls à cause des premières hypothèses. On voit alors que, $r'_2, r'_3, \ldots, r'_p$ n'étant pas nuls non plus, on aura, à cause des équations précédentes,

$$A_1 b_{i1} + \ldots + A_n b_{in} \neq 0, \quad \ldots, \quad A_1 l_{i1} + \ldots + A_n l_{in} \neq 0.$$

Donc à une racine r'_1 correspondent des racines $r'_2, r'_3, \ldots, r'_p$ déterminées. Réciproquement, à l'une quelconque de ces racines correspondent toutes les autres et seulement celles-là.

Par la transformation inverse à celle qu'on a faite, on peut rétablir les racines nulles qu'on avait écartées, et le théorème est vrai, même dans le cas où les équations caractéristiques admettent des racines nulles. Mais, si l'on a $F_1(0) = 0$, $F_2(0) = 0, \ldots, F_p(0) = 0$, il faut que les mineurs du premier ordre de chaque déterminant $F_1(0)$, $F_2(0), \ldots, F_p(0)$ ne soient pas tous nuls à la fois.

Quand les conditions précédentes seront réalisées, nous dirons que les nombres $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p$ *se correspondent*.

Lorsque les mineurs du premier ordre peuvent être tous nuls à la fois, le théorème peut n'être plus vrai. En voici un exemple simple : prenons le système

$$dy_1 = a y_1 dx_1 + (b_{11} y_1 + b_{12} y_2) dx_2,$$
$$dy_2 = a y_2 dx_1 + (b_{21} y_1 + b_{22} y_2) dx_2.$$

Les conditions d'intégrabilité sont identiquement satisfaites. Si l'on pose

$$y_1 = A_1 e^{a x_1}, \quad y_2 = A_2 e^{a x_2},$$

A_1 et A_2 seront déterminées par les équations

$$\frac{dA_1}{dx_2} = b_{11}A_1 + b_{12}A_2,$$

$$\frac{dA_2}{dx_2} = b_{21}A_1 + b_{22}A_2.$$

On en tirera deux solutions linéairement indépendantes

$$\begin{aligned} A_{11} &= B_{11}e^{r'_2x_2}, \\ A_{21} &= B_{21}e^{r'_2x_2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_{12} &= B_{12}e^{r''_2x_2}, \\ A_{22} &= B_{22}e^{r''_2x_2}, \end{aligned}$$

et, pour le système primitif, on aura les intégrales générales

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{ax_1}(\lambda B_{11}e^{r'_2x_2} + \mu B_{12}e^{r''_2x_2}), \\ y_2 &= e^{ax_1}(\lambda B_{21}e^{r'_2x_2} + \mu B_{22}e^{r''_2x_2}); \end{aligned}$$

or la même racine a se trouve ainsi associée à deux racines différentes r'_2 et r''_2. Mais, si l'on considère l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a - r_1 & 0 \\ 0 & a - r_1 \end{vmatrix} = 0,$$

la racine $r'_1 = a$ annule tous les mineurs du premier ordre.

Dès maintenant on peut donner la règle pour intégrer le système (1) dans le cas où les équations caractéristiques ont toutes leurs racines distinctes.

On déterminera les racines de l'une des équations caractéristiques

$$\begin{vmatrix} g_{11} - r_k & \dots & g_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} - r_k \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations du premier degré

$$A_1 g_{i1} + \dots + A_i(g_{ii} - r_k) + \dots + A_n g_{in} = 0$$

admettront une solution déterminée pour les valeurs proportionnelles de $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Les racines des autres équations caractéristiques seront déterminées successivement par l'une des séries de rapports

$$\frac{r'_1}{A_1 a_{i1}+\ldots+A_n a_{in}}=\ldots=\frac{r'_k}{A_1 g_{i1}+\ldots+A_n g_{in}}=\ldots=\frac{r'_p}{A_1 l_{i1}+\ldots+A_n l_{in}},$$

où r'_k représente successivement toutes les racines de $F_k(r_k)=0$. On pourra former ainsi n solutions

$$y_{ik}=A_{ik}e^{r'_{1k}x_1+\ldots+r'_{pk}x_p} \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

$r'_{1k}, r'_{2k}, \ldots, r'_{pk}$ étant des racines correspondantes, et ces n solutions formeront un système fondamental.

9. Considérons maintenant le cas le plus général. Nous pourrons toujours former une première solution $u_i=A_i e^{r'_1x_1+\ldots+r'_px_p}$ des équations (1).

Posons $y_i=u_iq_i$, nous aurons

$$\begin{aligned}
dq_i=\Big[&a_{i2}\frac{u_2}{u_i}(q_2-q_1)+\ldots\\
&+\left(a_{ii}-\frac{1}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right)(q_i-q_1)+\ldots+a_{in}\frac{u_n}{u_i}(q_n-q_1)\Big]dx_1+\ldots\\
+\Big[&l_{i2}\frac{u_2}{u_i}(q_2-q_1)+\ldots\\
&+\left(l_{ii}-\frac{1}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_p}\right)(q_i-q_1)+\ldots+l_{in}\frac{u_n}{u_i}(q_n-q_1)\Big]dx_p,
\end{aligned}$$

et, en posant $z_h=q_h-q_1$, nous aurons

$$\begin{aligned}
dz_i=\Big[&\left(a_{i2}\frac{u_2}{u_i}-a_{12}\frac{u_2}{u_1}\right)z_2+\ldots\\
&+\left(a_{ii}-\frac{1}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_1}-a_{1i}\frac{u_i}{u_1}\right)z_i+\ldots+\left(a_{in}\frac{u_n}{u_i}-a_{1n}\frac{u_n}{u_1}\right)z_n\Big]dx_1+\ldots\\
+\Big[&\left(l_{i2}\frac{u_2}{u_i}-l_{12}\frac{u_2}{u_1}\right)z_2+\ldots\\
&+\left(l_{ii}-\frac{1}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_p}-l_{1i}\frac{u_i}{u_1}\right)z_i+\ldots+\left(l_{in}\frac{u_n}{u_i}-l_{1n}\frac{u_n}{u_1}\right)z_n\Big]dx_p.
\end{aligned}$$

Ce système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ est de même forme que le système (1). Il admettra donc au moins une solution de la forme $B_i e^{\rho_1 x_1 + \cdots + \rho_p x_p}$. Cette solution permettra de trouver une solution du système en q_1, $q_2, \ldots, q_n$ et, par suite, une solution du système en $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

En considérant le système qui est au système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ ce que celui-ci est au système (1), on formera, en remontant encore dans les calculs, une troisième solution du système en $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et ainsi de suite.

On peut démontrer que les n solutions qu'on obtiendra pour le système primitif formeront un système fondamental de solutions. Pour cela, on appliquera le raisonnement des nos **16** et **17** de la théorie générale.

Nous avons donc là une méthode générale d'intégration.

10. Il est intéressant de considérer les solutions qui correspondent à un groupe de racines *correspondantes*, lorsque l'une des racines, r'_1 par exemple, est une racine multiple.

Formons le système en $z_2, \ldots, z_n$, et soient

$$F_{1z}(r_1) = 0, \quad F_{2z}(r_2) = 0, \quad \ldots, \quad F_{pz}(r_p) = 0$$

ses équations caractéristiques; r'_1 étant racine multiple de $F_{1z}(r_1) = 0$, zéro sera racine de $F_{1z}(r_1) = 0$. On aura donc une solution de la forme

$$z_i = B_i e^{r''_2 x_2 + \cdots + r''_p x_p},$$

d'où l'on tirera

$$dq_1 = e^{r''_2 x_2 + \cdots + r''_p x_p} \quad (\alpha\, dx_1 + \ldots + \lambda\, dx_p),$$

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant des constantes, et par suite

$$q_1 = A e^{r''_2 x_2 + \cdots + r''_p x_p},$$

d'où

$$q_i = q_1 + z_i = A'_i e^{r''_2 x_2 + \cdots + r''_p x_p}$$

et

$$y_i = u_i q_i = A_i e^{r'_1 x_1 + (r'_2 + r''_2) x_2 + \cdots + (r'_p + r''_p) x_p}.$$

Or à la racine r'_1 ne peuvent correspondre que $r'_2, r'_3, \ldots, r'_p$: donc on a

$$r''_2 = r''_3 = \ldots = r''_p = 0,$$

c'est-à-dire que l'on a

$$F_{2z}(0) = 0, \quad F_{3z}(0) = 0, \quad \ldots, \quad F_{pz}(0) = 0.$$

Il faut donc que $r'_2, r'_3, \ldots, r'_p$ soient au moins racines doubles de

$$F_{2z}(r_2) = 0, \quad \ldots, \quad F_{pz}(r_p) = 0.$$

En passant au système auxiliaire qui vient après le système en $z_2, \ldots, z_n$, on verrait de même que, r'_1 étant racine triple, $r'_2, r'_3, \ldots, r'_p$, sont de même racines triples de leurs équations respectives.

En général, soit k le degré de multiplicité de la racine r'_1; on démontrera que les racines correspondantes $r'_2, r'_3, \ldots, r'_p$ sont des racines du même ordre k de multiplicité de leurs équations caractéristiques respectives.

Il résulte de là que le système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ et les $k-2$ systèmes auxiliaires suivants admettront des solutions à éléments constants.

Soit d'abord

$$dq_1 = H_1\, dx_1 + H_2\, dx_2 + \ldots + H_p\, dx_p,$$

$H_1, H_2, \ldots, H_p$ seront des constantes.

On tirera de là

$$q_1 = A_{01} + A_{11} x_1 + A_{21} x_2 + \ldots + A_{p1} x_p,$$

d'où

$$q_i = q_1 + z_i = A_{0i} + A_{1i} x_1 + \ldots + A_{pi} x_p$$

et, par suite,

$$y_i = u_i q_i = (A_{0i} + A_{1i} x_1 + \ldots + A_{pi} x_p) A_i e^{r'_1 x_1 + \ldots r'_p x_p}.$$

Ensuite, si $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p$ sont au moins des racines triples, le système auxiliaire qui vient après le système en $z_2, z_3, \ldots, z_n$ donnera

$$z_i = P_i^1(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

en représentant par P^k un polynôme de degré k en $x_1, x_2, \ldots, x_p$. On tirera de là

$$q_i = P_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$
$$y_i = P_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_p) e^{r'_1 x_1 + \cdots + r'_p x_p}.$$

Le raisonnement se continue de la même manière tant qu'on n'a pas épuisé le degré k de multiplicité des racines $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p$ des équations caractéristiques.

Donc, lorsque des racines $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p$ *se correspondent*, elles sont racines de leurs équations caractéristiques respectives au même degré k de multiplicité, et l'on peut former un groupe de k solutions linéairement indépendantes de la forme

$$y_{im} = P_{im}^h(x_1, x_2, \ldots, x_p) e^{r'_1 x_1 + \cdots + r'_p x_p}$$
$$(m = 1, 2, \ldots, k; \quad h = 0, 1, 2, \ldots, k-1),$$

où $P_{im}^h(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ représente un polynôme entier de degré h à coefficients constants.

11. L'intégration du système d'équations (1) conduit facilement à l'intégration du système d'équations

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} dy_i = (a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n) \dfrac{dx_1}{x_1} + \cdots + (l_{i1} y_1 + \ldots + l_{in} y_n) \dfrac{dx_p}{x_p} \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

$a, b, \ldots, l$ représentant toujours des constantes.

Posons en effet

$$x_k = e^{z_h},$$

nous aurons

$$dx_h = x_h \, dz_h,$$

d'où

$$\frac{\partial y_i}{\partial z_h} = \frac{\partial y_i}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial z_h} = x_h \frac{\partial y_i}{\partial x_h}.$$

Nous aurons donc

$$dy_i = (a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n) \, dz_1 + \ldots + (l_{i1} y_1 + \ldots + l_{in} y_n) \, dz_p,$$

équation du genre de celles que nous venons d'étudier.

Les solutions seront ici de la forme

$$\mathrm{P}^{\mu}(lgx_1,\ lgx_2,\ \ldots\ lgx_p)\,x_1^{r_1}x_2^{r_2},\ \ldots,\ x_p^{r_p},$$

P^{μ} représentant un polynôme entier et rationnel de degré μ.

Plusieurs systèmes se ramènent au précédent. Par exemple, on déduit un système intéressant du système (3) en posant $y_i = u_i x^{h_i}$, et l'on peut réciproquement passer de ce système au système (3).

12. En résumé, l'intégration des systèmes d'équations de la forme

$$dy_i = (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n)\frac{dx_1}{\lambda_1 x_1 + \mu_1} + \ldots + (l_{in}y_1 + \ldots + l_{in}y_n)\frac{dx_p}{\lambda_p x_1 + \mu_p},$$

où $a, b, \ldots, l, \lambda, \mu$ représentent des constantes, se ramène toujours à l'intégration d'un système de la forme

$$dy_i = (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n)\,dx_1 + \ldots + (b_{i1}y_1 + \ldots + l_{in}y_n)\,dx_p.$$

L'intégration de ce système dépend essentiellement dans la pratique de la résolution d'une seule équation algébrique de degré n.