JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. LÉAUTÉ

Sur l'équilibre et la déformation des pièces circulaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 10 (1884), p. 367-385.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10__367_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur l'équilibre et la déformation des pièces circulaires ;

PAR M. H. LÉAUTÉ,
Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique.

Après les pièces droites, qui sont surtout employées dans les constructions civiles, celles que l'on rencontre le plus fréquemment dans la pratique sont les pièces circulaires, c'est-à-dire celles dont la fibre moyenne est un cercle ([1]).

L'objet de ce travail est d'indiquer, pour ces dernières, la marche générale que l'on peut suivre dans l'étude du problème général de la déformation d'une pièce soutenue par un nombre quelconque d'appuis fixes ou élastiques, formant ou non encastrement, et soumise à des forces extérieures quelconques.

Ce problème est celui qui se présente dans l'étude d'un grand nombre de pièces mécaniques, et il offre à ce titre un réel intérêt. Les roues ordinaires, les poulies de transmission, les volants, les roues montées en tension, sont autant de cas particuliers importants en pratique qui rentrent dans le cas général que nous allons étudier ; on peut

---

([1]) Nous avons montré que, lorsqu'on applique aux pièces courbes les formules établies pour les pièces droites, il convient de prendre comme définition de la fibre moyenne, non comme on le fait d'ordinaire, le lieu des centres de gravité ou d'élasticité proprement dits des sections normales, mais bien le lieu des centres de percussion de ces sections correspondant aux droites symétriques des droites polaires par rapport aux centres d'élasticité (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 16 juin 1884).

y joindre le cas des arcs circulaires posés sur deux appuis, que l'on examine presque seul dans les Cours de résistance des matériaux ([1]).

Nous avons montré dans un précédent travail ([2]) que la déformation d'une pièce courbe quelconque, soumise à des forces également quelconques, était déterminée par les équations suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{ds} - \dfrac{T}{\rho} + \mathfrak{L} = 0, \\ \dfrac{dT}{ds} + \dfrac{L}{\rho} + \mathfrak{T} = 0, \\ \dfrac{dM}{ds} + T + \mathfrak{M} = 0; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} L = ES\lambda, \\ T = KES\tau, \\ M = ESr^2\varphi, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{d\alpha}{ds} - \dfrac{\gamma}{\rho}, \\ \tau = \dfrac{d\gamma}{ds} + \dfrac{\alpha}{\rho} - \theta, \\ \varphi = \dfrac{d\theta}{ds}. \end{cases}$$

Dans ces équations, L, M, T et λ, τ, φ représentent, d'une part, les

---

([1]) Il convient d'ajouter cependant que M. Resal a traité deux de ces problèmes dans son *Traité de Mécanique générale*, tome V, page 87; il a déterminé la déformation d'un anneau circulaire dont la section est constante et qui repose sur un plan horizontal sous l'action d'une force verticale appliquée à son sommet. Puis il a repris la même question, l'anneau étant maintenu latéralement par deux plans verticaux.

Enfin, M. Maurice Lévy vient de publier récemment un travail du plus haut intérêt où il a donné la solution complète du problème de la résistance d'un anneau circulaire à la flexion, lorsque cet anneau est soumis extérieurement à une pression constante (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 24 septembre 1883, p. 694 : *Sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications*).

([2]) *Application de la résistance des matériaux au calcul des pièces de machines* (*Journal de l'École Polytechnique*, LII^e Cahier, p. 201; 1882).

efforts élastiques et, d'autre part, l'allongement, le glissement et la flexion qui se produisent au point considéré; α et γ sont les déplacements de ce point comptés suivant la tangente et la normale à la courbe primitive; θ est la déviation angulaire de la section normale correspondante; $\mathcal{L}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$ sont les composantes et les moments des forces extérieures agissant sur l'élément considéré, les deux premières de ces quantités étant, comme α et γ, comptées suivant la tangente et la normale à la courbe non déformée; enfin ρ et s désignent le rayon de courbure et l'arc de cette dernière courbe, S et r sont la surface de la section normale et son rayon de gyration pris par rapport à l'axe de la flexion; E et KE sont les coefficients d'élasticité longitudinale et transversale de la matière qui constitue la pièce.

Pour l'application de ces formules, il faut d'ailleurs avoir égard aux conventions suivantes : le sens positif des α est celui des s positifs; le sens positif des rotations θ est celui qui amène les α positifs sur les γ positifs par une rotation de $\frac{\pi}{2}$; le rayon de courbure ρ est positif quand le centre de courbure est sur les γ positifs; enfin les efforts élastiques L, T, M sont ceux qui s'exercent sur la face positive de l'élément considéré, c'est-à-dire sur la portion de la pièce la plus rapprochée de l'origine des s.

Nous supposerons que les forces extérieures agissant sur la pièce circulaire peuvent être évaluées comme si cette pièce n'avait pas été déformée. Cette hypothèse est évidemment toujours admissible, sauf dans des cas tout à fait spéciaux. Quant aux réactions des appuis, nous admettrons qu'elles peuvent dépendre des déformations. S'il est permis, en effet, quand il s'agit de la poutre droite à plusieurs travées, de considérer les supports comme invariables en raison des dimensions mêmes qu'ils présentent, il n'en est plus de même dans le cas général, car les appuis, qui sont les bras de la poulie par exemple ou les rais de la roue montée en tension, sont des pièces élastiques au même degré que la jante.

Les forces extérieures $\mathcal{L}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$ sont donc indépendantes de α, γ et θ et uniquement fonction de s; d'ailleurs ρ est constant en vertu de l'hypothèse même faite sur la forme des pièces étudiées; les équations du problème se réduisent dès lors à des équations linéaires à coefficients constants ([1]).

([1]) Il est plusieurs cas où l'on pourrait intégrer immédiatement les équations (1) par des fonctions connues; nous en signalerons deux qui présentent quelque intérêt.

Si ρ est de la forme $a + bs$, il suffira de poser

$$\rho = a + bs = e^t$$

pour que les équations simultanées

$$\frac{dL}{ds} - \frac{T}{\rho} = 0, \quad \frac{dT}{ds} + \frac{L}{\rho} = 0,$$

deviennent

$$b\frac{dL}{dt} - T = 0, \quad b\frac{dT}{dt} + L = 0;$$

d'où l'on déduit

$$L = A\cos\frac{t}{b} + B\sin\frac{t}{b}, \quad T = -A\sin\frac{t}{b} + B\cos\frac{t}{b}.$$

Si ρ est de la forme $\frac{1}{\Delta \operatorname{am} s}$, les intégrales des équations simultanées

$$\frac{dL}{ds} - \frac{T}{\Delta \operatorname{am} s} = 0, \quad \frac{dT}{ds} + \frac{L}{\Delta \operatorname{am} s} = 0$$

sont, comme on le sait,

$$L = A\sin\operatorname{am} s + B\cos\operatorname{am} s, \quad T = A\cos\operatorname{am} s - B\sin\operatorname{am} s,$$

qui représentent, si l'on considère L et T comme les coordonnées d'un point, les équations de la courbe élastique.

Les deux cas d'intégration que nous citons ici correspondraient au cas où l'on voudrait résoudre le problème général de la déformation pour des pièces dont l'état naturel serait défini par l'une des deux équations

$$\rho = a + bs, \quad \rho = \frac{1}{\Delta \operatorname{am} s}.$$

Cette remarque peut présenter dans la pratique une certaine importance, en permettant de substituer à la courbe véritable, dont l'étude analytique sera souvent difficile, l'une des deux courbes précédentes, choisie de façon à en différer très peu.

La courbe élastique, en particulier, par la multiplicité des formes qu'elle présente, se prête d'une façon toute spéciale à ce genre d'approximation.

Les intégrales s'obtiennent facilement par les méthodes connues.

Des deux premières équations (1) on tire d'abord L et T qui ont pour expressions

$$L = -\sin\frac{s}{\rho}\int\left(\mathcal{L}\sin\frac{s}{\rho}+\mathcal{T}\cos\frac{s}{\rho}\right)ds - \cos\frac{s}{\rho}\int\left(\mathcal{L}\cos\frac{s}{\rho}-\mathcal{T}\sin\frac{s}{\rho}\right)ds,$$

$$M = -\cos\frac{s}{\rho}\int\left(\mathcal{L}\sin\frac{s}{\rho}+\mathcal{T}\cos\frac{s}{\rho}\right)ds + \sin\frac{s}{\rho}\int\left(\mathcal{L}\cos\frac{s}{\rho}-\mathcal{T}\sin\frac{s}{\rho}\right)ds,$$

ou

$$(4)\qquad \begin{cases} L = \mathcal{A}\sin\dfrac{s}{\rho}+\mathcal{B}\cos\dfrac{s}{\rho}, \\ T = \mathcal{A}\cos\dfrac{s}{\rho}-\mathcal{B}\sin\dfrac{s}{\rho}, \end{cases}$$

en posant

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} = -\displaystyle\int\left(\mathcal{L}\sin\frac{s}{\rho}+\mathcal{T}\cos\frac{s}{\rho}\right)ds, \\ \mathcal{B} = -\displaystyle\int\left(\mathcal{L}\cos\frac{s}{\rho}-\mathcal{T}\sin\frac{s}{\rho}\right)ds. \end{cases}$$

On obtient ensuite M en portant la valeur obtenue pour T dans la troisième des équations (1)

$$(6)\qquad M = -\rho\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} - e\mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{C},$$

où l'on a fait

$$(7)\qquad \mathcal{C} = \int(\mathcal{M}+\rho\mathcal{L})\,ds.$$

On peut remarquer d'ailleurs que cette expression de M se déduit de suite de la relation

$$\frac{dM}{ds}+\rho\frac{dL}{ds}+\mathcal{M}+\rho\mathcal{L}=0,$$

conséquence immédiate des équations (1).

Les efforts élastiques L, T, M étant ainsi exprimés en fonction de s, on tirera immédiatement les valeurs de λ, τ et φ des équations (2);

on aura

$$\lambda = \frac{1}{ES}\left(\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho}\right),$$

$$\tau = \frac{1}{KES}\left(\mathcal{A}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{B}\sin\frac{s}{\rho}\right),$$

$$\varphi = \frac{-1}{ESr^2}\left(\rho\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} + \rho\mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho} + \mathcal{D}\right).$$

La valeur de θ s'obtiendra ensuite à l'aide d'une quadrature par la dernière des équations (3)

$$(8) \qquad \theta = -\frac{1}{ESr^2}\int\left(\rho\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} + \rho\mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho} + \mathcal{D}\right)ds.$$

Quant à α et γ, leurs valeurs résultent de l'intégration des deux premières équations (3)

$$(9) \qquad \begin{cases} \alpha = \mathcal{E}\sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{F}\cos\frac{s}{\rho}, \\ \gamma = \mathcal{E}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{F}\sin\frac{s}{\rho}, \end{cases}$$

en posant

$$\mathcal{E} = \int\left[\lambda\sin\frac{s}{\rho} + (\theta + \tau)\cos\frac{s}{\rho}\right]ds,$$

$$\mathcal{F} = \int\left[\lambda\cos\frac{s}{\rho} - (\theta + \tau)\sin\frac{s}{\rho}\right]ds.$$

En résumé, on a comme intégrales générales du problème les neuf équations

$$L = \mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho},$$

$$T = \mathcal{A}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{B}\sin\frac{s}{\rho},$$

$$M = -\rho\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} - \rho\mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{D},$$

$$\lambda = \frac{1}{ES}\left(\mathcal{A}\sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{B}\cos\frac{s}{\rho}\right),$$

$$\tau = \frac{1}{KES}\left(\mathcal{A}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{B}\sin\frac{s}{\rho}\right),$$

$$\varphi = -\frac{1}{ES r^2}\left(\rho \mathcal{A} \sin\frac{s}{\rho} + \rho \mathcal{B} \cos\frac{s}{\rho} + \mathcal{C}\right)$$

$$\theta = -\frac{1}{ES r^2}\int\left(\rho \mathcal{A} \sin\frac{s}{\rho} + \rho \mathcal{B} \cos\frac{s}{\rho} + \mathcal{C}\right) ds,$$

$$\alpha = \mathcal{E} \sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{F} \cos\frac{s}{\rho},$$

$$\gamma = \mathcal{E} \cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{F} \sin\frac{s}{\rho},$$

qui s'obtiennent par de simples quadratures et renferment six constantes arbitraires provenant des six intégrales

$$\mathcal{A}, \quad \mathcal{B}, \quad \mathcal{C}, \quad \mathcal{E}, \quad \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \int\left(\rho \mathcal{A} \sin\frac{s}{\rho} + \rho \mathcal{B} \cos\frac{s}{\rho} + \mathcal{C}\right) ds.$$

Ces six constantes se répartissent de la manière suivante : les deux premières donnent L, T, λ et τ, la troisième permet ensuite de trouver M et φ, la quatrième fournit alors θ, et enfin les deux dernières déterminent α et γ, toutes les autres quantités étant connues.

Ces diverses constantes conservent évidemment les mêmes valeurs tant que les efforts élastiques ne subissent pas de variations brusques par le fait de la réaction d'un appui ou de l'action d'une force extérieure de grandeur finie s'exerçant en un point déterminé. Si donc nous partageons la pièce considérée en tronçons séparés, soit par un support, soit par un point d'application de force, c'est-à-dire séparés par ce que nous appellerons *un point de discontinuité*, et si nous supposons que les tronçons, ainsi définis, soient au nombre de n, il y aura $6n$ constantes à déterminer.

La détermination de ces constantes résultera des conditions relatives aux déformations que subit la pièce aux points de discontinuité et des efforts qu'elle supporte en ces points; les $6n$ constantes dont nous venons de parler dépendront donc de la nature des réactions des appuis et des actions extérieures finies; nous allons montrer que, dans tous les cas, on aura $6n$ équations pour les déterminer et indiquer comment l'on peut établir ces équations.

Un appui quelconque étant toujours plus ou moins élastique, la réaction qu'il produit dépend de la déformation de l'élément de la pièce qui y correspond, c'est-à-dire des trois quantités α, γ et θ. Si donc on désigne par X_i et Z_i les composantes de la réaction de l'appui i suivant la tangente et la normale à la fibre moyenne au point considéré, et par N_i le couple élastique agissant en ce point, on peut affirmer que les quantités X_i, Z_i, N_i ne contiennent d'autres indéterminées que α_i, γ_i et θ_i.

Il est facile de voir d'ailleurs que, les réactions de l'appui maintenant en équilibre l'élément de la pièce qui est en contact avec lui et qui est soumis aux actions des deux tronçons contigus, on a

$$(11)\qquad L'_i - L''_{i-1} + X_i = 0,\quad T'_i - T''_{i-1} + Z_i = 0,\quad M'_i - M''_{i-1} + N_i = 0,$$

où l'on a désigné par un accent les quantités qui se rapportent à l'origine d'un tronçon, et par deux accents celles qui se rapportent à l'extrémité opposée.

Si le point de discontinuité i, au lieu de correspondre à un point d'appui, correspondait à un effort extérieur fini, les mêmes équations (11) s'appliqueraient encore, avec cette différence que X_i, Z_i, N_i se réduiraient à des constantes, puisque la force donnée ne dépendrait pas de la déformation que peut subir la pièce en son point d'application.

Dans les deux cas, aucune des équations (11) n'introduira de nouvelles constantes indéterminées.

Il faut maintenant ajouter aux équations (11) ce que l'on pourrait appeler les équations de continuité, c'est-à-dire celles qui expriment que les divers tronçons, dans lesquels nous avons décomposé la pièce, ne forment qu'une seule et même pièce; il suffit, pour cela, d'écrire que, de part et d'autre d'un point de discontinuité, les déformations des deux extrémités de tronçons qui s'y joignent sont les mêmes, c'est-à-dire que α, γ et θ ont la même valeur; on obtient ainsi

$$(12)\qquad \alpha'_i - \alpha''_{i-1} = 0,\quad \gamma'_i - \gamma''_{i-1} = 0,\quad \theta'_i - \theta''_{i-1} = 0.$$

Si la pièce forme un cercle complet, on a, pour n tronçons, n points de discontinuité, c'est-à-dire n systèmes d'équations (11) et n systèmes d'équations (12), soit en total $6n$ équations.

Si les deux extrémités de la pièce sont libres, on a, pour n tronçons, $n-1$ points de discontinuité auxquels s'appliquent les équations (11) et (12), ce qui donne $6(n-1)$ équations. Mais il faut remarquer qu'aux deux extrémités les efforts élastiques sont nuls, ce qui s'exprime par six nouvelles équations (11); on a donc encore en total $6n$ équations.

Enfin, si les deux extrémités de la pièce sont en contact avec des supports, on a, pour n tronçons, $n+1$ points de continuité, c'est-à-dire $3(n+1)$ équations (11), mais on n'a plus évidemment que $n-1$ supports auxquels s'appliquent les équations (12), ce qui donne en somme $6n$ équations.

On voit ainsi que, en toute hypothèse, on a toujours $6n$ équations pour déterminer les $6n$ constantes arbitraires qui, ainsi que nous l'avons vu, sont introduites par l'intégration ([1]).

Les quantités X, Z, N devront d'ailleurs être regardées comme des fonctions linéaires en α, γ et θ, et, par suite, toutes les constantes arbitraires entreront simplement au premier degré dans les équations qui les déterminent.

Chacune de ces équations, qu'elle appartienne au système (11) ou au système (12), renferme les constantes relatives à deux tronçons successifs; le nombre des inconnues contenues dans la même équation est ainsi de douze en général, sauf pour celles en θ qui n'en contiennent que huit.

Les formules générales ayant été ainsi établies et le procédé de calcul des constantes qu'elles contiennent ayant été indiqué, nous allons examiner les modifications qu'éprouvent ces formules dans les divers cas particuliers.

Nous examinerons tout d'abord comment varie la forme des fonctions X, Z, N suivant la nature de l'appui et la façon dont il est relié à la pièce.

Quand cet appui est une pièce élastique réunie assez solidement à la pièce circulaire pour que le point de jonction constitue un encastre-

---

([1]) Bien que nous ne nous proposions dans ce travail que d'étudier le cas des pièces circulaires, il nous paraît utile de remarquer que nos formules s'appliquent aux pièces composées d'arcs de cercle successifs. On pourrait, de la sorte, étendre l'application de ces formules aux pièces courbes quelconques.

ment réciproque, X, Z, N doivent contenir chacune les trois variables α, γ et θ, puisque toute déformation de la pièce au point d'appui doit entraîner une déformation du support et, par suite, une variation des composantes de la réaction. C'est le cas d'une pièce coulée. Dans cette hypothèse, la composition de chacune des composantes X, Z, N en α, γ et θ dépendra surtout de la forme de la pièce élastique formant appui. Ainsi, quand on considère une roue ordinaire de transmission, la relation entre X, par exemple, et les trois déformations α, γ, θ sera différente suivant que les bras seront droits ou courbes. Avec les bras courbes les efforts dus respectivement aux variations de α et de γ seront du même ordre de grandeur. Avec les bras droits, au contraire, les efforts dus aux variations de γ seront ordinairement beaucoup plus grands que ceux dus aux variations de α, et l'on pourra regarder les γ comme négligeables. Les équations

$$\gamma'_i - \gamma''_{i-1} = 0$$

pourront alors être remplacées par les deux équations

$$\gamma'_i = 0, \quad \gamma''_{i-1} = 0.$$

Par contre, l'effort Z cessera d'être déterminé en fonction de α, γ, θ et deviendra une nouvelle inconnue.

Cette introduction d'une inconnue de plus sera compensée par le dédoublement de l'équation précédente, et il y aura toujours égalité entre le nombre des équations et celui des inconnues.

Lorsque la réunion des appuis à la pièce ne présente pas assez de rigidité pour constituer un encastrement, il faut supposer N nul, puisque l'appui n'empêche pas une rotation autour de son point d'attache de rendre X et Z indépendants de θ. C'est le cas des volants de grande dimension et des roues montées en tension.

Chacune des équations en θ et en M ne renferme plus alors que huit constantes.

Il peut encore arriver, dans le cas qui nous occupe, que X et Z soient susceptibles d'être regardés comme indépendants de γ et seulement fonctions de α.

Enfin les appuis peuvent être fixes, soit qu'ils déterminent d'une façon absolue les trois quantités α, γ et θ ou seulement quelques-unes d'entre elles. Les équations (12) doivent alors être remplacées par tout ou partie des suivantes :

$$\alpha'_i = 0, \quad \gamma'_i = 0, \quad \theta'_i = 0,$$
$$\alpha''_{i-1} = 0, \quad \gamma''_{i-1} = 0, \quad \theta''_{i-1} = 0,$$

en même temps que les efforts X, Z, N correspondant à celles des quantités α, γ, θ qui s'annulent, deviendront de nouvelles inconnues.

Il est clair qu'à chaque nouvelle inconnue correspond une équation qui se dédouble, et que, ainsi, il y a toujours égalité entre le nombre des équations et celui des inconnues.

Si l'appui, tout en étant fixe, ne présente pas d'encastrement sur la pièce, θ ne sera pas forcément nul au dessus de cet appui, et N, au contraire, deviendra nul.

De même, si l'appui permet un glissement longitudinal de la pièce, X deviendra nul et α cessera de l'être.

Les considérations qui précèdent montrent comment on pourra, dans tous les cas, déterminer l'état d'une pièce circulaire soumise à des efforts connus et soutenus par divers appuis.

La question revient toujours à résoudre un certain nombre d'équations du premier degré dès qu'on a effectué les quadratures nécessaires, lesquelles peuvent d'ailleurs être obtenues par les méthodes connues d'approximation.

Nous avons pris pour inconnues les constantes arbitraires introduites par l'intégration, mais on peut leur substituer les réactions X, Z, N des appuis et les déformations correspondantes x, z, t.

Il suffit, pour cela, de joindre aux équations d'équilibre au droit des points d'appui

$$(13) \quad L'_i - L''_{i-1} + X_i = 0, \quad T'_i - T''_{i-1} + Z_i = 0, \quad M'_i - M''_{i-1} + N_i = 0$$

les équations résultant de la constitution même de l'appui et qui donnent les réactions en fonction des déformations

$$(14) \quad X_i = f_i(x_i, z_i, t_i), \quad Z_i = \varphi_i(x_i, z_i, t_i), \quad N_i = \psi_i(x_i, z_i, t_i),$$

et les équations qui expriment l'égalité des déformations à l'appui et de celles des deux tronçons qui s'y réunissent

$$(15) \qquad \alpha'_i = x_i, \quad \gamma'_i = z_i, \quad \theta'_i = t_i,$$

$$(16) \qquad \alpha''_{i-1} = x_i, \quad \gamma''_{i-1} = z_i, \quad \theta''_{i-1} = t_i;$$

on éliminera ensuite les constantes arbitraires.

Pour faire l'élimination des douze constantes relatives aux deux tronçons contigus à l'appui considéré, il suffira de joindre aux équations (13), (15) et (16) les six équations

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \alpha'_{i-1} = x_{i-1}, & \gamma'_{i-1} = z_{i-1}, & \theta'_{i-1} = t_{i-1}, \\ \alpha''_i = x_{i+1}, & \gamma''_i = z_{i+1}, & \theta''_i = t_{i+1}. \end{array} \right.$$

Au moyen des douze équations (15), (16) et (17) on exprimera les douze constantes en fonction des neuf quantités $x_{i-1}, z_{i-1}, t_{i-1}, x_i, z_i, t_i, x_{i+1}, z_{i+1}, t_{i+1}$ et, en portant ces expressions dans les équations (13), on aura trois équations indépendantes de ces constantes et qui contiendront les neuf quantités précédentes avec X_i, Z_i, N_i.

En combinant alors ces trois équations avec les trois équations (14), on pourra, entre ces six équations, soit éliminer X_i, Z_i, N_i, ce qui donnera trois relations entre les déformations en trois points d'appui consécutifs, soit tirer des équations (14) x_i, z_i, t_i en fonction de X_i, Z_i, N_i, les porter dans les trois équations trouvées et obtenir ainsi trois relations entre $X_{i-1}, Z_{i-1}, N_{i-1}, X_i, Z_i, N_i, X_{i+1}, Z_{i+1}, N_{i+1}$.

Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant qui constitue la généralisation du théorème de Clapeyron sur les trois moments successifs dans une poutre droite à plusieurs travées :

Dans une pièce circulaire à plusieurs appuis, les réactions d'un point d'appui quelconque peuvent toujours s'exprimer à l'aide des réactions des deux points d'appui immédiatement voisins et les relations ainsi obtenues sont des relations linéaires.

Il importe de remarquer que nous n'avons fait aucune hypothèse sur la nature des forces qui sollicitent la pièce circulaire et que nous n'avons pas supposé non plus que cette pièce ait une section constante.

Les conséquences précédentes sont donc vraies aussi bien pour une pièce ayant ses extrémités libres que pour un cercle complet, puisqu'on peut compléter cette pièce par un arc dont on suppose la section nulle.

Il est bien entendu que les conclusions ci-dessus s'appliquent, non seulement aux véritables points d'appui, mais à tout point de discontinuité, c'est-à-dire à tout point où s'exerce une action de grandeur finie linéaire en x, z, t, avec ou sans terme constant.

Nous allons indiquer comment l'on peut diriger le calcul pour obtenir les trois relations qui, d'après le théorème précédent, existent entre les efforts exercés sur trois points d'appui consécutifs.

Pour cela, considérons une pièce circulaire *complète* soutenue en n points par des appuis formant encastrement et cherchons les effets d'une force extérieure unique agissant en un point de l'une des n travées.

Ce problème une fois résolu peut être considéré comme donnant la solution du problème général, puisqu'il est toujours permis, dans la pratique, de remplacer une force répartie d'une manière continue par un certain nombre de forces isolées. C'est même le procédé habituellement employé, en raison de ce qu'il se prête mieux à l'application des méthodes graphiques.

Nous négligerons d'ailleurs λ et τ, comme on le fait d'ordinaire.

Dans ces conditions, les n points d'appui et le point d'application de la force constituent $n+1$ points de discontinuité et l'on peut regarder la pièce comme partagée en $n+1$ tronçons dans l'étendue desquels les forces extérieures $\mathcal{L}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{M}$ sont nulles.

On a alors pour chacun d'eux, d'après les équations (4)

$$(4') \qquad \begin{cases} L = A\sin\frac{s}{\rho} + B\cos\frac{s}{\rho}, \\ T = A\cos\frac{s}{\rho} - B\sin\frac{s}{\rho}, \end{cases}$$

A et B étant des constantes, puisque les équations différentielles qui fournissent L et T n'ont plus alors de seconds membres.

L'équation (6) donne de même

$$(6') \qquad M = -\rho A \sin\frac{s}{\rho} - \rho B \cos\frac{s}{\rho} + C\rho.$$

On tire ensuite de l'équation (8), en y remplaçant M par sa valeur,

$$\theta = \frac{1}{\varepsilon S r^2}\int\left(-\rho A \sin\frac{s}{\rho} - \rho B\cos\frac{s}{\rho} + C\rho\right)ds,$$

d'où l'on déduit

$$(8') \qquad \varepsilon S r^2 \theta = \rho^2 A \cos\frac{s}{\rho} - \rho^2 B \sin\frac{s}{\rho} + C\rho s + D\rho^2.$$

Enfin, l'on a, par les équations (9),

$$\alpha = \mathcal{E}\sin\frac{s}{\rho} + \mathcal{F}\cos\frac{s}{\rho},$$

$$\gamma = \mathcal{E}\cos\frac{s}{\rho} - \mathcal{F}\sin\frac{s}{\rho},$$

dans lesquelles

$$\mathcal{E} = \int \theta \cos\frac{s}{\rho}\,ds.$$

$$\mathcal{F} = \int -\theta \sin\frac{s}{\rho}\,ds,$$

ou encore, si l'on remplace θ par l'expression précédemment trouvée,

$$\mathcal{E} = \frac{\rho^2}{\varepsilon S r^2}\left[\frac{A}{2}\left(s + \frac{\rho}{2}\sin\frac{2s}{\rho}\right) + B\frac{\rho}{4}\cos\frac{2s}{\rho}\right.$$
$$\left. + C\left(s\sin\frac{s}{\rho} + \rho\cos\frac{s}{\rho}\right) + D\rho\sin\frac{s}{\rho} + E\rho\right],$$

$$\mathcal{F} = \frac{\rho^2}{\varepsilon S r^2}\left[A\frac{\rho}{4}\cos\frac{2s}{\rho} + \frac{B}{2}\left(s - \frac{\rho}{2}\sin\frac{2s}{\rho}\right)\right.$$
$$\left. + C\left(s\cos\frac{s}{\rho} - \rho\sin\frac{s}{\rho}\right) + D\rho\cos\frac{s}{\rho} + F\rho\right].$$

On en conclut

$$(9')\quad\left\{\begin{aligned}\varepsilon S r^2 \alpha &= \rho^2\left[\frac{A}{2}\left(s\sin\frac{s}{\rho}+\frac{\rho}{2}\cos\frac{s}{\rho}\right)+\frac{B}{2}\left(s\cos\frac{s}{\rho}-\frac{\rho}{2}\sin\frac{s}{\rho}\right)\right.\\ &\qquad\left.+Cs+D\rho+E\rho\sin\frac{s}{\rho}+F\rho\cos\frac{s}{\rho}\right],\\ \varepsilon S r^2 \gamma &= \rho^2\left[\frac{A}{2}\left(s\cos\frac{s}{\rho}+\frac{\rho}{2}\sin\frac{s}{\rho}\right)-\frac{B}{2}\left(s\sin\frac{s}{\rho}-\frac{\rho}{2}\cos\frac{s}{\rho}\right)\right.\\ &\qquad\left.+C\rho+E\rho\cos\frac{s}{\rho}-F\rho\sin\frac{s}{\rho}\right].\end{aligned}\right.$$

Résolvons les six équations (4′), (6′), (8′), (9′) par rapport aux six constantes d'intégration A, B, C, D, E, F.

Des deux équations (4′) on tire

$$A = L\sin\frac{s}{\rho}+T\cos\frac{s}{\rho},$$

$$B = L\cos\frac{s}{\rho}-T\sin\frac{s}{\rho};$$

d'où, par (6′),

$$C = \frac{1}{\rho}M + L$$

et par (8′),

$$D = \frac{\varepsilon S r^2}{\rho^2}\theta - L\frac{s}{\rho} - M\frac{s}{\rho^2} - T.$$

Enfin, les équations (9′) donnent les valeurs de E et F

$$\begin{aligned}E &= \frac{\varepsilon S r^2}{\rho^3}\left(\alpha\sin\frac{s}{\rho}+\gamma\cos\frac{s}{\rho}-\rho\theta\sin\frac{s}{\rho}\right)\\ &\quad-\frac{L}{2}\left(\frac{s}{\rho}\sin\frac{s}{\rho}+\frac{5}{2}\cos\frac{s}{\rho}\right)+\frac{T}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\frac{s}{\rho}-\frac{s}{\rho}\cos\frac{s}{\rho}\right)-\frac{M}{\rho}\cos\frac{s}{\rho},\\ F &= \frac{\varepsilon S r^2}{\rho^3}\left(\alpha\cos\frac{s}{\rho}-\gamma\sin\frac{s}{\rho}-\rho\theta\cos\frac{s}{\rho}\right)\\ &\quad+\frac{L}{2}\left(\frac{5}{2}\sin\frac{s}{\rho}-\frac{s}{\rho}\cos\frac{s}{\rho}\right)+\frac{T}{2}\left(\frac{s}{\rho}\sin\frac{s}{\rho}+\frac{3}{2}\cos\frac{s}{\rho}\right)+\frac{M}{\rho}\sin\frac{s}{\rho}.\end{aligned}$$

Il suffit alors, pour éliminer les constantes A, B, C, D, E, F, d'égaler leurs valeurs pour les deux extrémités de l'un des tronçons; on obtient ainsi six relations qui permettent d'exprimer les efforts aux extrémités en fonction des déformations que ces extrémités subissent.

Considérons donc deux tronçons voisins correspondant aux points de discontinuité $i-1$, i, $i+1$, et désignons par un accent les quantités se rapportant au début d'un tronçon, par deux accents celles relatives à son autre extrémité; nous aurons, en représentant par x, z, t, les déplacements α, γ, θ, aux points de discontinuité,

$$\mathrm{L}'_i \sin\frac{s'}{\rho} + \mathrm{T}'_i \cos\frac{s'}{\rho} = \mathrm{L}''_{i+1}\sin\frac{s''}{\rho} + \mathrm{T}''_{i+1}\cos\frac{s''}{\rho},$$

$$\mathrm{L}'_i \cos\frac{s'}{\rho} - \mathrm{T}'_i \sin\frac{s'}{\rho} = \mathrm{L}''_{i+1}\cos\frac{s''}{\rho} - \mathrm{T}''_{i+1}\sin\frac{s''}{\rho},$$

$$\frac{1}{\rho}\mathrm{M}'_i + \mathrm{L}'_i = \frac{1}{\rho}\mathrm{M}''_{i+1} + \mathrm{L}''_{i+1},$$

$$\frac{\varepsilon \mathrm{S} r^2}{\rho^2} t_i - \mathrm{L}'_i\frac{s'}{\rho} - \mathrm{M}'_i\frac{s'}{\rho^2} - \mathrm{T}'_i = \frac{\varepsilon \mathrm{S} r^2}{\rho^2} t_{i+1} - \mathrm{L}''_{i+1}\frac{s''}{\rho} - \mathrm{M}''_{i+1}\frac{s''}{\rho^2} - \mathrm{T}''_{i+1},$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon \mathrm{S} r^2}{\rho^3}\left(x_i\sin\frac{s'}{\rho} + z_i\cos\frac{s'}{\rho} - \rho t_i \sin\frac{s'}{\rho}\right)\\
&\quad - \frac{\mathrm{L}'_i}{2}\left(\frac{s'}{\rho}\sin\frac{s'}{\rho} + \frac{5}{2}\cos\frac{s'}{\rho}\right) + \frac{\mathrm{T}'_i}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\frac{s'}{\rho} - \frac{s'}{\rho}\cos\frac{s'}{\rho}\right) - \frac{\mathrm{M}'_i}{\rho}\cos\frac{s'}{\rho}\\
&= \frac{\varepsilon \mathrm{S} r^2}{\rho^3}\left(x_{i+1}\sin\frac{s''}{\rho} + z_{i+1}\cos\frac{s''}{\rho} - \rho t_{i+1}\sin\frac{s''}{\rho}\right)\\
&\quad - \frac{\mathrm{L}''_{i+1}}{2}\left(\frac{s''}{\rho}\sin\frac{s''}{\rho} + \frac{5}{2}\cos\frac{s''}{\rho}\right) + \frac{\mathrm{T}''_{i+1}}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\frac{s''}{\rho} - \frac{s''}{\rho}\cos\frac{s''}{\rho}\right) - \frac{\mathrm{M}''_{i+1}}{\rho}\cos\frac{s''}{\rho},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon \mathrm{S} r^2}{\rho^3}\left(x_i\cos\frac{s'}{\rho} - z_i\sin\frac{s'}{\rho} - \rho t_i \cos\frac{s'}{\rho}\right)\\
&\quad + \frac{\mathrm{L}'_i}{2}\left(\frac{5}{2}\sin\frac{s'}{\rho} - \frac{s'}{\rho}\cos\frac{s'}{\rho}\right) + \frac{\mathrm{T}'_i}{2}\left(\frac{s'}{\rho}\sin\frac{s'}{\rho} + \frac{3}{2}\cos\frac{s'}{\rho}\right) + \frac{\mathrm{M}'_i}{\rho}\sin\frac{s'}{\rho}\\
&= \frac{\varepsilon \mathrm{S} r^2}{\rho^3}\left(x_{i+1}\cos\frac{s''}{\rho} - z_{i+1}\sin\frac{s''}{\rho} - \rho t_{i+1}\cos\frac{s''}{\rho}\right)\\
&\quad + \frac{\mathrm{L}''_{i+1}}{2}\left(\frac{5}{2}\sin\frac{s''}{\rho} - \frac{s''}{\rho}\cos\frac{s''}{\rho}\right) + \frac{\mathrm{T}''_{i+1}}{2}\left(\frac{s''}{\rho}\sin\frac{s''}{\rho} + \frac{3}{2}\cos\frac{s''}{\rho}\right) + \frac{\mathrm{M}''_{i+1}}{\rho}\sin\frac{s''}{\rho}.
\end{aligned}$$

De ces six équations, nous allons tirer les six quantités L'_i, T'_i, M'_i, L''_{i+1}, T''_{i+1}, M''_{i+1} en fonction des déplacements x_i, z_i, t_i, x_{i+1}, z_{i+1}, t_{i+1}.

Pour cela, désignons par $\Delta^{(i,i+1)}$ le déterminant suivant :

$$\Delta^{(i,i+1)} = \begin{vmatrix} \sin\frac{s'}{\rho} & \cos\frac{s'}{\rho} & 0 & -\sin\frac{s''}{\rho} & -\cos\frac{s''}{\rho} & 0 \\ \cos\frac{s'}{\rho} & -\sin\frac{s'}{\rho} & 0 & -\cos\frac{s''}{\rho} & \sin\frac{s''}{\rho} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{\rho} & -1 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ -\frac{s'}{\rho} & -1 & -\frac{s'}{\rho^2} & \frac{s''}{\rho} & 1 & \frac{s''}{\rho^2} \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{s'}{\rho}\sin\frac{s'}{\rho}+\frac{5}{2}\cos\frac{s'}{\rho}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\frac{s'}{\rho}-\frac{s'}{\rho}\cos\frac{s'}{\rho}\right) & -\frac{1}{\rho}\cos\frac{s'}{\rho} & \frac{1}{2}\left(\frac{s''}{\rho}\sin\frac{s''}{\rho}+\frac{5}{2}\cos\frac{s''}{\rho}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\frac{s''}{\rho}-\frac{s''}{\rho}\cos\frac{s''}{\rho}\right) & \frac{1}{\rho}\cos\frac{s''}{\rho} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\sin\frac{s'}{\rho}-\frac{s'}{\rho}\cos\frac{s'}{\rho}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{s'}{\rho}\sin\frac{s'}{\rho}+\frac{3}{2}\cos\frac{s'}{\rho}\right) & \frac{1}{\rho}\sin\frac{s'}{\rho} & -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\sin\frac{s''}{\rho}-\frac{s''}{\rho}\cos\frac{s''}{\rho}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{s''}{\rho}\sin\frac{s''}{\rho}+\frac{3}{2}\cos\frac{s''}{\rho}\right) & -\frac{1}{\rho}\sin\frac{s''}{\rho} \end{vmatrix},$$

et représentons par $\Delta_1^{(i,i+1)}$, $\Delta_2^{(i,i+1)}$, ..., $\Delta_6^{(i,i+1)}$ les six déterminants obtenus en remplaçant successivement dans le déterminant $\Delta^{(i,i+1)}$ la première colonne, la deuxième, etc., par la suite des quantités

o, o, o, $\dfrac{\varepsilon S r^2}{\rho^2}(t_{i+1}-t_i)$,

$$\frac{\varepsilon S r^2}{\rho^3}\left(x_{i+1}\sin\frac{s''}{\rho}-x_i\sin\frac{s'}{\rho}+z_{i+1}\cos\frac{s''}{\rho}-z_i\cos\frac{s'}{\rho}-\rho t_{i+1}\sin\frac{s''}{\rho}+\rho t_i\sin\frac{s'}{\rho}\right),$$

$$\frac{\varepsilon S r^2}{\rho^3}\left(x_{i+1}\cos\frac{s''}{\rho}-x_i\cos\frac{s'}{\rho}-z_{i+1}\sin\frac{s''}{\rho}+z_i\sin\frac{s'}{\rho}-\rho t_{i+1}\cos\frac{s''}{\rho}+\rho t_i\cos\frac{s'}{\rho}\right);$$

nous aurons

$$L'_i = \frac{\Delta_1^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}, \qquad T'_i = \frac{\Delta_2^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}, \qquad M'_i = \frac{\Delta_3^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}},$$

$$L''_{i+1} = \frac{\Delta_4^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}, \quad T''_{i+1} = \frac{\Delta_5^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}, \quad M''_{i+1} = \frac{\Delta_6^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}.$$

Ces formules établies, considérons les deux tronçons voisins $(i-1, i)$ et $(i, i+1)$, et appliquons les résultats précédents aux deux extrémités qui se réunissent au point de discontinuité i; nous aurons

$$L''_i = \frac{\Delta_4^{(i-1,i)}}{\Delta^{(i-1,i)}}, \quad T''_i = \frac{\Delta_5^{(i-1,i)}}{\Delta^{(i-1,i)}}, \quad M''_i = \frac{\Delta_6^{(i-1,i)}}{\Delta^{(i-1,i)}},$$

$$L'_i = \frac{\Delta_1^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}, \quad T'_i = \frac{\Delta_2^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}}, \quad M'_i = \frac{\Delta_3^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}},$$

et, comme

$$L'_i - L''_i = X_i, \quad T'_i - T''_i = Z_i, \quad M'_i - M''_i = N_i,$$

on en déduit

$$X_i = \frac{\Delta_1^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}} - \frac{\Delta_4^{(i-1,i)}}{\Delta^{(i-1,i)}}, \quad Z_i = \frac{\Delta_2^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}} - \frac{\Delta_5^{(i-1,i)}}{\Delta^{(i-1,i)}}, \quad N_i = \frac{\Delta_3^{(i,i+1)}}{\Delta^{(i,i+1)}} - \frac{\Delta_6^{(i-1,i)}}{\Delta^{(i-1,i)}},$$

qui donnent X_i, Z_i, N_i en fonction des déplacements x_{i-1}, z_{i-1}, t_{i-1}; x_i, z_i, t_i; x_{i+1}, z_{i+1}, t_{i+1} des extrémités des deux tronçons qui aboutissent au point de discontinuité i.

Mais les composantes X_i, Z_i, N_i sont exprimables en fonction des déplacements x_i, z_i, t_i de leur point d'application; il suffit donc de remplacer, dans les trois expressions qui viennent d'être écrites, x_{i-1}, z_{i-1}, t_{i-1}; x_i, z_i, t_i; x_{i+1}, z_{i+1}, t_{i+1} par leurs valeurs en fonction de X_{i-1}, Z_{i-1}, T_{i-1}; X_i, Z_i, T_i; X_{i+1}, Z_{i+1}, T_{i+1}; pour avoir les trois relations qui existent entre les efforts exercés sur trois points d'appui consécutifs, relations qui constituent, pour une pièce circulaire, le théorème de Clapeyron relatif aux pièces droites.

Nous ferons remarquer d'ailleurs, à titre d'indication générale, que le calcul qui précède se simplifie notablement si l'on prend pour origine le milieu du tronçon considéré. En désignant alors par 2ω l'angle au centre correspondant à ce tronçon, les six équations qui donnent L'_i, T'_i, M'_i, L''_{i+1}, T''_{i+1}, M''_{i+1} deviennent

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{array}{l} (L'_i - L''_{i+1})\cos\omega + (T'_i + T''_{i+1})\sin\omega = 0, \\ (L'_i - L''_{i+1}) + \dfrac{(M'_i - M''_{i+1})}{\rho} = 0, \\ \dfrac{(L'_i - L''_{i+1})}{2}\left(\omega\sin\omega + \dfrac{5}{2}\cos\omega\right) - \dfrac{(T'_i + T''_{i+1})}{2}\left(\omega\cos\omega - \dfrac{3}{2}\sin\omega\right) + \dfrac{(M'_i - M''_{i+1})}{\rho}\cos\omega \\ \quad + \dfrac{\varepsilon S r^2}{\rho^3}\left[(x_i + x_{i+1})\sin\omega - (z_i - z_{i+1})\cos\omega - \rho(t_i + t_{i+1})\sin\omega\right] = 0, \end{array} \right.$$

$$
(\mathrm{B})\left\{
\begin{aligned}
&(\mathrm{L}'_i + \mathrm{L}''_{i+1})\sin\omega - (\mathrm{T}'_i - \mathrm{T}''_{i+1})\cos\omega = 0,\\
&(\mathrm{L}'_i + \mathrm{L}''_{i+1})\omega - (\mathrm{T}'_i - \mathrm{T}''_{i+1}) + \frac{\mathrm{M}'_i + \mathrm{M}''_{i+1}}{\rho}\omega + \frac{\varepsilon \mathrm{S} r^2}{\rho^2}(t_i - t_{i+1}) = 0,\\
&\frac{\mathrm{L}'_i + \mathrm{L}''_{i+1}}{2}\left(\omega\cos\omega - \frac{5}{2}\sin\omega\right)\\
&\quad + \frac{\mathrm{T}'_i - \mathrm{T}''_{i+1}}{2}\left(\omega\sin\omega + \frac{3}{2}\cos\omega\right) - \frac{\mathrm{M}'_i + \mathrm{M}''_{i+1}}{\rho}\sin\omega\\
&\quad + \frac{\varepsilon \mathrm{S} r^2}{\rho^3}\left[(x_i - x_{i+1})\cos\omega + (z_i + z_{i+1})\sin\omega - \rho(t_i - t_{i+1})\cos\omega\right] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les trois premières fournissent immédiatement $\mathrm{L}'_i - \mathrm{L}''_{i+1}$, $\mathrm{M}'_i - \mathrm{M}''_{i+1}$ et $\mathrm{T}'_i + \mathrm{T}'_{i+1}$; les trois dernières donnent $\mathrm{L}'_i + \mathrm{L}''_{i+1}$, $\mathrm{M}'_i + \mathrm{M}''_{i+1}$ et $\mathrm{T}'_i - \mathrm{T}''_{i+1}$.