

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

PAUL LE CORDIER

**Actions mécaniques produites par les aimants et par le  
magnétisme terrestre (suite)**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 3<sup>e</sup> série, tome 10 (1884), p. 281-328.*

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1884\\_3\\_10\\_281\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10_281_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Actions mécaniques produites par les aimants  
et par le magnétisme terrestre*

[SUITE (1)];

PAR M. PAUL LE CORDIER,

Docteur ès Sciences mathématiques.

§ X. — CALCUL DE QUELQUES ACTIONS ÉLECTRODYNAMIQUES.

*Notations.* — Soient, comme précédemment (n° 147) :

**173.**  $K$  un élément magnétique et  $k$  l'élément équivalent de solénoïde, d'intensité  $I$  et d'aire  $\lambda$ ;

$\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{c}$  leurs axes, qui coïncident par définition;

$K$  et  $k = I\lambda$  (25) leurs moments, égaux par définition;

$O$  leur centre commun de gravité, et  $x, y, z$  ses coordonnées rectangulaires;

**173'.**  $M'$  un système extérieur, rigide et invariable dans sa constitution physique, solidaire avec trois axes à gauche rectangulaires, auxquels sont rapportées les coordonnées fixes  $x, y, z$ , agissant successivement sur  $K$  et sur  $k$ , pouvant comprendre des courants fermés  $\mathfrak{c}'$ , à une ou plusieurs dimensions, des aimants  $A'$  et le magnétisme terrestre;

$\mathfrak{M}'$  le même système, quand le magnétisme terrestre n'en fait pas partie;

$D_{M'}$  (n° 40) la force directrice de  $M'$  au point  $O$ ;

$A_{M'}, B_{M'}, C_{M'}$  les composantes de cette force;

$V_{M'}$  le potentiel de  $M'$  au point  $O$ .

(1) Voir même Tome, p. 113.

*Cas simples de l'action du système M' sur un aimant extérieur.*

**174.** Le système  $M'$  exerce des actions identiques sur un aimant extérieur  $A$ , et sur le système équivalent  $\varepsilon$  d'éléments de solénoïdes.

Il suffit d'établir ce principe, en réduisant  $A$  et  $\varepsilon$  à un seul de leurs éléments  $K$  et  $k$  (n° 173), et  $M'$  soit à un courant fermé, soit à un aimant, soit au magnétisme terrestre. Or il a été démontré dans ces trois cas (nos 150, 159 et 172).

**175.** Il en résulte que l'on peut remplacer  $k$ ,  $k$  et  $\varrho$  (173) par  $K$ ,  $K$  et  $\mathfrak{a}$  dans les formules (124) et suivantes, appliquées au cas (n° 96) d'un champ de force uniforme.

L'axe  $\mathfrak{a}_0$  et le moment  $K_0$  d'un aimant  $A$  ont été définis (n° 164) par l'axe  $\varrho_0$  et le moment  $k_0$  du système équivalent  $\varepsilon$  d'éléments de solénoïdes, et ceux-ci par les équations (121). En observant que chaque aire d'un de ces courants se réduit à un seul élément  $\lambda$ , ayant pour normale positive  $\varrho$ , la première de ces trois équations devient, en faisant la substitution du n° 175,

$$(216) \quad \alpha_0 k_0 = \int \int \int_{\varpi} \mathfrak{I} \lambda \frac{\partial x}{\partial \varrho} = \int \int \int_{\varpi} k \frac{\partial x}{\partial \varrho} = \int \int \int_{\varpi} K \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{a}_0},$$

ou, plus explicitement, en décomposant le volume  $\varpi$  de l'aimant en éléments  $d\varpi$ , et étendant le signe  $\Sigma$  à tous les éléments magnétiques, très nombreux par hypothèse, contenus dans  $d\varpi$ ,

$$(217) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 k_0 = \int \int \int_{\varpi} \Sigma \left( K \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{a}_0} \right) d\varpi, \\ \beta_0 k_0 = \int \int \int_{\varpi} \Sigma \left( K \frac{\partial y}{\partial \mathfrak{a}_0} \right) d\varpi, \\ \gamma_0 k_0 = \int \int \int_{\varpi} \Sigma \left( K \frac{\partial z}{\partial \mathfrak{a}_0} \right) d\varpi. \end{array} \right.$$

L'intensité de l'aimantation, au point  $(x, y, z)$ , a été représentée (198), en grandeur, direction et sens, par une droite  $\Phi$ , issue de ce point, et ayant pour projections sur les axes

$$(218) \quad \alpha\Phi = \frac{\sum\left(K \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{A}_0}\right)}{d\varpi}, \quad \beta\Phi = \frac{\sum\left(K \frac{\partial y}{\partial \mathfrak{A}_0}\right)}{d\varpi}, \quad \gamma\Phi = \frac{\sum\left(K \frac{\partial z}{\partial \mathfrak{A}_0}\right)}{d\varpi}.$$

Introduisant dans (217) les notations (218), on définit (n° 164) l'axe  $\mathfrak{A}_0$  et le moment  $K_0$  de l'aimant par les trois équations

$$(219) \quad \alpha_0 K_0 = \frac{\int \int \int \alpha \Phi d\varpi}{\sigma}, \quad \beta_0 K_0 = \frac{\int \int \int \beta \Phi d\varpi}{\sigma}, \quad \gamma_0 K_0 = \frac{\int \int \int \gamma \Phi d\varpi}{\sigma}.$$

Les énergies du système  $\mathfrak{e}$  et de l'aimant, dans un champ de force uniforme, ont donc les expressions suivantes, dont la première est la formule (129),

$$(220) \quad W_{M, \mathfrak{e}} = -k_0 D_0 \cos(D_0, \mathfrak{L}_0),$$

$$(220') \quad W_{M, A} = -K_0 D_0 \cos(D_0, \mathfrak{A}_0),$$

et dans lesquelles  $D_0$  désigne la force directrice du système extérieur agissant  $M'$  au point  $M(x_0, y_0, z_0)$ , lié invariablement à l'aimant, et pris arbitrairement dans le champ uniforme.

On voit, par les équations (124) et (128) et par leurs analogues, que les actions identiques de  $M'$  sur  $\mathfrak{e}$  et sur  $A$  se réduisent à un couple, qui est dans le plan de l'angle  $(D_0, \mathfrak{L}_0)$  ou  $(D_0, \mathfrak{A}_0)$ , tend à diminuer cet angle, et a pour moment

$$(221) \quad -k_0 D_0 \sin(D_0, \mathfrak{L}_0) = -K_0 D_0 \sin(D_0, \mathfrak{A}_0).$$

**176.** Donc, lorsqu'un élément magnétique  $K$ , et l'élément équivalent  $k$  de solénoïde, sont assujettis uniquement à avoir leurs centres de gravité fixes, et que ceux-ci sont placés successivement en un même point  $O$ , sous l'action d'un même système extérieur  $M'$  (n° 173'), leurs axes  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{L}$  oscillent l'un et l'autre autour de la force directrice  $D$  de  $M'$  au point  $O$ .

Les formules (220) et (220') s'appliquent à un élément  $k$  de solénoïde et à un élément magnétique  $K$ , placés dans un champ de force quelconque. On a (n° 175)

$$(222) \quad W_{M',k} = k \frac{\partial V_{M'}}{\partial \xi} = -kD \cos(D, \xi),$$

$$(222') \quad W_{M',K} = K \frac{\partial V_{M'}}{\partial \lambda} = -KD \cos(D, \lambda).$$

*Usage de deux fluides fictifs pour la représentation de toutes les forces observables entre les courants, les aimants et le magnétisme terrestre.*

**177.** Soit  $s$  un solénoïde (n° 19), situé tout entier en dehors de  $M'$ , ayant pour axe une ligne  $L = np$ , dont l'axe  $\xi$  fait partie, allant de son pôle négatif  $n$  à son pôle positif  $p$ , et composé d'un système d'éléments  $k$  de solénoïde, d'axe  $L$ , d'intensité  $I$ , dont les aires planes  $\lambda$  partagent  $L$  en éléments  $\delta\xi$  assujettis à la relation

$$(223) \quad \frac{I\lambda}{\delta\xi} = \frac{k}{\delta\xi} = \text{une constante } \mu \quad (8 \text{ et } 25).$$

Un observateur traversé des pieds à la tête par l'un de ces courants, et regardant l'axe, aura le pôle positif à sa gauche. Soient les mêmes notations accentuées pour un second solénoïde  $s'$ .

**178.** La définition des pôles s'applique à un élément  $k$  de solénoïde : les pôles  $p$  et  $n$  sont le commencement et la fin de son axe  $\xi$ .

Soient deux fluides fictifs, l'un positif, appelé aussi *nord* ou *austral*; l'autre négatif, appelé aussi *sud* ou *boréal*, susceptibles d'avoir une ou plusieurs dimensions, ou de n'en avoir aucune, et, dans ce dernier cas, ils seront appelés *molécules fictives*. En plaçant aux pôles (n° 177) des deux solénoïdes

$$p, \quad n, \quad p', \quad n',$$

les molécules fictives qu'on appelle aussi *masses des pôles*,

$$(224) \quad \overset{+}{\mu} = \frac{I\lambda}{\delta\xi} = \frac{k}{\delta\xi}, \quad \overset{-}{\mu} = -\frac{k}{\delta\xi}, \quad \overset{+}{\mu'} = \frac{I'\lambda'}{\delta\xi'} = \frac{k'}{\delta\xi'}, \quad \overset{-}{\mu'} = -\frac{k'}{\delta\xi'},$$

surmontées ou privées de leurs signes, suivant qu'ils seront ou non déterminés, et appliquant l'équation (45) dans laquelle  $f=1$  (n° 36), au cas où trois des dimensions  $pp'$ ,  $pn'$ ,  $np'$ ,  $nn'$  sont infinies; on voit que la partie finie de l'énergie  $W_{s',s}$  devient

$$(225) \quad \lim W_{s',s} = W_{\mu',\mu},$$

en posant

$$(226) \quad W_{\mu',\mu} = W_{\mu,\mu'} = \frac{\mu\mu'}{r};$$

$\mu$  et  $\mu'$  désignant les masses des deux pôles dont la distance  $r$  est finie, et

$$(227) \quad W_{\mu',\mu} = W_{\mu,\mu'}$$

*l'énergie du système des deux molécules fictives  $\mu$  et  $\mu'$ .*

La somme des travaux virtuels élémentaires des actions mutuelles de ces deux solénoïdes indéfinis, en continuant de regarder leurs axes comme flexibles et inextensibles, est (63)

$$(228) \quad \lim [d\mathfrak{c}(s',s) + d\mathfrak{c}(s,s')] = -dW_{\mu',\mu} = \frac{\mu\mu'}{r^2} dr.$$

**179.** Donc l'action mutuelle de deux solénoïdes indéfinis, dont les axes sont flexibles et inextensibles, se réduit, en vertu des liaisons, et outre les forces qu'elles détruisent, à une action et à une réaction, égales et de sens contraires, attractives ou répulsives, entre leurs pôles. On représente cette action mutuelle, en disant que les masses  $\mu$  et  $\mu'$  de ces pôles agissent entre elles suivant les lois de Coulomb, c'est à-dire s'attirent ou se repoussent comme l'exprime la formule algébrique

$$(229) \quad \text{Répulsion}(\mu',\mu) = \text{répulsion}(\mu,\mu') = \frac{\mu\mu'}{r^2}.$$

Les trois autres actions mutuelles des pôles sont infiniment petites, et leurs moments, par rapport à un axe quelconque, sont des infini-

ment petits, dont l'ordre n'est pas moins élevé que l'inverse de leur distance.

La formule (45) devient, en y faisant  $\mu = 1$ , à l'aide de la notation (226),

$$(230) \quad W_{s',s} = W_{\overset{+}{\mu}, \overset{+}{\mu}} + W_{\overset{-}{\mu}, \overset{+}{\mu}} + W_{\overset{+}{\mu}, \overset{-}{\mu}} + W_{\overset{-}{\mu}, \overset{-}{\mu}} :$$

et l'on voit, par cette équation (230) ou par l'équation (46), que l'action mutuelle des deux solénoïdes, en supposant leurs axes flexibles et inextensibles, se réduit, en vertu de ces liaisons, et outre les actions qu'elles détruisent, aux quatre forces, dont deux sont attractives et deux répulsives, que représente la formule (229).

La partie bien définie  $\varphi_{k'}$  du potentiel d'un élément  $k'$  de solénoïde, au point  $(x, y, z)$  situé à la distance finie  $r$  du commencement  $(x', y', z')$  de son axe  $\xi$ , est donnée par l'équation (52). En y substituant (223), elle devient

$$(231) \quad \varphi_{k'} = \overset{+}{\mu}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi'} \delta \xi',$$

ce qui donne pour la partie bien définie, au même point, du potentiel d'un solénoïde  $s'$ ,

$$(232) \quad \varphi_{s'} = \overset{+}{\mu}' \int_0^{L'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi'} d\xi' = \frac{\overset{+}{\mu}'}{r_{p'}} + \frac{\overset{-}{\mu}'}{r_{n'}},$$

$r$ ,  $r_{p'}$  et  $r_{n'}$  désignant les distances du point extérieur  $(x, y, z)$  au point  $(x', y', z')$  de  $L'$ , et à ses pôles

$$p', \quad n',$$

où sont placées les molécules fictives (224)

$$(233) \quad \overset{+}{\mu}' = \frac{k'}{\delta \xi'}, \quad \overset{-}{\mu}' = -\frac{k'}{\delta \xi'}.$$

Si l'un des pôles est à l'infini, soient  $\mu'$  la masse de l'autre et  $r$  sa distance au point  $(x, y, z)$ . On appelle *potentiel de la molécule fictive*  $\mu'$ ,

au point  $(x, y, z)$ , qui en est à la distance  $r$ , l'expression déduite de (232)

$$(234) \quad \lim \varphi_{s'} = V_{\mu'} = \frac{\mu'}{r};$$

et (232) devient

$$(232') \quad \varphi_{s'} = V_{\mu'}^+ + V_{\mu'}^-.$$

Donc la partie bien définie du potentiel d'un solénoïde  $s'$  est la somme des molécules fictives (233), placées à ses pôles.

On a aussi, pour un élément  $k'$  de solénoïde, en lui appliquant la définition (178),

$$(232'') \quad \varphi_{k'} = V_{\mu'}^+ + V_{\mu'}^-.$$

En effet, en ajoutant

$$V_{\mu'}^- = \frac{\mu'}{r_n} \quad \text{et} \quad V_{\mu'}^+ = \frac{\mu'}{r_p} \quad \text{ou} \quad V_{\mu'}^+ = \mu' \left( \frac{1}{r_n} + \frac{\partial}{\partial \xi'} \frac{1}{r_n} \right),$$

on trouve

$$V_{\mu'}^+ + V_{\mu'}^- = \mu' \frac{\partial}{\partial \xi'} \frac{1}{r_n}$$

et, en substituant (231), on obtient (232'').

**180.** Les pôles d'un élément magnétique  $K'$  seront définis les pôles  $p'$  et  $n'$  (n° 178) de l'élément équivalent  $k'$  de solénoïde (n° 173).

L'équation (173)  $\varphi_{k'} = V_{K'}$  et l'équation (232'') donnent

$$(232''') \quad V_{K'} = V_{\mu'}^+ + V_{\mu'}^-.$$

Donc le potentiel d'un élément magnétique est la somme des potentiels des molécules fictives (233), placées à ses pôles.

**181.** En vertu de la définition 146 et des formules (232''), (232'''), le système fictif équivalent soit à un élément de solénoïde, soit à un

élément magnétique, sera défini celui des deux molécules fictives (233), placées à ses pôles.

**182.** Généralisant (234) et (226), on appelle *potentiel*, au point  $(x, y, z)$ , d'un système  $\mathfrak{M}'$  de molécules fictives, dont les masses  $\mu'_1, \mu'_2, \dots$  sont à des distances  $r_1, r_2, \dots$  du point  $(x, y, z)$ , la somme algébrique des potentiels de ces masses au même point

$$(234') \quad W_{\mathfrak{M}'} = \sum_{n'} V_{\mu_{n'}} = \sum_{n'} \frac{\mu_{n'}}{r_{n'}};$$

*énergie des actions mutuelles de deux systèmes  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$  de molécules fictives  $\mu_1, \mu_2, \dots$  et  $\mu'_1, \mu'_2, \dots$*  la somme des énergies de toutes les combinaisons d'une molécule de  $\mathfrak{M}$  avec une molécule de  $\mathfrak{M}'$ ,

$$(235) \quad W_{\mathfrak{M}', \mathfrak{M}} = W_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'} = \sum_n \sum_{n'} W_{\mu_{n'}, \mu_n} = \sum_n \mu_n \sum_{n'} \frac{\mu_{n'}}{r_{n,n}}$$

et, en substituant (234),

$$(235') \quad W_{\mathfrak{M}', \mathfrak{M}} = \sum_n \mu_n V_{\mathfrak{M}'}(x_n, y_n, z_n),$$

$x_n, y_n, z_n$  désignant les coordonnées de  $\mu_n$ .

Le travail des actions mutuelles des deux systèmes  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ , après des déplacements quelconques, est égal et de signe contraire à la variation de l'énergie (235)

$$(236) \quad \mathfrak{E}(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}) + \mathfrak{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}') = -\Delta W_{\mathfrak{M}', \mathfrak{M}}.$$

En effet, ce théorème se vérifie immédiatement, quand chaque système se réduit à une molécule, et se généralise, en vertu de la définition (235), par une double sommation.

**183.** L'énergie (235) représente la somme des travaux des actions mutuelles des deux systèmes  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$  quand toutes les distances  $r_{n,n'}$  deviennent infinies.

En effet, la valeur finale du dernier membre de (235) étant nulle, le second membre de (236) se réduit à la valeur initiale de  $W_{\partial\pi', \partial\pi}$ .

184. Si toutes les masses de  $\pi$  sont égales et de signes contraires deux à deux, l'énergie  $W_{\partial\pi', \partial\pi}$  est aussi la somme des travaux des actions mutuelles de toutes les combinaisons deux à deux d'une molécule de  $\pi$  avec une molécule de  $\pi'$ , lorsque  $\mu_1^+$  vient coïncider avec  $\mu_1^-, \mu_2^+$ , avec  $\mu_2^-$ , et ainsi de suite. Dans ce cas, le seul qui se présente dans la théorie du magnétisme,  $W_{\partial\pi', \partial\pi}$  peut être appelé *le travail extérieur de la neutralisation de  $\pi$* .

La démonstration s'aperçoit immédiatement.

*Action d'un solénoïde  $s'$  sur un élément de courant extérieur  $I ds$ , qui va de l'origine au point  $x = dx, y = dy, z = dz$ .*

185. Cette action se réduit (n° 25) à une force unique, appliquée à l'origine; et en substituant (232') dans (50), on trouve

$$(237) \quad \begin{cases} (s', I ds)_x = (\xi_{\mu'}^+ + \xi_{\mu'}^-) I ds, \\ (s', I ds)_y = (\eta_{\mu'}^+ + \eta_{\mu'}^-) I ds, \\ (s', I ds)_z = (\zeta_{\mu'}^+ + \zeta_{\mu'}^-) I ds, \end{cases}$$

en posant

$$(238) \quad \begin{cases} \xi_{\mu'} ds = \left( dz \frac{\partial}{\partial y} - dy \frac{\partial}{\partial z} \right) V_{\mu'}, \\ \eta_{\mu'} ds = \left( dx \frac{\partial}{\partial z} - dz \frac{\partial}{\partial x} \right) V_{\mu'}, \\ \zeta_{\mu'} ds = \left( dy \frac{\partial}{\partial x} - dx \frac{\partial}{\partial y} \right) V_{\mu'}. \end{cases}$$

Or l'équation  $V_{\mu'} = \frac{\mu'}{r}$ , dans laquelle

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} \quad \text{et} \quad x = y = z = 0,$$

donne

$$(239) \quad \frac{\partial V_{\mu'}}{\partial x} = \mu' \frac{x'}{r^3}, \quad \frac{\partial V_{\mu'}}{\partial y} = \mu' \frac{y'}{r^3}, \quad \frac{\partial V_{\mu'}}{\partial z} = \mu' \frac{z'}{r^3};$$

d'où

$$(240) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_{\mu'}^+ ds = \mu' \frac{y'_p dz - z'_p dy}{r_p^3}, \\ \eta_{\mu'}^+ ds = \mu' \frac{z'_p dx - x'_p dz}{r_p^3}, \\ \zeta_{\mu'}^+ ds = \mu' \frac{x'_p dy - y'_p dx}{r_p^3}. \end{array} \right.$$

$$(240') \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_{\mu'}^- ds = \mu' \frac{y'_n dz - z'_n dy}{r_n^3}, \\ \eta_{\mu'}^- ds = \mu' \frac{z'_n dx - x'_n dz}{r_n^3}, \\ \zeta_{\mu'}^- ds = \mu' \frac{x'_n dy - y'_n dx}{r_n^3}. \end{array} \right.$$

**186.** L'action du solénoïde  $s'$  sur  $I ds$  est donc la résultante des deux forces appliquées à l'origine

$$(241) \quad f_{\mu'}^+ I ds \quad \text{et} \quad f_{\mu'}^- I ds,$$

ayant pour composantes (240 et 240')

$$(242) \quad \xi_{\mu'}^+ I ds, \quad \eta_{\mu'}^+ I ds, \quad \zeta_{\mu'}^+ I ds \quad \text{et} \quad \xi_{\mu'}^- I ds, \quad \eta_{\mu'}^- I ds, \quad \zeta_{\mu'}^- I ds.$$

En dirigeant les axes de manière que l'on ait (*fig. 14*)

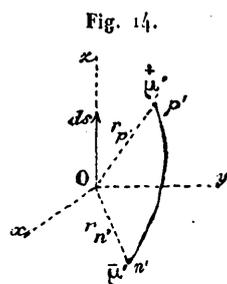
$$dx = dy = 0, \quad dz = ds, \quad x'_p = 0, \quad y'_p > 0, \quad \text{d'où} \quad y'_p = r_p \sin(r_p, ds),$$

les équations (240) donnent

$$(243) \quad \xi_{\mu'}^+ = \mu' \frac{y'_p}{r_p^3}, \quad \eta_{\mu'}^+ = 0, \quad \zeta_{\mu'}^+ = 0;$$

d'où

$$(244) \quad \xi_{\mu'}^+ > 0, \quad f_{\mu'}^+ = \xi_{\mu'}^+ = \frac{\mu'}{r_p^2} \sin(r_p', ds).$$



Ainsi la force  $f_{\mu'}^+$  est dirigée suivant l'axe des  $x$  positifs. Donc :

**187.** La force  $f_{\mu'}^+$  est perpendiculaire au plan passant par  $r_p'$  et par  $ds$  : elle se trouve à la droite d'un observateur traversé des pieds à la tête par le courant, et regardant le pôle positif  $p'$ .

Si le courant du solénoïde est interverti, ses pôles et son potentiel (232') changent de signes, ainsi que les composantes (238). Donc l'énoncé **187** donne lieu au suivant.

**187'.** La force  $f_{\mu'}^-$  est perpendiculaire au plan passant par  $r_{n'}$  et par  $ds$  ; elle se trouve à la gauche d'un observateur traversé des pieds à la tête par le courant, et regardant le pôle négatif  $n'$ . Elle a pour expression

$$(244') \quad f_{\mu'}^- = \frac{\mu'}{r_n^2} \sin(r_n', ds).$$

Si l'un des pôles du solénoïde  $s'$  est à l'infini, son potentiel se réduit (234) à celui de l'autre pôle  $\mu'$ , et son action sur  $I ds$  à l'une des deux forces (241). L'action fictive de  $\mu'$ , exprimée par l'un des groupes de formules (240), (240'), représente donc cette action

réelle. Cette convention permet d'écrire

$$(240'') \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mu', I ds)_x = I \mu' \frac{\gamma' dz - z' dy}{r^3}, \\ (\mu', I ds)_y = I \mu' \frac{z' dx - x' dz}{r^3}, \\ (\mu', I ds)_z = I \mu' \frac{x' dy - y' dx}{r^3}, \end{array} \right.$$

et de dire que l'action de  $\mu'$  sur  $I ds$  satisfait, suivant le signe de  $\mu'$ , à l'un des énoncés 187, 187'.

188. Si les fluides fictifs existaient, il faudrait les appeler, suivant l'usage, *fluides magnétiques*, et l'action réelle de la *molécule magnétique*  $m'$  sur  $I ds$  se réduirait nécessairement à celle que donne (240'') ou (50)

$$(240''') \quad \left\{ \begin{array}{l} (m', I ds)_x = I \left( \frac{\partial V_{m'}}{\partial y} dz - \frac{\partial V_{m'}}{\partial z} dy \right), \\ (m', I ds)_y = I \left( \frac{\partial V_{m'}}{\partial z} dx - \frac{\partial V_{m'}}{\partial x} dz \right), \\ (m', I ds)_z = I \left( \frac{\partial V_{m'}}{\partial x} dy - \frac{\partial V_{m'}}{\partial y} dx \right), \end{array} \right.$$

en posant (234)

$$(245) \quad V_{m'} = \frac{m'}{r}.$$

En effet, une ligne quelconque  $L'$ , qui va de  $m'$  à l'infini, étant partagée en éléments égaux  $\delta \ell$ , on obtiendrait un *filet magnétique indéfini*, en plaçant les deux molécules magnétiques  $-m'$  et  $+m'$  au commencement et à la fin de chaque élément, et un solénoïde indéfini équivalent, en remplaçant chaque *couple magnétique*, ainsi construit sur un élément  $\delta \ell$ , par l'élément de solénoïde équivalent (n° 181). Or l'action du solénoïde sur  $I ds$  se réduirait à l'action fictive de son pôle  $\mu'$ , représentée par les équations (240''). Tout revient donc à démontrer que l'action identique du filet magnétique se réduirait à celle

de  $m'$ . Or cela résulte de ce que l'action sur  $I ds$  des deux molécules magnétiques  $+m$  et  $-m$  superposées en un point de division, équivalente (n° 181) à celle d'un élément de solénoïde dont le moment est nul, le serait aussi, et de ce que l'action du pôle situé à l'infini serait infiniment petite.

*Action du système  $M'$  (n° 173) sur un solénoïde extérieur  $s$ , dont l'axe  $L$  est flexible et inextensible.*

189. Cette action se réduit, en vertu des liaisons, et outre les forces qu'elles détruisent, à deux forces  $(M', \mu^+)$ ,  $(M', \mu^-)$ , appliquées aux pôles de  $s$ , et proportionnelles à leurs masses  $\mu^+$ ,  $\mu^-$ . Pour  $\mu^+ = 1$ , la première est la force directrice  $D_p$  de  $M'$  au pôle positif  $p$  (n° 177), et la seconde est égale et opposée à la force directrice  $D_n$  de  $M'$  au pôle négatif  $n$ .

En effet, en substituant (224)  $k = \mu^+ \delta \mathcal{L}$  dans (26), on a

$$(246) \quad W_{M',k} = \mu^+ \frac{\partial V_{M'}}{\partial \mathcal{L}} \delta \mathcal{L},$$

d'où résulte, pour l'énergie de l'action de  $M'$  sur  $s$ ,

$$(247) \quad W_{M',s} = \mu^+ \int_0^L \frac{\partial V_{M'}}{\partial \mathcal{L}} d\mathcal{L} = \mu^+ (V_p - V_n),$$

$V_p$  et  $V_n$  désignant les valeurs du potentiel de  $M'$  aux pôles  $p$  et  $n$ , liées entre elles, en cas d'ambiguïté, par la condition que l'une se déduise de l'autre, quand on suit la variation de  $\mathcal{V}$  sans discontinuité en parcourant l'axe  $L$ ; et pour le travail virtuel élémentaire de cette action

$$(248) \quad \delta \mathcal{E} = - \delta W_{M',s} = \mu^+ (\delta V_n - \delta V_p).$$

Mais  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  étant (n° 40) les composantes de  $D_p$ , les équations (23) donnent  $A_p$  pour  $-\frac{\partial V_p}{\partial x_p}$ ; et, pour  $\delta V_p$ ,  $-\frac{\partial V_p}{\partial x_p} \delta x_p - \dots$ ,

ou  $\Lambda_p \delta x_p + \dots$ , ou  $\delta \varepsilon D_p$ ; et (248) devient

$$(248') \quad \delta \varepsilon = \overset{+}{\mu} (\delta \varepsilon D_p - \delta \varepsilon D_n).$$

Donc l'action de  $M'$  sur  $s$  se réduit aux deux forces

$$(248'') \quad \overset{+}{\mu} D_p, \quad \overset{-}{\mu} D_n,$$

appliquées aux pôles

$$p, \quad n,$$

dans le sens  $D_p$  et en sens contraire de  $D_n$ .

ce qui démontre l'énoncé 189.

*Définition de la partie bien définie  $\varphi_{\mathcal{N}'}$  du potentiel du système  $\mathcal{N}'$  (n° 166) en un point extérieur  $(x, y, z)$ .*

190. La forme la plus générale du potentiel du système  $\mathcal{N}'$ , au point  $(x, y, z)$ , est (83)

$$V_{\mathcal{N}'} = \Sigma V_{\ominus'} + \Sigma V_{A'} + \text{une constante arbitraire}$$

ou

$$V_{\mathcal{N}'} = \Sigma \varphi_{\ominus'} + \Sigma V_{A'} + \text{une autre constante arbitraire.}$$

En donnant à cette dernière constante la valeur zéro, on a la fonction

$$(249) \quad \varphi_{\mathcal{N}'} = \Sigma \varphi_{\ominus'} + \Sigma V_{A'},$$

qui sera, par définition, *la partie bien définie du potentiel du système  $\mathcal{N}'$ .*

190'. On peut donner pour seconde définition de  $\varphi_{\mathcal{N}'}$  le *potentiel du système de molécules fictives  $\mathcal{N}'_0$  équivalent à  $\mathcal{N}'$* , c'est-à-dire de la distribution des fluides fictifs obtenue en décomposant chaque courant fermé en éléments de solénoïdes, et chaque aimant en éléments magnétiques; remplaçant chaque élément magnétique par l'élément équivalent de solénoïde, puis tous ces éléments de solénoïdes, de l'une et de l'autre catégorie, par autant de couples de molécules fictives, ayant les masses et les positions déterminées par les formules (224), et l'équa-

tion (249) équivaut à la suivante :

$$(250) \quad \varphi_{\mathcal{N}'} = V_{\mathcal{N}'_0}.$$

*Définition de l'énergie des actions mutuelles entre un système  $\mathcal{N}'$  de courants fermés permanents et d'aimants dont le magnétisme est rigide, et une molécule fictive de masse  $\mu$ , placée au point  $(x, y, z)$ .*

**191.** En supposant que tous les points de l'axe L du solénoïde  $s$ , auquel s'applique la formule (247), soient extérieurs au système  $\mathcal{N}'$ , et aux nappes de surface fermant les ouvertures annulaires que peut présenter ce système, cette formule peut s'écrire

$$(251) \quad W_{\mathcal{N}',s} = \mu^+ [\varphi_{\mathcal{N}'}(p) - \varphi_{\mathcal{N}'}(n)].$$

Si le pôle  $n$  est seul à l'infini,  $V_{\mathcal{N}'_0}(n)$  étant infiniment petit,  $\varphi_{\mathcal{N}'}(n)$  l'est aussi (250), et (251) devient

$$\lim W_{\mathcal{N}',s} = \mu^+ \varphi_{\mathcal{N}'}(p).$$

Pareillement, si  $p$  est seul à l'infini,

$$\lim W_{\mathcal{N}',s} = \mu^- \varphi_{\mathcal{N}'}(n).$$

On comprend ces deux cas dans une seule formule, dans laquelle on suppose que le pôle  $\mu$  est seul à distance finie, au point  $(x, y, z)$  :

$$(252) \quad \lim W_{\mathcal{N}',s} = \mu \varphi_{\mathcal{N}'}(x, y, z).$$

C'est pourquoi on est convenu d'appeler *énergie des actions mutuelles entre le système  $\mathcal{N}'$  et la molécule fictive  $\mu$*  la fonction

$$(253) \quad W_{\mathcal{N}',\mu} = \mu \varphi_{\mathcal{N}'};$$

et alors (252) devient

$$(252') \quad \lim W_{\mathcal{N}',s} = W_{\mathcal{N}',\mu}.$$

*Quelques exemples de substitution d'un système de molécules fictives  
aux courants fermés et aux aimants.*

**192.** L'équation (247) devient, en y introduisant la notation (253),

$$(254) \quad W_{\partial\pi',s} = W_{\partial\pi',\mu^+} + W_{\partial\pi',\mu^-};$$

mais il faut supposer, dans (252') et (254), que l'axe L ne rencontre ni  $\pi'$  ni les nappes fermant les ouvertures annulaires des courants.

La formule (254) s'applique à un élément de solénoïde

$$(255) \quad W_{\partial\pi',k} = W_{\partial\pi',\mu^+} + W_{\partial\pi',\mu^-}.$$

En effet, en ajoutant

$$W_{\partial\pi',\mu^-} = \bar{\mu} \varphi_{\partial\pi'}(n)$$

et

$$W_{\partial\pi',\mu^+} = \mu^+ \varphi_{\partial\pi'}(p) = \mu^+ \left[ \varphi_{\partial\pi'}(n) + \frac{\partial \varphi_{\partial\pi'}(n)}{\partial \varrho} \delta \varrho \right],$$

on trouve

$$W_{\partial\pi',\mu^+} + W_{\partial\pi',\mu^-} = \mu^+ \frac{\partial \varphi_{\partial\pi'}(n)}{\partial \varrho} \delta \varrho,$$

et, en substituant (246), on obtient (255).

**193.** L'énergie (246) de l'action de  $M'$  sur  $k$  exprime le travail, relatif à trois axes fixés à  $M'$ , de l'action de  $M'$  sur un pôle de  $k$ , parcourant  $\delta \varrho$ .

Cela résulte immédiatement de l'équation (255) et du n° 184, si le magnétisme terrestre ne fait pas partie de  $M'$ . S'il en fait partie, l'expression (224)  $k = \mu^+ \delta \varrho$ , substituée dans (222), donne

$$W_{M',k} = - \mu^+ D \cos(D, \varrho) \delta \varrho,$$

et, puisque  $M'$  produit (248'') sur  $\mu^+$  la force  $F = \mu^+ D$ ,

$$(256) \quad W_{M',k} = - F \cos(F, \varrho) \delta \varrho, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

**194.** L'énergie (247) représente le travail, relatif à trois axes fixés à

$M'$ , de l'action  $F$  de  $M'$  sur un pôle de solénoïde  $s$ , qui en parcourrait l'axe  $\xi$  dans toute sa longueur.

Car, en intégrant (256) de  $\xi = 0$  à  $\xi = L$ , on trouve

$$(257) \quad W_{\mathcal{M}',s} = - \int_0^L F \cos(F, \xi) d\xi.$$

**195.** Les actions du système fixe  $\mathcal{M}'$  (n° 173') et du système équivalent  $\mathcal{M}'_0$  (n° 190') sur un élément  $I ds$  de courant linéaire, fixe et permanent, sont identiques.

Car on a vu (240'') qu'elles se calculent par les mêmes formules (50), dans lesquelles il faut introduire successivement les deux potentiels (250).

**196.** Soient  $k_0$  et  $k'_0$  les systèmes fictifs qui équivalent à deux éléments  $k, k'$  de solénoïdes, et se composent chacun de deux molécules fictives  $\overset{+}{\mu}$  et  $\bar{\mu}$ ,  $\overset{+}{\mu}'$  et  $\bar{\mu}'$ . Les quatre actions produites par  $k'$  sur  $k$ , par  $k'_0$  sur  $k$ , par  $k'$  sur  $k_0$  et par  $k'_0$  sur  $k_0$ , sont identiques.

**197.** Les actions mutuelles entre  $k'_0$  et  $k$  sont de nature à se faire équilibre sur un système rigide.

Les démonstrations de ces deux énoncés se déduisent facilement des formules qui précèdent.

**198.** Toutes les actions observables qu'un aimant  $A$  et le système équivalent  $\mathcal{E}$ , d'éléments de solénoïdes éprouvent et produisent sont identiques.

Cela été démontré (n° 174) pour les actions que les deux systèmes reçoivent, et cela résulte, pour celles qu'ils produisent, de ce qu'elles se calculent par leurs potentiels  $\Sigma V_K$  et  $\Sigma \varphi_k$ , dont l'égalité résulte de la relation  $V_K = \varphi_k$  (173).

Appliquant ce résultat au cas particulier d'un élément magnétique; remplaçant, dans l'énoncé 196, les éléments  $k$  et  $k'$  de solénoïdes par les éléments magnétiques équivalents  $K$  et  $K'$ ; appelant  $K_0$  et  $K'_0$  les systèmes fictifs équivalents à ces éléments magnétiques, et étendant la propriété 197 aux éléments magnétiques, on obtient le principe suivant :

**199.** Toutes les actions mutuelles entre  $K'$  et  $K$ , entre  $K'_0$  et  $K$ , entre  $K'$  et  $K_0$ , enfin entre  $K'_0$  et  $K_0$ , sont identiques, et susceptibles de se faire équilibre deux à deux sur un système rigide.

*Substitution, faite par Ampère, d'un feuillet magnétique à un courant fermé  $\mathfrak{E}$ , d'intensité constante  $I$  et de longueur  $S$ .*

**200.** Soit  $\Lambda_n$  une aire assujettie uniquement à la condition que  $S$  en constitue le périmètre tout entier. En élevant, en chaque point de cette aire, une normale positive infiniment petite  $np = \delta \varrho$ , de longueur constante, ou variable suivant une loi continue, on obtient une aire  $\Lambda_p$ , lieu des points  $p$ . On est convenu qu'un observateur, traversé des pieds à la tête par le courant, verrait  $\delta \varrho$  à sa gauche. En fixant sur  $\Lambda_n$  et  $\Lambda_p$  deux couches de fluides fictifs, l'une négative, l'autre positive, de manière que la masse totale, interceptée par tout canal ayant pour génératrices des lignes  $np$ , soit nulle, et que la densité de surface, correspondant à une épaisseur  $\delta \varrho$ , ait pour valeur absolue

$$(258) \quad \rho = \frac{I}{\delta \varrho},$$

on obtient une distribution de matière fictive, appelée *feuillet magnétique équivalent au courant  $\mathfrak{E}$* , équivalente au courant pour toute action observable, qu'il peut produire ou recevoir, lorsque le feuillet et la ligne  $S$  sont rigides.

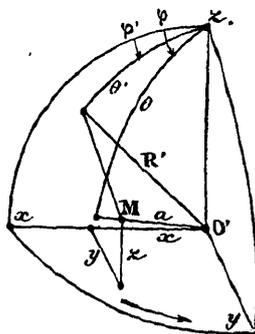
En effet, on peut, sans changer aucune de ces actions, décomposer  $\mathfrak{E}$  en éléments de solénoïdes, de dimensions infiniment petites par rapport à  $\delta \varrho$ , substituer à chaque élément  $k$ , d'aire  $d\Lambda_n$ , le système équivalent  $k_0$  (n° 196), en plaçant  $\bar{\mu}$  sur  $\Lambda_n$  et  $\mu^+$  sur  $\Lambda_p$ , puis répandre uniformément ces deux masses fictives sur les sections droites  $d\Lambda_n, d\Lambda_p$  d'un canal orthogonal. On obtient ainsi les deux couches de l'énoncé **200**, satisfaisant, pour chaque élément de solénoïde, à la relation (224)  $\mu^+ = \frac{k}{\delta \varrho}$ , qui devient (258), quand on remplace  $\mu^+$  par  $\rho d\Lambda_p$  et  $k$  par  $I d\Lambda_n$ .

§ XI. — SUR CERTAINES BOBINES QUI JOUISSENT APPROXIMATIVEMENT OU RIGOREUSEMENT DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ÉLÉMENTS DE SOLÉNOÏDES.

*Bobine sphérique.*

201. Soit  $\mathcal{E}'$  un système rigide de courants fermés permanents, d'égale intensité  $I'$ , parcourant dans le même sens  $xy$  les intersections d'une sphère de rayon  $R'$  avec des plans parallèles, équidistants et infiniment

Fig. 15.



voisins deux à deux. Soient  $O'$  son centre, pris pour origine d'un système rectangulaire d'axes à gauche (*fig. 15*), et  $\delta z'$  la distance de deux plans consécutifs.

Appliquant la définition 98, on voit que  $O'z$  est l'axe

$$(259) \quad \mathcal{L}'_0$$

de cette bobine, et qu'en désignant son volume par  $u'$ , son moment est

$$(260) \quad k'_0 = \frac{I'}{\delta z'} u' = \frac{4\pi I' R'^3}{3\delta z'}$$

A cette bobine sphérique  $\mathcal{E}'$  correspond (n° 98) l'élément de solénoïde

$$(261) \quad k'_0,$$

d'intensité infinie, ayant aussi pour centre  $O'$ , pour moment  $k'_0$  (260),

et pour axe  $\xi'_0$  (259). On va voir qu'il équivaut (n° 146) à la bobine sphérique dans tout l'espace extérieur

$$(262) \quad \varphi_{\mathcal{E}'} = \varphi_{k'_0}.$$

En effet, la bobine sphérique est décomposable, par la construction d'Ampère (n° 55), en éléments de solénoïdes  $k'$ , de moments magnétiques  $k'$ , et, par suite, l'énergie de l'action qu'elle éprouve, dans le champ de force d'un système extérieur  $M$ , pouvant comprendre des courants fermés, des aimants et le magnétisme terrestre, est (26)

$$W_{M, \mathcal{E}'} = \Sigma k' \frac{\partial V_M}{\partial z},$$

ou en désignant par  $\Lambda'$  la somme des aires de tous les courants circulaires, d'intensité  $I'$ , qui constituent la bobine  $\mathcal{E}'$ , de volume  $u'$ ,

$$\begin{aligned} W_{M, \mathcal{E}'} &= \Sigma I' d\Lambda' \frac{\partial V_M}{\partial z} = \frac{I'}{\delta z'} \sum \frac{\partial V_M}{\partial z} d\Lambda' \delta z' \\ &= \frac{I'}{\delta z'} \underbrace{\int \int \int \frac{\partial V_M}{\partial z} du'}_u = \frac{I'}{\delta z'} \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\int \int \int V_M du'}_u : \end{aligned}$$

et, comme l'équation  $\int \int \int \frac{\partial V_M}{\partial z} du' = u' V_M(O')$  exprime une propriété fondamentale du potentiel,  $V_M(O')$  désignant la valeur de  $V_M$  au centre  $O'$  de la sphère,

$$W_{M, \mathcal{E}'} = \frac{I'}{\delta z'} u' \frac{\partial V_M(O')}{\partial \xi'_0} = k'_0 \frac{\partial V_M(O')}{\partial \xi'_0};$$

d'où (26)

$$(263) \quad W_{M, \mathcal{E}'} = W_{M, k'_0}.$$

**202.** Tout système  $M'$ , extérieur à la bobine sphérique (n° 201), agit donc sur elle identiquement comme sur l'élément fictif  $k'_0$  (261) de solénoïde.

Si le magnétisme terrestre ne fait pas partie de  $M$ , l'équation (263) peut s'écrire

$$W_{\mathcal{E}', M} = W_{K'_0, M}.$$

Réduisant  $M$  à un solénoïde indéfini  $s$ , plaçant le pôle négatif à l'infini, et le pôle  $\mu = +1$  au point  $(x, y, z)$ , arbitraire en dehors de la bobine 201, on peut (252) remplacer, dans la dernière équation,  $W_{\mathcal{E}', M}$  par  $\varphi_{\mathcal{E}'}(x, y, z)$ , et  $W_{K'_0, M}$  par  $\varphi_{K'_0}(x, y, z)$ ; ce qui démontre (262).

Mais ce calcul ne donne pas le potentiel intérieur de la bobine. Soit  $M_0M$  une ligne arbitraire, dont l'arc  $l$  se termine au point  $M$  (fig. 15),

$$(264) \quad x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = a \sin \theta \sin \varphi, \quad z = a \cos \theta,$$

et dont l'extrémité  $M_0$  est à l'infini, du côté des arcs négatifs. La partie bien définie du potentiel de la bobine  $\mathcal{E}'$  au point  $M$  est (76)

$$(265) \quad \varphi = - \int_{-\infty}^z \left( A, \frac{\partial x_1}{\partial l_1} + B, \frac{\partial y_1}{\partial l_1} + C, \frac{\partial z_1}{\partial l_1} \right) dl_1,$$

en posant

$$(266) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ B = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ C = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}, \end{array} \right. \quad (111)$$

et

$$(267) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{I'}{\delta z'} \int_{-R}^R dz' \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial \varphi'} d\varphi', \\ G = \frac{I'}{\delta z'} \int_{-R}^R dz' \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial y'}{\partial \varphi'} d\varphi', \\ H = \frac{I'}{\delta z'} \int_{-R}^R dz' \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial z'}{\partial \varphi'} d\varphi' \end{array} \right. \quad (110)$$

Substituant

$$(268) \quad \begin{cases} x' = R' \sin \theta' \cos \varphi', \\ y' = R' \sin \theta' \sin \varphi', \\ z' = R' \cos \theta', \\ r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}. \end{cases}$$

on trouve

$$(269) \quad \begin{cases} F = -\frac{1'R'^2}{\delta z'} \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta' \sin \varphi'}{r} d\varphi', \\ G = \frac{1'R'^2}{\delta z'} \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta' \cos \varphi'}{r} d\varphi', \\ H = 0. \end{cases}$$

Or  $\frac{1}{r}$  est développable en série convergente sous l'une des deux formes suivantes (*Calcul intégral* de M. Bertrand, p. 543) :

$$(270) \quad \text{Pour } a < R' \dots \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R'} \left( P'_0 + P'_1 \frac{a}{R'} + P'_2 \frac{a^2}{R'^2} + \dots + P'_n \frac{a^n}{R'^n} + \dots \right),$$

$$(271) \quad \text{Pour } a > R' \dots \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{a} \left( P'_0 + P'_1 \frac{R'}{a} + P'_2 \frac{R'^2}{a^2} + \dots + P'_n \frac{R'^n}{a^n} + \dots \right);$$

et la définition la plus générale d'une fonction  $Y_n$  étant (même volume, p. 541) toute fonction rationnelle, entière et du degré  $n$ , de  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta \cos \varphi$  et  $\sin \theta \sin \varphi$ , qui satisfait à l'équation

$$(272) \quad \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1) Y_n = 0,$$

on voit que les deux fonctions  $\sin \theta \sin \varphi$  et  $\sin \theta \cos \varphi$  satisfont à la définition de  $Y_1$ . En désignant par  $Y'_n$  ce que devient  $Y_n$ , quand on accentue  $\theta$  et  $\varphi$ , on a (équation 60, p. 543 du même volume), pour  $n \geq n'$ ,

$$(273) \quad 0 = \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} Y'_n P'_n d\varphi'.$$

Donc, dans les deux développements de  $\frac{1}{r}$  en série, les termes en  $P'_1$

sont les seuls dont les intégrales doubles ne s'annulent pas. On les calcule par la formule (59) de la page 543 du même volume :

$$(274) \quad \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} Y' P' d\varphi' = \frac{4}{3} \pi Y_1;$$

et les fonctions (269) deviennent, en substituant (268),

$$(275) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } a < R' \dots \quad F = -\frac{4}{3} \pi \frac{I'}{\delta z'}, \\ \quad \quad \quad \quad \quad G = \frac{4}{3} \pi \frac{I'}{\delta z'} x, \\ \quad \quad \quad \quad \quad H = 0, \end{array} \right.$$

$$(276) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } a > R' \dots \quad F = -\frac{4}{3} \pi \frac{I'}{\delta z'} R'^3 \frac{y}{a^3} = \frac{4}{3} \pi R'^3 \frac{I'}{\delta z'} \frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial y}, \\ \quad \quad \quad \quad \quad G = \frac{4}{3} \pi \frac{I'}{\delta z'} R'^3 \frac{x}{a^3} = -\frac{4}{3} \pi R'^3 \frac{I'}{\delta z'} \frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial x}, \\ \quad \quad \quad \quad \quad H = 0. \end{array} \right.$$

Remplaçant  $\frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial y^2}$  par  $-\frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial z^2}$ , on trouve, en substituant (275) et (276) dans (270) et (271),

$$(277) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } a < R' \dots \quad A = 0, \\ \quad \quad \quad \quad \quad B = 0, \\ \quad \quad \quad \quad \quad C = \frac{8}{3} \pi \frac{I'}{\delta z'}, \end{array} \right.$$

$$(278) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } a > R' \dots \quad A = \frac{4}{3} \pi R'^3 \frac{I'}{\delta z'} \frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial x \partial z}, \\ \quad \quad \quad \quad \quad B = \frac{4}{3} \pi R'^3 \frac{I'}{\delta z'} \frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial y \partial z}, \\ \quad \quad \quad \quad \quad C = \frac{4}{3} \pi R'^3 \frac{I'}{\delta z'} \frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial z^2}; \end{array} \right.$$



**203.** Une bobine sphérique agit à l'extérieur comme le système de tous les éléments de solénoïdes dans lesquels elle est décomposable, transportés parallèlement à eux-mêmes en son centre O.

En effet,  $\Sigma d\Lambda'$  désignant l'aire plane de l'un des courants circulaires de la bobine, et  $\Sigma\Sigma d\Lambda'$  la somme de toutes ces aires, (260) peut s'écrire

$$k'_0 = \frac{I'}{\delta z'} \int_{-R}^R dz' \Sigma d\Lambda' = \frac{I'}{\delta z'} \int_{-R}^R \delta z' \Sigma d\Lambda' = I' \Sigma\Sigma d\Lambda' = \Sigma\Sigma I' d\Lambda'.$$

Or  $\Sigma\Sigma I' d\Lambda'$  est la somme des moments de tous les éléments de solénoïdes transportés. Donc le second membre de (283) est la somme des parties bien définies de leurs potentiels, calculées après le transport; ce qui démontre **203**.

**204.** Deux bobines sphériques concentriques, de révolution autour du même axe Oz, étant parcourues en sens contraires par deux courants, on peut y régler le rapport des intensités de manière à rendre l'action du système nulle, soit à l'intérieur de la plus petite, soit à l'extérieur de la plus grande.

Il suffit de vérifier qu'en distinguant les deux bobines par les indices 1 et 2, l'action du système est nulle à l'intérieur de la plus petite pour

$$(284). \quad \frac{I'_1}{\delta z'_1} = \frac{I'_2}{\delta z'_2},$$

et à l'extérieur de la plus grande pour

$$(285) \quad R_1'^3 \frac{I'_1}{\delta z'_1} = R_2'^3 \frac{I'_2}{\delta z'_2}.$$

Les propriétés qui précèdent montrent que la bobine sphérique serait un instrument de Physique très utile, si la construction précise n'en offrait des difficultés qui n'ont pas été surmontées. C'est pourquoi on la remplace par des systèmes de bobines dont les sections méri-

diennes ont de petites dimensions par rapport à leurs rayons moyens, et ceux-ci appartiennent à des parallèles d'une même sphère. Les mêmes propriétés, qu'il serait facile de démontrer expérimentalement, permettraient d'établir, presque sans calcul, toutes les lois des forces électrodynamiques observables.

L'énoncé (204), s'il était démontré par l'expérience pour l'espace extérieur, ferait voir *a priori* qu'une bobine sphérique produit à l'extérieur l'action d'un élément de solénoïde de même axe, placé en son centre, et l'on pourrait ensuite en observer directement les lois. Le fait connu de l'aimantation uniforme d'une sphère de fer doux, placée dans un champ de force uniforme, offrirait un moyen de fonder la théorie complète du magnétisme et de l'électromagnétisme sur la neutralisation, à l'extérieur de la plus grande bobine de l'énoncé 204, de l'action des deux bobines et d'une sphère concentrique de fer doux, contenue dans la plus petite.

**205.** On définit l'*aimantation uniforme*, celle dont l'intensité  $\Phi$  (198) est constante en grandeur et en direction.

Dans un aimant uniforme, de volume  $\varpi$ , l'axe magnétique  $\mathfrak{A}$  a la direction de l'aimantation, et le moment magnétique est

$$(286) \quad K_0 = \Phi \varpi.$$

On le voit par les formules (219), en donnant à l'axe des  $z$  la direction de l'aimantation.

**206.** Toute action observable entre une sphère magnétique  $A$ , pleine ou creuse, aimantée uniformément, et un système extérieur  $M'$ , est la même que si tous les éléments magnétiques de la sphère étaient transportés en son centre, parallèlement à eux-mêmes.

On le démontre sans difficulté, soit directement, soit par les formules précédentes.

**207.** Toute action observable entre une sphère pleine  $A$ , aimantée uniformément avec l'intensité  $\Phi$ , et un système extérieur  $M'$ , est la même que si la sphère était remplacée par une bobine sphérique  $\ominus$ , de

même rayon, de même centre et de même axe, satisfaisant à la relation

$$(287) \quad \Phi = \frac{I}{\delta z}.$$

Car les énergies  $W_{M',\ominus}$  et  $W_{M',A}$  (220) et (220') s'identifient en même temps que les moments  $k_0$ ,  $K_0$ , et les axes  $\xi$  et  $\mathfrak{A}$ ; or l'égalité des expressions  $k_0$  (260) et  $K_0$  (286) résulte de l'équation (287).

**208.** Toute action observable entre une sphère magnétique creuse, aimantée uniformément avec l'intensité  $\Phi$ , et un système  $M'$ , dont chaque point est à son extérieur ou dans sa cavité, est la même que si la sphère était remplacée par le système des deux bobines sphériques **204**, coïncidant avec ses deux surfaces, dont la plus grande aurait son axe dans la direction de l'aimantation, et qui seraient assujetties à la relation (284)

$$(288) \quad \frac{I'_1}{\delta z'_1} = \frac{I'_2}{\delta z'_2} = \Phi'.$$

La démonstration n'offre aucune difficulté.

**209.** Donc une sphère creuse, aimantée uniformément, éprouve et produit, en présence d'un système intérieur, une action nulle; et en présence d'un système extérieur, les mêmes actions que si tous ses éléments magnétiques étaient transportés en son centre, parallèlement à eux-mêmes.

**210.** Une sphère magnétique, pleine ou creuse, aimantée uniformément, séparée en deux parties par une fente sphérique concentrique et infiniment mince, produit en un point de cette fente la même action que la partie intérieure.

Car l'action de la partie extérieure (n° 209) est nulle.

*Énergie d'un courant circulaire  $\ominus$ , d'intensité  $I$  et de rayon  $u$ , dans le champ de force d'un système extérieur, rigide et permanent,  $M'$ , susceptible de comprendre des courants fermés, des aimants et le magnétisme terrestre.*

**211.** Soient (*fig. 16*)  $O$  le centre du courant,  $Oz$  son axe de révolution. L'énergie demandée, déduite des équations (102) et (101),

est

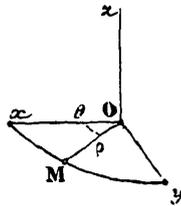
$$(289) \quad W_{M', \varepsilon} = -I \int \int C d\Lambda = -I \int_0^u \rho d\rho \int_0^{2\pi} C d\theta,$$

et la série de Taylor donne

$$(290) \quad C = \sum_p \sum_q \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} \rho^{p+q} \cos^p \theta \cos^q \theta \frac{\partial^{p+q} C_0}{\partial x^p \partial y^q},$$

$C_0$  et  $C$  désignant la composante parallèle à  $Oz$  de la force directrice

Fig. 16.



de  $M'$  à l'origine  $O$  (fig. 16), et au point  $M$

$$(291) \quad x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = 0.$$

On a (*Calcul intégral* de M. Bertrand, p. 133)

$$(292) \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2m} \theta \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{1.3 \dots (2m-1).1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2m+2n)} 2\pi;$$

et cette intégrale est nulle si  $2m$  et  $2n$  ne sont pas tous deux pairs. On trouve ainsi

$$(293) \quad W_{M', \varepsilon} = -4\pi I \sum_p \sum_q \frac{1}{p! q! (p+q+1)!} \left(\frac{u}{2}\right)^{2p+2q+2} \frac{\partial^{2p+2q} C_0}{\partial x^{2p} \partial y^{2q}},$$

et, à l'aide de l'équation  $\frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} = 0$ ,

$$(294) \quad \left\{ \begin{aligned} W = \pi u^2 I \left[ -\frac{1}{1!} C_0 + \frac{1}{1! 2!} \left(\frac{u}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2! 3!} \left(\frac{u}{2}\right)^4 \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} + \frac{1}{3! 4!} \left(\frac{u}{2}\right)^6 \frac{\partial^6 C_0}{\partial z^6} - \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

*Application de la formule (294) à certaines bobines, qui jouissent approximativement de quelques propriétés des éléments de solénoïdes.*

**212.** Soit un système de deux courants circulaires, parallèles au précédent, de même rayon  $u$ , de même intensité  $I$ , ayant leurs centres sur l'axe des  $z$ , aux points  $z = +h$ ,  $z = -h$ . Soient  $C(h)$  et  $C(-h)$  les valeurs de  $C$  en ces deux points. On passe de l'énergie (294) à celle de ce système, en y remplaçant  $C_0$  par  $C(h) + C(-h)$ , et l'on a

$$(295) \quad \left\{ \begin{aligned} W = 2\pi u^2 I \left[ -\frac{1}{1!} + \frac{1}{1! 2!} \left(\frac{u}{2}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2! 3!} \left(\frac{u}{2}\right)^4 \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \frac{1}{3! 4!} \left(\frac{u}{2}\right)^6 \frac{\partial^6}{\partial z^6} - \dots \right] \\ \times \left( C_0 + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} + \dots \right), \end{aligned} \right.$$

ou, en développant,

$$(295') \quad W = 2\pi u^2 I \left( \begin{array}{c} -C_0 - \frac{h^2}{2!} \left| \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} - \frac{h^4}{4!} \left| \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} - \frac{h^6}{6!} \left| \frac{\partial^6 C_0}{\partial z^6} - \dots \right. \right. \\ + \frac{1}{1! 2!} \left(\frac{u}{2}\right)^2 \left| \begin{array}{c} + \frac{1}{1! 2!} \left(\frac{u}{2}\right)^2 \frac{h^2}{2!} \\ - \frac{1}{2! 3!} \left(\frac{u}{2}\right)^4 \\ + \frac{1}{3! 4!} \left(\frac{u}{2}\right)^6 \end{array} \right. \end{array} \right)$$

Pour  $h$  et  $u$  infiniment petits, la série (295') se réduit à son premier terme, et, pour que  $W$  diffère le moins possible de cette valeur-limite,

il faut que le second terme de la série soit nul, ou que l'on ait

$$(296) \quad h = \frac{u}{2}.$$

(295') devient alors

$$(297) \quad W = 2\pi u^2 I \left( -C_0 + \frac{3}{64} h^4 \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} + \frac{61}{46080} h^6 \frac{\partial^6 C_0}{\partial z^6} + \dots \right).$$

**213.** Soit une bobine à un seul rang de fil, terminée aux deux plans  $z = +h$ ,  $z = -h$ , et  $\delta z$  la distance de deux spires consécutives.

Elle sera assimilée, avec une approximation suffisante, à un système de courants circulaires, formant les sections droites d'un cylindre, et en partageant la hauteur en éléments  $\delta z$ , c'est-à-dire en parties égales et assez petites pour être traitées comme infiniment petites.

L'énergie de l'action de  $M'$  sur cette bobine se déduit de (294), en remplaçant  $C_0$  par

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \frac{C}{\delta z} dz &= -\frac{1}{\delta z} \int_{-h}^h \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= -\frac{V(h) - V(-h)}{\delta z} = -\frac{2}{\delta z} \left( \frac{h}{1!} \frac{\partial V_0}{\partial z} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 V_0}{\partial z^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

ou

$$(298) \quad \int_{-h}^h \frac{C}{\delta z} dz = \frac{2h}{\delta z} \left( C_0 + \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} + \frac{h^4}{5!} \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} + \dots \right).$$

On trouve ainsi, pour la bobine (n° 213),

$$(299) \quad \left\{ \begin{aligned} W &= 2\pi u^2 h \frac{I}{\delta z} \left[ -1 + \frac{1}{1!2!} \left(\frac{u}{2}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2!3!} \left(\frac{u}{2}\right)^4 \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \frac{1}{3!4!} \left(\frac{u}{2}\right)^6 \frac{\partial^6}{\partial z^6} - \dots \right] \\ &\quad \times \left( C_0 + \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} + \frac{h^4}{5!} \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} + \dots \right) \end{aligned} \right.$$

ou, en développant,

$$(299') \quad W = 2\pi u^2 h \frac{I}{\delta z} \left( \begin{array}{c} -C_0 - \frac{h^2}{3!} \\ + \frac{1}{1!2!} \left(\frac{u}{2}\right)^2 \\ \left| \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} - \frac{h^4}{5!} \right. \\ + \frac{1}{1!2!} \left(\frac{u}{2}\right)^2 \frac{h^2}{3!} \\ - \frac{1}{2!3!} \left(\frac{u}{2}\right)^4 \\ \left| \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} - \frac{h^6}{7!} \right. \\ + \frac{1}{1!2!} \left(\frac{u}{2}\right)^2 \frac{h^4}{5!} \\ - \frac{1}{2!3!} \left(\frac{u}{2}\right)^4 \frac{h^2}{3!} \\ + \frac{1}{3!4!} \left(\frac{u}{2}\right)^6 \\ \left| \frac{\partial^6 C_0}{\partial z^6} - \dots \right. \end{array} \right).$$

Le coefficient de  $\frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2}$  est nul pour

$$(300) \quad h = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} u;$$

alors la figure de la bobine est celle d'un cylindre, ayant pour diamètre et pour hauteur la base et la hauteur d'un triangle équilatéral; et (299') devient

$$(301) \quad W = \sqrt{3} \pi u^3 \frac{I}{\delta z} \left[ -C_0 + \frac{11}{3!} \left(\frac{u}{2}\right)^4 \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} - \frac{13}{7!} \left(\frac{u}{2}\right)^6 \frac{\partial^6 C_0}{\partial z^6} + \dots \right].$$

**214.** Soit une bobine creuse, de rayons  $U$  et  $u$ , dont la bobine (n° 213) constitue un rang, et soit  $\delta\rho$  la distance de deux rangs consécutifs. L'énergie de cette bobine, dans le champ de force donné, se déduit de l'expression (299), mise sous la forme  $W = f(u)$ , en y remplaçant  $f(u)$  par  $\frac{1}{\delta\rho} \int_u^U f(\rho) d\rho$ , ou  $u^{2p}$  par  $\frac{1}{\delta\rho} \frac{U^{2p+1} - u^{2p+1}}{2p+1}$ .

En faisant cette substitution dans (299'), on en déduit, pour la bobine (n° 214),

$$(302) \quad W = 16\pi \frac{hI}{\delta z \delta\rho} \left( \begin{array}{c} -\frac{\left(\frac{U}{2}\right)^3 - \left(\frac{u}{2}\right)^3}{3} C_0 - \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^3 - \left(\frac{u}{2}\right)^3}{3} \frac{h^2}{3!} \\ + \frac{1}{1!2!} \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^5 - \left(\frac{u}{2}\right)^5}{5} \\ \left| \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} - \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^3 - \left(\frac{u}{2}\right)^3}{3} \frac{h^4}{5!} \right. \\ + \frac{1}{1!2!} \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^5 - \left(\frac{u}{2}\right)^5}{5} \frac{h^2}{3!} \\ - \frac{1}{2!3!} \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^7 - \left(\frac{u}{2}\right)^7}{7} \\ \left| \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} - \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^3 - \left(\frac{u}{2}\right)^3}{3} \frac{h^6}{7!} \right. \\ + \frac{1}{1!2!} \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^5 - \left(\frac{u}{2}\right)^5}{5} \frac{h^4}{5!} \\ - \frac{1}{2!3!} \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^7 - \left(\frac{u}{2}\right)^7}{7} \frac{h^2}{3!} \\ + \frac{1}{3!4!} \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^9 - \left(\frac{u}{2}\right)^9}{9} \\ \left| \frac{\partial^6 C_0}{\partial z^6} - \dots \right. \end{array} \right).$$

Pour que la série diffère le moins possible de son premier terme, auquel elle se réduirait, si les dimensions de la bobine étaient infiniment petites, il faut que le coefficient de son second terme soit nul; d'où

$$(303) \quad 2h = \sqrt{1,8} \sqrt{\frac{U^5 - u^5}{U^3 - u^3}} = \sqrt{0,45} \sqrt{\frac{(2U)^3 - (2u)^3}{(2U)^3 - (2u)^3}}.$$

Calculant  $2h$  par cette formule pour 11 et 9<sup>cm</sup> de diamètre, on a

$$(304) \quad \begin{cases} 2U = 11^{\text{cm}}, & 2u = 9^{\text{cm}}, \\ 2h = \sqrt{0,45} \sqrt{\frac{102002}{602}} = 8^{\text{cm}},731972\dots \end{cases}$$

Mettant  $U$  et  $u$  sous les formes  $\rho(1+e)$  et  $\rho(1-e)$ , on trouve

$$(305) \quad \begin{cases} U = \rho(1+e), & u = \rho(1-e), \\ h = \rho\sqrt{0,75}(1 + 0,8333\dots e^2 \\ \quad - 0,525e^4 + 0,4967592592\dots e^6 + \dots), \end{cases}$$

$$(306) \quad \begin{cases} W = \frac{2\pi I}{\delta s \delta z} er^4 \left[ - \left(1 + \frac{e^2}{3}\right) C_0 \right. \\ \quad + \frac{11 - 51e^2 + 64,955\dots e^4 - 16,984\dots e^6 + \dots}{120} \\ \quad \left. \times \left(\frac{r}{2}\right)^4 \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} - \dots \right] \frac{2h}{r}. \end{cases}$$

Si l'axe  $\xi$  de la bobine (n° 215), au lieu d'être dirigé suivant l'axe des  $z$ , a une direction quelconque, définie par les cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ ;  $C_0$  doit être remplacé par  $\alpha A_0 + \beta B_0 + \gamma C_0$  dans l'équation (301), qui devient

$$(307) \quad \begin{cases} W = \sqrt{3}\pi \frac{I}{\delta s} u^3 \left[ - (\alpha A_0 + \beta B_0 + \gamma C_0) \right. \\ \quad \left. + \frac{11}{120} \left(\frac{u}{2}\right)^4 \left( \alpha \frac{\partial^4 A_0}{\partial z^4} + \beta \frac{\partial^4 B_0}{\partial z^4} + \gamma \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} \right) - \dots \right]. \end{cases}$$

La condition d'équilibre de la bobine (n° 215), mobile autour de

l'axe des  $z$ , est que le moment, par rapport à cet axe, de l'action de  $M'$  sur cette bobine  $\varepsilon$ , soit nul :

$$(308) \quad (M', \varepsilon)_{xy} = - \frac{\partial W}{\partial(xy)} = 0$$

ou (307)

$$(309) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial(xy)} \left[ \alpha A_0 + \beta B_0 + \gamma C_0 \right. \\ & \left. - \frac{11}{120} \left(\frac{u}{2}\right)^4 \left( \alpha \frac{\partial^4 A_0}{\partial z^4} + \beta \frac{\partial^4 B_0}{\partial z^4} + \gamma \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} \right) + \dots \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Mais

$$(310) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial(xy)} = -\beta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial(xy)} = \alpha, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial(xy)} = 0;$$

(309) devient

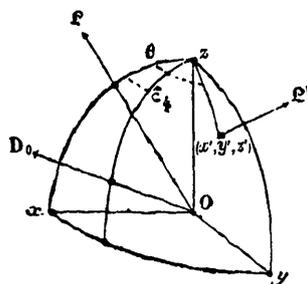
$$(311) \quad \alpha B_0 - \beta A_0 = \frac{11}{120} \left(\frac{u}{2}\right)^4 \left( \alpha \frac{\partial^4 B_0}{\partial z^4} - \beta \frac{\partial^4 A_0}{\partial z^4} \right) + \dots,$$

et, en supposant  $\beta = 0$ ,

$$(312) \quad B_0 = \frac{11}{120} \left(\frac{u}{2}\right)^4 \frac{\partial^4 B_0}{\partial z^4} + \dots$$

Si la bobine devenait infiniment petite,  $\alpha B_0 - \beta A_0$  le deviendrait en même temps (311); par suite, le plan azimutal de son axe  $\varepsilon$  viendrait coïncider avec celui de  $D_0$ , comme on l'a déjà vu (n° 127), et

Fig. 17.



tournerait, pour  $\beta = 0$ , du petit angle  $\varepsilon_4$  (fig. 17) qui a pour tangente

$$(313) \quad \text{tang} \varepsilon_4 = \frac{B_0}{A_0}.$$

213. Sachant que  $M'$  équivaut à un système d'éléments de solénoïdes, on peut trouver l'ordre de grandeur de  $\varepsilon_4$ , en considérant le cas le plus simple, celui où  $M'$  se réduirait à un seul élément  $k'$  de solénoïde, placé à la distance  $r$  de l'origine. Soient (fig. 17)

$$(314) \quad x' = ar, \quad y' = br, \quad z' = cr, \quad k' \quad \text{et} \quad \alpha', \beta', \gamma'$$

ses coordonnées, son moment et les cosinus directeurs de son axe  $\xi'$ .

La partie bien définie de son potentiel à l'origine sera (52)

$$\psi_0 = k' \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x'^3} = -k' \frac{x'x' + \beta'y' + \gamma'z'}{r^3};$$

d'où

$$(315) \quad A_0 = -\frac{\partial \psi_0}{\partial x} = \frac{\partial \psi_0}{\partial x'} = -k' \left( \frac{x'}{r^3} - 3 \frac{x'x' + \beta'y' + \gamma'z'}{r^5} \frac{x'}{r} \right),$$

$$(316) \quad \left\{ \begin{aligned} B_0 &= -\frac{\partial \psi_0}{\partial y} = \frac{\partial \psi_0}{\partial y'} \\ &= k' \left( \alpha' \frac{\partial}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial y'^3} \\ &= k' \frac{3ab\alpha' + (3b^2 - 1)\beta' + 3bc\gamma'}{r^3}, \end{aligned} \right.$$

$$(317) \quad \frac{\partial^2 B_0}{\partial z'^2} = k' \left( \alpha' \frac{\partial}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{\partial^5 \frac{1}{r}}{\partial y'^2 \partial z'^2}.$$

L'équation  $B_0 = 0$  est sensiblement satisfaite dans la position d'équilibre cherchée; et, si elle l'était, on aurait, en vertu de (316),

$$0 = 3b(a\alpha' + b\beta' + c\gamma') - \beta';$$

d'où

$$(318) \quad a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = \frac{\beta'}{3b}.$$

Cette équation peut être introduite dans le calcul approximatif du second membre de l'équation (312), qui devient

$$(319) \quad \begin{cases} B_0 = \frac{11}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{S_1 \beta' + T_1 \gamma'}{r^2}, \\ S_4 = 1 + 21c^2(2c^2 - 1), \\ T_4 = 21bc(1 - 3c^2). \end{cases}$$

On trouve, en substituant (314) et (318) dans (315), puis (319) et (320) dans (313),

$$(320) \quad A_0 = k' \frac{a\beta' - bx'}{br^3},$$

$$(321) \quad \text{tang} \varepsilon_4 = \frac{11}{32} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{S_1 \beta' + T_1 \gamma'}{a\beta' - bx'} b + \dots$$

*Calcul de la longueur magnétique et d'une aiguille aimantée A qui, mobile autour de son centre de gravité placé au même point O que la bobine (n° 213), et sous l'action d'un même système extérieur M', s'orienterait, avec la même précision, comme si elle était infiniment courte.*

**216.** L'aiguille est assimilée, par hypothèse, au système de ses deux pôles  $+m$  et  $-m$ , placés sur l'axe des  $z$  aux points  $z = +l$ ,  $z = -l$ . L'énergie  $W$  de l'action exercée sur cette aiguille par le système extérieur  $M'$ , dont le potentiel est  $V_0$  à l'origine  $O$ ,  $V$  au point  $(x, y, z)$ ,  $V(l)$  au pôle positif, et  $V(-l)$  au pôle négatif, a pour expression  $mV(l) - mV(-l)$ , ou

$$(322) \quad W = 2m \left( \frac{l}{1!} \frac{\partial V_0}{\partial z} + \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 V_0}{\partial z^3} + \frac{l^5}{5!} \frac{\partial^5 V_0}{\partial z^5} + \dots \right);$$

et si l'axe  $z$  de l'aimant a une direction quelconque, définie par les cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ ,  $\frac{\partial V_0}{\partial z} = -C_0$  doit être remplacé par la somme

—  $\alpha A_0 - \beta B_0 - \gamma C_0$ , et (322) devient

$$(323) \quad \left\{ \begin{aligned} W = & - 2ml \left[ \frac{\alpha A_0 + \beta B_0 + \gamma C_0}{1!} \right. \\ & + \frac{l^2}{3!} \left( \alpha \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} \right) \\ & \left. + \frac{l^4}{5!} \left( \alpha \frac{\partial^4 A_0}{\partial z^4} + \beta \frac{\partial^4 B_0}{\partial z^4} + \gamma \frac{\partial^4 C_0}{\partial z^4} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

La condition d'équilibre de l'aimant, mobile autour de l'axe des  $z$ ,

est  $\frac{\partial W}{\partial(xy)} = 0$  ou

$$\frac{\partial}{\partial(xy)} \left[ \frac{\alpha A_0 + \beta B_0 + \gamma C_0}{1!} + \frac{l^2}{3!} \left( \alpha \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} \right) + \dots \right] = 0,$$

et, en substituant (310),

$$(324) \quad \alpha B_0 - \beta A_0 + \frac{l^2}{3!} \left( \alpha \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} - \beta \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} \right) + \frac{l^4}{5!} \left( \alpha \frac{\partial^4 B_0}{\partial z^4} - \beta \frac{\partial^4 A_0}{\partial z^4} \right) + \dots = 0;$$

puis, supposant  $\beta = 0$ ,

$$(325) \quad B_0 + \frac{l^2}{3!} \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} + \frac{l^4}{5!} \frac{\partial^4 B_0}{\partial z^4} + \dots = 0.$$

L'équation analogue de (313)

$$(326) \quad \text{tang} \epsilon_2 = \frac{B_0}{A_0}$$

donne l'angle  $\epsilon_2$  que fait l'azimut d'équilibre de l'axe de l'aiguille avec la position qu'il prendrait, si elle était infiniment petite.

**217.** Considérant l'équilibre de l'aimant sous l'action de l'élément  $k'$  de solénoïde, qui agissait précédemment sur la bobine (n° 215), appliquant à ce courant et à l'axe  $s$  les notations (314), on trouve, à l'aide de (318),

$$(327) \quad \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} = 2k' \frac{S_2 \beta' + T_2 \gamma'}{r^5}, \quad S_2 = 10c^2 - 1, \quad T_2 = -15bc.$$

(325) donne ensuite

$$(328) \quad B_0 = -\frac{2l^2}{3!} k' \frac{S_2 \beta' + T_2 \gamma'}{r^3} - \dots$$

On trouve, en substituant (320) et (328) dans (326),

$$(329) \quad \text{tang} \varepsilon_2 = -\frac{1}{3} \left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{S_2 \beta' + T_2 \gamma'}{a \beta' - b' \alpha'} b - \dots,$$

puis, divisant par (321),

$$(330) \quad \frac{\text{tang} \varepsilon_2}{\text{tang} \varepsilon_4} = -\frac{32}{33} \frac{l^2 u^2}{r^4} \frac{S_2 \beta' + T_2 \gamma'}{S_4 \beta' + T_4 \gamma'}.$$

On voit (330) que  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_4$  seront du même ordre de grandeur pour

$$(331) \quad \frac{lr}{u^2} = 1,$$

par exemple, pour

$$(332) \quad l = 0^{\text{cm}}, 5, \quad u = 5^{\text{cm}}, \quad r = 50^{\text{cm}}$$

ou encore pour

$$(333) \quad l = 0^{\text{cm}}, 5, \quad u = 10^{\text{cm}}, \quad r = 200^{\text{cm}}.$$

Ainsi, quand le centre d'un système agissant à peu près comme un élément de solénoïde est à 2<sup>m</sup> d'une bobine (n° 213), à un seul rang de fil, satisfaisant à l'équation (300), ayant 20<sup>cm</sup> de diamètre; elle s'oriente autour de la verticale de son centre de gravité, comme si elle était infiniment petite, avec autant de précision qu'une aiguille de 1<sup>cm</sup> de longueur magnétique.

$\varepsilon_4$  atteint un maximum, du moins dans le cas particulier où l'on a

$$(334) \quad c = \gamma' = 0.$$

Alors (318) devient

$$(335) \quad (3b^2 - 1)\beta' + 3ab\alpha' = 0.$$

Substituant (334) dans (319), on a

$$(336) \quad S_4 = 1, \quad T_4 = 0.$$

(321) devient, en vertu de (336), (335) et (334),

$$(337) \quad \text{tang} \varepsilon_4 = \frac{11}{32} \left( \frac{u}{r} \right)^4 \frac{\beta' b}{a\beta' - bx'} = \frac{11}{32} \left( \frac{u}{r} \right)^4 \frac{3ab}{2}.$$

Soit (*fig.* 17)

$$(338) \quad a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta;$$

on a

$$(339) \quad \text{tang} \varepsilon_4 = \frac{33}{128} \left( \frac{u}{r} \right)^4 \sin 2\theta.$$

Dans le cas particulier (334), le rapport (330) devient

$$(340) \quad \frac{\text{tang} \varepsilon_2}{\text{tang} \varepsilon_4} = \frac{32}{33} \frac{l^2 r^2}{u^2},$$

et, par suite,  $\frac{32}{33}$ , quand la relation (331) est satisfaite. Dans ce même cas (334), et pour  $\frac{u}{r} = \frac{1}{10}$ , (339) donne

$$(341) \quad \varepsilon_4 = 5'', 318 \sin 2\theta.$$

Cette valeur répond aux dimensions (332) : elle serait 16 fois plus petite si l'on adoptait les dimensions (333).

## XII. — SUR LA RÉDUCTION AUX UNITÉS ABSOLUES DE TOUTES LES FORCES OBSERVABLES ENTRE LES COURANTS, LES AIMANTS ET LE MAGNÉTISME TERRESTRE.

### *Définition générale des unités absolues.*

**218.** On sait que toute grandeur continue, réductible en nombres, dérive des trois unités fondamentales

$$(342) \quad [L], [M], [T]$$

de longueur, de masse et de temps. Les rapports d'une grandeur concrète  $U$  à deux autres de même espèce,  $[U]$  et  $[U']$ , prises successivement pour unités, sont deux nombres abstraits

$$(343) \quad u = \frac{U}{[U]}, \quad u' = \frac{U}{[U']},$$

satisfaisant à la relation

$$(344) \quad U = u[U] = u'[U'];$$

d'où

$$(345) \quad \frac{u'}{u} = \frac{[U]}{[U']}.$$

Si  $[U]$  est une unité dérivée, les nombres  $u$  et  $u'$ , qui mesurent la grandeur concrète de même espèce  $U$ , quand on prend successivement  $[L]$ ,  $[M]$ ,  $[T]$  et  $[L']$ ,  $[M']$ ,  $[T']$  pour unités fondamentales, sont liés généralement par une relation de la forme homogène

$$\frac{u'}{u} = \left[ \frac{L}{L'} \right]^a \left[ \frac{M}{M'} \right]^b \left[ \frac{T}{T'} \right]^c;$$

d'où résulte (345)

$$\left[ \frac{U}{U'} \right] = \left[ \frac{L}{L'} \right]^a \left[ \frac{M}{M'} \right]^b \left[ \frac{T}{T'} \right]^c.$$

Donc

$$(346) \quad U = f[L^a M^b T^c],$$

en posant

$$(347) \quad f = \left[ \frac{U'}{L'^a M'^b T'^c} \right].$$

**219.** On appelle  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les *dimensions* de  $[U]$  par rapport aux trois unités fondamentales.

Autant qu'on peut le faire sans incompatibilité, on est convenu de prendre pour unité dérivée de chaque espèce celle qui répond aux trois unités fondamentales, c'est-à-dire de faire  $f = 1$  dans la formule (346),

qui devient

$$(348) \quad [U] = [L^a M^b T^c].$$

**220.** L'ensemble de toutes les formules *simultanément* réductibles à la forme (348) constitue un *système coordonné d'unités absolues*, dérivant toutes des trois unités (342), et complètement définies par le choix de celles-ci.

Tel est le système qui comprend toutes les formules de Géométrie et de Mécanique. Par exemple, les dimensions des unités de surface  $[\omega]$  et de volume  $[\varpi]$  sont données par les formules

$$(349) \quad [\omega] = [L^2], \quad [\varpi] = [L^3];$$

celles des unités de vitesse, d'accélération, de force et de travail, déduites des formules

$$(350) \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad \omega = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad F = m \frac{d^2s}{dt^2}, \quad d\mathcal{E} = F ds,$$

sont représentées respectivement par les suivantes :

$$(351) \quad [v] = [LT^{-1}], \quad [\omega] = [LT^{-2}], \quad [F] = [MLT^{-2}], \quad [\mathcal{E}] = [ML^2T^{-2}].$$

Ce qui est nouveau, c'est seulement l'introduction des unités absolues en Physique. On peut rechercher les avantages suivants dans le choix des trois unités fondamentales :

- 1° Avoir des unités fondamentales de grandeur ordinaire;
- 2° Avoir des unités dérivées de grandeur ordinaire;
- 3° Avoir, s'il est possible, un système unique, comprenant toutes les grandeurs continues, réductibles en nombres.

L'*Association britannique*, sacrifiant le premier avantage pour avoir le second, dans les unités dérivées de l'électrodynamique et du magnétisme, a proposé les trois unités fondamentales suivantes :

$$221. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Unité de longueur, } [L]_{B.A.} = 10\,000\,000 \text{ de mètres;} \\ \text{Unité de masse, } [M]_{B.A.} = \text{la masse du gramme, multipliée} \\ \quad \text{par } 10^{-11}; \\ \text{Unité de temps, } T = \text{la seconde du jour solaire moyen.} \end{array} \right.$$

Mais cet avantage ne se retrouvait ni en électrostatique, ni dans les autres unités dérivées, géométriques, mécaniques et physiques.

Le *Congrès international de Paris*, préférant le premier avantage, a adopté pour unités fondamentales :

**222.** Le centimètre, le gramme-masse et la seconde (système C.G.S.).

Il a suppléé au deuxième, en définissant les *unités pratiques* de l'électrodynamique et du magnétisme au moyen des unités absolues C.G.S., multipliées par des puissances de 10, dont les exposants, toujours entiers, ont été choisis de manière à reproduire les unités absolues qui dérivent du système **221**.

Si le troisième avantage était possible, on pourrait lui sacrifier les deux autres; on y suppléerait en adjoignant une unité pratique à chaque unité absolue, soit fondamentale, soit dérivée, et définissant le rapport de l'une à l'autre par une puissance de 10. Même au point de vue théorique, cette possibilité n'est que probable: elle est subordonnée à l'hypothèse d'un milieu unique, qu'on assimile à l'éther, et dont les divers modes de mouvement constituent tous les phénomènes matériels. Cette hypothèse, très rationnelle, est contestée pourtant, et le sera sans doute, tant qu'elle n'aura pas complété, par la gravitation universelle et la Chimie, la réduction de tous les phénomènes matériels à l'unité mathématique que l'Astronomie doit à Newton. Il y a donc lieu de présumer, mais non d'affirmer, que le troisième avantage sera réalisé un jour par les unités suivantes, dont deux sont indiquées dans le *Traité de Maxwell sur l'Électricité et le Magnétisme* :

**223.** { Unité de longueur, la longueur d'onde, dans le vide, d'une raie déterminée du spectre;  
Unité de masse, celle de l'unité de volume d'éther, dans le vide;  
Unité de temps, la durée d'une vibration de la même onde lumineuse.

On ne sait mesurer ni la première, ni la troisième avec autant de précision que les unités C.G.S., et l'on ne connaît pas la deuxième.

Il y a actuellement, dans le système adopté (n° **222**), deux systèmes

d'unités électriques, le système électrostatique et le système électromagnétique; et le rapport des grandeurs des deux unités dérivées qui mesurent une même quantité, dans ces deux systèmes, est toujours une puissance entière d'une certaine vitesse absolue  $v$ , sensiblement sinon rigoureusement égale à celle de la lumière; d'où résulte que ce rapport devient égal à l'unité, quand on adopte le système **225**, ou tout autre dans lequel  $v = 1$ .

**224.** *Sur la possibilité de réduire à un seul système d'unités absolues, bien connu sous le nom de système électromagnétique, toutes les actions observables entre les courants fermés, les aimants et le magnétisme terrestre.* — Cette possibilité, admise partout, n'était démontrée nulle part : elle l'a été implicitement dans ce Mémoire, où la réduction se trouve toute faite. Elle repose sur la coïncidence des directions d'équilibre stable des axes d'un élément magnétique et d'un élément de solénoïde, mobiles autour de leurs centres de gravité, quand ceux-ci sont placés successivement en un même point d'un champ de force donné. Elle a été établie précédemment comme conséquence des deux principes expérimentaux **122** et **165**, d'où résulte cette coïncidence. Elle ne l'est pas, quand on démontre séparément, comme on l'a fait jusqu'ici, les lois des actions mutuelles entre les pôles de deux solénoïdes, ceux de deux aimants et le magnétisme terrestre, qui vont être désignés respectivement par

(352)  $\mu, \mu', m, m'$  et  $T'$ .

Cette lacune, que les ouvrages didactiques ne paraissent pas soupçonner, y a été signalée pour la première fois dans les *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*, par MM. Mascart et Joubert. A une question équivalente à l'énoncé **224**, on y trouve (n° **453**) la réponse suivante : « L'affirmative paraît probable. » C'est cette affirmative qui a été démontrée dans ce Mémoire.

En supposant placés à la même distance mutuelle  $r$  les deux pôles dont on considère successivement les actions réciproques, on établit ainsi les cinq formules suivantes, dans lesquelles  $D$  désigne la force directrice du magnétisme terrestre, c'est-à-dire celle qu'il exerce sur

l'unité positive de pôle de solénoïde,

$$(353) \quad (\mu', \mu) = (\mu, \mu') = \frac{\mu\mu'}{r^2},$$

$$(354) \quad (\mu', m) = (m, \mu') = \frac{m\mu'}{r^2},$$

$$(355) \quad (T', \mu) = \mu D,$$

$$(356) \quad (m', m) = (m, m') = f \frac{mm'}{r^2},$$

$$(357) \quad (T', m) = gmD.$$

Les actions mutuelles de deux pôles sont dirigées suivant  $r$ , et sont répulsives quand elles sont positives;  $f$  et  $g$  sont deux coefficients positifs.

Après avoir choisi arbitrairement les trois unités fondamentales, on peut toujours réduire à l'unité les trois coefficients des formules (353), (354) et (355), par un choix convenable des trois unités physiques, qui se trouvent ainsi définies de la manière suivante :

**225.** *L'unité de pôle de solénoïde* est celle qui repousse son égale avec l'unité de force à l'unité de distance.

**226.** *L'unité de pôle d'aimant* est celle que l'unité de pôle de solénoïde repousse avec l'unité de force à l'unité de distance.

**227.** *L'intensité d'un champ de force électrodynamique* quelconque, et en particulier du champ magnétique terrestre, en un point donné, est égale à la force qui sollicite l'unité de pôle de solénoïde, placée en ce point.

Mais, après le choix des trois unités fondamentales (342) et des trois unités dérivées **225**, **226** et **227**, les coefficients  $f$  et  $g$  ne peuvent être déterminés que par expérience.

Car l'unité de pôle d'aimant étant définie (n° **226**) indépendamment de son action sur son égale à l'unité de distance, et le principe de la conservation de l'énergie ayant lieu, quel que soit  $f$  (356), ce coefficient reste indéterminé, tous les principes rationnels étant sauvegardés, quand on fait abstraction de toute hypothèse. La valeur  $f = 1$ , déduite

du principe **122**, ne peut avoir lieu que par un hasard bien singulier, ou en vertu de l'*identité des causes des actions mutuelles entre les aimants et les solénoïdes*. L'hypothèse des courants moléculaires d'Ampère, qui implique cette identité, se trouve ainsi en partie démontrée. Mais elle ne l'est pas complètement : la valeur  $f = 1$  s'explique également par un même mode de propagation des actions des aimants et des courants dans un même milieu.

Après que l'expérience a donné  $f = 1$ , si l'on attribue cette valeur au hasard, et si l'on s'abstient de toute hypothèse, le coefficient  $g$  reste encore indéterminé dans l'équation (357); car l'unité de pôle magnétique ayant été définie (n° **226**) indépendamment de la force qui la sollicite dans le champ magnétique de la Terre, cette force ne paraît pas pouvoir être déterminée autrement que par des expériences indépendantes des précédentes. On a vu (n° **224**) quelles expériences on peut invoquer pour en conclure la valeur  $g = 1$ .

En résumé, les valeurs

$$(358) \quad f = 1, \quad g = 1$$

des coefficients des formules (356) et (357) n'ont jamais été ni contestées ni démontrées. Il est d'ailleurs évident qu'elles résultent de l'hypothèse des courants moléculaires d'Ampère.

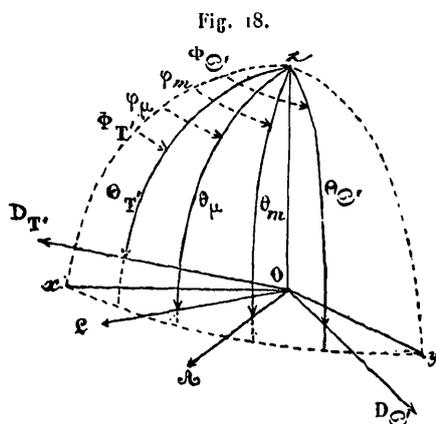
*Comment on pourrait déterminer les coefficients  $f$  et  $g$  des formules (356) et (357), s'ils étaient différents de l'unité.*

Les valeurs (358) sont bien établies, dans ce Mémoire, comme conséquences des principes expérimentaux **122** et **165**. Mais, comme ces principes reposent sur des expériences qui n'ont pas été faites directement, il n'est peut-être pas inutile de donner une méthode traitant  $f$  et  $g$  comme deux inconnues, et montrant que, si les relations (358) n'étaient pas satisfaites très approximativement, on aurait sans doute remarqué le fait suivant, contraire au principe **224**.

**228.** Si une aiguille aimantée et un solénoïde de déclinaison infiniment petits étaient placés successivement en un même point O, sous

l'action d'un même système extérieur  $M'$ , pouvant comprendre un système  $\mathcal{E}'$  de courants fermés, un système  $A'$  d'aimants, et le magnétisme terrestre  $T'$ , et assujettis à tourner autour de la verticale  $Oz$ ; leurs axes oscilleraient autour de deux azimuts généralement différents.

En effet, si un élément  $k$  de solénoïde, de moment  $k$  et d'axe  $\mathcal{L}$ , et un élément magnétique  $K$ , de moment  $K$  et d'axe  $\mathcal{A}$ , ayant leurs centres de gravité placés successivement en un même point  $O$ , pris pour origine de trois axes à gauche rectangulaires (*fig. 18*), ne pouvaient que



tourner autour de la verticale  $Oz$ , sous l'action du système extérieur  $M'$ , les moments, par rapport à  $Oz$ , des forces exercées sur  $k$  et sur  $K$  seraient représentés, en vertu des notations (352) et des formules (353), (354), (355), (356) et (357), par les six expressions suivantes, dont la première est l'équation (148'). La *fig. 18* correspond au cas où il n'y a pas d'aimant dans le système  $M'$ .

$$(359) \quad (\mathcal{E}', k)_{xy} = k \sin \theta_{\mu} D_{\mathcal{E}'} \sin \Theta_{\mathcal{E}'} \sin(\Phi_{\mathcal{E}'} - \varphi_{\mu}),$$

$$(360) \quad (\mathcal{E}', K)_{xy} = K \sin \theta_m D_{\mathcal{E}'} \sin \Theta_{\mathcal{E}'} \sin(\Phi_{\mathcal{E}'} - \varphi_m),$$

$$(361) \quad (A', k)_{xy} = k \sin \theta_{\mu} D_{A'} \sin \Theta_{A'} \sin(\Phi_{A'} - \varphi_{\mu}),$$

$$(362) \quad (A', K)_{xy} = f K \sin \theta_m D_{A'} \sin \Theta_{A'} \sin(\Phi_{A'} - \varphi_m),$$

$$(363) \quad (T', k)_{xy} = k \sin \theta_{\mu} D_{T'} \sin \Theta_{T'} \sin(\Phi_{T'} - \varphi_{\mu}),$$

$$(364) \quad (T', K)_{xy} = g K \sin \theta_m D_{T'} \sin \Theta_{T'} \sin(\Phi_{T'} - \varphi_m).$$

Il résulte immédiatement de ces trois groupes de formules que, si un seul des trois systèmes  $\mathcal{E}'$ ,  $A'$ ,  $T'$  agissait, les axes d'un élément de solénoïde et d'un élément magnétique, mobiles autour des verticales de leurs centres de gravité, placés successivement en un même point, oscilleraient toujours autour du même plan azimutal.

**229.** Mais il en serait autrement, le magnétisme terrestre agissant en même temps qu'un courant fermé, ou en même temps qu'un aimant, si les coefficients  $f$  et  $g$  n'étaient pas, comme on l'a vu, égaux à l'unité; et les six dernières formules permettraient d'en calculer les valeurs. Car, en faisant agir simultanément la Terre  $T'$  et un système  $\mathcal{E}'$  de courants fermés, on aurait (*fig. 18*), pour conditions d'équilibre de  $k$ ,

$$(T', k)_{xy} + (\mathcal{E}', k)_{xy} = 0,$$

et de  $K$ ,

$$(T', K)_{xy} + (\mathcal{E}', K)_{xy} = 0;$$

ce qui donne, en substituant (363) et (359) dans la première équation, (364) et (360) dans la seconde,

$$\begin{array}{l} (365) \quad D_{T'} \sin \theta_{T'} \sin(\Phi_{T'} - \varphi_{\mu}) + D_{\mathcal{E}'} \sin \theta_{\mathcal{E}'} \sin(\Phi_{\mathcal{E}'} - \varphi_{\mu}) = 0, \\ (366) \quad g D_{T'} \sin \theta_{T'} \sin(\Phi_{T'} - \varphi_m) + D_{\mathcal{E}'} \sin \theta_{\mathcal{E}'} \sin(\Phi_{\mathcal{E}'} - \varphi_m) = 0. \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} - \sin(\Phi_{\mathcal{E}'} - \varphi_m), \\ \sin(\Phi_{\mathcal{E}'} - \varphi_{\mu}). \end{array} \right.$$

Ajoutant ces deux équations, multipliées par les facteurs écrits sur les mêmes lignes, on trouve

$$D_{T'} \sin \theta_{T'} [g \sin(\Phi_{T'} - \varphi_m) \sin(\Phi_{\mathcal{E}'} - \varphi_{\mu}) - \sin(\Phi_{T'} - \varphi_{\mu}) \sin(\Phi_{\mathcal{E}'} - \varphi_m)] = 0;$$

d'où

$$(367) \quad g = \frac{\sin(\Phi_{T'} - \varphi_{\mu})}{\sin(\Phi_{T'} - \varphi_m)} \cdot \frac{\sin(\Phi_{\mathcal{E}'} - \varphi_{\mu})}{\sin(\Phi_{\mathcal{E}'} - \varphi_m)}.$$

L'expérience, qu'il faudrait faire pour établir le principe **122** a été invoquée pour démontrer que  $g = 1$  et que  $\varphi_{\mu} = \varphi_m$ . On voit que (367)

donne, en effet,  $g = 1$  pour  $\varphi_\mu = \varphi_m$ . Mais, si  $g$  avait une valeur différente de l'unité, il résulte de (367) que  $\varphi_\mu$  différencierait de  $\varphi_m$ ; et (367) servirait à déterminer  $g$ .

En faisant ensuite agir simultanément la Terre  $T'$  et un aimant  $A'$ , on aurait, pour conditions d'équilibre de  $k$ ,

$$(T', k)_{xy} + (A', k)_{xy} = 0,$$

et de  $K$ ,

$$(T', K)_{xy} + (A', K)_{xy} = 0;$$

ce qui donne, en substituant (363) et (361) dans la première équation. (364) et (362) dans la seconde,

$$\begin{array}{l} (368) \quad D_{T'} \sin \theta_{T'} \sin(\Phi_{T'} - \varphi_\mu) + D_{A'} \sin \theta_{A'} \sin(\Phi_{A'} - \varphi_\mu) = 0, \\ (369) \quad g D_{T'} \sin \theta_{T'} \sin(\Phi_{T'} - \varphi_m) + f D_{A'} \sin \theta_{A'} \sin(\Phi_{A'} - \varphi_m) = 0. \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -f \sin(\Phi_{A'} - \varphi_m), \\ \sin(\Phi_{A'} - \varphi_\mu). \end{array} \right.$$

Ajoutant ces deux équations, multipliées par les facteurs écrits sur les mêmes lignes, on trouve

$$\begin{aligned} D_{T'} \sin \theta_{T'} [g \sin(\Phi_{T'} - \varphi_m) \sin(\Phi_{A'} - \varphi_\mu) \\ - f \sin(\Phi_{T'} - \varphi_\mu) \sin(\Phi_{A'} - \varphi_m)] = 0; \end{aligned}$$

d'où

$$(370) \quad \frac{g}{f} = \frac{\sin(\Phi_{T'} - \varphi_\mu)}{\sin(\Phi_{T'} - \varphi_m)} \cdot \frac{\sin(\Phi_{A'} - \varphi_\mu)}{\sin(\Phi_{A'} - \varphi_m)}.$$

L'expérience, qu'il faudrait faire pour établir le principe **122**, a servi à démontrer que l'on a  $\frac{g}{f} = 1$  et  $\varphi_\mu = \varphi_m$ . On voit que (370) donne, en effet,  $\frac{g}{f} = 1$  pour  $\varphi_\mu = \varphi_m$ . D'ailleurs, si  $\frac{g}{f}$  n'était pas égal à l'unité, l'équation (370) permettrait d'en déterminer expérimentalement la valeur; elle montre que  $\varphi_\mu$  différencierait de  $\varphi_m$ . On voit, par les formules (367) et (370), que, si les relations (358) n'étaient pas satisfaites, l'énoncé **228** le serait. Il est impossible d'admettre que le défaut de coïncidence qu'on observerait alors ne soit pas très petit, sinon rigoureusement nul, puisqu'il n'a jamais été signalé.

**250.** L'exactitude de la valeur  $f = 1$  étant hors de doute, il est difficile de ne pas attribuer les propriétés des courants et celles des aimants à une cause unique. Dès lors, on doit avoir aussi  $g = 1$ . Mais, si l'on doutait de l'identité des causes de ces deux phénomènes, et si l'on attribuait le magnétisme terrestre à une troisième cause inconnue, la valeur  $g = 1$  ne résulterait plus de ce que  $f$  est égal à l'unité.