JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH. MÉRAY

Exposition nouvelle de la théorie des formes linéaires et des déterminants

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 10 (1884), p. 181-280.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10__181_0>

Exposition nouvelle de la théorie des formes linéaires et des déterminants;

PAR M. CH. MÉRAY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

---

1. Le rôle si considérable que les déterminants jouent en Algèbre et dans toute l'Analyse a pour cause unique ce double fait : premièrement, qu'ils sont les éléments essentiels des formules de résolution des équations linéaires simultanées, ou, pour dire encore plus vrai, de toutes les relations que l'on rencontre dans l'étude des polynômes du premier degré; deuxièmement, que la théorie de ces polynômes précède et supporte celle des polynômes de degrés supérieurs, c'est-à-dire toute l'Algèbre, exactement comme les propriétés de la ligne droite et du plan dominent la Géométrie tout entière. Un peu d'attention convaincra chacun que les choses se passent bien ainsi, et cependant ce n'est pas de cette manière, tant s'en faut, qu'elles sont habituellement présentées.

On définit les déterminants par la loi de formation des termes de leurs développements, d'où l'on déduit la plupart de leurs propriétés, le tout *a priori*. Ces résultats sont ensuite appliqués indistinctement à la résolution des équations linéaires simultanées et à une suite de questions d'Algèbre, de Géométrie, de Mécanique, sans rapports directs les unes avec les autres.

Il semble ainsi que le hasard seul ait conduit les géomètres à la connaissance de ces expressions, et assuré une corrélation si extraordinaire entre leurs propriétés et les problèmes à résoudre. Il semble encore que l'on réussirait à doter l'Analyse de nouvelles ressources d'égale importance, en faisant pareille provision de formules relatives à telles ou telles autres expressions construites d'avance au gré des caprices de l'imagination. D'un autre côté, l'enchaînement des propositions et le mécanisme des démonstrations conservent le caractère factice de la conception primitive d'où on les a fait dériver. En général, tout se borne à la vérification, assez pénible quelquefois, d'une suite de formules dont l'origine et la portée demeurent également obscures. La règle de multiplication de deux déterminants, par exemple, est réduite aux proportions exiguës du premier venu des artifices de calcul, sans que rien dans l'énoncé ni dans la démonstration puisse faire seulement soupçonner que l'on touche à une loi fondamentale de la composition et de la transformation des systèmes de formes.

Ces réflexions critiques, et d'autres que je supprime, se sont présentées à mon esprit avec une force nouvelle, dans le cours des recherches sur l'Analyse indéterminée du premier degré dont j'ai publié dernièrement le résultat (*Annales scientifiques de l'École Normale;* mars 1883); elles m'ont amené à refondre toute la matière en remettant chaque chose à sa place, c'est-à-dire les formes linéaires au premier plan, et les déterminants au second. Le public jugera si j'ai réussi à rendre cette théorie plus claire, à lui donner plus d'ampleur et de cohérence.

J'ai supprimé toute application particulière; il était bon sans doute d'en joindre quelques-unes à la théorie des déterminants, à l'époque encore peu éloignée où elle était à peine connue. Mais, actuellement, cette théorie a conquis dans l'enseignement la place qu'elle mérite d'y occuper; elle est devenue d'un usage courant dans toutes les parties des Mathématiques, et, pas plus que pour la formule du binôme ou pour la théorie des dérivées, il n'y a lieu désormais d'en réunir les innombrables applications.

Systèmes de formes linéaires en général.

2. La théorie des fonctions entières de degrés quelconques se ramène sans difficulté à celle des fonctions entières de mêmes degrés, mais homogènes. Cette dernière fournit des énoncés beaucoup plus élégants et généraux qui, en outre, ont des avantages spéciaux pour les applications géométriques, et on la traite de préférence.

Pour abréger, on nomme *formes* les fonctions entières et homogènes d'un groupe donné de variables indépendantes en nombre quelconque, et *linéaires* les formes du premier degré dont nous avons à nous occuper.

Le type d'une forme linéaire est

$$(1)\qquad ax + by + cz + \ldots + gs + ht + \ldots + iu + jv,$$

où

$$(2)\qquad x,\ y,\ z,\ \ldots,\ s,\ t,\ \ldots,\ u,\ v$$

désignent les variables, et

$$(3)\qquad a,\ b,\ c,\ \ldots,\ g,\ h,\ \ldots,\ i,\ j$$

des constantes en même nombre qui sont les *coefficients* de la forme.

Il convient de concevoir ces deux sortes de quantités comme nous venons de les écrire, c'est-à-dire comme se correspondant chacune à chacune dans deux *files* parallèles dont elles sont les *éléments*, et qui ont pour *longueur* commune le nombre des unes ou des autres.

La forme (1) pouvant être écrite aussi bien

$$xa + yb + zc + \ldots + sg + th + \ldots + ui + vj,$$

il y a parité parfaite entre les deux files (2), (3) relativement à sa structure. Cette réciprocité entre les variables et les coefficients appartient exclusivement aux formes linéaires, et imprime à leur théorie un caractère tout à fait spécial.

L'opération consistant à construire l'expression (1) au moyen des files de longueurs égales (2), (3) a beaucoup d'analogie avec la multiplication de deux facteurs, et se présente à chaque instant dans notre théorie. Nous l'appellerons l'*induction* mutuelle de ces deux files; l'expression (1), résultat de cette opération, est l'*induit* de ces deux files *inductrices*.

3. *Une forme linéaire telle que* (1) *s'évanouit, quelles que soient les valeurs de ses coefficients, quand on attribue zéro pour valeur particulière à chaque variable*; c'est évident.

Mais pour qu'elle s'évanouisse identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs particulières attribuées aux variables, il faut et il suffit que tous ses coefficients soient nuls.

Il faut effectivement, en particulier, que la forme s'évanouisse pour $y = z = \ldots, s = t = \ldots = u = v = 0$, x non $= 0$, ce qui entraîne $a = 0$. Il faut, de même, que l'on ait aussi

$$b = c = \ldots = g = h = \ldots = i = j = 0.$$

La condition posée est donc nécessaire; il est évident, d'ailleurs, qu'elle est suffisante.

Dans beaucoup d'autres circonstances, nous aurons à distinguer, comme ici, les files dont les éléments sont tous nuls de celles où quelqu'un d'eux ne l'est pas; nous dirons les premières *vanescentes;* les dernières *invanescentes.*

4. Un *système* de formes linéaires est un ensemble de fonctions de cette espèce en nombre quelconque, qui dépendent toutes des mêmes variables, et que l'on considère simultanément; il peut, à la rigueur, ne contenir qu'une seule forme.

On écrit toujours dans le même ordre les variables de chaque forme, et habituellement les formes les unes au-dessus des autres, de manière à avoir pour type d'un système de m formes $f_1, f_2, \ldots, f_m$ aux n variables (2),

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + g_1 s + h_1 t + \ldots + i_1 u + j_1 v, \\ f_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + g_2 s + h_2 t + \ldots + i_2 u + j_2 v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m = a_m x + b_m y + c_m z + \ldots + g_m s + h_m t + \ldots + i_m u + j_m v, \end{array}\right.$$

où les termes semblables s'alignent dans le sens vertical.

Il est avantageux de faire habituellement abstraction des variables et de concevoir le système, par ce que nous appellerons son *abaque*, c'est-à-dire par sa notation ci-dessus, réduite aux coefficients des formes laissés aux places qu'ils y occupent :

$$(5)\qquad \left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1 & h_1 & \ldots & i_1 & j_1, \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & g_2 & h_2 & \ldots & i_2 & j_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & g_m & h_m & \ldots & i_m & j_m. \end{matrix}\right.$$

Cet abaque affecte ainsi la disposition d'un quadrillage rectangulaire; on peut le décomposer en m files horizontales de même longueur (**2**) ou *lignes* ayant chacune pour éléments les coefficients d'une même forme, et aussi bien en n files verticales de longueurs égales ou *colonnes*, ayant chacune pour éléments les coefficients d'une même variable dans les diverses formes du système.

La *largeur* et la *hauteur* de l'abaque sont respectivement les longueurs de ses lignes et de ses colonnes; toutes deux, indistinctement, sont ses *dimensions*.

Une file, et même un seul élément, sont des abaques dont une dimension ou bien toutes deux se réduisent à 1.

5. Si dans une forme linéaire

$$(6)\qquad F_1 = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m$$

aux m variables $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, on remplace ces dernières par les formes de mêmes indices respectivement, dans le système (4) on en obtient une nouvelle f_1' également linéaire aux mêmes variables (2), qui est *composée* des formes *simples* (4) et de la *composante* (6).

Une forme composée résulte ainsi de l'induction (**2**) des formes simples considérées en file

$$f_1, f_2, \ldots, f_m,$$

et de la file

$$(7)\qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

des coefficients de la composante, qui a même longueur. Ses coefficients sont aussi respectivement les induits de la file (7) par les diverses colonnes de l'abaque (5) des formes simples. Nous dirons que la file de ces coefficients est l'*induit* de la file (7) et de l'abaque (5) *par les colonnes* de celui-ci.

En composant successivement ainsi les formes simples (4) avec M composantes linéaires aux m mêmes variables $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$,

$$(8)\quad \begin{cases} F_1 = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m, \\ F_2 = \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \ldots + \mu_m\varphi_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_M = \varpi_1\varphi_1 + \varpi_2\varphi_2 + \ldots + \varpi_m\varphi_m, \end{cases}$$

on obtient, au lieu d'une seule forme composée, un système de M formes

$$(9)\qquad f'_1, f'_2, \ldots, f'_M,$$

qui est *composé* du système simple (4) et du système *composant* (8).

Le système composé peut être considéré comme obtenu en induisant, la file des formes simples, et l'abaque du système composant, *par ses lignes*.

Chaque ligne de l'abaque du système composé (9) résulte, comme nous l'avons dit, de l'induction de l'abaque du système simple par ses colonnes, et de la ligne correspondante de l'abaque du système composant, ce que nous exprimerons en disant que l'abaque du système composé est l'*induit, colonne à ligne, de l'abaque du système simple par celui du composant.*

6. Pour exprimer qu'une forme donnée peut être engendrée par la composition de formes simples données avec quelque composante linéaire, nous dirons qu'elle est *agrégée à ces formes ou bien à leur système*. Nous dirons de même qu'un système est *agrégé* à un autre s'il peut être considéré comme résultant de sa composition avec quelque système composant de formes linéaires.

Ces dénominations sont utiles, parce qu'elles dispensent de mentionner la forme ou le système composant, dont il y a effectivement lieu de faire souvent abstraction. Quelquefois, cependant, il faut y avoir égard : nous dirons alors que les coefficients de la forme composante dans le premier cas sont les *multiplicateurs* ou *éléments de la file d'agrégation* de la forme composée aux formes simples données ou à leur système; que les coefficients du système composant dans le second cas forment l'*abaque d'agrégation* du système composé au système simple.

Quand on fait ainsi abstraction des formes composantes pour ne considérer que leurs coefficients, il est plus commode de concevoir en colonne, comme sont écrites les formes simples, les éléments de chaque file d'agrégation. L'abaque d'agrégation a ainsi pour colonnes les lignes de l'abaque du système composant.

Ces définitions font saisir immédiatement ce que nous voudrons exprimer en disant quelquefois qu'une file d'éléments est agrégée à quelques autres (de même longueur) ou à leur abaque, par les files de ce même sens, avec telle ou telle file d'agrégation : qu'un abaque est agrégé à un autre ayant une dimension commune avec lui, par les files de cette dimension, avec tel ou tel abaque d'agrégation.

Une file vanescente (3) *est agrégée à telles autres* (*de même longueur*) *que l'on voudra;* car des multiplicateurs tous nuls composent évidemment une file d'agrégation.

Une file agrégée à quelques autres l'est aussi aux mêmes accompagnées de telles autres que l'on voudra; car on obtient évidemment une file d'agrégation de la première file considérée à toutes les autres, en adjoignant à sa file d'agrégation, avec celles du premier groupe, autant de zéros qu'il y a de files dans le second groupe.

7. Il est évident qu'*un système de formes linéaires* (*ou abaque*) *agrégé à un autre qui l'est à un troisième est aussi agrégé à ce dernier.*

8. Nous dirons que deux systèmes de formes linéaires ou leurs abaques *par les lignes* sont *équivalents,* si chacun d'eux est agrégé à l'autre.

D'après la remarque précédente : *deux systèmes dont chacun est équivalent à un même troisième le sont aussi l'un à l'autre.*

9. Un système donné (ou abaque) est *réductible* ou *irréductible,* selon qu'il est possible ou non de trouver quelque système de formes (ou de files) en nombre moindre, auquel il soit agrégé. Nous considérerons aussi comme réductible un système constitué par une seule forme dont la file des coefficients est vanescente.

D'après cette définition, *deux systèmes irréductibles équivalents contiennent nécessairement des formes en nombres égaux.*

10. Nous introduirons un nouveau terme dans le langage en disant que deux files d'éléments sont en *symptose* (1), si elles ont même longueur et un induit nul (**2**); qu'une file est en *symptose* avec un abaque *par ses files de tel sens désigné*, si elle l'est avec chacune des files en question, ou plus brièvement, si l'induit de cette file et de l'abaque par ses files du sens considéré (**5**) est une file vanescente.

11. *Un abaque de dimensions inégales étant donné, on peut toujours mettre en symptose avec lui par ses files les plus longues quelque file invanescente; et même il y a dans cette file un groupe d'éléments en nombre au moins égal à la différence des dimensions de l'abaque, dont on peut choisir arbitrairement les valeurs.*

S'il s'agit, par exemple, de l'abaque (5), et si l'on y suppose $m < n$, la recherche des éléments

$$(10) \qquad x,\ y,\ z,\ \ldots,\ s,\ t,\ \ldots,\ u,\ v$$

de toute file de longueur n en symptose avec lui par les lignes dépendra de la résolution des m équations

$$(11)\left\{\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+\ldots+g_1s+h_1t+\ldots+i_1u+j_1v=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+\ldots+g_2s+h_2t+\ldots+i_2u+j_2v=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_mx+b_my+c_mz+\ldots+g_ms+h_mt+\ldots+i_mu+j_mv=0, \end{array}\right.$$

(1) De σύν, ensemble, πτῶσις, chute. Un point *tombe* en quelque sorte sur un plan, sur une droite, s'il y a ainsi *symptose* entre la file de ses coordonnées homogènes et celle des coefficients de l'équation du plan, ou bien celles des coefficients des deux équations de la droite. Un plan *tombe* aussi sur 1, 2 ou 3 points, s'il y a symptose entre la file des coefficients de son équation et celles des coordonnées de ces points, etc. Ce sont des considérations de ce genre qui me font proposer cette dénomination pour une relation qui se présente très fréquemment dans notre théorie.

et nous avons à prouver qu'elles admettent toujours quelque file de solutions dont les valeurs de $n-m$ au moins peuvent être choisies à volonté.

1° *Notre proposition est vraie quand l'abaque contient une seule ligne, sa première, par exemple.*

Si d'abord cette ligne est vanescente, l'équation unique à résoudre

$$a_1 x + b_1 y + \ldots = 0$$

est satisfaite pour toutes les valeurs possibles de $x, y, \ldots$ (**3**), et dans la file (10) il y a bien $n-1$ et même n éléments tout à fait arbitraires.

Dans le cas contraire, soit a_1 un de ses éléments non nuls. On peut alors diviser par a_1 tous les termes de l'équation précédente et l'écrire

$$(12) \qquad x = -\frac{b_1}{a_1} y - \frac{c_1}{a_1} z - \ldots - \frac{j_1}{a_1} v.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que l'on satisfera à cette équation en attribuant des valeurs quelconques $y', z', \ldots, v'$ aux $n-1$ derniers éléments de la file (10), et en prenant le premier x égal à

$$-\frac{b_1}{a_1} y' - \frac{c_1}{a_1} z' - \ldots - \frac{j_1}{a_1} v'.$$

2° *Elle est vraie pour l'abaque* (5) *tout entier, si elle l'est pour un abaque de $m-1$ lignes et de n ou $n-1$ colonnes.*

Si la première ligne de l'abaque est vanescente, toutes les files de valeurs des quantités (10) satisfaisant aux $m-1$ dernières équations (11) satisferont forcément aussi à la première. Or, d'après l'hypothèse, cette condition laisse arbitraires $n-(m-1) = n-m+1$ de ces éléments au moins et à plus forte raison $n-m$ au moins.

Si cette ligne est invanescente, soit encore a_1 un de ses éléments non nuls. Comme nous venons de le voir (1°), on satisfera à la première équation (11) en choisissant arbitrairement les valeurs de $y, z, \ldots, v$, et en donnant simultanément à x la valeur déterminée par la formule (12). De plus, toutes ces valeurs satisferont aux $m-1$ autres équations, si, en les y portant, les égalités résultantes

$$\left(b_2 - a_2\frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(c_2 - a_2\frac{c_1}{a_1}\right)z + \ldots + \left(j_2 - a_2\frac{j_1}{a_1}\right)v = 0,$$
$$\left(b_3 - a_3\frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(c_3 - a_3\frac{c_1}{a_1}\right)z + \ldots + \left(j_3 - a_3\frac{j_1}{a_1}\right)v = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\left(b_m - a_m\frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(c_m - a_m\frac{c_1}{a_1}\right)z + \ldots + \left(j_m - a_m\frac{j_1}{a_1}\right)v = 0$$

ont lieu, c'est-à-dire si l'on a pris pour $y, z, \ldots, v$ une file de $n-1$ éléments en symptose par les lignes avec l'abaque des coefficients de ces quantités dans ces égalités, abaque qui n'a plus que $m-1$ lignes et $n-1$ colonnes. Or c'est ce qui est réalisable d'après l'hypothèse, cela même en choisissant arbitrairement les valeurs de $n-1-(m-1) = n-m$ certains de ces éléments.

3° *Notre proposition est donc générale,* car le raisonnement ci-dessus en réduit successivement la vérification à l'examen des cas où dans l'abaque il y a $m-1, m-2, \ldots, 2, 1$ lignes avec $n-1, n-2, \ldots, n-m+2, n-m+1$ colonnes au moins, cas dans le dernier desquels son exactitude a été établie directement (1°).

12. Nous dirons qu'un abaque *est vanescent ou invanescent par ses files de tel sens déterminé,* selon qu'il est possible ou non d'assigner une file invanescente en symptose avec lui par ses files de l'autre sens.

Un abaque vanescent par les files d'un certain sens l'est encore si on lui ajoute d'autres files quelconques du même sens, ou bien si on lui en retranche quelques-unes de l'autre sens. Car on obtient évidemment une file invanescente en symptose avec lui par ses files de l'autre sens, en ajoutant quelques zéros à celle qui est supposée être en symptose avec lui avant l'adjonction de ses nouvelles files.

Un abaque invanescent par les files d'un certain sens ne cesse pas de l'être si l'on vient à en supprimer quelques-unes ou bien à en ajouter arbitrairement dans l'autre sens. Car si l'abaque ainsi tronqué était vanescent, l'abaque tout entier le serait aussi par ce qui précède, ce qui est contraire à ce que l'on suppose.

Il résulte en particulier du lemme ci-dessus (**11**) qu'*un abaque de* *dimensions inégales est toujours vanescent par ses files les moins longues, (ou les plus nombreuses)*. En exprimant l'invanescence d'un abaque, on peut donc se dispenser de spécifier le sens des files pour lequel elle a lieu; il ne peut effectivement s'agir alors que des plus longues.

13. Un abaque est *carré* quand ses deux dimensions sont égales; il convient alors de choisir le mot *hauteur* pour désigner leur valeur commune.

Un abaque carré ne peut être vanescent, ni par suite invanescent, dans un sens, sans l'être en même temps dans l'autre sens.

L'abaque (5), par exemple, étant carré avec m files dans chaque sens, supposons qu'il soit vanescent par les colonnes, et que la file (10) où x, par exemple, a une valeur différente de zéro, soit en symptose avec lui par les lignes. On aura alors les relations (11).

Maintenant (**11**), on peut assigner une file invanescente de m éléments

$$\lambda_1, \; \lambda_2, \; \ldots, \; \lambda_m, \tag{12 bis}$$

avec laquelle soit en symptose chacune des $n-1=m-1$ dernières colonnes de cet abaque. Cela posé, *induisons* par cette file les m relations (11), c'est-à-dire ajoutons-les membre à membre, préalablement multipliées par les éléments correspondants de cette file. Il viendra

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m) x + 0 . y + \ldots + 0 . v = 0,$$

d'où

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \ldots + a_m \lambda_m = 0,$$

puisque x non $= 0$. La file invanescente (12 *bis*), qui était déjà en symptose avec les $m-1$ dernières colonnes, l'est donc encore avec la première, et notre abaque est vanescent par les lignes.

Pour un abaque carré, il est donc inutile de spécifier les files par lesquelles il est vanescent ou invanescent.

14. *Dans un sens donné de l'abaque* (5), *il existe ou non quelque file agrégée* (**6**) *à ses parallèles, suivant que cet abaque est vanescent ou invanescent par les files dont il s'agit.*

Supposons, par exemple, que la première ligne soit agrégée aux autres avec $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ pour file d'agrégation. On aura, pour une colonne quelconque notée par la lettre k, la relation

$$k_1 = \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 + \ldots + \lambda_m k_m,$$

qui peut s'écrire

$$1.k_1 - \lambda_2 k_2 - \lambda_3 k_3 - \ldots - \lambda_m k_m = 0.$$

L'abaque est donc en symptose par les colonnes avec la file invanescente

$$1, \quad -\lambda_2, \quad -\lambda_3, \quad \ldots, \quad -\lambda_m,$$

partant vanescent par les lignes.

Supposons au contraire notre abaque vanescent par les lignes, et par exemple en symptose par les colonnes avec la file invanescente λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Si l'élément λ_1, pour fixer les idées, est l'un de ceux qui ne sont pas nuls, on pourra diviser par λ_1 les relations telles que

$$\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \ldots + \lambda_m k_m = 0,$$

qui ont lieu pour toutes les colonnes de l'abaque et les écrire sous la forme

$$k_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} k_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} k_3 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1} k_m.$$

On voit ainsi que la première ligne est agrégée aux autres avec

$$-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \quad -\ldots, \quad -\frac{\lambda_m}{\lambda_1}$$

pour multiplicateurs d'agrégation.

On remarquera que, *dans un abaque vanescent par certaines files, on peut considérer l'une d'elles comme agrégée à ses parallèles si elle correspond à quelque élément non nul dans une file invanescente en symptose avec l'abaque par ses files de l'autre sens.*

15. *Le système des formes linéaires* (4) *est réductible ou irréductible selon que, par les lignes, son abaque est vanescent ou invanescent.*

Quand $m = 1$, cet énoncé ne fait que reproduire la définition du n° **9**.

Supposons donc $m > 1$, et ce système agrégé à celui des $m' < m$ formes

$$f'_1, f'_2, \ldots f'_{m'},$$

par les identités

$$\begin{aligned}
f_1 &= \lambda_1 f'_1 + \lambda_2 f'_2 + \ldots + \lambda_{m'} f'_{m'},\\
f_2 &= \mu_1 f'_1 + \mu_2 f'_2 + \ldots + \mu_{m'} f'_{m'},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_m &= \varpi_1 f'_1 + \varpi_2 f'_2 + \ldots + \varpi_{m'} f'_{m'}.
\end{aligned}$$

L'abaque des multiplicateurs $\lambda, \ldots, \varpi_m$ étant plus haut que large, à cause de $m > m'$, on peut assigner une file invanescente de m éléments

$$(13) \qquad \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$$

en symptose avec lui par les colonnes (**11**).

En induisant donc par cette file les relations précédentes, il viendra l'identité

$$(14) \qquad \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2 + \ldots + \theta_m f_m = 0,$$

en vertu de laquelle (**3**) les induits de la file (13) et de l'abaque (5) par ses colonnes sont tous nuls. Cet abaque est donc, par les colonnes, en symptose avec la file invanescente (13), c'est-à-dire vanescent par les lignes (**12**).

Si, au contraire, l'abaque (5) est vanescent par les lignes, quelqu'une d'elles, la première par exemple, est agrégée aux autres (**14**), ou, ce qui revient au même, la première forme f_1 du système (4) est agrégée aux $m - 1$ autres. Or, chacune de ces $m - 1$ formes est agrégée à leur propre système à cause des identités évidentes

$$\begin{aligned}
f_2 &= 1.f_2 + 0.f_3 + \ldots + 0.f_m,\\
f_3 &= 0.f_2 + 1.f_3 + \ldots + 0.f_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_m &= 0.f_2 + 0.f_3 + \ldots + 1.f_m.
\end{aligned}$$

Le système (4) est donc agrégé à celui que constituent ses $m-1$ dernières formes seulement, partant réductible.

16. *Dans un système irréductible, le nombre des formes ne peut surpasser celui des variables,* car sinon l'abaque du système serait plus haut que large et, en conséquence, vanescent par les lignes (**12**).

On peut s'en assurer autrement en remarquant que chacune des n variables $x, y, z, \ldots v$ peut être considérée comme étant une forme linéaire, et que toutes ensemble elles constituent un système spécial auquel tout autre est évidemment agrégé. Si donc m est $> n$, le système (4) est agrégé à un autre dont les formes sont en moindre nombre, partant réductible.

17. *Pour qu'une forme*

$$f = ax + by + cz + \ldots + gs + ht + \ldots + iu + jv$$

soit agrégée au système (4) *supposé irréductible, il est nécessaire et suffisant que l'abaque de $m+1$ lignes obtenu en adjoignant celle des coefficients de f à l'abaque* (5) *soit vanescent par les lignes.*

La condition posée est nécessaire, car alors dans l'abaque considéré de $m+1$ lignes, la première est agrégée aux autres (**14**).

Si, au contraire, on suppose cet abaque vanescent par les lignes, soit

$$\theta, \ \theta_1, \ \theta_2 \ \ldots \ \theta_m$$

une file invanescente en symptose avec lui par les colonnes Le multiplicateur θ ne peut être nul ; car, s'il l'était, quelque autre appartenant à la file de m éléments

$$\theta_1, \ \theta_2, \ \ldots, \ \theta_m$$

ne le serait pas, et comme cette file, ainsi invanescente, est alors en symptose par les colonnes avec l'abaque (5), celui-ci serait vanescent par les lignes et le système (4) réductible, contrairement à l'hypothèse.

Dans l'abaque considéré de $m+1$ lignes, la première est donc agrégée aux autres, ou bien, ce qui revient au même, la forme f est agrégée au système (4).

18. *Si le système (4) est irréductible et contient autant de formes qu'il y a de variables, la forme f, quelle qu'elle soit, lui est nécessairement agrégée;* car alors l'abaque de $m+1$ lignes considéré ci-dessus est plus haut que large, et en conséquence vanescent par les lignes (**12**).

19. *Si le système (4) est irréductible et agrégé à un autre système irréductible de m formes aussi*

$$f'_1,\ f'_2,\ \ldots,\ f'_m,$$

réciproquement ce dernier est agrégé au proposé et tous deux, par suite, sont équivalents.

Par hypothèse, on a m identités telles que

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda_1 f'_1 + \lambda_2 f'_2 + \ldots + \lambda_m f'_m, \\ f_2 &= \mu_1 f'_1 + \mu_2 f'_2 + \ldots + \mu_m f'_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m &= \varpi_1 f'_1 + \varpi_2 f'_2 + \ldots + \varpi_m f'_m. \end{aligned}$$

où les multiplicateurs d'agrégation $\lambda_1, \ldots, \varpi_m$ forment un abaque carré de hauteur m.

Cela posé, on peut assigner une file invanescente de m éléments

$$(15) \qquad \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_m$$

qui soit en symptose avec chacune des $m-1$ dernières colonnes de l'abaque d'agrégation (**11**), et si l'on induit par cette file les identités précédentes, il viendra cette autre

$$(16) \qquad \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2 + \ldots + \theta_m f_m = \Theta f'_1,$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$\theta_1\lambda_1 + \theta_2\mu_2 + \ldots + \theta_m\varpi_m = \Theta.$$

Or Θ ne peut être nul, car sinon l'identité précédente se réduirait à

$$\theta_1 f_1 + \theta_2 f_2 + \ldots + \theta_m f_m = 0,$$

en vertu de laquelle la file (15) serait en symptose avec l'abaque (4) par ses colonnes; comme elle est invanescente, cet abaque serait vanescent et le système (4) réductible contrairement à l'hypothèse (**15**).

On peut donc diviser par Θ tous les termes de l'identité (16) et l'écrire

$$f'_1 = \frac{\theta_1}{\Theta} f_1 + \frac{\theta_2}{\Theta} f_2 + \ldots + \frac{\theta_m}{\Theta} f_m.$$

La forme f'_1 est donc agrégée au système (4), et l'on prouverait de la même manière qu'il en est ainsi pour chacune des autres formes du second des systèmes considérés.

20. *Si le système* (4) *est réductible sans que tous les éléments de son abaque soient nuls, on peut constituer un système irréductible équivalent, avec une partie seulement des formes qui le composent, formes dont le nombre n'excède pas le plus petit des entiers m, n.*

Écrivons les formes proposées dans un ordre quelconque, en commençant par une de celles dont les coefficients sont supposés ne pas être tous nuls, puis biffons successivement toute forme agrégée au système partiel constitué par les formes précédemment écrites, mais non biffées. L'opération achevée, les formes considérées se trouvent réparties entre deux systèmes partiels contenant, l'un $(S)_\mu$, les formes f', f'', ..., $f^{(\mu)}$ qui n'ont pas été biffées, l'autre $(S)_\nu$ celles qui l'ont été.

Le système $(S)_\mu$ est irréductible, car si une file invanescente θ', θ'', ..., $\theta^{(\mu)}$ était en symptose avec les colonnes de son abaque, on aurait l'identité

$$\theta' f' + \theta'' f'' + \ldots + \theta^{(\mu)} f^{(\mu)} = 0,$$

qui se réduirait à

$$\theta' f' + \theta'' f'' + \ldots + \theta^{(k)} f^{(k)} = 0,$$

en appelant $\theta^{(k)}$ le premier des multiplicateurs θ', ..., $\theta^{(\mu)}$ qui ne sont pas nuls, quand on les considère dans l'ordre des accents décroissants.

D'où l'on tirerait, en divisant par $\theta^{(k)}$ qui n'est pas nul,

$$f^{(k)} = -\frac{\theta'}{\theta^{(k)}}f' - \frac{\theta''}{\theta^{(k)}}f'' - \ldots,$$

et la forme $f^{(k)}$ serait agrégée à celles qui la précèdent dans le système $(S)_\mu$, ce qui n'est pas, puisque cette forme n'a pas été biffée.

Le même système $(S)_\mu$ est agrégé au proposé, parce qu'il ne contient que des formes lui appartenant; celui-ci l'est à $(S)_\mu$, parce qu'il est composé des formes de $(S)_\mu$ évidemment agrégées à elles-mêmes, et de celles de $(S)_\nu$ qui le sont aussi aux mêmes, parce qu'elles ont été biffées. Le système irréductible partiel $(S)_\mu$ est donc équivalent au proposé.

Finalement μ, nombre des formes de $(S)_\mu$, ne peut surpasser n, nombre des variables, parce que ce système est irréductible (**16**), ni m, nombre des formes du proposé, parce que toute forme de $(S)_\mu$ appartient naturellement à ce dernier.

Selon l'ordre dans lequel les formes considérées auront été écrites, le système *réduit* $(S)_\mu$ pourra contenir tel ou tel groupe des formes du proposé; mais, quoique constitués par des formes différentes, ces systèmes réduits sont équivalents entre eux, parce qu'ils le sont tous au proposé, et ils contiennent des formes en nombres égaux parce qu'ils sont équivalents entre eux et irréductibles.

21. Dans un abaque tel que (5), nous appellerons *diagonale* tout groupe d'éléments en nombre égal à la moindre dimension, et tellement choisis que deux quelconques ne tombent à la fois ni dans une même ligne, ni dans une même colonne. Cela posé :

Le système (4) est irréductible si m est $\leqq n$ et si, dans m colonnes de son abaque, tous les éléments sont nuls, ceux d'une seule diagonale exceptés.

Supposons, pour fixer les idées, que, s étant la $m^{\text{ième}}$ variable, les éléments $a_1, b_2, c_3, \ldots, g_m$ de l'abaque, qui composent une certaine diagonale, soient tous différents de zéro, mais que dans leurs colonnes tous les autres soient nuls. Si une file de m éléments est en symptose avec l'abaque par ses colonnes, on a en particulier

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots + a_m\lambda_m = 0,$$

d'où $a_1\lambda_1 = 0$, parce que $a_2 = a_3 = \ldots = a_m = 0$ par hypothèse, puis $\lambda_1 = 0$, à cause de a_1 non $= 0$; et, en considérant les $m-1$ colonnes venant après la première dans l'abaque (5), on prouverait de même que l'on doit avoir aussi

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Ainsi aucune file ne peut être en symptose avec les colonnes de l'abaque (5), à moins d'être vanescente; cet abaque est donc invanescent par les lignes et le système (4) est irréductible.

Il nous faut encore un mot pour désigner les systèmes dont l'irréductibilité tient à la cause qui vient d'être analysée et s'aperçoit à première vue. Nous dirons qu'ils sont en *réduction apparente;* et, pour le système considéré ci-dessus, nous nommerons *saillantes,* tant la diagonale en question $a_1, b_2, c_3, \ldots, g_m$ que les m colonnes dont ses éléments font partie, et que les m variables $x, y, z, \ldots, s$ dont les coefficients forment ces colonnes.

22. *Si la forme*

$$f = ax + by + cz + \ldots + gs + ht + \ldots + iu + jv$$

est agrégée au système (4) *supposé en réduction apparente avec*

$$a_1,\ b_2,\ c_3,\ \ldots,\ g_m$$

pour diagonale saillante, la file d'agrégation est

$$\frac{a}{a_1},\ \frac{b}{b_2},\ \frac{c}{c_3},\ \ldots,\ \frac{g}{g_m}.$$

En appelant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les multiplicateurs inconnus de cette file, on doit avoir d'abord

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m,$$

d'où $a = \lambda_1 a_1$, puisque $a_2 = a_3 = \ldots = a_m = 0$; puis $\lambda_1 = \frac{a}{a_1}$, à cause de a_1, non $= 0$, ce qui permet de diviser par a_1 les deux membres de l'égalité précédente. Et de même $\lambda_2 = \frac{b}{b_2}, \dots$

23. *Si, dans la forme f, $m-1$ des variables saillantes du même système* (4) *ont des coefficients nuls, il faut et il suffit, pour qu'elle soit agrégée à ce système, qu'elle le soit à celle de ses formes où l'autre variable saillante a un coefficient différent de zéro.*

Si par exemple $b, c, \dots, g$, coefficients dans f des $m-1$ variables, $y, z, \dots, s$, qui sont saillantes dans le système (4), sont tous nuls, l'agrégation de f à ce système exige, par ce qui précède, que l'on ait pour la file d'agrégation

$$\lambda_1 = \frac{a}{a_1}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_m = 0,$$

d'où l'identité

$$f = \frac{a}{a_1} f_1,$$

en vertu de laquelle f est agrégée à f_1. Si d'ailleurs cette identité a lieu, f est certainement agrégée au système considéré.

24. *Pour que deux systèmes en réduction apparente aux mêmes variables saillantes soient équivalents, il faut et il suffit que chaque forme de l'un soit individuellement équivalente à son homologue dans l'autre, c'est-à-dire à celle où la même variable saillante a un coefficient différent de zéro.*

Ce théorème résulte immédiatement du précédent, puisque, dans toute forme de l'un des systèmes proposés, les coefficients de $m-1$ variables saillantes de l'autre se réduisent à zéro.

25. *Si le système* (4) *est irréductible, cas auquel $m \leqq n$* (**16**), *les coefficients d'un groupe au moins de m variables forment un abaque partiel carré invanescent* (**13**), *et l'on peut assigner un système en réduction apparente équivalent au proposé, où ces m variables soient saillantes.*

1° On peut *réduire* l'abaque (5) par les colonnes (**20**), c'est-à-dire en extraire de celles-ci n', nombre non supérieur à m ni à n, constituant un abaque partiel invanescent par les colonnes et auquel toutes les autres colonnes du proposé soient agrégées.

On ne peut avoir $n' < m$; car $a, b, c, \ldots, e$ étant les lettres affectées à la notation de ces n' colonnes, on aurait pour toute autre colonne k de l'abaque les relations d'agrégation

$$\begin{array}{l} k_1 = \lambda a_1 + \mu.b_1 + \nu c_1 + \ldots + \varpi e_1, \\ k_2 + \lambda a_2 + \mu.b_2 + \nu c_2 + \ldots + \varpi e_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ k_m + \lambda a_m + \mu.b_m + \nu c_m + \ldots + \varpi e_m, \end{array}$$

$\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varpi$ étant les multiplicateurs d'agrégation ; et, en induisant ces égalités par quelque file invanescente de m multiplicateurs θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_m$ en symptose avec chacune de ces n' colonnes (**11**), il viendrait aussi

$$\theta_1 k_1 + \theta_2 k_2 + \ldots + \theta_m k_m = 0.$$

Il existerait ainsi une file invanescente en symptose avec l'abaque (5) par ses colonnes, et, contrairement à l'hypothèse, le système (4) serait réductible. Le nombre n' ne pouvant être ni supérieur ni inférieur à m lui est donc égal, et l'abaque partiel de ces $n' = m$ colonnes est aussi carré et invanescent.

2° Supposons actuellement que l'abaque partiel des coefficients des m premières variables $x, y, z, \ldots, s$ soit l'un de ceux dont l'invanescence vient d'être établie, et induisons le système (4) par une colonne invanescente de n multiplicateurs

$$(17) \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

en symptose avec celles des coefficients des $m - 1$ variables y, $z, \ldots, s$ (**11**). Il en résultera une forme agrégée à ce système

$$f'_1 = a'_1 x + 0.y + 0.z + \ldots + 0.s + h'_1 t + \ldots + i'_1 u + j'_1 v,$$

où $a'_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m$ ne peut s'évanouir, car autrement la file (17) serait aussi en symptose avec la première colonne de l'abaque (5), et, contrairement à ce que nous avons supposé, l'abaque carré de ces m premières colonnes serait vanescent.

En opérant de même, on trouvera $m-1$ autres formes $f'_2, f'_3, \ldots, f'_m$ toutes agrégées, comme la précédente, au système proposé et formant avec elle un système de m formes en réduction apparente aux variables saillantes $x, y, z, \ldots, s$. Ce système étant irréductible et agrégé au proposé, inversement celui-ci lui est agrégé et tous deux sont équivalents (**19**).

ÉQUATIONS LINÉAIRES SIMULTANÉES.

26. Une équation quelconque étant donnée, on réduit habituellement son second membre à zéro en faisant passer dans l'autre tous les termes qu'il contenait; il vient alors dans cet autre membre une expression contenant les inconnues, qui en est une certaine fonction quand on les considère comme autant de variables indépendantes, et que l'on nomme le *premier membre* de l'équation dont il s'agit.

L'équation est dite *linéaire* quand son premier membre ainsi défini est une fonction du premier degré, *linéaire et homogène*, quand il se réduit à une forme linéaire.

Plusieurs équations auxquelles il faut satisfaire à la fois, par des valeurs convenables attribuées à un certain ensemble d'inconnues qu'elles contiennent, constituent un *système d'équations simultanées* entre ces inconnues. Un groupe de valeurs des inconnues satisfaisant en même temps à toutes ces équations sera ce que nous appellerons une *file de solutions* de leur système.

Nous allons traiter des systèmes d'équations linéaires dont nous ramènerons toute la théorie à celle des systèmes homogènes, et nous emploierons pour ces derniers les dénominations d'*agrégés, équivalents, réductibles, irréductibles*, etc., dans toutes les circonstances où elles sont applicables aux formes linéaires qui constituent leurs premiers membres (n^{os} **6** et suivants).

On remarquera que la résolution d'un système d'équations linéaires et homogènes est au fond la même recherche que celle de toutes les files de quantités qui sont en symptose par les lignes avec *son abaque*, c'est-à-dire celui des premiers membres des équations qui le composent.

27. *Étant donné deux systèmes d'équations linéaires et homogènes*

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_m = 0,$$

$$(2) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_M = 0,$$

le second admet toutes les files de solutions du premier, s'il lui est agrégé.

Soient F un quelconque des premiers membres des équations (2) et $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m$ sa file d'agrégation aux premiers membres des équations de l'autre système; on a, par hypothèse,

$$F = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m,$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux inconnues, considérées un instant comme autant de variables indépendantes. On a donc en particulier $F = 0$, pour les valeurs de ces inconnues qui constituent une file de solutions du premier système, car alors les formes f_1, $f_2, \ldots, f_m$ prennent toutes des valeurs nulles.

Dans ce cas, on dit souvent que le second système est une *conséquence* du premier, ou bien encore que celui-ci *entraîne* l'autre.

28. *Les systèmes* (1), (2) *admettent les mêmes solutions s'ils sont équivalents.*

Ce théorème est un simple corollaire du précédent et ramène immédiatement la résolution d'un système réductible à sa réduction (**20**) suivie de la résolution du système équivalent. Nous ne considérerons donc que des systèmes irréductibles.

La réduction à laquelle nous faisons allusion n'est toutefois pas applicable dans le cas où les coefficients des premiers membres des équations proposées sont tous nuls. Mais alors chacun de ces premiers membres est nul identiquement, et les équations sont *identiques*, c'est-à-dire admettent pour solutions toutes les files imaginables de valeurs des inconnues.

29. *Soit*

$$(3)\quad \begin{cases} f_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + g_1 s + h_1 t + \ldots + i_1 u + j_1 v = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m = a_m x + b_m y + c_m z + \ldots + g_m s + h_m t + \ldots + i_m u + j_m v = 0. \end{cases}$$

un système irréductible de m équations linéaires et homogènes aux n inconnues $x, y, \ldots, v$ pour lequel on a, par suite, $m \leqq n$ (**16**).

Quand $m = n$, il n'admet pour solutions qu'une file vanescente.

Quand $m < n$, il admet une infinité de files de solutions dans chacune desquelles on peut attribuer des valeurs arbitraires à $n - m$ inconnues, *si toutefois on les a choisies de telle sorte que l'abaque des coefficients des m autres soit invanescent* (**25**), *et cette attribution détermine entièrement les valeurs des m inconnues restantes.*

Si dans le cas de $m = n$ le système (3) admettait une file de solutions invanescente, son abaque, qui est en symptose avec cette file par les lignes, serait vanescent par les colonnes et aussi par les lignes puisqu'il est carré (**15**), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Supposons maintenant $m < n$; comme l'abaque du système est invanescent par les lignes d'après l'hypothèse, un groupe au moins de m de ses colonnes forme un abaque carré invanescent, et le système proposé est équivalent à quelque autre en réduction apparente, où sont saillantes les inconnues dont les coefficients forment ces m colonnes (**25**).

Soient $x, y, z, \ldots, s$ ces m inconnues et

$$
(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
A_1 x + 0.y + 0.z + \ldots + 0.s + H_1 t + \ldots + I_1 u + J_1 v = 0,\\
0.x + B_2 y + 0.z + \ldots + 0.s + H_2 t + \ldots + I_2 u + J_2 v = 0,\\
0.x + 0.y + C_3 z + \ldots + 0.s + H_3 t + \ldots + I_3 u + J_3 v = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0.x + 0.y + 0.z + \ldots + G_m s + H_m t + \ldots + I_m u + J_m v = 0,
\end{array}\right.
$$

le système équivalent en réduction apparente dont il s'agit.

Les systèmes (3) et (4) étant équivalents admettent les mêmes files de solutions (**28**). Or $A_1, B_2, \ldots, G_m$ étant tous différents de zéro, on peut diviser par ces coefficients toutes les équations du dernier système respectivement, et les écrire

$$
(5)\quad \left\{\begin{array}{l}
x = -\dfrac{H_1}{A_1} t - \ldots - \dfrac{I_1}{A_1} u - \dfrac{J_1}{A_1} v,\\
y = -\dfrac{H_2}{B_2} t - \ldots - \dfrac{I_2}{B_2} u - \dfrac{J_2}{C_2} v,\\
z = -\dfrac{H_3}{C_3} t - \ldots - \dfrac{I_3}{C_3} u - \dfrac{J_3}{C_3} v,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
s = -\dfrac{H_m}{G_m} t - \ldots - \dfrac{I_m}{G_m} u - \dfrac{J_m}{G_m} v.
\end{array}\right.
$$

Sous cette forme il est évident que les valeurs des $n-m$ inconnues $t, \ldots, u, v$ peuvent être choisies arbitrairement, et qu'ensuite les valeurs des m autres $x, y, z, \ldots, s$ sont déterminées et fournies par ces formules elles-mêmes.

50. Nous verrons plus tard (**60** *inf.*) comment les solutions du système (3) s'expriment au moyen des coefficients; mais dès à présent nous pouvons ajouter plusieurs observations utiles à ce théorème.

I. *Le système* (3) *admet toujours quelque file de solutions*, ou, en d'autres termes, *est toujours possible; parmi ces files, figure nécessairement celle dont tous les éléments sont nuls.*

Quand $m = n$, cette file vanescente de solutions est la seule qui existe; le système est dit *déterminé*.

Quand $m < n$, il y a au contraire une *infinité* de files de solutions *distinctes*, c'est-à dire dans deux quelconques desquelles une inconnue au moins n'a pas des valeurs égales. On dit le système *indéterminé;* il admet toujours alors quelque file de solutions dont les valeurs ne sont pas toutes nulles : ce qui s'accorde avec le lemme du n° **11**.

II. Quand le système est indéterminé, les inconnues se partagent en deux groupes : l'un de $n-m$ qui sont tout à fait *indéterminées*, l'autre de m dont les valeurs s'expriment au moyen de celles des précédentes par les formules (5), qui effectuent ainsi la *résolution* du système proposé *par rapport à ces m dernières inconnues*. Ce groupe de m inconnues est caractérisé par la propriété de l'abaque carré de ses coefficients d'être invanescent, condition qui suffit pour assurer la possibilité d'un semblable partage des inconnues et de la résolution correspondante des équations (3). On peut ainsi exécuter ces opérations d'autant de manières que l'on peut former d'abaques carrés invanescents avec m colonnes de l'abaque du système.

Suivant les circonstances, ce nombre peut varier de 1 à

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m},$$

nombre de combinaisons m à m des n colonnes de cet abaque.

Il importe de remarquer que la condition précitée est nécessaire.

Effectivement si l'abaque carré des coefficients de $x, y, z, \ldots, s$, par exemple, est vanescent, soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, une file invanescente en symptose avec lui par les colonnes. L'équation

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m = 0$$

admet toutes les files de solution des proposées, parce qu'elle leur est agrégée (**27**); mais, comme les coefficients des m inconnues x, y, $z, \ldots, s$ y sont tous nuls, elle se réduit à

$$(6) \qquad \mathrm{H}t + \ldots + \mathrm{I}u + \mathrm{J}v = 0$$

et les coefficients $\mathrm{H}, \ldots, \mathrm{I}, \mathrm{J}$, induits des $n - m$ dernières colonnes de l'abaque du système (3) par la file invanescente considérée, ne peuvent tous s'évanouir, sans quoi ce système serait réductible, contrairement à l'hypothèse.

Le premier membre de cette équation n'étant pas nul identiquement, elle et, par suite, le système (3) ne peuvent être satisfaits par toutes les combinaisons de valeurs des $n - m$ inconnues $t, \ldots, u, v$.

III. La file générale des solutions du système (3) est indéterminée *dans son ensemble,* et cela d'une manière plus ou moins large selon la grandeur de la différence $n - m$. Mais il peut se faire que quelques inconnues y soient *individuellement* déterminées, c'est-à-dire ne soient jamais susceptibles chacune que d'une seule et même valeur.

Si cette particularité se présente pour une certaine inconnue, x par exemple, il faut qu'elle ne puisse faire partie d'aucun groupe de $n - m$ inconnues *indéterminées,* et, pour cela, que parmi les $n - 1$ colonnes formées dans l'abaque du système (3) par les coefficients des autres inconnues $y, z, \ldots, v$ il n'en existe aucun groupe de m formant un abaque carré invanescent (II); cette condition exige que l'abaque de ces $n - 1$ colonnes soit vanescent par les lignes (**25**). Si elle est remplie, soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ une file invanescente en symptose avec chacune de ces $(n - 1)$ colonnes; les équations (3) induites par cette file donnent l'équation agrégée

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m = 0$$

qui se réduit à

$$Ax = 0,$$

où A ne peut s'évanouir, car alors la file invanescente considérée serait aussi en symptose avec la première colonne de l'abaque de notre système, et cet abaque serait vanescent par les lignes, contrairement à l'hypothèse. Il résulte de cette dernière équation que x *n'est effectivement susceptible que d'une seule valeur qui est zéro.*

51. *Toute file de n éléments agrégée à quelques files de solutions du système* (3) *est aussi une file de solutions, et si n − m files de solutions forment un abaque invanescent, la file la plus générale de n éléments qui leur est agrégée est aussi la file la plus générale des solutions des équations dont il s'agit.*

L'introduction de $n - m$ paramètres indéterminés $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$, représentant par exemple les valeurs des $n - m$ inconnues indéterminées $t, \ldots, u, v$, permet évidemment de substituer aux formules (5) les formules équivalentes

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} x = \tau H'_1 + \ldots + \upsilon I'_1 + \varphi J'_1, \\ y = \tau H'_2 + \ldots + \upsilon I'_2 + \varphi J'_2, \\ z = \tau H'_3 + \ldots + \upsilon I'_3 + \varphi J'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s = \tau H'_m + \ldots + \upsilon I'_m + \varphi J''_m, \\ t = \tau.1 + \ldots + \upsilon.0 + \varphi.0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u = \tau.0 + \ldots + \upsilon.1 + \varphi.0, \\ v = \tau.0 + \ldots + \upsilon.0 + \varphi.1, \end{array}\right.$$

où, pour simplifier l'écriture, nous avons posé

$$-\frac{H_1}{A_1} = H'_1, \ \ldots, \ -\frac{J_m}{G_m} = J'_m.$$

On voit ainsi qu'une file quelconque de solutions est agrégée aux

$n-m$ lignes de l'abaque

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{llllllllll} H'_1 & H'_2 & H'_3 & \ldots & H'_m & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I'_1 & I'_2 & I'_3 & \ldots & I'_m & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0, \\ J'_1 & J'_2 & J'_3 & \ldots & J'_m & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1, \end{array}\right.$$

irréductible par les lignes, et même, en réduction apparente, ses $n-m$ dernières colonnes étant saillantes (**21**), et que les multiplicateurs d'agrégation sont $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$. On voit en même temps que, réciproquement, toute file agrégée à cet abaque par ses lignes, chacune de celles-ci en particulier, est une file de solutions.

Considérons maintenant k files particulières quelconques de solutions des équations (3); comme elles sont agrégées aux lignes de l'abaque (8), toute autre file qui leur est agrégée l'est aussi à cet abaque par les lignes (**7**) et constitue par suite une file de solutions.

Si $k = n-m$ et si l'abaque de ces files de solutions disposées en lignes est invanescent,

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{llllllllll} x_1 & y_1 & z_1 & \ldots & s_1 & t_1 & \ldots & u_1 & v_1, \\ x_2 & y_2 & z_2 & \ldots & s_2 & t_2 & \ldots & u_2 & v_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ x_{n-m} & y_{n-m} & z_{n-m} & \ldots & s_{n-m} & t_{n-m} & \ldots & u_{n-m} & v_{n-m}, \end{array}\right.$$

il est nécessairement équivalent à l'abaque (8) par les lignes, parce qu'il en contient le même nombre en lui étant agrégé (**19**). Il en résulte que toute file de solutions est agrégée à ce dernier abaque parce qu'elle l'est à son équivalent (8).

En appelant donc $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-m}$, $n-m$ paramètres absolument indéterminés, les formules

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} x = x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_{n-m}\theta_{n-m}, \\ y = y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \ldots + y_{n-m}\theta_{n-m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ v = v_1\theta_1 + v_2\theta_2 + \ldots + v_{n-m}\theta_{n-m}, \end{array}\right.$$

qui donnent pour $x, y, \ldots, v$ les éléments de toute file agrégée aux lignes de l'abaque (9), la file d'agrégation étant $\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_{n-m}$, fournissent d'une autre manière toutes les files de solutions du système (3). Elles ont les formules (7) pour forme particulière, caractérisée par cette seule circonstance que, dans celles-ci, l'abaque des coefficients des indéterminées est en invanescence apparente; elles leur sont préférables, parce qu'elles n'établissent aucune distinction entre les diverses inconnues.

On observera en outre qu'elles donnent *une seule fois* chaque file de solutions. En effet, pour que les files de valeurs de $x, y, \ldots, v$ fournies par ces formules, pour les files $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_{n-m}$ et $\theta''_1, \theta''_2, \ldots, \theta''_{n-m}$ de valeurs particulières attribuées aux paramètres indéterminés, soient identiques élément à élément, il faut que l'on ait

$$\begin{gathered}
x_1(\theta'_1 - \theta''_1) + x_2(\theta'_2 - \theta''_2) + \ldots + x_{n-m}(\theta'_{n-m} - \theta''_{n-m}) = 0, \\
y_1(\theta'_1 - \theta''_1) + y_2(\theta'_2 - \theta''_2) + \ldots + y_{n-m}(\theta'_{n-m} - \theta''_{n-m}) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
v_1(\theta'_1 - \theta''_1) + v_2(\theta'_2 - \theta''_2) + \ldots + v_{n-m}(\theta'_{n-m} - \theta''_{n-m}) = 0,
\end{gathered}$$

et par suite

$$\theta'_1 - \theta''_1 = \theta'_2 - \theta''_2 = \ldots = \theta'_{n-m} - \theta''_{n-m} = 0,$$

c'est-à-dire que les files de valeurs des paramètres soient identiques. Effectivement, ces conditions constituent entre les $n - m$ différences $\theta'_1 - \theta''_1, \ldots, n$ équations linéaires et homogènes dont l'abaque est invanescent par ses colonnes qui sont précisément les lignes de l'abaque (9). Un groupe au moins de $n - m$ de ces équations a donc un abaque carré invanescent (**25**), et par suite (**29**) ne peuvent être satisfaites que par des valeurs toutes nulles de ces différences.

On peut nommer *cardinales* des files de solutions au nombre de $n - m$ et formant un abaque invanescent tel que (9), au moyen desquelles on peut exprimer immédiatement toutes les solutions d'une même autre file quelconque, en fonction linéaire et homogène de $n - m$ paramètres indéterminés. Il existe une infinité d'abaques de solutions cardinales : cela résulte de ce que nous verrons plus loin (**71** *inf.*); mais tous sont équivalents par les lignes et fournissent naturellement pour le système (3) le même ensemble indéfini de files de solutions.

Une réciprocité remarquable lie un abaque de solutions cardinales à celui du système d'équations linéaires auquel il appartient (**84** et suiv. *inf.*).

32. *Un système d'équations linéaires et homogènes qui admet toutes les solutions du système irréductible* (3) *lui est nécessairement agrégé.*

Une équation quelconque de ce nouveau système admettant en particulier les solutions d'un abaque cardinal tel que (9), ses coefficients a', b', ..., j' sont des solutions du système irréductible des $n-m$ équations linéaires et homogènes irréductibles aux n inconnues $a, b, c, \ldots, i, j$

$$(11)\qquad \begin{cases} x_1 a + y_1 b + z_1 c + \ldots + v_1 j = 0, \\ x_2 a + y_2 b + z_2 c + \ldots + v_2 j = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-m} a + y_{n-m} b + z_{n-m} c + \ldots + v_{n-m} j = 0, \end{cases}$$

et, pour la même raison, les m lignes de l'abaque du système proposé (3) sont des files de solutions des équations (11). Mais cet abaque étant invanescent par hypothèse, les solutions qui en forment les lignes sont cardinales; donc (**31**) la file $a'b'\ldots j'$ leur est agrégée : ce qu'il fallait établir.

33. *Deux systèmes irréductibles d'équations linéaires et homogènes qui ont les mêmes files de solutions sont équivalents*, car, en vertu de ce qui précède, chacun d'eux est agrégé à l'autre.

Les deux théorèmes précédents s'étendent facilement à des systèmes réductibles, par la considération des systèmes réduits équivalents. Ce sont les réciproques de ceux des n^os (**27**), (**28**).

34. Considérons maintenant un système de m équations linéaires, mais non homogènes, entre les n mêmes inconnues $x, y, \ldots, v$,

$$(12)\qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + \ldots + i_1 u + j_1 v + k_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_m x + b_m y + \ldots + i_m u + j_m v + k_m = 0. \end{cases}$$

En écrivant $k_1 . 1$, $k_2 . 1$, ..., $k_m . 1$ les *termes connus* de ces équations $k_1, k_2, \ldots, k_m$, on aperçoit de suite que leurs files de solutions peuvent s'obtenir en prenant simplement les n premiers éléments de celles des files de solutions des m équations linéaires et homogènes aux $n+1$ inconnues $x, y, \ldots, v, w$

$$(13) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + \ldots + i_1 u + j_1 v + k_1 w = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_m x + b_m y + \ldots + i_m u + j_m v + k_m w = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles l'inconnue w a pour valeur 1.

Nous appellerons *abaque* du système non homogène (12) celui du système homogène correspondant (13) qui a m lignes et $n+1$ colonnes. Cela posé, en combinant la remarque précédente avec la théorie des systèmes homogènes, on obtient immédiatement les propositions suivantes :

I. *Le système* (12) *admet les solutions de tout autre de même nature auquel il est agrégé*, c'est-à-dire à l'abaque duquel le sien est agrégé par les lignes (**27**).

En conséquence, *deux semblables systèmes ont les mêmes files de solutions s'ils sont équivalents*, c'est-à-dire si leurs abaques le sont par les lignes (**28**).

La résolution du système (12) peut donc s'opérer par celle d'un système irréductible équivalent (**20**); nous pourrons donc supposer désormais que ce système est irréductible, ce qui exige en particulier que l'on ait $m \leqq n+1$.

II. *Quand m est $= n+1$, le système irréductible* (12) *est impossible*, c'est-à-dire *n'admet aucune file de solutions*.

Dans ce cas, en effet, la seule file de solutions du système homogène auxiliaire (13) est vanescente (**29**), et la valeur de w ne peut pas y être égale à 1.

III. *Quand $m \leqq n$, le système irréductible* (12) *est possible ou impossible suivant que l'abaque partiel formé dans le sien par les m colonnes de coefficients des inconnues est invanescent ou vanescent.*

Si l'abaque partiel en question est invanescent, le système auxiliaire (13) peut être résolu en attribuant des valeurs arbitraires à quelque groupe de $n+1-m$ inconnues comprenant w (**25**), (**29**), et les n premiers éléments de toute file de solutions dans laquelle w aura pour valeur 1 formeront une file de solutions du système proposé (12).

Si au contraire cet abaque partiel est vanescent, le système auxiliaire (13) n'admet aucune file de solutions dans laquelle w n'ait pas une valeur nulle (**30**, III), partant non $=1$, et le proposé est impossible.

IV. *Dans le cas où $m=n$, le système (12), s'il est irréductible et possible, admet une seule file de solutions, ou, en d'autres termes, est déterminé.*

Pour résoudre ce système, il faut chercher les files de solutions du système auxiliaire (13) dans lesquelles $w=1$. Ce système ayant alors des inconnues en nombre inférieur d'une unité seulement, à celui des équations qui le composent, une seule de ces inconnues, pour laquelle l'hypothèse permet de choisir w, est indéterminé (**30**, II). En le résolvant dans cette hypothèse par des formules analogues à (5), puis y posant $w=1$, les valeurs de toutes les autres inconnues, c'est-à-dire des inconnues du système proposé (12), se trouvent exactement déterminées.

V. *Dans le cas où $m<n$, on peut attribuer des valeurs arbitraires à tout groupe de $n-m$ inconnues tellement choisies que l'abaque carré des coefficients des m autres sont invanescent, après quoi les valeurs correspondantes de ces m autres inconnues sont exactement déterminées.*

Supposons, par exemple, que l'abaque carré des coefficients des m inconnues $x, y, z, \ldots, s$ soit invanescent; on peut alors résoudre le système auxiliaire (13) par rapport à ces m inconnues, au moyen de formules analogues à (5) qui contiennent comme indéterminées les $n+1-m$ autres $t, \ldots, u, v, w$. En y posant $w=1$, il ne reste plus comme indéterminées que les $n-m$ inconnues $t, \ldots, u, v$ au moyen des valeurs desquelles les formules ainsi modifiées expriment les valeurs correspondantes de $x, y, z, \ldots, s$.

VI. *Les mêmes choses restant posées, on obtient encore les éléments de* *la file générale des solutions du système* (12) *en ajoutant respectivement à ceux d'une file particulière quelconque de solutions les éléments correspondants de la file générale de solutions du système homogène* (3), *auquel le proposé se réduit par la suppression des termes connus* $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

Si $x_0, y_0, z_0, \ldots, u_0, v_0$ est une file particulière de solutions des équations (12), en adjoignant à cette file disposée en ligne celles d'un abaque de solutions cardinales du système (3), puis à cet abaque de $(m+1)$ lignes et de n colonnes une colonne ayant pour éléments 1 suivi de $n-m$ zéros, on obtient l'abaque

$$(14)\qquad \left|\begin{array}{ccccccc} x_0 & y_0 & z_0 & \ldots & u_0 & v_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & \ldots & u_1 & v_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & \ldots & u_2 & v_2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ x_{n-m} & y_{n-m} & z_{n-m} & \ldots & u_{n-m} & v_{n-m} & 0 \end{array}\right.$$

dont les lignes constituent dans leur ensemble des files de solutions cardinales du système auxiliaire (13).

Effectivement les lignes de cet abaque sont en nombre égal à $n+1-m$ excès du nombre des inconnues sur celui des équations dans le système (13), et chacune d'elles est évidemment une file de solutions de ce système. D'autre part, cet abaque est invanescent par les lignes; car dans une file $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-m}$ en symptose avec lui par les colonnes, il faut d'abord que l'on ait $\lambda_0 = 0$ à cause de la symptose partielle qui doit avoir lieu avec la dernière colonne de l'abaque; il faut ensuite que les $n-m$ autres éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-m}$ soient tous nuls. Car, à cause de la nullité de λ_0, la file de $n-m$ éléments qu'ils forment doit être en symptose avec les colonnes de l'abaque réduit à ses $n-m$ dernières lignes, c'est-à-dire avec celles de l'abaque (9) qui est essentiellement invanescent. Ce qui revient à dire que l'abaque (14) ne peut être en symptose par ses colonnes qu'avec une file vanescente.

Cela posé, si au moyen des éléments de cet abaque et de $n+1-m$ paramètres indéterminés $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-m}$ on exprime les solutions du système (13) par des formules analogues à (10), et si l'on fait $\theta_0 = 1$, ce qui est nécessaire pour que w soit $=1$, on trouvera bien, pour celles du système proposé (12), les formules spécifiées implicitement dans notre énoncé :

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_{n-m}\theta_{n-m},\\
y &= y_0 + y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \ldots + y_{n-m}\theta_{n-m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
v &= v_0 + v_1\theta_1 + v_2\theta_2 + \ldots + v_{n-m}v_{n-m}.
\end{aligned}
$$

Ces formules fournissent une fois seulement chacune des files de solutions du système (12); ce dont on s'assure en raisonnant comme nous l'avons fait par les formules (10).

34 *bis*. Nous revenons actuellement aux équations linéaires et homogènes, pour chercher comment leurs solutions s'expriment au moyen des coefficients. Mais auparavant il convient d'étudier sommairement des expressions très remarquables qui se présentent dans cette question, ce qui en allégera notablement la solution.

En considérant comme autant de variables indépendantes les éléments d'un abaque donné que nous décomposerons par la pensée en files parallèles d'une direction où elles ne sont pas moins longues que les files de l'autre sens, nous nommerons *covanescent* de cet abaque toute fonction des éléments, linéaires et homogènes par rapport à ceux de chacune des files en question (considérés isolément), qui jouit de la propriété de s'évanouir pour tout système de valeurs des éléments rendant l'abaque vanescent par les files dont il s'agit.

Nous réduirons chaque covanescent de manière à lui donner la forme d'une somme de monômes dissemblables par rapport aux éléments de l'abaque, ayant pour coefficients des quantités indépendantes de ces éléments, et nous supprimerons naturellement tout terme qui serait pourvu d'un coefficient nul.

I. Pour fixer les idées, nous considérerons l'abaque (15) écrit plus loin, dont nous supposerons la largeur n au moins égale à la hauteur m. Cela posé, *chaque terme d'un covanescent* F *de cet abaque est le produit de son coefficient par m éléments situés tous sur quelque même diagonale.*

Comme F est linéaire et homogène par rapport aux éléments de chaque ligne de l'abaque considérés isolément, un quelconque de ses termes contient, à titre de facteurs, m éléments de l'abaque, ni plus ni moins, et ces éléments sont notés par les m indices $1, 2, 3, \ldots, m$ tous différents les uns des autres. Les m lettres servant à la notation des mêmes éléments sont aussi toutes différentes.

Dans le cas contraire, en effet, il existerait dans F quelque terme ayant pour facteurs des éléments appartenant dans leur ensemble à moins de m colonnes de l'abaque, aux $m' < m$ premières par exemple. En appelant alors P le groupe formé par les termes de cette espèce et Q l'ensemble des autres termes, ayant ainsi pour facteur un élément au moins des $n - m'$ dernières colonnes, on aurait

$$F = P + Q,$$

d'où $F_0 = P$, F_0 désignant ce que devient F quand on réduit à zéro tous les éléments de ces $n - m'$ colonnes, car alors tous les termes de Q s'évanouissent.

Mais cette hypothèse rend l'abaque vanescent par les lignes, et par suite $F_0 = 0$; car, à cause de $m' < m$, on peut assigner quelque file invanescente de m éléments en symptose avec ses m' premières colonnes (**11**) et en fait avec toutes, puisque les $n - m'$ autres sont devenues vanescentes. On devrait donc avoir aussi $P = 0$, quelles que fussent les valeurs des éléments entrant dans cette expression; or c'est impossible, puisque nous supposons F composé de termes dissemblables à coefficients non nuls.

Une même lettre ou un même indice ne pouvant ainsi figurer deux fois dans la notation des m éléments qui entrent dans chaque terme de F, ces m éléments appartiennent nécessairement à une même diagonale de l'abaque (15).

II. *Quand l'abaque* (15) *est carré, tout covanescent* F *relatif à ses lignes est aussi un covanescent relatif à ses colonnes.*

Puisque chaque terme de F contient en facteurs les premières puissances seulement de m éléments notés par m lettres essentiellement différentes (I), et que la notation de la totalité des éléments comporte seulement m lettres à cause de $n = m$, une colonne donnée quelconque de l'abaque fournit toujours, comme facteur, à un terme quelconque de F, quelqu'un de ses éléments à la première puissance, mais un seul. Notre fonction est donc aussi linéaire et homogène par rapport aux éléments de chaque colonne de l'abaque, considérés isolément. Enfin, quand l'abaque est vanescent par les colonnes, il l'est aussi par les lignes, puisqu'il est carré (**13**), et F s'évanouit.

35. *Le système* (3) *étant irréductible et indéterminé, toutes ses solutions sont données par les formules*

$$x = \mathrm{X},\quad y = \mathrm{Y},\quad \ldots,\quad v = \mathrm{V},$$

où X, Y, ..., V *sont des fonctions des mn éléments de son abaque*

$$(15)\qquad \left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1 & h_1 & \ldots & i_1 & j_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & g_m & h_m & \ldots & i_m & j_m, \end{matrix}\right.$$

qui contiennent d'une manière linéaire et homogène certains paramètres indéterminés. D'autre part, ces fonctions sont d'une nature telle, que l'induit

$$(16)\qquad a_0\mathrm{X} + b_0\mathrm{Y} + \ldots + j_0\mathrm{V}$$

de leur file et de celle de n nouveaux éléments indéterminés $a_0, b_0, \ldots, j_0$ *est un covanescent de l'abaque suivant à* $m+1$ *lignes et à n colonnes*

$$(17)\qquad \left\{\begin{matrix} a_0 & b_0 & c_0 & \ldots & g_0 & h_0 & \ldots & j_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1 & h_1 & \ldots & j_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & g_2 & h_2 & \ldots & j_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & g_m & h_m & \ldots & j_m \end{matrix}\right.$$

I. *Notre théorème a lieu quand le système* (3) *contient une seule équation, sa première par exemple.*

La file des coefficients de cette équation en comprend un au moins,

a_1 pour fixer les idées, qui n'est pas nul parce qu'elle est invanescente. En raisonnant donc comme au n° **11**, on trouvera que toutes les solutions s'obtiennent en attribuant à $y, z, \ldots, v$ des valeurs quelconques et à x la valeur correspondante

$$x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}z - \ldots - \frac{j_1}{a_1}v,$$

Mais, en posant $\frac{y}{a_1} = \eta$, $\frac{z}{a_1} = \zeta, \ldots, \frac{v}{a_1} = \varphi$, $\eta, \zeta, \ldots, \varphi$ seront, comme $y, z, \ldots, v$, des quantités tout à fait arbitraires, et les solutions dont il s'agit seront aussi données par les formules

$$\begin{array}{ll} x = & -b_1\eta - c_1\zeta - \ldots - j_1\varphi, \\ y = & \quad a_1\eta, \\ z = & \qquad\quad a_1\zeta, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v = & \qquad\qquad\qquad a_1\varphi, \end{array}$$

dont tous les seconds membres sont bien linéaires et homogènes par rapport aux paramètres indéterminés $\eta, \zeta, \ldots, \varphi$. D'ailleurs ils vérifient évidemment l'équation proposée, quelles que soient les valeurs de ces paramètres, et aussi celles des coefficients $a_1, b_1, \ldots, j_1$.

Maintenant si l'abaque

$$\begin{matrix} a_0 & b_0 & c_0 & \ldots & j_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & j_1 \end{matrix}$$

devient vanescent par les lignes, il arrivera de deux choses l'une : ou bien sa seconde ligne sera vanescente, ou bien elle ne le sera pas, mais alors la première lui sera agrégée (**14**). Dans le premier cas, l'expression (16) s'évanouit, parce que, en fait, les expressions ci-dessus de $x, y, \ldots, v$ s'évanouissent toutes. Dans le second cas, elle s'évanouit encore, parce que l'équation

$$a_0x + b_0y + \ldots + j_0v = 0$$

est agrégée à la proposée et en admet par suite toutes les files de solutions (**27**). D'ailleurs, cette expression est évidemment linéaire et homogène par rapport aux éléments, soit de l'une, soit de l'autre ligne de l'abaque bilinéaire ci-dessus.

II. *Notre théorème est vrai pour le système considéré* (3), *s'il l'est pour un autre de même nature contenant* $m-1$ *équations seulement.*

Notre système étant irréductible, il y a certainement m inconnues $x, y, z, \ldots, s$ dont les coefficients

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1\ b_1\ c_1\ \ldots\ g_1, \\ a_2\ b_2\ c_2\ \ldots\ g_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_m\ b_m\ c_m\ \ldots\ g_m \end{array}\right.$$

forment un abaque carré invanescent (**25**). L'abaque laissé dans ce dernier par la suppression de sa première colonne est donc invanescent aussi (par les colonnes) (**12**). Le système des $m-1$ équations linéaires et homogènes aux m inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \ldots + b_m\lambda_m = 0, \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_m\lambda_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 + \ldots + g_m\lambda_m = 0 \end{array}\right.$$

est ainsi irréductible et indéterminé, et, par hypothèse, on obtiendra une file donnée de ses solutions, en particulier une de celles qui sont invanescentes

$$(20)\qquad \Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \ldots,\ \Lambda_m$$

en prenant les coefficients de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ dans quelque covanescent ψ de l'abaque carré

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1\ b_1\ c_1\ \ldots\ g_1, \\ \alpha_2\ b_2\ c_2\ \ldots\ g_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_m\ b_m\ c_m\ \ldots\ g_m. \end{array}\right.$$

Introduisons maintenant les équations (3) par la file (20). Les coefficients de y, z, ..., s dans le résultat sont tous nuls à cause des équations (19). Quant à ceux des autres inconnues $x, t, \ldots, u, v$, ils sont évidemment les expressions $(abc\ldots g)$, $(hbc\ldots g)$, ..., $(ibc\ldots g)$, $(jbc\ldots g)$ dans lesquelles ψ se transforme par la substitution faite à α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de la première colonne de l'abaque (15), de la $(m+1)^{\text{ième}}$, ..., de la $(n-1)^{\text{ième}}$ et de la $n^{\text{ième}}$ respectivement. On obtient ainsi l'équation

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &(abc\ldots g)x + 0.y + 0.z + \ldots + 0.s \\ &\quad + (hbc\ldots g)t + \ldots + (ibc\ldots g)u + (jbc\ldots g)v = 0, \end{aligned}\right.$$

et $(abc\ldots g)$ n'est pas nul, car autrement l'abaque (18) aurait sa première ligne en symptose, comme les $m-1$ autres, avec la file invanescente (20) et il serait vanescent contrairement à ce qui a lieu.

L'expression $(abc\ldots g)$ est évidemment un covanescent de l'abaque (18), puisqu'elle est formée avec ses éléments exactement comme ψ, covanescent de l'abaque (21), avec ceux de ce dernier. Les $m-1$ expressions $(aac\ldots g)$, $(acc\ldots g)$, $(agc\ldots g)$ déduites de $(abc\ldots g)$, en y substituant successivement aux éléments de la seconde colonne de l'abaque (18) ceux de la première, de la troisième, etc., et de la $m^{\text{ième}}$, sont donc toutes nulles puisque ce sont alors des covanescents d'abaques carrés, dans chacun desquels respectivement la seconde colonne est identique, partant agrégée, à la première, à la troisième, ..., à la $m^{\text{ième}}$, c'est-à-dire tous vanescents. Il en résulte que l'induction des équations (3) par les coefficients de $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dans $(abc\ldots g)$, ordonné par rapport à ces éléments, donne une équation de la forme

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &0.x + (abc\ldots g)y + 0.z + \ldots + 0.s \\ &\quad + (ahc\ldots g)t + \ldots + (aic\ldots g)u + (ajc\ldots g)v = 0, \end{aligned}\right.$$

car, en induisant la file des coefficients dont il s'agit par les colonnes de l'abaque (18) qui sont notées par les lettres $b, h, \ldots, i, j$, on reproduit d'abord évidemment l'expression $(abc\ldots g)$, puis ensuite ce en quoi la transforment les substitutions à la file d'éléments $b_1, b_2, \ldots, b_m$, des $(m+1)^{\text{ième}}$, ..., $(n-1)^{\text{ième}}$, $n^{\text{ième}}$ colonnes de l'abaque (18).

En poursuivant de même avec les $3^{\text{ième}}, \ldots, m^{\text{ième}}$ colonnes de l'abaque (18) successivement, on obtient les $m-2$ autres équations analogues

$$\begin{aligned}
&0.x + 0.y + (abc\ldots g)z + \ldots + 0.s\\
&\quad + (abh\ldots g)t + \ldots + (abi\ldots g)u + (abj\ldots g)v = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&0.x + 0.y + 0.z + \ldots + (abc\ldots g)s\\
&\quad + (abc\ldots h)t + \ldots + (abc\ldots i)u + (abc\ldots j)v = 0,
\end{aligned}$$

qui, elles, ainsi que (22) et (23), sont toutes agrégées au système (3). En outre, ce système de m équations est en réduction apparente à cause de $(abc..\ g)$ non $= 0$; il est donc équivalent au proposé (**19**), et ses solutions sont identiques à celles de celui-ci (**28**).

Ce système est de même nature que (4), à part les notations, et cette circonstance essentielle que, maintenant, nous avons

$$A_1 = B_2 = C_3 = \ldots = G_m = (abc\ldots g).$$

Les solutions seront donc fournies par les formules (5) ou bien par les formules équivalentes [1]

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{llll}
x = -(hbc\ldots g)\tau - \ldots & - (ibc\ldots g)\upsilon & - (jbc\ldots g)\varphi, \\
y = -(ahc\ldots g)\tau - \ldots & - (aic\ldots g)\upsilon & - (ajc\ldots g)\varphi, \\
z = -(abh\ldots g)\tau - \ldots & - (abi\ldots g)\upsilon & - (abj\ldots g)\varphi, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
t = \quad (abc\ldots g)\tau, & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & & \\
u = & \quad (abc\ldots g)\upsilon, & \\
v = & & \quad (abc\ldots g)\varphi,
\end{array}\right.$$

qu'on en déduit en exprimant les $n-m$ inconnues indéterminées

[1] On peut supposer que les coefficients de $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ sont certains *déterminants* de l'abaque (15) (**57** *inf.*).

$t, \ldots, u, v$ au moyen des paramètres indéterminés en nombre égal $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$, par les $n-m$ dernières des précédentes formules, ce qui ne restreint aucunement l'indétermination de ces inconnues à cause de $(abc\ldots g)$ non $= 0$.

Il est essentiel de remarquer que ces formules donnent, pour les inconnues, des valeurs qui satisfont au système (3), *quels que soient, et ses coefficients, et les valeurs de* $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$, *et aussi le covanescent* ψ *de l'abaque carré* (18) *qui a servi à les obtenir.* Pour s'en assurer, il suffit évidemment de vérifier que les coefficients de $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ dans les résultats qu'on obtient en portant ces expressions de $x, y, \ldots, v$ dans les premiers membres des équations (3), se réduisent tous à zéro.

Considérons, par exemple, la première équation et le coefficient du paramètre τ, savoir, au signe près,

$$\begin{aligned} &a_1(hbc\ldots g) + b_1(ahc\ldots g) \\ &\quad + c_1(abh\ldots g) + \ldots + g_1(abc\ldots h) - h_1(abc\ldots g). \end{aligned}$$

Cette expression est évidemment linéaire et homogène par rapport à $h_1, h_2, \ldots, h_m$, et h_1 y a pour coefficient

$$[a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + \ldots + g_1 G_1] - (abc\ldots g),$$

$A_1, B_1, \ldots, G_1$ représentant les coefficients de $a_1, b_1, \ldots, g_1$ dans le développement de $(abc\ldots g)$, par suite zéro, puisque le polynôme entre crochets régénère $(abc\ldots g)$.

D'autre part, si l'on prend k non $= 1$, et si l'on nomme $A_k, B_k, \ldots, G_k$ les coefficients de $a_k, b_k, \ldots, g_k$ dans le développement de $(abc\ldots g)$, le coefficient de h_k sera

$$a_1 A_k + b_1 B_k + \ldots + g_1 G_k.$$

Or cette expression est un covanescent de l'abaque carré vanescent formé en remplaçant la $k^{\text{ième}}$ ligne de (18) par la file $a_1, b_1, \ldots, g_1$. Elle est donc nulle, et ainsi les coefficients de $h_2, h_3, \ldots, h_m$ s'évanouissent tous comme celui de h_1.

Les seconds membres des formules (24) sont tous linéaires et homogènes par rapport aux paramètres indéterminés $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$. En outre, et par définition, le covanescent $(abc \ldots g)$ étant linéaire et homogène par rapport aux éléments de chacune des lignes de son abaque (18), il est évident, d'après la manière dont les coefficients de $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ se déduisent de ce covanescent, que la même propriété appartient à tous ces coefficients, par suite à chacun des seconds membres des formules (24) ainsi qu'à l'expression (16), relativement aux éléments d'une même ligne quelconque de l'abaque (15).

Supposons enfin que l'abaque (17) devienne vanescent par les lignes; alors celui de ses m dernières lignes le sera lui-même, sinon sa première ligne sera agrégée à ces m autres (**14**).

Dans le premier cas, m colonnes quelconques de l'abaque (15) forment évidemment un abaque vanescent; $(abc \ldots g)$ s'évanouit donc et avec lui, simultanément, tous les coefficients de $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ dans les formules (24), chacun d'eux, au signe près, étant composé avec quelque groupe de m colonnes de (15) comme $(abc \ldots g)$ l'est avec les m premières. Les seconds membres des formules (24) et avec eux l'expression (16) se réduisent donc à zéro.

Dans le second cas, l'équation

$$a_0 x + b_0 y + \ldots + j_0 v = 0$$

est agrégée au système proposé (3), partant satisfaite par toutes ses files de solutions (**27**).

L'expression (16) s'évanouit donc dans les deux hypothèses, et, comme elle est linéaire et homogène par rapport aux éléments de toute ligne de (17), elle est un covanescent de cet abaque, ce qui restait à prouver.

III. *Notre théorème est donc vrai dans tous les cas,* puisqu'il a été démontré quel que soit n pour $m = 1$ (I), et que le raisonnement ci-dessus permet de l'étendre successivement aux cas de

$$m = 2, 3, \ldots, n - 1.$$

36. *Réciproquement, les coefficients* X, Y, ..., V *de* $a_0, b_0, \ldots, j_0$ *dans un covanescent quelconque de l'abaque* (17) *sont des solutions du système* (3).

Effectivement l'expression

$$a_1 X + b_1 Y + \ldots + j_1 V$$

est évidemment un covanescent de l'abaque

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & j_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & j_1 \\ a_2 & b_2 & c_1 & \ldots & j_2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & j_m \end{matrix}$$

déduit de (17) par la répétition de sa seconde ligne à la place de sa première. Elle est donc nulle, puisque ce dernier abaque est en symptose par les colonnes avec la file invanescente ayant pour éléments $+1$ et -1 suivis de $m-1$ zéros, partant vanescent par les lignes. En d'autres termes, les quantités X, Y, ..., V satisfont à la première équation du système (3), et l'on démontrerait de même qu'elles satisfont aussi à ses $(m-1)$ autres équations.

37. La recherche des solutions de notre système, exprimées en fonction de ses coefficients, *revient ainsi à celle du covanescent le plus général de l'abaque* (17), puisque l'expression (16) ne peut être qu'un covanescent de cet abaque (**35**).

Avant de procéder à cette recherche, remarquons que *les formules* (24) *font aussi dépendre les mêmes solutions de la formation d'une simple fonction covanescente non nulle de l'abaque carré* (18) *des coefficients de m inconnues choisies de telle sorte que cet abaque soit invanescent* (**25**).

Ces deux méthodes s'équivalent au fond, mais la seconde est évidemment la plus simple.

Déterminants.

38. Nous aurons incessamment besoin de certains principes d'Analyse combinatoire, que nous allons tout d'abord exposer.

I. On nomme *permutations* de plusieurs objets déterminés quelconques les divers groupes que l'on en peut former, en les alignant tous les uns à la suite des autres de toutes les manières possibles. On sait que *le nombre des permutations différentes de m objets donnés est égal au produit* $1.2.3\ldots m$.

II. Dans une permutation donnée (de deux ou plusieurs objets), on nomme *une transposition* l'opération consistant à déplacer deux objets déterminés, de manière à transporter chacun d'eux à la place que l'autre occupait auparavant.

Si les objets considérés sont au nombre de m, le nombre des transpositions distinctes que l'on peut concevoir parmi eux est égal à $\frac{m(m-1)}{1.2}$, nombre des manières d'en choisir deux.

III. *Étant données deux permutations quelconques de certains objets, on peut toujours faire naître la seconde de la première, en exécutant dans celle-ci des transpositions convenables.*

La démonstration est assez facile pour que nous puissions la supprimer.

IV. Il y a visiblement une infinité de manières de passer ainsi, par des transpositions successives, d'une permutation donnée à une autre, différente ou non, des mêmes objets; mais, *quelle que soit la manière d'opérer, le nombre des transpositions pouvant ainsi métamorphoser une permutation donnée dans une autre est de parité invariable,* c'est-à-dire toujours pair ou toujours impair, suivant la nature relative des permutations considérées.

1° *Une transposition quelconque équivaut toujours à un nombre impair de transpositions simples,* c'est-à-dire ne déplaçant chacune que deux objets contigus dans la permutation considérée.

Soient θ et ρ les deux objets à transposer, et supposons qu'il y en ait q entre eux dans la permutation considérée $\ldots\theta\ldots\rho\ldots$. Il est clair qu'en transposant successivement θ avec l'objet placé après lui, puis avec l'objet suivant ..., puis avec celui qui précède ρ, puis enfin avec ρ, ce qui fait $q+1$ transpositions simples, la permutation considérée deviendra $\ldots|\ldots\rho\theta\ldots$, le trait vertical indiquant la place qu'occupait θ dans la permutation primitive.

Si maintenant, dans cette nouvelle permutation, on transpose successivement ρ avec l'objet placé avant lui, puis avec celui qui précède celui-ci, ..., puis enfin avec l'objet placé immédiatement à la droite du trait vertical, ce qui constitue q transpositions simples, la permutation deviendra $\ldots\rho\ldots\theta\ldots$, c'est-à-dire ce que devient la permutation primitive par la seule transposition des objets θ et ρ.

Notre lemme est donc démontré, puisque le nombre total des transpositions simples qui ont été exécutées est l'impair $2q+1$.

2° *Si certaines transpositions simples ne produisent aucun changement dans une permutation, leur nombre est essentiellement pair.*

La chose est évidente quand la permutation contient deux objets seulement, car chacun d'eux revient à sa place ou n'y revient pas selon qu'il a été transposé avec l'autre un nombre pair (o compris) ou un nombre impair de fois, transpositions qui toutes sont forcément simples.

Il nous suffit donc de prouver que, si elle est vraie quand il y a m objets dans la permutation, elle l'est encore quand il y en a $m+1$. A cet effet, choisissons un quelconque θ des objets dont il s'agit, et, parmi les transpositions considérées, distinguons celles qui déplacent θ et celles qui, le laissant immobile, déplacent simultanément deux des m autres objets.

Toutes les transpositions considérées étant simples, chacune de celles du premier genre fait marcher θ d'un seul rang en avant ou en arrière, et, par suite, comme leur ensemble ramène θ à sa place primitive, leur nombre est nécessairement pair. En outre, aucune de ces transpositions ne déplace les autres objets les uns par rapport aux autres, c'est-à-dire abstraction faite de θ; en d'autres termes, si, avant et après l'une d'elles, on supprimait θ en rapprochant au besoin les deux fragments de la permutation qui sont séparés par θ, on obtiendrait deux permutations identiques des autres objets.

La disposition relative de ces autres objets n'est donc modifiée que par les transpositions du second genre; elles sont donc aussi en nombre pair en vertu de l'hypothèse, puisque ces objets sont au nombre de m seulement et que les transpositions dont il s'agit les ramènent à la même disposition relative.

Les transpositions simples du second genre étant en nombre pair comme celles du premier, le nombre total des transpositions est pair aussi, ce qu'il fallait prouver.

3° *Des transpositions de nature quelconque qui ne produisent aucun changement dans une permutation donnée sont aussi en nombre pair.*

Soient effectivement n', n'', ..., $n^{(k)}$ les nombres tous impairs de transpositions simples dont les ensembles équivalent respectivement à chacune des k transpositions considérées (1°). Leur somme

$$n' + n'' + \ldots + n^{(k)}$$

est paire (2°), puisque l'ensemble de toutes ces transpositions simples ne produit aucun changement dans la permutation considérée. Le nombre k est donc pair, sans quoi la somme dont il s'agit serait nécessairement impaire.

4° Soient maintenant P_1, P_2 deux permutations des objets considérés, dont la première se métamorphose dans la seconde par l'un ou l'autre des deux groupes $(t)'$, $(t)''$ de n' et n'' transpositions, et appelons $''(t)$ un nouveau groupe de n'' transpositions formé avec celles du groupe $(t)''$ exécutées dans l'ordre inverse. Il est évident que les transpositions $(t)''$ et $''(t)$ exécutées successivement sur une permutation quelconque n'y produisent aucun changement, car l'effet de celles du premier groupe est visiblement détruit par celles du second.

Maintenant l'exécution successive sur la permutation P_1 des transpositions $(t)'$ et $''(t)$ n'y produit aucun changement; car le premier groupe $(t)'$, changeant P_1 en P_2, y produit le même effet que le groupe $(t)''$, et nous venons de voir que les transpositions $(t)''$ et $''(t)$ laissent invariable toute permutation. Donc (2°) $n' + n''$, nombre total des transpositions $(t)'$ et $''(t)$, est pair; les nombres n' et n'' sont donc ou tous deux pairs (o compris) ou tous deux impairs.

Il résulte implicitement de notre raisonnement que *le nombre des transpositions nécessaires pour transformer* P_1 *en* P_2 *est de même parité que celui des transpositions qui peuvent transformer* P_2 *en* P_1.

V. Comparons toutes les permutations de m objets à l'une d'elles P choisie arbitrairement; formons-en deux classes $(C)'$ et $'(C)$ contenant respectivement celles pouvant se déduire de P par des nombres pairs (o compris) et impairs de transpositions, et soient R, S deux permutations quelconques des mêmes objets, pouvant être déduites de P au moyen de r, s transpositions respectivement.

Si l'on peut passer de R à S au moyen de t transpositions, inversement, d'après ce qui a été dit tout à l'heure, on pourra passer de S à R au moyen de t transpositions aussi. En outre, on peut passer encore de P à S par l'intermédiaire de R, c'est-à-dire par $r+t$ transpositions; il en résulte (IV) que s et $r+t$ sont de même parité. Si donc R, S appartiennent à une même classe, les entiers r, s sont de même parité, et t est un nombre pair; sinon r, s sont de parité différente, et t est impair. On en conclut immédiatement que *le partage en deux classes des* $1.2.3\ldots m$ *permutations de m objets donne les mêmes résultats, quelle que soit la permutation type* P *au moyen de laquelle on l'a opéré.*

Finalement, *les nombres des permutations contenues dans chaque classe sont égaux l'un à l'autre, par suite à* $\frac{1.2\ldots m}{2}$, car une même transposition (nombre impair) exécutée sur toutes les permutations de la classe (C)' en donne d'autres en nombre égal, qui sont toutes distinctes les unes des autres et appartiennent à la classe '(C). Il en résulte que la classe '(C) contient au moins autant de permutations que la classe (C)', et l'on prouve de même que celle-ci n'en contient pas moins que l'autre.

39. Dans l'abaque

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & j_1, \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & j_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & j_m, \end{array}\right.$$

à m lignes et $n \geqq m$ colonnes, on obtient les éléments d'une même diagonale quelconque, en prenant quelque combinaison de m des n lettres $a, b, c, \ldots, j$ et les affectant, d'une manière quelconque, des m indices $1, 2, 3, \ldots, m$. Nous appellerons *familles* les divers groupes formés chacun par les diagonales dont les éléments sont notés par les mêmes lettres; il y a évidemment autant de familles que de combinaisons de n lettres m à m, c'est-à-dire $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}$.

Si maintenant, dans les diagonales d'une même famille, on écrit les éléments d'une manière telle, que les lettres servant à leur notation soient, pour toutes, rangées dans le même ordre, les notations de ces diagonales ne différeront que par l'ordre de succession des indices. Il y a donc autant de diagonales distinctes dans chaque famille que de permutations de m indices, c'est-à-dire $1.2.3\ldots m$.

Ainsi, dans une même famille, on peut passer de la notation d'une diagonale à celle d'une autre quelconque, en exécutant des transpositions convenables sur sa permutation d'indices (les lettres restant immobiles). Chaque famille se partage donc naturellement en deux *classes opposées*, contenant chacune $\frac{1.2\ldots m}{2}$ diagonales dont les notations de deux quelconques se métamorphosent l'une en l'autre par un nombre pair de transpositions d'indices (**38**, V).

Quant au nombre total des diagonales de l'abaque (1), il est égal à $n(n-1)\ldots(n-m+1)$, produit du nombre des familles par celui des diagonales contenues dans chacune.

40. *Le covanescent le plus général* F *de l'abaque* (1) *s'obtient en ajoutant les produits des éléments de chacune des diagonales, multipliés respectivement par des paramètres absolument indéterminés, sauf la restriction d'être égaux pour tous les produits qui proviennent de diagonales d'une même famille et d'une même classe, égaux encore, mais de signes contraires, pour deux produits provenant de diagonales de classes opposées dans une même famille.*

Si l'abaque (1) n'a qu'une ligne, notre théorème est évident, car la règle posée conduit à la fonction linéaire et homogène la plus générale des éléments de cette ligne, qui est évidemment le covanescent cherché.

Sinon, comme nous savons déjà (**34** *bis*, I) que, F ayant été ramené à une forme où tous ses termes sont dissemblables par rapport aux éléments de l'abaque, chacun de ces termes est le produit des éléments de quelque diagonale par un coefficient constant (non nul), soit $C\Omega a_1 b_2$ l'un d'eux correspondant à une diagonale contenant a_1 et b_2, Ω désignant le produit des $m-2$ autres éléments et C le coefficient.

Si, dans F, on rend simultanément et respectivement égaux aux n éléments $\alpha, \beta, \ldots, \iota, \zeta$ d'une même file indéterminée ceux des deux premières lignes de l'abaque, F s'évanouit, quels que soient les coefficients, les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \iota, \zeta$ et les éléments des $m-2$ dernières lignes de l'abaque, puisque celui-ci devient vanescent par les lignes. Comme le terme considéré devient alors $C\Omega\alpha\beta$ et que C n'est pas nul, il faut qu'il se soit formé simultanément des termes semblables détruisant celui-ci. Or un seul a pu naître, et il provient d'un terme en $\Omega a_2 b_1$; F ne peut donc contenir le terme $C\Omega a_1 b_2$ sans contenir en même temps le terme $-C\Omega a_2 b_1$ dont la notation se déduit de la précédente par la transposition des indices 1, 2 des deux lignes que l'on a rendues un instant identiques, accompagnée d'une multiplication par -1.

Le même raisonnement, répété pour toutes les combinaisons deux à deux des lignes de l'abaque, prouve qu'un terme donné quelconque de F est nécessairement accompagné par tous ceux dans lesquels il se métamorphose quand on y transpose deux indices quelconques en le multipliant en même temps par -1. Or ce terme et ceux qui en dérivent ainsi correspondent bien à toutes les diagonales d'une même famille; et, dans deux quelconques, les coefficients sont égaux, ou bien égaux et de signes contraires, selon que les diagonales correspondantes appartiennent à la même classe ou à des classes opposées. Le covanescent F ne peut donc être que de la forme assignée par l'énoncé, les coefficients C jouant le rôle de paramètres indéterminés, et il nous reste simplement à constater que la forme dont il s'agit assure bien sa covanescence.

D'abord il résulte des considérations précédentes que F s'évanouit chaque fois que deux lignes de l'abaque deviennent identiques; elles montrent effectivement que, dans une famille quelconque, chaque terme est alors détruit par celui de classe opposée dont la notation se déduit de la sienne par la transposition des indices de ces lignes, combinée avec une multiplication par -1.

Supposons enfin que l'abaque (1) devienne vanescent par les lignes: dans ce cas (**14**), la première, par exemple, devient agrégée aux autres. Soient $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ les multiplicateurs d'agrégation. Comme F est linéaire et homogène par rapport à $a_1, b_1, c_1, \ldots, j_1$, la substitution

$$\begin{array}{l} \text{de } \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \ldots + \lambda_m a_m \text{ à } a_1, \\ \text{de } \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \ldots + \lambda_m b_m \text{ à } b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

change cette fonction en

$$\lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \ldots + \lambda_m F_m,$$

$F_2, F_3, \ldots, F_m$ désignant ce qu'elle devient successivement quand, aux éléments de la première ligne de l'abaque, on y substitue successivement et respectivement ceux de la deuxième, de la troisième, ..., de la $m^{\text{ième}}$. Or, d'après ce que nous venons de voir, $F_2, F_3, \ldots, F_m$ sont toutes nulles, puisque ce sont des déterminations de F relatives à des abaques dans chacun desquels deux lignes sont identiques.

41. *Dans un covanescent de l'abaque* (1), *ordonné par rapport aux éléments de une ou plusieurs lignes, les coefficients des divers termes sont des covanescents de l'abaque réduit à ses autres lignes.*

Ordonnons d'abord le covanescent considéré, par rapport aux éléments de la première ligne par exemple, de manière à le mettre sous la forme

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + \ldots + J_1 j_1,$$

$A_1, B_1, \ldots, J_1$ ne dépendant plus de $a_1, b_1, \ldots, j_1$. Si l'abaque, privé de sa première ligne, devient vanescent (par les lignes), l'abaque tout entier l'est forcément aussi (**12**). Donc l'expression ci-dessus s'évanouit, quels que soient $a_1, b_1, \ldots, j_1$, d'où $A_1 = B_1 = \ldots = J_1 = 0$ (**3**). D'ailleurs, chacune de ces expressions est, comme le covanescent considéré, linéaire et homogène relativement aux éléments de l'une quelconque des $m - 1$ dernières lignes de l'abaque.

En ordonnant $A_1, B_1, \ldots, J_1$ par rapport aux éléments de la seconde ligne de l'abaque, les coefficients de $a_2, b_2, \ldots, j_2$ sont de même des covanescents de l'abaque réduit à ses $m - 2$ dernières lignes. Or ces coefficients sont précisément ceux des monômes en $a_1 b_2, a_1 c_2, \ldots, b_1 a_2, b_1 c_2, \ldots$ dans le covanescent considéré, quand on l'ordonne par rapport aux éléments des deux premières lignes.

On raisonne de même dans tout autre cas.

42. *Quand le covanescent le plus général d'un abaque s'évanouit quels que soient ses paramètres indéterminés, l'abaque est vanescent* (*par ses files les plus longues*).

Nous reportant au paragraphe précédent, supposons qu'il s'agisse de l'abaque (17) ne contenant pas plus de lignes que de colonnes et se réduisant à (15) par la suppression de sa première ligne.

Si (15) est vanescent, (17) l'est aussi (**12**), et notre théorème a lieu.

Si (15) est invanescent, le système (3) est irréductible et a pour file générale de solutions

$$A_0,\ B_0,\ C_0,\ \ldots,\ J_0,$$

coefficients de $a_0, b_0, c_0, \ldots, j_0$ dans le covanescent le plus général de l'abaque (17) (**35**), (**36**).

Comme on a, par hypothèse,

$$a_0 A_0 + b_0 B_0 + c_0 C_0 + \ldots + j_0 J_0 = 0,$$

toutes les solutions du système (3) satisfont aussi à l'équation

$$a_0 x + b_0 y + c_0 z + \ldots + j_0 v = 0.$$

Cette équation est donc agrégée à ce système (**32**), et l'abaque (17) des coefficients de toutes ces équations est vanescent par les lignes (**14**).

Ultérieurement (**54** et suiv. *inf.*), nous déduirons les files en symptose avec un abaque vanescent donné de la considération de son covanescent; nous aurons ainsi une autre démonstration de cette importante proposition, qui achève de justifier le nom que nous avons donné au covanescent.

43. *Tout covanescent de l'abaque* (1) *reste identique à lui-même si on le multiplie par* — 1, *après y avoir transposé deux lignes choisies arbitrairement dans cet abaque.*

La transposition considérée équivaut évidemment à celle des indices des deux lignes en question, dans les notations de tous les termes du covanescent (les lettres restant immobiles). Chaque terme se change en un autre dont la diagonale appartient à la classe opposée de la même famille, mais qui ne peut faire partie du covanescent parce qu'il n'a pas le signe prescrit par la règle du n° **40**. La multiplication postérieure par — 1 le fait rentrer parmi ceux du covanescent, en lui rendant ce signe, et on aperçoit facilement que la double opération dont il s'agit régénère, quoique dans un ordre différent, tous les termes de cette fonction.

Comme conséquence de ceci : *Un déplacement quelconque des lignes de l'abaque* (1) *dans un de ses covanescents équivaut à la multiplication de cette fonction par* ± 1, *selon qu'il peut être réalisé par un nombre pair ou impair de transpositions de deux lignes.*

44. Dans le covanescent général de l'abaque (1), l'ensemble des termes qui dépendent seulement des éléments de m colonnes données constitue le covanescent général de l'abaque partiel formé par ces m colonnes; c'est ce qui résulte immédiatement de l'application de la règle du n° **40** au développement de ces deux covanescents.

On en conclut que *le covanescent général de notre abaque est la somme de ceux des abaques carrés formés par tous les groupes possibles de* m *de ses colonnes;* ou bien encore, comme chacun de ces covanescents partiels ne contient qu'un paramètre indéterminé, puisque les diagonales d'un abaque carré ne constituent qu'une seule famille, que *l'on obtient encore ce covanescent en ajoutant, après les avoir multipliés respectivement par autant de paramètres indéterminés indépendants, des covanescents particuliers* (*non identiquement nuls*) *de tous ces abaques carrés.*

Nous allons donc nous occuper plus spécialement de ces derniers qui sont très remarquables, et dont la considération supplée à celle du covanescent général d'un abaque non carré.

45. Les termes du covanescent général d'un abaque carré

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \;\; b_1 \;\; c_1 \;\; \ldots \;\; g_1, \\ a_2 \;\; b_2 \;\; c_2 \;\; \ldots \;\; g_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_m \;\; b_m \;\; c_m \;\; \ldots \;\; g_m \end{array} \right.$$

correspondent à des diagonales ne formant qu'une seule famille; par suite (**40**), deux quelconques contiennent comme facteurs des paramètres égaux, ou bien égaux et de signes contraires, selon que les diagonales correspondantes appartiennent à une même classe ou à des classes opposées.

En divisant donc ce covanescent général par le paramètre servant de coefficient à l'un de ses termes, il reste un covanescent particulier composé de termes de la forme $\pm a_p b_q c_r \ldots g_t$ et qui n'est pas nul quels que soient les m^2 éléments de l'abaque, parce que tous ces termes sont dissemblables et que leurs coefficients, les uns égaux à $+1$, les autres à -1, ne sont pas nuls. L'expression ainsi définie est susceptible de deux déterminations égales, mais de signes contraires, selon la classe à laquelle se rattache le terme par le coefficient duquel on a divisé le covanescent général. Mais, en convenant de diviser toujours par le coefficient du terme en $a_1 b_2 c_3 \ldots g_m$, l'ambiguïté se lève, et l'on obtient le covanescent particulier

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 \ldots g_m \pm \ldots,$$

que l'on considère de préférence, et que l'on nomme le *déterminant* de l'abaque carré (2).

Le terme du déterminant mis en évidence, et dont chaque élément est à l'intersection d'une ligne et d'une colonne de rangs égaux, est dit *principal*, lui et la diagonale correspondante qui, géométriquement, va en ligne droite de l'angle gauche supérieur de l'abaque à l'angle l'opposé. On note souvent un déterminant par son abaque encadré à droite et à gauche entre des traits verticaux.

L'*ordre* [1] d'un déterminant est le nombre commun de ses lignes et de ses colonnes; le développement d'un déterminant d'ordre m contient ainsi $1.2.3 \ldots m$ termes se partageant, suivant la disposition des indices relativement à ceux du terme principal, en deux classes d'effectifs égaux; tous sont précédés du signe $+$ dans l'une, du signe $-$ dans l'autre (10).

45 *bis*. L'abaque (2) étant carré, son déterminant est pour lui un

(1) Ce mot s'applique à tant de sortes de nombres en Mathématiques qu'un autre serait bien préférable. S'il était possible de le changer, je proposerais celui de *hauteur*, par lequel il conviendrait aussi de désigner le nombre des formes (linéaires ou non) qui composent un même système. Le nombre des variables indépendantes pourrait être appelé la *largeur* d'une seule forme ou d'un système.

covanescent, aussi bien relativement aux colonnes qu'aux lignes (**34** *bis*, II); un autre abaque carré, ayant pour files de chaque nom celles de l'autre nom dans (2) rangées dans le même ordre, a donc le même covanescent général que cet abaque (2), et par suite le *même déterminant*, puisque les diagonales principales sont identiques. En d'autres termes, *un déterminant reste identique à lui-même si dans son abaque on change les lignes en colonnes et inversement, en transposant chaque élément avec son symétrique relativement à la diagonale principale.*

En conséquence, *on peut déduire aussi tous les termes d'un déterminant de son terme principal, en transposant les lettres des notations de toutes les manières possibles, les indices restant maintenant immobiles, et en changeant le signe à chaque transposition.* Car, dans chacun des deux abaques carrés ci-dessus considérés, les lettres sont disposées comme les indices dans l'autre.

46. En combinant les propriétés générales des covanescents d'un abaque quelconque, avec cette réciprocité remarquable entre les lignes et les colonnes d'un déterminant, on obtient celles de ces expressions. Nous les énonçons ci-après, en renvoyant aux numéros correspondants.

I. *Un déterminant d'ordre m est une fonction homogène de degré m par rapport à l'ensemble de ses éléments*, c'est évident; *mais il est linéaire et homogène relativement à ceux d'une même file quelconque considérés isolément* (**34** *bis*), (**45** *bis*).

II. *Si donc on multiplie, si l'on divise par une même quantité k les éléments d'une même file quelconque, ou bien si l'on change tous leurs signes (ce qui équivaut à les multiplier par* -1), *le déterminant est multiplié ou divisé par k, ou bien changé simplement de signe.*

Plus généralement, si l'on substitue aux éléments de cette file ceux d'une file agrégée à q autres quelconques de même longueur, avec k', k'', ..., $k^{(q)}$ *pour multiplicateurs d'agrégation, le déterminant* Δ *se transforme en*

$$k'\Delta' + k''\Delta'' + \ldots + k^{(q)}\Delta^{(q)},$$

Δ', Δ'', ..., $\Delta^{(q)}$ *désignant ce qu'il deviendrait, si à la file considérée on substituait successivement, mais séparément, chacune des q autres.*

III. *Pour qu'un déterminant soit nul, il est nécessaire et suffisant que les valeurs actuelles de ses éléments rendent son abaque vanescent ou, ce qui revient au même, que dans un sens donné quelconque il y existe quelque file agrégée à ses parallèles* (**14**).

Le déterminant s'annule quand son abaque est vanescent, parce qu'il en est un covanescent particulier (**45**), (**45** *bis*). Quand le déterminant s'annule, le covanescent général s'annule aussi (**45**) et l'abaque est vanescent (**42**).

IV. *Un déterminant n'est pas modifié par l'addition, aux éléments d'une file donnée quelconque, de ceux de mêmes rangs dans une file étrangère quelconque agrégée à quelques-unes des files du déterminant, parallèles à celle que l'on considère.*

Car cette opération revient (II) à ajouter au déterminant ce qu'il devient quand on substitue à la file choisie la file agrégée à ses parallèles, c'est-à-dire un déterminant nul (III).

Toutes ces observations sont d'une utilité continuelle dans le maniement des déterminants.

V. *Des transpositions quelconques exécutées sur les lignes d'un déterminant et simultanément aussi sur ses colonnes le laissent identique à lui-même, ou bien changent simplement son signe, selon que leur nombre total est pair ou impair* (**43**).

47. *Par rapport à ses éléments considérés comme des variables indépendantes, un déterminant est un polynôme premier, c'est-à-dire qu'aucun autre polynôme entier ne peut le diviser s'il ne se réduit à une constante ou bien à ce déterminant lui-même multiplié par quelque facteur constant.*

Soient Δ un déterminant d'ordre quelconque m et H, K deux polynômes entiers par rapport à ses éléments, dont il serait le produit.

Un élément donné e_i de Δ entre nécessairement dans l'un des polynômes H, K, dans H par exemple. Il en résulte que l'autre facteur K ne peut renfermer aucun élément de la colonne de Δ, à laquelle appartient e_i, car autrement ce déterminant ne serait pas linéaire et homogène par rapport aux éléments de cette colonne (**46**, I). En d'autres termes, les éléments $e_1, e_2, \ldots, e_m$ entrent tous dans H, et aucun d'eux dans K.

Partant de là et raisonnant de la même manière, on trouve que K ne peut contenir non plus aucun des éléments de Δ situés sur les lignes auxquelles appartiennent soit e_1, soit $e_2, \ldots$, soit e_m, c'est-à-dire aucun élément de Δ, quel qu'il soit. Donc K se réduit à une constante k et H au produit de Δ par $\frac{1}{k}$.

48. Nous appellerons *déterminants* d'un abaque non carré (A) ceux dont les abaques sont formés par tous les groupes imaginables de files les plus courtes de (A) prises en nombre m égal à leur longueur. Habituellement l'ambiguïté de cette définition résultant de ce que, pour chaque déterminant, l'ordre de succession des files n'est pas déterminé, n'a pas d'inconvénients. Sous le bénéfice de cette observation, l'abaque en question a $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}$ déterminants distincts, si n est sa plus grande dimension. *En ajoutant tous ces déterminants après les avoir multipliés par des paramètres indéterminés en même nombre, on régénère évidemment le covanescent général de l'abaque considéré* (**44**).

49. Nous aurons aussi à considérer les déterminants des abaques déduits de celui dont nous parlons, par la suppression d'un nombre quelconque de files parallèles.

Soient (A) un abaque de dimensions m, n, et q un entier quelconque ne surpassant ni m ni n. En y prenant arbitrairement q lignes et q colonnes et rapprochant toutes ces files de manière à les rendre contiguës, les q^2 éléments appartenant à la fois aux unes et aux autres forment un abaque carré dont le déterminant (abstraction faite du signe qui dépend de l'ordre de succession des files) est d'ordre q, et se nomme le déterminant *mineur* de l'abaque proposé, *relatif* aux q lignes et aux q colonnes choisies. Tous les déterminants mineurs d'ordre q de notre abaque sont en nombre égal au produit des nombres

$$M_q = \frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{1.2.3\ldots q}, \quad N_q = \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots q},$$

exprimant combien m et n objets fournissent respectivement de combinaisons q à q.

Si $q = 1$, ces mineurs en nombre mn se réduisent aux éléments mêmes de l'abaque (A). Si q est égal à la moindre dimension de l'abaque, ils ne sont pas autre chose que les déterminants mêmes de cet abaque, tels que nous les avons définis ci-dessus, et que par opposition nous nommerons *majeurs*. Souvent il y a avantage à ne pas les distinguer essentiellement des mineurs proprement dits.

Pour bien concevoir l'ensemble de ces déterminants mineurs d'ordre q de l'abaque (A), et aussi pour donner de la précision à certaines propositions les concernant, il faut les placer dans les cases d'un nouvel abaque $(A)_q$ de dimensions M_q, N_q, dont chaque colonne contient tous ceux dont les éléments appartiennent à q mêmes colonnes de l'abaque (A), et dans une même ligne tous ceux qui proviennent ainsi de q mêmes lignes de cet abaque.

Il faut en outre, dans une même colonne de l'abaque $(A)_q$, écrire les colonnes des déterminants mineurs d'une manière, arbitraire d'ailleurs, mais telle, que celles d'un même rang quelconque dans tous ne soient composées que d'éléments empruntés à une même colonne de l'abaque (A). Et la même règle doit être suivie relativement aux lignes de l'abaque (A), pour l'arrangement des lignes dans les déterminants mineurs appartenant à une même ligne de l'abaque $(A)_q$. Cet abaque $(A)_q$ ainsi construit sera ce que nous nommerons l'*abaque des mineurs d'ordre q de l'abaque proposé*.

50. Entre le déterminant d'un abaque carré et certains de ses mineurs, comme aussi entre ces derniers seulement, il existe des relations importantes dont nous allons parler.

Soit δ' un déterminant mineur d'ordre q d'un déterminant donné d'ordre m, c'est-à-dire de son abaque; on nomme mineur *complémentaire de* δ' le mineur $'\delta$ d'ordre $m-q$ du même abaque, relatif (**49**) aux $m-q$ lignes et $m-q$ colonnes auxquelles δ' ne l'est pas, ce nouveau déterminant $'\delta$ ayant ses diverses files écrites dans un ordre convenable qui sera réglé dans un instant. Il est clair qu'il y a réciprocité, c'est-à-dire que δ' est inversement le mineur complémentaire de $'\delta$.

Après avoir construit, comme nous l'avons expliqué ci-dessus (**49**), l'abaque des mineurs d'ordre q du déterminant proposé, nous disposerons leurs complémentaires dans les cases semblablement placées d'un nouvel abaque de même dimension. Cela posé, on a ce théorème :

Soient $Q = \frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots q}$, *puis*

$$(3)\qquad \begin{cases} \delta'_1 \ldots \theta'_1 \ldots \tau'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta'_i \ldots \theta'_i \ldots \tau'_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta'_Q \ldots \theta'_Q \ldots \tau'_Q, \end{cases}$$

et

$$(4)\qquad \begin{cases} {}'\delta_1 \ldots {}'\theta_1 \ldots {}'\tau_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ {}'\delta_i \ldots {}'\theta_i \ldots {}'\tau_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ {}'\delta_Q \ldots {}'\theta_Q \ldots {}'\tau_Q \end{cases}$$

l'abaque des mineurs d'ordre q du déterminant proposé Δ et celui de leurs complémentaires convenablement écrits. En induisant l'une par l'autre (**2**) *deux files de même nom dans ces deux abaques, on reproduit Δ ou on trouve zéro, selon que les rangs occupés respectivement par les files considérées dans leurs abaques sont égaux ou inégaux.*

Par exemple, on a pour les lignes

$$(5)\qquad \delta'_1\,{}'\delta_1 + \ldots + \theta'_1\,{}'\theta_1 + \ldots + \tau'_1\,{}'\tau_1 = \Delta,$$

$$(6)\qquad \delta'_1\,{}'\delta_i + \ldots + \theta'_1\,{}'\theta_i + \ldots + \tau'_1\,{}'\tau_i = 0,$$

et même chose pour les colonnes.

Le déterminant Δ est évidemment un covanescent de l'abaque formé par quelques unes seulement de ses lignes, en particulier de celui dont $\delta'_1, \ldots, \theta'_1, \ldots, \tau'_1$ sont les déterminants majeurs. On a donc identiquement (**48**)

$$(6\ bis)\qquad \Delta = \zeta\delta'_1 + \ldots + \varphi\theta'_1 + \ldots + \varpi\tau'_1,$$

$\zeta, \ldots, \varphi, \ldots, \varpi$ ne dépendant pas des éléments des q lignes considérées dans Δ. Dans ces q lignes, réduisons maintenant à 1 les éléments qui forment la diagonale principale de δ'_1 et à zéro tous les autres; on voit immédiatement que δ'_1 se réduit à 1, tous les autres mineurs de la première ligne de l'abaque (3) à zéro; puis, par une vérification facile, que Δ devient, au signe près, le mineur complémentaire $'\delta_1$ de δ'_1, tel que nous l'avons défini jusqu'à présent.

La relation précédente devient donc

$$\pm\,'\delta_1 = \zeta.1,$$

d'où

$$\zeta = \pm\,'\delta_1,$$

et de même

$$\varphi = \pm\,'\theta_1, \quad \ldots, \quad \varpi = \pm\,'\tau_1.$$

Mais on aura

$$\zeta = '\delta_1, \quad \ldots, \quad \varphi = '\theta_1, \quad \ldots, \quad \varpi = '\tau_1$$

si, après avoir disposé les lignes des mineurs de la première ligne de l'abaque (4) de manière que celles d'un même rang quelconque soient toujours des fragments d'une même ligne de Δ, on remanie les colonnes de ces mineurs de manière à leur donner des signes convenables. Cette précaution ayant été prise, ce que nous supposerons désormais, l'égalité (6 *bis*) se transformera bien dans la relation (5) par la substitution de $'\delta_1, \ldots, '\theta_1, \ldots, '\tau_1$ à $\zeta, \ldots, \varphi, \ldots, \varpi$ respectivement.

Exécutons maintenant sur les lignes de Δ des transpositions de nature à changer $\delta'_1, \ldots, \theta'_1, \ldots, \tau'_1$ en $\delta'_i, \ldots, \theta'_i, \ldots, \tau'_i$ respectivement, et nommons $'\delta_i, \ldots, '\theta_i, \ldots, '\tau_i$ ce que deviennent alors $'\delta_1, \ldots, '\theta_1, \ldots, '\tau_1$, ou $-\,'\delta_1, \ldots, -\,'\theta_1, \ldots, -\,'\tau_1$, suivant que ces transpositions laissent ou non invariable le signe de Δ (**46**, V). Il est évident que ces expressions sont les mineurs complémentaires de la $i^{\text{ième}}$ ligne de l'abaque (3), et que, si ce sont elles que l'on a inscrites dans les cases de la $i^{\text{ième}}$ ligne de l'abaque (4), l'identité (5) donnera bien

$$\delta'_i\,'\delta_i + \ldots + \theta'_i\,'\theta_i + \ldots + \tau'_i\,'\tau_i = \Delta,$$

c'est-à-dire l'identité correspondante pour les $i^{\text{èmes}}$ lignes des abaques (3) et (4)

Considérons actuellement le premier membre de la relation (6); d'après ce qui précède, cette expression est égale à un certain déterminant ∇ d'ordre m ayant pour lignes celles du déterminant proposé Δ, dont des fragments ont servi à former les lignes tant des mineurs $\delta'_1, \ldots, \theta'_1, \ldots, \tau'_1$ que de $'\delta_i, \ldots, '\theta_i, \ldots, '\tau_i$. Mais il est évident que deux au moins de ces lignes sont identiques; on a donc $\nabla = 0$ (**46**, III), ce qui prouve l'exactitude de toutes les relations analogues à (6).

Les mineurs de la première colonne de l'abaque (4) étant respectivement les complémentaires de ceux de la première colonne de l'abaque (3), lesquels sont relatifs à quelque groupe de q files parallèles de Δ, il est certain, en conformité de ce que nous venons de voir, et en ayant égard à la réciprocité des lignes et des colonnes (**45** *bis*), qu'en choisissant convenablement les signes dans l'expression

$$\pm \delta'_1 {'\delta_1} \pm \ldots \pm \delta'_i {'\delta_i} \pm \ldots \pm \delta'_Q {'\delta_Q}$$

elle se réduit à Δ. Mais il est évident qu'il faut prendre partout le signe $+$, car l'ensemble des identités analogues à (5) qui viennent d'être établies pour les lignes montrent que les termes des développements de $+\delta'_1 {'\delta_1}, \ldots, +\delta'_i {'\delta_i}, \ldots, +\delta'_Q {'\delta_Q}$ appartiennent tous à Δ; d'ailleurs, étant dissemblables, ils ne peuvent se réduire. Cette remarque prouve l'exactitude des relations du genre de (5), mais relatives à deux colonnes semblablement placées dans nos abaques, relations d'où l'on déduit immédiatement les identités du genre de (6) pour deux colonnes placées de manières différentes dans les mêmes abaques.

On peut formuler très simplement la dernière partie de cette proposition en disant que *deux files de même nom, mais de rangs inégaux dans les abaques* (3), (4), *sont toujours en symptose* (**10**).

Une règle très simple indique comment il faut écrire les éléments des mineurs complémentaires $'\delta_1, \ldots, '\theta_1, \ldots, '\tau_1$ pour que la relation (5) ait lieu : après avoir construit l'abaque de l'un d'eux $'\delta_1$, par exemple, de manière que les termes du développement de l'expression $\delta'_1 {'\delta_1}$ soient précédés des signes qu'ils doivent avoir dans celui de Δ, on exécutera dans cette expression toutes les permutations des colonnes de Δ qui peuvent changer les colonnes de δ'_1 en celles de $\ldots$, $\vartheta'_1, \ldots, \tau'_1$ respectivement; puis, pour $\ldots, {}'\theta_1, \ldots, {}'\delta_1$, on prendra ce en quoi ces permutations changent ${}'\partial_1$, chaque résultat étant ensuite multiplié par $+1$ ou -1, selon la parité ou l'imparité du nombre des transpositions équivalentes à la permutation correspondante.

51. Chacune des formules (5) et des formules analogues pour les colonnes opère une transformation de Δ que l'on peut nommer son *ordination* par rapport à ceux de ses mineurs formant soit quelque file de l'abaque (3), soit celle de mêmes nom et rang dans (4). On peut aller plus loin, et décomposer Δ en une somme dont chaque terme a pour facteurs non plus deux, mais k déterminants d'ordres $q_1, q_2, \ldots, q_k$ de somme égale à m, dans deux quelconques desquels ne se trouvent pas respectivement deux éléments appartenant à un même file de Δ.

On construit arbitrairement un de ces produits de k mineurs, en prenant garde seulement que son développement donne des termes précédés de signes qu'ils ont dans Δ; les autres produits se tirent tous de ce premier par des permutations, soit des lignes, soit des colonnes de Δ, accompagnées de multiplications par $+1$ ou -1 réglées comme à la fin du numéro précédent. Le développement de chaque produit donne

$$q_1!\, q_2! \ldots q_k!$$

termes de Δ; comme ils sont au nombre de $\dfrac{m!}{q_1!\, q_2! \ldots q_k!}$, marquant combien il y a de manières de répartir m objets en k groupes en contenant respectivement $q_1, q_2, \ldots, q_k$, on retrouve bien au total les $m!$ termes de Δ.

Si, avant d'effectuer cette décomposition, on avait réduit Δ à zéro en y rendant identiques quelques files parallèles, on trouverait de nouvelles identités analogues à (6).

En prenant $k = m$, $q_1 = q_2 = \ldots = q_m = 1$, on réalise la plus complète de ces décompositions, car les divers produits ci-dessus formés se réduisent aux termes élémentaires du déterminant.

Il est inutile de pousser plus loin ces dernières considérations qui, jusqu'à présent, sont à peu près inusitées.

52. Le cas particulier le plus intéressant du théorème ci-dessus est celui où q, ordre des mineurs de l'abaque (3), se réduisant à 1, ces mineurs sont les éléments mêmes

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1, \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & g_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots; \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & g_m \end{array}\right.$$

du déterminant proposé Δ d'ordre m. Les mineurs complémentaires, éléments de l'abaque (4), sont alors d'ordre $m-1$, et nous les désignerons respectivement par

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} A_1 & B_1 & C_1 & \ldots & G_1, \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ldots & G_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots; \\ A_m & B_m & C_m & \ldots & G_m. \end{array}\right.$$

La formule (5) donne pour le déterminant Δ *ordonné par rapport aux éléments de sa première ligne*

$$(9)\qquad \Delta = A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 + \ldots + G_1 g_1,$$

et des représentations semblables relativement à toute autre file que celle-ci.

Les identités de ce genre ramènent ainsi le développement du déterminant Δ d'ordre m, à ceux de m déterminants d'ordre $m-1$ seulement, tels que A_1, B_1, C_1, ..., G_1; à leur tour, ceux-ci peuvent être semblablement décomposés, et ainsi de suite.

Les formules (6) en donnent du type

$$(10)\qquad A_1 a_i + B_1 b_i + C_1 c_i + \ldots + G_1 g_i = 0,$$

l'indice i n'étant pas $= 1$, et du type

$$(11)\qquad A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots + A_m k_m = 0,$$

la lettre k étant différente de a. Toutes ces relations sont très employées; en particulier, elles permettent d'achever la solution de plusieurs problèmes que nous avons déjà ébauchés et auxquels nous allons revenir.

53. *Reconnaître si un abaque donné est vanescent ou invanescent par ses files les plus longues.*

Il résulte immédiatement des n[os] **48, 42** que le premier cas a lieu, ou le second, suivant que les déterminants majeurs de l'abaque sont ou non tous nuls.

54. *Réduire par les lignes l'abaque* (1) *de dimensions quelconques.*

Formons (**49**) les abaques des déterminants mineurs d'ordres 1, 2, 3, ... de l'abaque considéré, et soit $q(\leqq m$ et $\leqq n)$ l'ordre le plus élevé de ceux dans lesquels il se trouve quelque déterminant mineur non nul. Si le nombre q n'existe pas, tous les éléments de l'abaque sont nuls, et il n'y a pas lieu de le réduire. Si $q = m$, les déterminants proprement dits de l'abaque ne sont pas tous nuls, et il est invanescent par ses files les plus longues (**48**), (**42**) ou, ce qui est la même chose, irréductible par les lignes.

Supposons donc $0 < q < m$, et admettons, pour fixer les idées, que les q premières lignes de l'abaque aient fourni des éléments à quelque déterminant mineur non nul d'ordre q. L'abaque partiel formé par ces q lignes est invanescent, parce que le mineur dont il s'agit fait partie de ses déterminants majeurs, et qu'ainsi ces derniers ne sont pas tous nuls. Mais chacune des $m - q$ autres lignes est agrégée à cet abaque partiel invanescent, parce que, en la lui adjoignant, on obtient un abaque dont les déterminants majeurs sont des mineurs d'ordre $q + 1$ du proposé, et partant tous nuls (**48**), (**42**), (**14**).

Les q lignes considérées forment donc un abaque invanescent et équivalent par les lignes au proposé.

On opérerait de même s'il s'agissait des colonnes.

55. *Reconnaître si la ligne*

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ i \tag{12}$$

est agrégée à celles de l'abaque (1) *supposé invanescent par les lignes, et, le cas échéant, trouver les éléments de la file d'agrégation.*

Si $m = n$, il y a toujours agrégation (**14**), (**12**); si $m < n$, elle a lieu ou non, selon que l'abaque (1) accru de la ligne (12) est vanescent ou invanescent par les lignes, c'est-à-dire que les déterminants de cet abaque de $m + 1$ lignes sont tous nuls ou non.

L'agrégation ayant lieu dans le cas de $m < n$, supposons que le déterminant Δ des m premières colonnes de l'abaque (1) soit de ceux qui ne sont pas nuls. On peut considérer Δ comme le mineur complémentaire de l'élément h dans le déterminant des $m + 1$ premières colonnes de l'abaque de $m + 1$ lignes; soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ ceux des éléments $h_1, h_2, \ldots, h_m$ dans le même déterminant d'ordre $m + 1$.

On a les $n - m$ relations

$$\begin{gathered}
\Delta h + \Delta_1 h_1 + \Delta_2 h_2 + \ldots + \Delta_m h_m = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Delta i + \Delta_1 i_1 + \Delta_2 i_2 + \ldots + \Delta_m i_m = 0, \\
\Delta j + \Delta_1 j_1 + \Delta_2 j_2 + \ldots + \Delta_m j_m = 0,
\end{gathered}$$

parce que leurs premiers membres reproduisent ceux des déterminants de l'abaque de $m + 1$ lignes, qui contiennent ses m premières colonnes (**52**). Les formules du type (11), appliquées au déterminant d'ordre $m + 1$ que nous considérons, donnent, en outre,

$$\begin{gathered}
\Delta a + \Delta_1 a_1 + \Delta_2 a_2 + \ldots + \Delta_m a_m = 0, \\
\Delta b + \Delta_1 b_1 + \Delta_2 b_2 + \ldots + \Delta_m b_m = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Delta g + \Delta_1 g_1 + \Delta_2 g_2 + \ldots + \Delta_m g_m = 0.
\end{gathered}$$

D'après ces $n - m + m = n$ relations, la file d'agrégation cherchée est évidemment

$$-\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad -\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad -\frac{\Delta_m}{\Delta}.$$

Quand $m = n$, on trouvera la même file en appelant $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_m$

les mineurs complémentaires des éléments d'une colonne vanescente adjointe à l'abaque de $m+1$ lignes, dans le déterminant unique de cet abaque.

Cette méthode ne diffère pas, au fond, de celle qui consisterait à résoudre directement les m équations linéaires non homogènes à m inconnues, dont les lignes des coefficients seraient les m premières colonnes de notre abaque de $m+1$ lignes (**61** *inf.*).

56. Si l'abaque (1) appartient à un système de m formes linéaires à n variables, l'application à ses lignes de ce qui précède fournit la solution des questions suivantes :

Réduire le système dont il s'agit; ce qui fera reconnaître en particulier s'il est ou non irréductible.

Reconnaître si une forme donnée est agrégée ou non à un système irréductible donné, et, dans le premier cas, trouver les éléments de la file d'agrégation.

Ces solutions conduisent ainsi à la considération des déterminants de l'abaque du système; nous les nommerons les *déterminants* (majeurs ou mineurs) du système, dans le cas de beaucoup le plus important où m ne surpasse pas n.

Pour distinguer entre eux les déterminants majeurs, il suffit d'indiquer, dans l'ordre voulu, les m variables du système dont les coefficients constituent les colonnes de chacun d'eux; par exemple, le déterminant des m premières colonnes de l'abaque (1) est celui du système *pris par rapport à l'arrangement* m à $m, xyz\ldots s$, des n variables indépendantes. Relativement au système, ces déterminants jouent des rôles identiques à celui des coefficients dans une simple forme. Les mineurs d'ordre q s'introduisent habituellement dans les questions où il y a à considérer soit q des formes données séparément, soit simultanément avec le système donné, quelque autre système de q forme seulement.

57. Dans le n° **55** du paragraphe précédent auquel nous nous reporterons jusqu'à la fin de celui-ci, nous avons déduit de la considération d'un covanescent de l'abaque carré (18) un système de formes en réduction apparente équivalent au système irréductible des premiers membres des équations (3). Il est composé des premiers membres des équations (22), (23), etc. Rien n'empêche de prendre, pour le covanescent, le déterminant même de cet abaque. Il est évident alors que $(abc\ldots g)$, coefficient commun des variables $x, y, z, \ldots, t$ respectivement, dans les formes du second système, est égal au déterminant du proposé pris par rapport à ces variables. Quant au coefficient $(hbc\ldots g)$ d'une variable non saillante, t par exemple, dans la première forme du second système, il est égal à celui des déterminants du système proposé, dans lequel $(abc\ldots g)$ se change par la substitution de $h_1, h_2, \ldots, h_m$, coefficients de t, à $a_1, a_2, \ldots, a_m$ coefficients de x, c'est-à-dire de la variable saillante qui a un coefficient différent de zéro dans la forme où l'on cherche le nouveau coefficient de t. Cette remarque permet d'écrire immédiatement tout système en réduction apparente équivalent au système considéré.

L'abaque d'agrégation (**6**) du système des premiers membres des équations (22), etc., au système primitif, est

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & \ldots & G_1, \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ldots & G_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ A_m & B_m & C_m & \ldots & G_m, \end{matrix}$$

abaque des mineurs complémentaires des éléments du déterminant $(abc\ldots g)$, ce qui résulte de ce qui a été vu tant au numéro cité qu'au n° **55**.

Quant à l'abaque d'agrégation du système primitif à l'autre, il s'obtient évidemment en divisant par le déterminant $(abc\ldots g)$ tous les éléments de son propre abaque dans lequel on a changé les lignes en colonnes et les colonnes en lignes (**22**).

58. Dans un système donné de m formes linéaires, nous appellerons *contigus par* $m-1$ *colonnes données* deux déterminants dont les abaques contiennent chacun les $m-1$ colonnes dont il s'agit. Cela posé, les remarques suivantes aident à la conception de la structure des systèmes en réduction apparente équivalents à un système irréductible de m formes. Les variables saillantes $x, y, z, \ldots, s$ constituent un groupe de m choisies arbitrairement parmi toutes, sous la seule condition que

$(xyz\ldots s)$, déterminant de leurs coefficients, ne soit pas nul. Dans chaque forme, les variables saillantes ont pour coefficients, l'une $(xyz\ldots s)$, les $m-1$ autres zéro, et les variables non saillantes, tous les déterminants contigus à celui-ci par les colonnes des coefficients de ces $m-1$ dernières variables saillantes. Dans deux formes différentes, une même variable non saillante a pour coefficients des déterminants contigus. Enfin l'ensemble des coefficients de ces formes comprend le déterminant $(xyz\ldots s)$ et tous ceux qui lui sont contigus par quelque groupe de $m-1$ colonnes.

59. *Que le système considéré soit ou non irréductible, une forme construite comme*

$$(xyz\ldots s)x + 0.y + 0.z + \ldots + 0.s$$
$$+ (tyz\ldots s)t + \ldots + (uyz\ldots s)u + (vyz\ldots s)v$$

avec un quelconque de ses déterminants $(xyz\ldots s)$ et tous ses contigus par $m-1$ mêmes colonnes est agrégée à ce système. Car, si tous les coefficients de cette forme sont nuls, elle est agrégée à telles autres que l'on voudra. Si l'un d'eux $(tyz\ldots s)$ ne l'est pas, cas auquel le système considéré est irréductible, cette forme appartient au système en réduction apparente équivalent au proposé, qui a $t, y, z, \ldots, s$ pour variables saillantes.

60. D'après ce que nous avons dit ci-dessus (**57**), à propos de la transformation d'un système irréductible de formes linéaires en un autre équivalent, mais en réduction apparente, on peut supposer relativement aux formules (24) qui fournissent toutes les files de solutions des équations homogènes (3), que les paramètres indéterminés $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ ont pour coefficients, dans les $n-m$ dernières, un déterminant non nul des premiers membres, et dans les m autres, ses contigus qui se rattachent à lui par une loi évidente.

On peut, bien entendu (**35**), obtenir également les mêmes solutions en prenant les coefficients de $a_0, b_0, c_0, \ldots, j_0$ dans le covanescent général de l'abaque (17) dont nous connaissons maintenant le développement (**40**) (**48**). En opérant ainsi, on a cet avantage de les avoir sous des formes où tous les déterminants des premiers membres figurent de la même manière, sans distinction entre ceux qui sont nuls et ceux qui ne le sont pas. Mais il y a aussi un inconvénient : tandis que les formules (24) renferment le nombre minimum $n-m$ de paramètres indéterminés et donnent *une fois* seulement (**31**) chaque file de solutions, les autres, dont nous rappelons l'existence, contiennent $\frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1.2.3\ldots(m+1)}$ paramètres, et fournissent plus d'une fois chaque file de solutions.

Il serait extrêmement facile de prouver que, dans ces dernières formules, la simple suppression de certains termes les fait coïncider absolument avec les formules (24) sans diminuer, bien entendu, leur généralité, ce qui rendrait tout à fait directe la voie suivie pour arriver à celles-ci. Mais, pour abréger, je laisse au lecteur le soin de faire le raisonnement.

61. Les formules (24) écrites avec des déterminants et appliquées à la résolution des équations homogènes (13) procurent immédiatement celle du système non homogène (12) quand il est irréductible et possible. En les supposant résulter d'une résolution par rapport à $x, y, z, \ldots, s$, l'inconnue w est représentée par le produit du déterminant $(abc\ldots g)$ et d'un certain paramètre ψ; pour la réduire à 1, il faut donc poser partout $\psi=\frac{1}{(abc\ldots g)}$, ce qui introduit le diviseur $(abc\ldots g)$ dans les expressions de $x, y, z, \ldots, s$.

Quand $n=m$, les inconnues ont pour valeurs

$$x=-\frac{(kbc\ldots g)}{(abc\ldots g)},\quad y=-\frac{(akc\ldots g)}{(abc\ldots g)},\quad \ldots,\quad s=-\frac{(abc\ldots k)}{(abc\ldots g)};$$

ce sont les célèbres formules de Cramer qui ont été le point de départ de toute la théorie que nous exposons.

62. En thèse générale, on nomme *élimination de ν inconnues entre m équations simultanées quelconques données* l'opération consistant à former une ou plusieurs équations jouissant de la double propriété : 1° de ne plus renfermer les ν inconnues dont il s'agit; 2° d'être satisfaites pour toutes les valeurs des autres inconnues qui appartiennent à des files de solutions des équations proposées, sans toutefois être identiques, c'est-à-dire sans pouvoir être satisfaites par toutes les valeurs imaginables de ces mêmes inconnues (sauf l'existence fortuite de relations spéciales entre les coefficients des équations proposées).

Quand il s'agit d'équations linéaires telles que (12), la proposition suivante renferme à peu près tout ce qu'il est utile de savoir pour ce cas.

On peut toujours éliminer ν inconnues dont les coefficients forment un abaque vanescent par les lignes, de manière que la ou les équations résultantes restent linéaires par rapport aux $n-\nu$ inconnues non éliminées.

Il suffit évidemment, pour cela, d'induire les équations proposées par une file invanescente de m éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en symptose par les colonnes avec l'abaque des coefficients des inconnues à éliminer. L'équation résultante ne les contient plus, et, comme elle est agrégée aux proposées, elle en admet néanmoins toutes les solutions (**34**, 1). D'ailleurs, elle n'est pas identique, du moins en général; car autrement les $n-\nu+1$ autres coefficients s'y évanouiraient aussi, et l'abaque des équations proposées serait vanescent par les lignes, ce qui exigerait entre ses éléments l'existence de relations spéciales qui ne sont pas supposées avoir lieu.

Les multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ dépendent d'équations linéaires simultanées que nous savons résoudre. Rien ne s'oppose à ce que l'on puisse trouver pour eux plusieurs systèmes de valeurs conduisant encore à plusieurs autres équations résultantes et formant un système irréductible; dans ce cas, on peut éliminer de plusieurs manières les ν inconnues en question. Mais tout dépend de circonstances particulières dont il est sans intérêt de faire ici l'étude détaillée.

Si $\nu < m$, le tableau des coefficients des ν inconnues quelconques du système (12) ne peut être réduit par les lignes : *entre m équations linéaires on peut donc toujours éliminer des inconnues en nombre quelconque inférieur à m, et obtenir ainsi une ou plusieurs équations résultantes linéaires par rapport aux inconnues non éliminées.*

Nous avons fait de véritables éliminations en transformant le système (3) en un autre équivalent en réduction apparente (**35**).

Développements sur la composition des systèmes de formes linéaires.

63. Au début de notre théorie (nos 5 et suiv.), nous avons défini la *composition* d'un système *simple* d'abaque

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1 & h_1 & \ldots & i_1 & j_1, \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & g_2 & h_2 & \ldots & i_2 & j_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & g_m & h_m & \ldots & i_m & j_m \end{matrix}\right.$$

à m lignes et n colonnes, avec un système *composant* d'abaque

$$(2)\qquad \left\{\begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_m, \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_m, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \varpi_1 & \varpi_2 & \ldots & \varpi_m, \end{matrix}\right.$$

à M lignes et m colonnes, et, généralisant la notion de l'induction entre une file et un abaque ayant une dimension égale à sa longueur, nous avons appelé l'abaque du système *composé*

$$(3)\qquad \left\{\begin{matrix} \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m, & \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m, & \ldots, & \lambda_1 j_1 + \ldots + \lambda_m j_m, \\ \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_m a_m, & \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_m b_m, & \ldots, & \mu_1 j_1 + \ldots + \mu_m j_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varpi_1 a_1 + \ldots + \varpi_m a_m, & \varpi_1 b_1 + \ldots + \varpi_m b_m, & \ldots, & \varpi_1 j_1 + \ldots + \varpi_m j_m \end{matrix}\right.$$

le résultat de l'induction des abaques (1), (2) *colonne à ligne*. Mais jusqu'à présent nous nous sommes moins occupés des détails de cette opération que de la relation générale du système composé au système simple, abstraction faite du système composant, relation à laquelle nous avons donné le nom d'*agrégation*. Nous allons compléter cette théorie, et tout d'abord étudier de plus près les relations qui existent entre les éléments des trois abaques ci-dessus, en commençant par quelques observations générales.

I. De même que pour la formation de l'abaque (3) les colonnes de (1) ont été induites par les lignes de (2) qui sont de même longueur, on peut induire les unes par les autres des files de tout sens donné, mais de longueurs égales dans deux abaques quelconques ayant une dimension commune. Dans chacun de ces abaques *inducteurs*, le sens *inductoriel* est celui des files qui concourent ainsi à l'induction; le sens *non inductoriel* est celui des autres. Pour (1), par exemple, les colonnes sont inductorielles, les lignes, non inductorielles. Dans l'abaque *induit*, les files d'un même sens contiennent chacune les *induits* d'une même file inductorielle de l'un des inducteurs, par toutes celles de l'autre; ses dimensions sont donc égales aux longueurs des files non inductorielles dans les deux inducteurs; en ne faisant aucune distinction entre ses deux sens, il est indépendant de l'ordre des inducteurs.

II. Dans un sens de l'abaque induit, chacune de ses files est agrégée aux files non inductorielles du premier inducteur, avec quelque file inductorielle du second inducteur pour file d'agrégation; c'est le *sens d'agrégation* de l'induit à son premier inducteur; l'autre inducteur joue alors le rôle d'abaque d'agrégation. De même pour l'autre sens de l'induit en permutant les inducteurs.

III. *Si l'un des abaques inducteurs est vanescent par ses files inductorielles, l'abaque induit l'est aussi par les files de son sens d'agrégation à l'autre inducteur.*

Car toute file de n éléments $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$ qui est en symptose avec l'abaque (1) par ses lignes l'est évidemment aussi avec l'abaque induit (3) par ses lignes; cet induit est donc vanescent par ses colonnes dont la direction est celle où il est agrégé à (2), si la file dont il s'agit est invanescente.

IV. *Si l'abaque induit est vanescent par les files de son sens d'agrégation à l'un des inducteurs, ou bien celui-ci par ses files non inductorielles, ou bien l'autre inducteur par ses files inductorielles, est certainement vanescent.*

Pour fixer les idées, supposons l'induit (3) en symptose par les lignes avec quelque file invanescente de n éléments $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$, c'est-à-dire vanescent par les colonnes, files du sens de son agrégation à l'inducteur (2). On aura pour sa première ligne

$$(\alpha a_1 + \beta b_1 + \ldots + \zeta j_1)\lambda_1$$
$$+ (\alpha a_2 + \beta b_2 + \ldots + \zeta j_2)\lambda_2 + \ldots + (\alpha a_m + \beta b_m + \ldots + \zeta j_m)\lambda_m = 0,$$

et pour les $M - 1$ autres, ce que devient cette égalité par la substitution à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ des $M - 1$ autres lignes de l'inducteur (2). Si donc les m expressions entre parenthèses ne sont pas toutes nulles, leur file est invanescente, et les égalités précédentes montrent que l'inducteur (2) est vanescent par les colonnes, ses files non inductorielles. Sinon leur nullité entraine la symptose de la file $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$ avec les lignes de l'inducteur (1), c'est-à-dire la vanescence de celui-ci par les colonnes, ses files inductorielles.

64. *L'entier q ne surpassant aucune des dimensions des abaques* (1) (2), *si l'on induit l'un par l'autre les abaques de leurs déterminants mineurs d'ordre q* (**49**) (*en y conservant les mêmes directions aux files inductorielles*), *on retrouve précisément l'abaque des déterminants mineurs de même ordre q de l'abaque induit* (3).

I. Considérons d'abord le cas où les nombres n, M des files inductorielles des abaques (1) (2) étant égaux entre eux et non supérieurs à m, nombre commun de leurs files non inductorielles, l'induit (3) est carré, et où, ayant pris $q = n = M$, il s'agit du déterminant même D de cet abaque.

Par rapport aux éléments de toute file inductorielle de l'abaque (1) considérés isolément, D est évidemment une fonction linéaire et homogène; en outre, comme l'abaque (3) devient vanescent par les colonnes chaque fois que (1) devient tel par ses files inductorielles (**63**, III), D est un covanescent de cet inducteur. On a donc (**48**)

$$(4) \qquad D = k'd' + k''d'' + k'''d''' + \ldots,$$

$d', d'', \ldots$ désignant les déterminants d'ordre $q\ (= n)$ correspondant à toutes les combinaisons de q lignes de l'inducteur (1), et $k', k'', \ldots$ des quantités indépendantes des éléments de ce même abaque.

Supposons maintenant que l'on réduise à 1 chacun des éléments de la diagonale principale de d', déterminant des q premières lignes de l'inducteur (1), et à zéro tous les autres éléments du même abaque: il viendra évidemment

$$d' = 1, \quad d'' = d''' = \ldots = 0,$$

puis $D = \delta'$, déterminant des q premières colonnes de l'inducteur (2), moyennant quoi la relation (4) donne $k' = \delta'$. On trouvera de même que k'', k''', ... sont égaux à δ'', δ''', ..., déterminants formés chacun avec les q colonnes placées dans l'inducteur (2) comme le sont dans l'autre (1) les lignes ayant servi à former le déterminant correspondant de la suite d'', d''', ...

Cette relation (4) devient ainsi

$$(5) \qquad D = d'\delta' + d''\delta'' + d'''\delta''' + \ldots,$$

résultat conforme à notre énoncé pour le cas dont il s'agit.

II. Revenant maintenant au cas général, considérons le mineur μ de l'induit (3) relatif à deux combinaisons quelconques, l'une de q de ses colonnes, l'autre de q de ses lignes.

L'abaque de μ est évidemment l'induit des abaques (1), (2), réduits chacun à q files inductorielles, y occupant respectivement les mêmes places que, dans l'abaque (3), les q colonnes et les q lignes considérées.

On a donc par ce qui précède

$$\mu = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3 + \ldots,$$

m_1 et μ_1, m_2 et μ_2, m_3 et μ_3, ... désignant des déterminants formés par toutes les associations possibles de q files non inductorielles, mais de rangs identiques dans les inducteurs (1) et (2) réduits aux q files inductorielles ci-dessus spécifiées.

En d'autres termes, μ est l'induit de deux certaines files inductorielles des abaques des mineurs d'ordre q des inducteurs considérés; et les choses se passent évidemment de même pour tous les mineurs d'ordre q de l'induit (3). Il ne suffit plus maintenant que d'une légère attention pour apercevoir l'exactitude complète de notre théorème.

63. Deux cas particuliers du théorème précédent sont à remarquer.

I. Tout d'abord celui par l'examen duquel nous avons commencé notre démonstration, c'est-à-dire d'un induit carré engendré par deux inducteurs dont les files inductorielles sont en nombres égaux entre eux, mais tous deux inférieurs à celui de leurs files non inductorielles.

Supposons, pour mieux fixer les idées, que les inducteurs proposés

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & i_1, \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & i_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & i_m, \end{array}\right.$$

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \ldots & \iota_1, \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \ldots & \iota_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \alpha_m & \beta_m & \gamma_m & \ldots & \iota_m \end{array}\right.$$

aient chacun m lignes inductorielles et n colonnes. D'après notre théorème, si l'on nomme $d, \ldots, e, \ldots, g$ les déterminants formés par les $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}$ combinaisons de m colonnes de l'abaque (6), $\delta, \ldots, \varepsilon, \ldots, \gamma$ les déterminants en nombre égal formés de la même manière par les colonnes de rangs identiques dans l'abaque (7), et D le déterminant de leur induit, c'est-à-dire celui dont l'élément de la $h^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne est $a_h\alpha_k + b_h\beta_k + \ldots + i_h\iota_k$, on a

$$(8)\qquad D = d\delta + \ldots + e\varepsilon + \ldots + g\gamma.$$

II. Ensuite le cas où, n étant égal à m, les abaques ci-dessus sont tous deux carrés. La formule précédente devient alors simplement

$$(9)\qquad D = d\delta,$$

d, δ, D désignant les déterminants des inducteurs et de leur induit.

Les formules (8), (9) sont très souvent utiles pour décomposer un déterminant tel que D en produits de déterminants plus simples où les éléments des abaques (6), (7) sont séparés, ou bien inversement, pour recomposer en un seul déterminant des expressions affectant la forme de leurs seconds membres.

Pour l'application de la formule (9) à une transformation de cette dernière espèce, il est à remarquer qu'elle donne pour D, produit des déterminants de même ordre d et δ, plusieurs déterminants tous égaux numériquement sans doute, mais n'ayant pas du tout les mêmes éléments.

Effectivement d et δ conservent les mêmes valeurs (au signe près), et l'induction de leurs abaques peut toujours s'exécuter ligne à ligne, si l'on y permute arbitrairement soit des lignes, soit des colonnes, ou bien encore si l'on y change les lignes en colonne, et *vice versa*.

Parmi les diverses manières de disposer ainsi les abaques de d et de δ, il y en a $4 \times 1.2\ldots m$ donnant des abaques induits différant entre eux par autre chose que l'ordre de succession des files; c'est un dénombrement que chacun fera sans difficulté.

66. Nous pouvons actuellement revenir au système simple des formes linéaires

$$f_1, f_2, \ldots, f_m \tag{10}$$

aux variables $x, y, z, \ldots, v$, ayant (1) pour abaque, dont la composition avec le système composant

$$F_1, F_2, \ldots, F_M \tag{11}$$

aux variables $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ ayant (2) pour abaque, engendre le système composé

$$f'_1, f'_2, \ldots, f'_M \tag{12}$$

aux variables $x, y, z, \ldots, v$ ayant (3) pour abaque, ce dernier pouvant être considéré aussi comme résultant de l'induction mutuelle de la file des formes simples et de l'abaque (2) par les lignes de ce dernier. Les principes ci-dessus établis donneront immédiatement les propositions particulières qui vont suivre :

Le déterminant de q des formes composées (12) relatif à un certain groupe de q des variables $x, y, \ldots, v$ est égal à la somme des produits des déterminants des q formes correspondantes dans le système composant (11) pris par rapport à chacune des combinaisons de q de leurs propres variables $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, multipliés respectivement par les déterminants relatifs au groupe considéré des variables $x, y, \ldots, v$, des combinaisons des q formes du système simple (10) qui sont affectées des mêmes indices.

Cet énoncé fait ressortir une analogie à remarquer, entre la composition des systèmes de formes linéaires et la théorie ordinaire des fonctions composées; le rôle des dérivées des fonctions simples, composante et composée, est rempli ici par des déterminants qui, dans bien d'autres circonstances d'ailleurs, se comportent comme des dérivées.

67. *Le système composé est réductible quand le système composant l'est lui-même* (**63**, III).

Si le système composé est réductible, de deux choses l'une : ou le système composant l'est lui-même, ou bien c'est le système simple qui jouit de cette propriété (**63**, IV).

68. *L'abaque des déterminants mineurs du système composé, d'ordre q (ne surpassant ni n, ni m, ni M), est l'induit, colonne à ligne, de ceux des mineurs de même ordre q du système simple et du composant* (**64**).

Cette proposition établit une relation générale très importante entre les mineurs d'un même ordre quelconque, de deux systèmes agrégés de formes linéaires et ceux de leur abaque d'agrégation.

69. Après avoir induit le système des m formes (10) par les M lignes de l'abaque (2), de manière à obtenir le système agrégé (12) de M formes, on peut induire ce dernier par un nouvel abaque de M colonnes et d'un nombre quelconque de lignes. On obtient ainsi un troisième système agrégé à (12), partant à (10), et qui, par suite, peut se calculer en induisant *une seule fois* le système (10) par les lignes d'un abaque de multiplicateurs convenables.

Il est évident *que ce troisième abaque, résultant ainsi de la composition des deux autres, est l'induit du premier par le second, colonne à ligne, écrit de manière à avoir ses lignes agrégées à celles du premier.*

On peut ainsi composer en une seule, des inductions successives du système (10) par des abaques en nombre quelconque; *l'abaque résultant est le résultat final de l'induction colonne à ligne de tous les abaques élémentaires laissés dans l'ordre où ils sont donnés.* La nécessité de prendre pour lignes de chaque induit partiel ses files agrégées à celles du précédent s'oppose à ce que l'on puisse modifier cet ordre; dans certains cas d'ailleurs, on rendrait ainsi l'induction impossible.

Entre les mineurs d'un même ordre q, tant du système (10) que des abaques par lesquels on l'induit successivement, et ceux du système de formes, résultat final de toutes ces inductions, il existe des relations analogues à celles résultant du théorème (**64**) pour le cas d'un seul tableau de multiplicateurs. *L'abaque des derniers mineurs peut s'obtenir en induisant convenablement celui des premiers successivement par tous ceux des seconds.*

70. Quand l'abaque (2) est carré et invanescent, son déterminant Δ est différent de zéro, et il y a lieu de remarquer tout spécialement, parmi ceux que l'on peut composer avec lui, l'abaque également carré

$$(13)\qquad \left|\begin{array}{cccc} \dfrac{'\lambda_1}{\Delta} & \dfrac{'\mu_1}{\Delta} & \cdots & \dfrac{'\varpi_1}{\Delta}, \\ \dfrac{'\lambda_2}{\Delta} & \dfrac{'\mu_2}{\Delta} & \cdots & \dfrac{'\varpi_2}{\Delta}, \\ \dfrac{'\lambda_m}{\Delta} & \dfrac{'\mu_m}{\Delta} & \cdots & \dfrac{'\varpi_m}{\Delta}, \end{array}\right.$$

dont les diverses lignes ont pour éléments les quotients par Δ des mineurs complémentaires (**50**) des éléments des diverses colonnes de (2). Effectivement, si l'on a égard aux relations (5), (6) du numéro cité, tion colonne à ligne de (2) par (13) donne l'abaque

$$(14)\qquad \begin{cases} 1\ 0\ 0\ \ldots\ 0, \\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0, \\ 0\ 0\ 1\ \ldots\ 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \ldots\ \cdot, \\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 1, \end{cases}$$

par lequel l'induction du système (10) en reproduit identiquement toutes les formes.

Dans ce cas, l'induction d'un système de formes par l'abaque (2) est une opération *réversible* comme la multiplication d'une quantité par une autre différente de zéro, en ce sens que l'on peut détruire son effet par une opération inverse de même nature.

Il est évident que l'on retomberait encore sur le système (10) en l'induisant d'abord par (13), puis par (2), plus généralement par deux abaques carrés quelconques *inverses* l'un de l'autre, c'est-à-dire ayant pour induit l'abaque-*unité* (14). Celui-ci est à lui-même son propre inverse.

Le produit des déterminants de deux abaques inverses l'un de l'autre est égal à 1, valeur numérique de leur induit (14).

71. Dans le cas qui nous occupe, c'est-à-dire d'une induction par l'abaque (2) supposé carré et invanescent, *le système induit* (12) et *le proposé* (10) *sont équivalents*, chacun d'eux étant agrégé à l'autre, puisqu'il résulte de son induction par quelque abaque de multiplicateurs.

Plus généralement, ces deux systèmes sont toujours équivalents quand l'abaque (2) est invanescent par les colonnes, ce qui exige qu'il n'en ait pas plus que de lignes; on le constate sans difficulté.

72. La combinaison des notions précédentes conduit à d'autres propositions dont les deux suivantes sont à remarquer.

L'abaque (1) *et celui de ses mineurs d'ordre q (non supérieur à m ni à n) sont tous deux en même temps vanescents ou invanescents par des files de même nom.*

Nous raisonnerons pour les lignes. La chose est évidente si $m > n$, car les abaques considérés (A), $(A)_q$ ont chacun plus de lignes que de colonnes, et par suite (**12**) sont tous deux vanescents par les lignes.

Elle l'est encore si $m \leqq n$ et $q = m$; car $(A)_q$ n'a qu'une ligne dont les éléments sont les déterminants majeurs de (A), lesquels sont tous nuls ou non selon que (A) est vanescent ou invanescent (**48**), (**42**).

Dans le cas où $m \leqq n$, et $q < m$, supposons d'abord vanescent l'abaque (A). Si tous ses mineurs d'un certain ordre $q' \leqq q$ sont nuls, ceux d'ordres $q'+1, q'+2, \ldots, q$ le sont tous aussi, ces derniers notamment, qui servent d'élément à $(A)_q$, et cet abaque est vanescent.

S'il en est autrement, (A) est équivalent par les lignes, par suite agrégé, à un abaque partiel (a) composé de quelques-unes de ses lignes en nombre au moins égal à q (**54**). L'abaque $(A)_q$ est donc agrégé par les lignes à $(a)_q$, abaque des mineurs d'ordre q de (a) (**64**), c'est-à-dire à l'abaque partiel formé par quelques-unes seulement de ses propres lignes; il est donc vanescent (**9**).

Supposons, au contraire, que $(A)_q$ soit vanescent et contienne, par suite, quelque ligne agrégée aux autres; nommons $\delta', \ldots, \theta', \ldots, \tau'$ ceux des mineurs de cette ligne dont les éléments appartiennent aux m premières colonnes de (A), et aussi $\delta'', \delta''', \ldots; \ldots; \theta'', \theta''', \ldots; \ldots; \tau'', \tau''', \ldots$, les mineurs des autres lignes de $(A)_q$ qui se trouvent dans les mêmes colonnes que $\delta', \ldots, \theta', \ldots, \tau'$ respectivement. Par hypothèse, on a en particulier des relations

$$\begin{gathered}\delta' = \mu''\delta'' + \mu'''\delta''' + \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \theta' = \mu''\theta'' + \mu'''\theta''' + \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \tau' = \mu''\tau'' + \mu'''\tau''' + \ldots,\end{gathered}$$

qui, induites par les mineurs complémentaires de $\delta', \ldots, \theta', \ldots, \tau'$ dans le déterminant Δ des m premières colonnes de (A), donnent

$$\Delta = 0$$

en ayant égard aux relations du n° **50**.

Ainsi Δ est nul, et l'on prouverait de même qu'il en est ainsi pour tout autre déterminant de m colonnes de l'abaque (1); donc cet abaque est vanescent par les lignes (**48**), (**42**).

73. *Supposons irréductible le système* (10) *ainsi qu'un autre*

(15) $$f'_1,\ f'_2,\ \ldots\ f'_{m'},$$

de m' ($\overline{<} m$) *formes linéaires.*

Pour que ce second système soit agrégé au premier, il est nécessaire et suffisant que l'abaque de ses mineurs d'un ordre quelconque q (*non supérieur à* m') *soit agrégé par les lignes à celui des mineurs de même ordre du premier.*

La nécessité de la condition posée résulte immédiatement du théorème du n° **68**, et nous avons seulement à prouver qu'elle est suffisante.

Soit d'abord $q = m'$; admettons, pour fixer les idées, que Δ', déterminant du système (15) par rapport à ses m' premières variables $x, y, z, \ldots, p$, est l'un de ceux qui, par hypothèse, ne s'évanouissent pas, et nommons $\Delta'_{xr}, \ldots, \Delta'_{xs}, \ldots, \Delta'_{xt}, \ldots, \Delta'_{xv}$ ceux qui lui sont contigus (**58**) par ses $m' - 1$ dernières colonnes. Associons en outre à m' de toutes les manières possibles les m formes du système (10), et dans les $M = \frac{m(m-1)\ldots(m-m'+1)}{1.2\ldots m'}$ systèmes partiels ainsi obtenus nommons respectivement

(16) $$\left\{\begin{array}{llll} {}'\Delta & {}'\Delta_{xr} & \ldots\ \ldots & {}'\Delta_{xv} \\ {}''\Delta & {}''\Delta_{xr} & \ldots\ \ldots & {}''\Delta_{xv} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ {}^{(M)}\Delta & {}^{(M)}\Delta_{xr} & \ldots\ \ldots & {}^{(M)}\Delta_{xv} \end{array}\right.$$

les déterminants semblables à ceux de la suite

(17) $$\Delta',\ \Delta'_{xr},\ \ldots,\ \Delta'_{xs},\ \Delta'_{xt},\ \Delta'_{xv},$$

c'est-à-dire pris par rapport aux mêmes variables.

La ligne (17) étant agrégée par hypothèse à celles de l'abaque (16), la forme X', dans laquelle les variables $x, y, z, \ldots, p, r, \ldots, s, t, \ldots, v$ ont pour coefficients Δ', o, o, $\ldots$, o, $\Delta'_{xr}, \ldots, \Delta'_{xs}, \Delta'_{xt}, \ldots, \Delta'_{xv}$ respectivement, est agrégée aux M formes ${}'X, {}''X, \ldots, {}^{(M)}X$ construites de la même manière avec les diverses lignes de l'abaque (16). Mais, d'après le n° **59**, chacune des formes ${}'X, \ldots, {}^{(M)}X$ est agrégée à celui des M systèmes partiels de m' formes du système (10), dont les déterminants lui ont fourni des coefficients, partant à ce système (10) tout entier; la forme X' qui leur est agrégée l'est donc aussi au même système.

Cela posé, dans le système $(\Sigma)'$ en réduction apparente aux m' variables saillantes $x, y, z, \ldots, p$, qui est équivalent à (15), X' est précisément la forme où x a un coefficient différent de zéro; quant aux $m'-1$ autres formes Y', Z', ... P' de $(\Sigma)'$, on prouverait de même que chacune d'elles est aussi agrégée à (10).

Le système $(\Sigma)'$ étant ainsi agrégé à (10), son équivalent (15) jouit de la même propriété, ce qu'il fallait établir.

Supposons maintenant $q < m'$ et prenons au hasard q des formes (15). Comme les déterminants de ce système partiel ne peuvent tous s'évanouir, puisque, s'il en était autrement, lui et, par suite, le système (15) dont il est une partie ne seraient pas irréductibles, contrairement à l'hypothèse, il résulte de ce qui précède que chacune de ses q formes est agrégée au système (10); on prouve de même qu'il en est ainsi pour toute autre forme du système (15), qui est bien ainsi agrégé à (10).

74. Dans le cas particulièrement intéressant où $m' = m$, et où l'on considère les déterminants proprement dits ou majeurs des deux systèmes, le théorème précédent fournit sous une forme très élégante les conditions de leur équivalence : *il faut et il suffit que leurs déterminants semblables soient proportionnels*. Le rapport invariable des seconds aux premiers est évidemment égal au déterminant de l'abaque d'agrégation du second système au premier.

75. La question suivante est encore au fond une composition de certains systèmes de formes linéaires; mais, ici, c'est au système simple qu'appartient le rôle moins saillant.

On appelle *substitution linéaire* l'opération consistant à transformer un système donné m formes (linéaires ou non) à n variables $x, y, \ldots, v$, en un autre de m formes toujours, mais à n' $(\gtreqless n)$ nouvelles variables, $x', y', \ldots, t'$ par la substitution à $x, y, \ldots, v$, des formes linéaires qui servent de seconds membres aux relations

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha'_1 x' + \beta'_1 y' + \ldots + \varepsilon'_1 t', \\ y = \alpha'_2 x' + \beta'_2 y' + \ldots + \varepsilon'_2 t', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v = \alpha'_n x' + \beta'_n y' + \ldots + \varepsilon'_n t'; \end{array}\right.$$

l'*abaque* de la substitution est celui même des nouvelles formes dont il s'agit. Le système transformé est ainsi composé du système primitif, ici composant, et de celui des formes de la substitution, ici simple. Il y a, bien entendu, des substitutions de degrés supérieurs au premier ; mais elles augmentent les degrés des formes sur lesquelles on les exécute, et n'ont pas à cause de cela la même importance que les substitutions linéaires.

En opérant la substitution linéaire (18) dans un système de formes linéaires tel que (10), on obtient évidemment un système transformé

$$f'_1,\ f'_2,\ \ldots,\ f'_m \tag{19}$$

également linéaire, *dont l'abaque*

$$\left\{\begin{array}{llll}
a_1\alpha'_1+b_1\alpha'_2+\ldots+j_1\alpha'_n, & a_1\beta'_1+b_1\beta'_2+\ldots+j_1\beta'_n, & \ldots, & a_1\varepsilon'_1+b_1\varepsilon'_2+\ldots+j_1\varepsilon'_n,\\
a_2\alpha'_1+b_2\alpha'_2+\ldots+j_2\alpha'_n, & a_2\beta'_1+b_2\beta'_2+\ldots+j_2\beta'_n, & \ldots, & a_2\varepsilon'_1+b_2\varepsilon'_2+\ldots+j_2\varepsilon''_n,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
a_m\alpha'_1+b_m\alpha'_2+\ldots+j_m\alpha'_n, & a_m\beta'_1+b_m\beta'_2+\ldots+j_m\beta'_n, & \ldots, & a_m\varepsilon'_1+b_m\varepsilon'_2+\ldots+j_m\varepsilon'_n
\end{array}\right. \tag{20}$$

s'obtient en induisant ligne à colonne, celui du système primitif (1) *par celui de la substitution,* cet induit étant écrit de manière à avoir pour lignes ses files agrégées aux lignes de son second inducteur.

76. Il suffit donc de modifier tant soit peu dans la forme nos propositions générales sur la composition des systèmes de formes linéaires (n^{os} **66** et suiv.), pour obtenir celles qui concernent les substitutions linéaires. Par exemple :

L'abaque des déterminants mineurs d'ordre q (non supérieur au plus petit des nombres m, n, n') du système (19) *est l'induit ligne à colonne de ceux des mineurs de même ordre, tant du système primitif* (10) *que de la substitution* (18).

On bien encore :

Le déterminant de q des formes (19) *par rapport à q des nouvelles va-*

riables x', y', ..., t' est égal à la somme des produits des déterminants des q formes de mêmes indices dans le système (10) *relatifs à tous les groupes différents de q des anciennes variables x, y, ..., v, multipliés par les déterminants relatifs aux q nouvelles variables considérées, des mêmes groupes formés avec les seconds membres des relations* (18) (**66**).

77. *Le système* (19) *est réductible si le système primitif* (10) *l'est lui-même.*

Si ce nouveau système est réductible, du système primitif ou de celui des formes (18), *l'un l'est certainement aussi* (**67**).

78. On peut composer une première substitution linéaire telle que (18) avec une seconde remplaçant les n' variables x', y', ..., t' du nouveau système (19) par n'' autres x'', y'', ..; l'*abaque de la substitution résultante est évidemment l'induit, ligne à colonne, de ceux de la première substitution simple et de la seconde,* cet induit étant écrit de manière à avoir pour lignes ses files agrégées à celles du second inducteur.

En raisonnant comme au n° **69**, on aperçoit facilement les particularités relatives à la composition en une seule de tant de substitutions simples que l'on voudra.

79. La substitution (18) est *réversible* dans le cas très important où son abaque est carré et invanescent; car son déterminant Δ n'étant pas nul, sa composition avec la substitution *inverse* ayant pour abaque

$$\begin{array}{cccc}
\frac{'\alpha_1}{\Delta} & \frac{'\alpha_2}{\Delta} & \cdots & \frac{'\alpha_n}{\Delta} \\
\frac{'\beta_1}{\Delta} & \frac{'\beta_2}{\Delta} & \cdots & \frac{'\beta_n}{\Delta} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{'\varepsilon_1}{\Delta} & \frac{'\varepsilon_2}{\Delta} & \cdots & \frac{'\varepsilon_n}{\Delta}
\end{array}$$

$'\alpha_1$, ... désignant les mineurs complémentaires des éléments α_1, ...

de Δ, donne la substitution d'abaque

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right.$$

qui est *identique,* c'est-à-dire laisse sans aucun changement tous les coefficients du système primitif (**70**). La substitution inverse permet donc de revenir du nouveau système (19) à celui d'où il a procédé par la première substitution.

Réciproquement, la première substitution est l'inverse de son inverse et leurs déterminants ont pour produit 1, déterminant de l'abaque (21) de leur substitution résultante.

Plus généralement, la substitution (18) est toujours réversible quand son abaque est invanescent par les lignes, quel qu'en soit le nombre.

80. La question que nous allons traiter se rattache d'une manière très indirecte à l'ensemble du présent paragraphe; mais elle serait encore moins bien placée ailleurs.

Généralisant la définition donnée au n° **10**, nous dirons encore qu'il y a *symptose par les lignes entre les abaques*

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & j_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & j_2 \\ .. & .. & .. & \ldots & .. \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & j_m \end{array}\right.$$

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \ldots & \zeta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \ldots & \zeta_2 \\ .. & .. & .. & \ldots & .. \\ \alpha_\mu & \beta_\mu & \gamma_\mu & \ldots & \zeta_\mu \end{array}\right.$$

tous deux de n colonnes, mais de lignes en nombres relatifs arbitraires, si deux lignes quelconques prises dans l'un et dans l'autre sont en symptose. Tels sont, par exemple, l'abaque d'un système d'équations linéaires et homogènes, et celui que forment quelques files de solutions de ces équations.

81. *Si les abaques* (22), (23) *sont en symptose par les lignes, il en est encore ainsi pour deux autres quelconques qui leur sont respectivement agrégés par les lignes.*

Soient (22)′ et (23)′ les deux abaques agrégés aux proposés, et considérons (22) et (22)′ comme appartenant à deux systèmes d'équations linéaires et homogènes aux n mêmes inconnues. Les lignes de (23) sont des files de solutions pour le premier système, à cause de la symptose supposée, et par suite pour le second, puisqu'il est agrégé au premier (**27**). Celles de (23)′ sont donc aussi des files de solutions pour le second système, puisqu'elles sont agrégées à celles de (23) (**31**). Donc il y a symptose entre chacune d'elles et l'abaque (22)′, qui appartient à ce système.

82. *Les mêmes choses étant posées, les abaques des déterminants mineurs d'un même ordre q (non supérieur à n, m, μ) de* (22), (23) *sont aussi en symptose par les lignes.*

En induisant ligne à ligne les deux abaques proposés, on en forme un troisième dont tous les éléments sont nuls par hypothèse, et par suite aussi tous ceux de l'abaque de ses déterminants mineurs d'ordre q.

Or ce dernier abaque est précisément l'induit, ligne à ligne, de ceux des mineurs d'ordre q des proposés (**64**); ces deux derniers abaques sont donc en symptose par les lignes, puisque les éléments de leur induit sont tous nuls.

83. *Les abaques* (22), (23) *ne peuvent être invanescents tous deux par les lignes s'ils sont en symptose de cette manière, et si le nombre total $m+\mu$ de ces dernières surpasse le nombre commun n de leurs colonnes.*

Si le premier abaque est invanescent, il appartient à quelque système irréductible (S) d'équations linéaires et homogènes, qui, à cause de la symptose supposée, admet chaque ligne du second abaque pour file de solutions.

Si donc $m=n$, le système (S) est déterminé, et chaque ligne du second abaque est vanescente (**29**). Si $m<n$, prenons au hasard

$n - m (< \mu)$ lignes dans le second abaque; ou bien cet abaque partiel est vanescent, et notre proposition est établie; ou bien il est invanescent, et alors chacune des $\mu - (n - m)$ autres lignes de l'abaque (23) lui est forcément agrégée (**31**).

84. Nous dirons que les abaques (22), (23) sont *supplémentaires* s'ils sont en symptose par les lignes, et si le nombre total $m + \mu$ de celles-ci est précisément égal au nombre commun n de leurs colonnes.

Si les abaques (22), (23) *sont supplémentaires et invanescents, tout autre en symptose avec l'un est agrégé à l'autre.*

Le second abaque peut être considéré comme composé de files de solutions cardinales (**31**) du système d'équations linéaires et homogènes qui a les éléments du premier pour coefficients, et le troisième comme composé, par exemple, de files quelconques de solutions des mêmes équations. Cela posé, le point en question est une conséquence immédiate du numéro cité.

Deux abaques sont donc équivalents quand, par les lignes, ils sont invanescents et supplémentaires à un même autre invanescent; par ce qui précède, chacun d'eux est effectivement agrégé à l'autre.

85. La réunion de deux abaques supplémentaires donne un abaque total évidemment carré, dont chaque déterminant de l'un des proposés est un mineur ayant pour mineur complémentaire (**50**) un certain déterminant de l'autre abaque. Nous appellerons *supplémentaires* deux déterminants de nos abaques, qui sont ainsi mineurs mutuellement complémentaires dans l'abaque carré ci-dessus mentionné. Cela posé, on a ce théorème :

Si les abaques (22), (23) *sont supplémentaires, des deux lignes formées par leurs déterminants supplémentaires écrits de manière à y occuper respectivement les mêmes places, l'une est agrégée à l'autre.*

1° Voici d'abord un lemme qui est utile dans plusieurs circonstances :

Dans un même abaque de dimension minimum m, deux déterminants non nuls sont toujours les extrêmes de quelque suite d'autres non nuls aussi, dont chacun est contigu au suivant (**58**) *par $m - 1$ files de cette dimension.*

Soient, par exemple, $(abc\bar{\omega})$, $(hij\bar{\omega})$ deux déterminants non nuls de l'abaque (22), ayant $m-3$ colonnes communes dont l'ensemble a été représenté par $\bar{\omega}$. Chacune des colonnes du second est agrégée à celles du premier, dont l'abaque est carré et invanescent par hypothèse (**18**), et l'on a en particulier

$$\begin{aligned} h_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 + \ldots, \\ h_2 &= \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d'où

$$(hij\bar{\omega}) = \lambda(aij\bar{\omega}) + \mu(bij\bar{\omega}) + \nu(cij\bar{\omega}),$$

car les déterminants déduits de $(hij\bar{\omega})$ par la substitution à la colonne h, de l'une de celles de l'ensemble $\bar{\omega}$, ont chacun deux colonnes identiques et s'évanouissent tous. Les déterminants $(aij\bar{\omega})$, $(bij\bar{\omega})$, $(cij\bar{\omega})$, dont chacun est contigu à $(hij\bar{\omega})$ par $m-1$ colonnes, ne peuvent donc pas être tous nuls, puisque celui-ci ne l'est pas. Comme tous ont $m-2$ colonnes appartenant à $(abc\bar{\omega})$, il existe quelque déterminant non nul qui est contigu à $(hij\bar{\omega})$ et possède une colonne de plus que lui commune avec $(abc\bar{\omega})$. En poursuivant ce raisonnement à partir de ce nouveau déterminant, on réussira évidemment à insérer entre les proposés une suite de déterminants non nuls et contigus chacun à ses deux voisins.

2° Notre théorème est évident quand l'une des deux lignes des déterminants mentionnés dans l'énoncé est vanescente, et nous avons à considérer seulement le cas où dans chacune d'elles il existe quelque déterminant non nul.

On peut alors considérer l'abaque (22) comme appartenant au système irréductible (3) du n° **29**, et l'autre (23) comme un abaque cardinal de solutions de ces équations.

Soient $(abc\ldots g)$ un déterminant non nul de l'abaque (22), $(abc\ldots h)$ un de ses contigus non nuls (s'il en existe), et $(t\ldots uv)$, $(s\ldots uv)$ les déterminants des coefficients de $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ dans les $n-m$ dernières formules (24) du n° **35**, et dans la $m^{\text{ième}}$ suivie des

$n - m - 1$ dernières, respectivement. Des relations évidentes

$$(t\ldots uv) = \quad (abc\ldots g)^m,$$
$$(s\ldots uv) = - \ (abc\ldots g)^{m-1}(abc\ldots h),$$

on conclut que $(t\ldots uv)$, $(s\ldots uv)$ ne sont pas nuls non plus et que l'on a entre ces quatre déterminants la relation

$$\frac{(abc\ldots g)}{(t\ldots uv)} = -\frac{(abc\ldots h)}{(s\ldots uv)}.$$

Maintenant les abaques (23) et (A), ce dernier ayant pour lignes les files de coefficient de $\tau, \ldots, \upsilon, \varphi$ dans les formules citées (24, n° **35**) sont équivalents, puisqu'ils sont l'un et l'autre cardinaux pour un même système d'équations linéaires, et ceux de leurs déterminants semblables qui ne sont pas simultanément nuls sont proportionnels (**74**). Donc $(\eta\ldots\iota\zeta)$, $(\varkappa\ldots\iota\zeta)$, déterminants de (23) semblables à $(t\ldots uv)$, $(s\ldots uv)$ déterminants de (A), ne sont pas nuls, et l'on a

$$\frac{(t\ldots uv)}{(\eta\ldots\iota\zeta)} = \frac{(s\ldots uv)}{(\varkappa\ldots\iota\zeta)},$$

proportion dont la combinaison avec la précédente donne

$$(24) \qquad \frac{(abc\ldots g)}{(\eta\ldots\iota\zeta)} = \frac{(abc\ldots h)}{-(\varkappa\ldots\iota\zeta)},$$

et les dénominateurs sont évidemment les déterminants supplémentaires des numérateurs, ou tout au moins ces supplémentaires multipliés tous deux par -1. En d'autres termes, si deux déterminants non nuls de (22) sont contigus, leurs supplémentaires dans (23) ne le sont pas non plus et sont proportionnels aux premiers. En vertu de notre lemme (1°), cette conclusion s'étend d'elle-même au cas où les déterminants non nuls considérés ne sont pas contigus, ce qui achève évidemment notre démonstration.

Une autre démonstration peut être tirée de considérations toutes différentes : un déterminant non nul de l'abaque (22) associé dans un ordre convenable à ses contigus et à $m-1$ zéros forme une ligne de quantités qui est agrégée à l'abaque en question (**59**). Le supplémentaire de ce déterminant, ses contigus et $\mu-1$ zéros forment de même une ligne agrégée au second abaque. Cela posé, si l'on exprime que les deux lignes ainsi obtenues sont en symptose (**81**), on retrouvera une proportion telle que (24).

En prenant dans nos deux abaques deux groupes, l'un de $q(\leqq m)$, l'autre de $\chi(\leqq \mu)$ lignes, puis formant par le même procédé deux lignes composées de zéros et de déterminants contigus d'ordres q et χ, qui soient respectivement agrégés à ces deux abaques partiels, puis écrivant qu'elles sont en symptose (**81**), on obtient, entre les mineurs d'ordres q et χ des abaques considérés, des relations analogues à celles ci-dessus établies pour leurs déterminants majeurs. Mais chacune de ces relations a plus de deux termes.

86. *Réciproquement, les abaques* (22) (23) *sont en symptose s'ils sont invanescents et si, le nombre total $m+\mu$ de leurs lignes égalant le nombre commun n de leurs colonnes, les déterminants de l'un sont proportionnels à ceux que l'on obtient en associant dans l'ordre ci-dessus spécifié les colonnes de rangs différents dans l'autre.*

Un abaque quelconque (A) de solutions cardinales du système d'équations linéaires et homogènes d'abaque (22) est évidemment supplémentaire à celui-ci; il en résulte (**85**) que les déterminants de (A) sont proportionnels à ceux de (22) et par suite à ceux de (23), que l'on suppose tels par rapport à ces derniers. Les abaques (A) et (23) sont donc équivalents (**74**), puisque leurs dimensions sont respectivement égales; donc (23) est en symptose avec (22) comme son équivalent (A) (**81**), et ces deux abaques sont bien supplémentaires, puisque le nombre total de leurs lignes est égal à celui de leurs colonnes.

Cette proposition fournit un nouveau moyen de vérifier si un abaque invanescent donné, de $n-m$ lignes et de n colonnes, est cardinal pour un système donné irréductible de m équations linéaires et homogènes à n inconnues.

Relations entre les déterminants majeurs et mineurs d'un même système de formes linéaires.

87. Relativement aux éléments de l'abaque d'un système donné de formes linéaires, que nous considérerons désormais comme autant de variables indépendantes, les déterminants majeurs et mineurs du système sont des fonctions exactement définies qui sont habituellement en nombre beaucoup plus considérable. On voit ainsi *a priori* qu'il doit exister entre tous ces déterminants des identités fort nombreuses. Nous allons donner une méthode générale pour les former, en nous bornant toutefois à signaler les plus intéressantes.

Quelquefois nos raisonnements supposeront que les valeurs particulières des éléments considérés ne rendent pas certains abaques vanescents; mais les relations trouvées n'en seront pas moins générales, car elles sont entières par rapport à ces éléments, ou peuvent être amenées à revêtir une pareille forme. D'ailleurs, dans les cas exceptionnels dont il s'agit, elles deviennent évidentes ou peuvent, tout au moins, être établies directement avec une facilité extrême.

Soient

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & g_1 & h_1 & \ldots & j_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & g_m & h_m & \ldots & j_m \end{matrix}\right.$$

l'abaque d'un système de m formes linéaires à n $(\geqq m)$ variables, et q', q'', ..., $q^{(i)}$ des entiers quelconques chacun $< m$, mais dont la somme Q soit supérieure à m. Prenons arbitrairement q' des formes données et, avec des déterminants contigus du système partiel qu'elles constituent, construisons (57) l'abaque $[q']$ d'un système équivalent en réduction apparente. Soient encore $[q'']$, ..., $[q^{(i)}]$ des abaques construits de même avec des systèmes partiels de q'', ..., $q^{(i)}$ formes empruntées tout à fait au hasard au système proposé. Cela posé, l'abaque $[Q]$ formé par la réunion de $[q']$, $[q'']$, ..., $[q^{(i)}]$ est vanescent par les lignes, et ses déterminants mineurs d'ordres supérieurs à m sont tous nuls.

Chaque ligne de l'abaque $[Q]$ est agrégée à l'abaque du système partiel dont les déterminants lui ont fourni des éléments (**59**), et par suite aussi à l'abaque (1) tout entier. Considérons m quelconques de ces lignes : si leur abaque (A) est invanescent, il est équivalent à (1) parce qu'il lui est agrégé et a même hauteur (**19**); une autre ligne quelconque de [Q] lui est donc aussi agrégée; il en résulte que l'abaque de ces $m+1$ lignes est vanescent, et par suite que tous ses déterminants sont nuls. Or ce sont précisément des mineurs quelconques d'ordre $m+1$ de [Q].

Si (A) est vanescent, l'abaque ci-dessus considéré de $m+1$ lignes l'est aussi : ce qui conduit à la même conclusion.

Comme les éléments des abaques $[q']$, $[q'']$, ..., $[q^{(i)}]$ sont, outre quelques zéros, des mineurs d'ordres q', q'', ..., $q^{(i)}$ du proposé, quelquefois des majeurs, chaque équation exprimant la nullité des mineurs d'ordre $m+1$ de [Q] est une relation entre ces déterminants mineurs ou majeurs.

On obtient des relations différentes des précédentes, ou tout au moins présentant une autre forme, en remarquant que l'abaque des mineurs d'un ordre quelconque de [Q] est aussi vanescent (**72**), et égalant à zéro des déterminants mineurs d'ordres convenables de ce nouvel abaque.

Enfin on en trouvera d'autres encore, en appliquant les considérations précédentes à l'abaque des déterminants mineurs d'un ordre quelconque de (1).

88. Voici une autre manière de former des relations de cette espèce : en supposant d'abord invanescent l'abaque (A) du numéro précédent, quelques autres lignes de l'abaque [Q] forment, comme nous l'avons vu, un abaque (B) qui lui est agrégé. Cela posé, on cherchera l'abaque d'agrégation (K) de (B) à (A), et l'on écrira que l'abaque des mineurs d'un ordre donné de (B) est l'induit des abaques de mineurs du même ordre de (A) et de (K) (**64**).

Pour la cause indiquée ci-dessus (**87**), les relations ainsi obtenues ont lieu, même quand l'abaque (A) n'est pas invanescent.

Nous faisons ci-après une application importante de ces diverses considérations.

89. Prenant égal à $m+1$ le nombre total i des entiers q', q'', ..., $q^{(i)}$

du n° **87**, nous ferons les m premiers égaux à 1, le dernier à m, et nous formerons l'abaque [Q] en adjoignant au proposé lui-même (1) l'abaque équivalent par les lignes, mais en réduction apparente :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{llllllll} d & 0 & 0 & \ldots & 0 & d_{ah} & \ldots & d_{aj}, \\ 0 & d & 0 & \ldots & 0 & d_{bh} & \ldots & d_{bj}, \\ 0 & 0 & d & \ldots & 0 & d_{ch} & \ldots & d_{cj}, \\ . & . & . & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots, \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d & d_{gh} & \ldots & d_{gj}. \end{array}\right.$$

Ici d représente le déterminant des m premières colonnes de (1), et $d_{ah}, \ldots, d_{aj}; \ldots, d_{gj}$ les déterminants contigus s'en déduisant par la substitution à la colonne a de la colonne h, ..., à la même de la colonne j; ..., à la colonne g de la colonne j. Pour l'abaque (A) du numéro précédent, nous prendrons (1) et, pour (B), celui qui vient d'être écrit. Nous construirons d'une même manière les abaques $(A)_q$, $(B)_q$ des mineurs d'un même ordre $q (< m)$ de (A) et de (B), qui ont chacun des lignes en nombre égal à $M = \frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots q}$, et nous ferons en sorte que le dernier soit

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{llllll} d^q & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots, \\ \ldots & \ldots & . & \ldots & . & \ldots. \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & d^q & \ldots, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire que les M premières places y soient occupées par les colonnes dont les éléments sont exclusivement formés avec ceux des m premières colonnes de (2). Mettant en évidence les M premières colonnes de $(A)_q$, dont les éléments ne dépendent aussi que de ceux des m premières colonnes de (1), nous l'écrirons

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{llllll} \delta'_1 & \ldots & \theta'_1 & \ldots & \tau'_1 & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \delta'_M & \ldots & \theta'_M & \ldots & \tau'_M & \ldots. \end{array}\right.$$

Cela posé, on a ce qui suit :

I. — *L'abaque d'agrégation* $(\mathrm{K})_q$ *de* (3) *à* (4) *est*

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} d^{q-1}\,'\delta_1 & \ldots & d^{q-1}\,'\theta_1 & \ldots & d^{q-1}\,'\tau_1, \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots, \\ d^{q-1}\,'\delta_{\mathrm{M}} & \ldots & d^{q-1}\,'\theta_{\mathrm{M}} & \ldots & d^{q-1}\,'\tau_{\mathrm{M}}, \end{array}\right.$$

$'\delta_1, \ldots, '\tau_{\mathrm{M}}$ *désignant les complémentaires* (*d'ordre* $m-q$ *par conséquent*) (**50**) *de* $\delta'_1, \ldots, \tau'_{\mathrm{M}}$ *considérés comme mineurs du déterminant* d *des* m *premières colonnes de* (1).

L'induction des m premières colonnes de $(\mathrm{A})_q$ par la première de $(\mathrm{K})_q$ devant fournir les m premiers éléments de la première ligne de (3), on a, entre les éléments de la première colonne de $(\mathrm{K})_q$, les m équations linéaires non homogènes aux M inconnues $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{\mathrm{M}}$,

$$\begin{gathered} \delta'_1\,\delta_1 + \ldots + \delta'_{\mathrm{M}}\,\delta_{\mathrm{M}} = d^q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \theta'_1\,\delta_1 + \ldots + \theta'_{\mathrm{M}}\,\delta_{\mathrm{M}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \tau'_1\,\delta_1 + \ldots + \tau'_{\mathrm{M}}\,\delta_{\mathrm{M}} = 0. \end{gathered}$$

Comme nous supposons d non $= 0$, ce système d'équations est déterminé, car l'abaque des coefficients des inconnues est composé des mêmes files que celui des M premières colonnes de (4), c'est-à-dire que l'abaque des mineurs d'ordre q de celui des m premières colonnes de (1), lequel est invanescent, puisque ce dernier l'est (**72**).

En vertu des formules (5), (6) du n° **50**, ces équations auraient pour solutions $'\delta_1, \ldots, '\delta_{\mathrm{M}}$, si l'on divisait tous leurs seconds membres par d^{q-1}. Donc elles n'ont pas d'autres solutions que les produits de ces quantités par d^{q-1}, produits qui sont précisément les éléments de la première colonne de (5). Même raisonnement pour les autres colonnes de $(\mathrm{K})_q$.

II. *Le déterminant* $'\Delta$ *de l'abaque d'agrégation* (5) *est donné par la formule*

$$(6)\qquad '\Delta = d^{(m-1)\frac{q\mathrm{M}}{m}}.$$

L'induction des M premières colonnes de (4) par celles de $(K)_q$ reproduisant l'abaque des M premières de (3), le produit de leur déterminant Δ' par $'\Delta$ est égal à celui de ce dernier abaque (**65**, II), d'où l'identité

(7) [illegible] $'\Delta = d^{qM}.$

Mais, par rapport à ses éléments, d étant un polynôme premier (**47**), on conclut facilement de cette identité que deux certaines puissances de d, dont les exposants ϖ', $'\varpi$ ont une somme égale à qM, divisent Δ' et $'\Delta$ respectivement, en donnant des quotients constants [1].

Les degrés totaux de $'\Delta$, d par rapport aux éléments de ce dernier déterminant, étant $M(m-1)q$ et m respectivement, on a

$$m'\varpi = M(m-1)q,$$

d'où

$$'\varpi = (m-1)\frac{qM}{m}.$$

En réduisant, d'autre part, à 1 les éléments principaux de l'abaque de d, et à zéro tous les autres, il viendra évidemment $d = {'\Delta} = 1$; le quotient de $'\Delta$ par $d^{'\varpi}$ est donc égal à 1, ce qui achève la vérification de la formule (6).

En raisonnant de la même manière, on trouve aussi

$$\Delta' = d^{\frac{qM}{m}}. \tag{8}$$

III. *En appelant* $'\Theta_Q$ *un déterminant mineur quelconque d'ordre* Q *de l'abaque d'agrégation* (5) *et* Θ'_{M-Q} *le mineur de l'abaque des* M *premières colonnes de* (4) *qui est semblable à son complémentaire, on a la relation*

$$'\Theta_Q = d^{qQ - \frac{qM}{m}}\,\Theta'_{M-Q}. \tag{9}$$

(1) On raisonne en s'appuyant sur ce théorème d'Algèbre générale, bien connu dans le cas d'une seule variable indépendante : *Un polynôme premier qui divise un produit de plusieurs polynômes divise nécessairement l'un d'eux.* Il est inutile, sans doute, d'en fournir ici la démonstration.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que $'\Theta_Q$ est relatif aux Q dernières lignes de (5) et à ses Q dernières colonnes notées par les lettres $'\theta, \ldots, '\tau$, et nous considérerons l'abaque

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{lllllll} \delta'_1 & \ldots & \theta'_1 & \ldots & \ldots & \tau'_1 & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \delta'_{M-Q} & \ldots & \theta'_{M-Q} & \ldots & \ldots & \tau'_{M-Q} & \ldots, \\ 0 & \ldots & d^q & 0 & \ldots & 0 & \ldots, \\ 0 & \ldots & 0 & d^q & \ldots & 0 & \ldots, \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & d^q & \ldots, \end{array}\right.$$

formé avec les $M-Q$ premières lignes de $(A)_q$ ou (4) et les Q dernières de $(B)_q$ ou (3).

Ce nouvel abaque est évidemment agrégé à $(A)_q$ avec l'abaque d'agrégation ici carré

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{lllllll} 1 & 0 & \ldots & 0 & d^{q-1}\,'\theta_1 & \ldots & d^{q-1}\,'\tau_1, \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & d^{q-1}\,'\theta_2 & \ldots & d^{q-1}\,'\tau_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & d^{q-1}\,'\theta_{M-Q} & \ldots & d^{q-1}\,'\tau_{M-Q}, \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & d^{q-1}\,'\theta_{M-Q+1} & \ldots & d^{q-1}\,'\tau_{M-Q+1}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & d^{q-1}\,'\theta_M & \ldots & d^{q-1}\,'\tau_M. \end{array}\right.$$

Cela posé, le déterminant des M premières colonnes de (10) et celui de (11) sont évidemment égaux à $d^{qQ}\Theta'_{M-Q}$ et $'\Theta_Q$ respectivement; en écrivant donc que le premier est égal au produit du second par Δ', déterminant des M premières colonnes de (4), on trouve la relation

$$d^{qQ}\Theta'_{M-Q} = \Delta'\,'\Theta_Q,$$

qui, simplifiée après la substitution à Δ' du second membre de l'identité (8), donne bien la formule (9) qu'il fallait établir.

La formule (9) se change en (6) si l'on y fait $Q = M$, en convenant de considérer comme égal à 1 tout déterminant d'ordre $= 0$.

IV. L'abaque d'agrégation $(K)_q$ étant actuellement connu, les relations mentionnées au n° **88** se formeront sans difficulté. Il serait sans intérêt de les développer ici.

V. Nous noterons toutefois les suivantes, qui nous seront bientôt utiles. Considérons, dans $(B)_q$, deux groupes chacun de M colonnes et composés : le premier des M premières, dont les mineurs dépendent seulement des éléments des colonnes saillantes de (2), le second d'une colonne dont les mineurs dépendent des éléments des colonnes de rangs $m+1, 2, 3, \ldots, q-1, q$ de (B) et des $M-1$ colonnes restant dans le premier groupe ci-dessus défini, quand on en ôte celle dont les mineurs ont été formés avec les éléments des q premières colonnes de (B). Les déterminants de ces deux groupes de colonnes (écrites pour chacun dans un ordre convenable) se réduisent évidemment à d^{qM} et $d^{qM-1}d_{ah}$ respectivement. Mais, à cause de l'équivalence des abaques $(B)_q$, $(A)_q$, ils sont proportionnels (**74**) aux déterminants semblables de ce dernier, savoir Δ' et un autre que nous représenterons par $\Delta'_{(ah)}$. En d'autres termes, on a la proportion

$$\frac{d^{qM}}{\Delta'} = \frac{d^{qM-1}d_{ah}}{\Delta'_{(ah)}}$$

qui, divisée par d^{qM-1}, devient simplement

$$(12) \qquad \frac{d}{\Delta'} = \frac{d_{ah}}{\Delta'_{(ah)}}.$$

En raisonnant de même, on trouvera sans peine d'autres relations analogues, en vertu desquelles *le déterminant d de l'abaque* (2) *et tous ses contigus* (**58**) *sont proportionnels à des déterminants de* $(A)_q$ *dont la loi de formation est évidente.*

90. Les formules (6), (9) sont très employées dans le cas particulier de $q=1$. Des deux abaques (4), (5), le premier coïncide avec le proposé (1); le second, avec celui des mineurs complémentaires des éléments des m premières colonnes, dans l'abaque carré qu'elles forment; il se nomme l'abaque à éléments *réciproques* de cet abaque carré.

Comme $M = m$, ces formules deviennent respectivement

$$(13) \qquad '\Delta = d^{m-1},$$

$$(14) \qquad '\Theta_Q = d^{Q-1}\,\Theta'_{m-Q}.$$

Pour $Q = m - 1$, la dernière donne cette proposition, qui est très souvent utile :

Les mineurs d'ordre $m - 1$ de l'abaque à éléments réciproques d'un abaque carré donné de hauteur m reproduisent les éléments de celui-ci multipliés par la puissance $m - 2$ de son déterminant.

91. *En appelant d le déterminant de m colonnes $a, b, c, \ldots, g$ de l'abaque (1) et (h) un second déterminant contenant une colonne h qui n'appartient pas au premier, on obtient une somme nulle en ajoutant à leur produit $d(h)$, après les avoir multipliées par -1, les m expressions $d_{ah}(a)$, $d_{bh}(b), \ldots, d_{gh}(g)$ qui s'en déduisent par les échanges successifs de la colonne h de (h) avec les colonnes $a, b, c, \ldots, g$ de d. Plus brièvement, on a*

$$(15) \qquad d(h) - d_{ah}(a) - d_{bh}(b) - d_{ch}(c) - \ldots - d_{gh}(g) = 0.$$

Effectivement (**87**) la ligne des n déterminants

$$(a),\ (b),\ (c),\ \ldots,\ (g),\ (h),\ \ldots,\ (j),$$

adjointe à l'abaque (2), donne un abaque vanescent de $m + 1$ lignes. Cela posé, on obtient immédiatement la relation (15) en développant le déterminant des $m + 1$ premières colonnes de ce nouvel abaque, l'égalant à zéro et divisant le résultat par d^{m-1}.

92. Dans les questions impliquant la considération d'un système de formes linéaires, les coefficients de ces formes n'entrent généralement dans les formules que par l'intermédiaire des déterminants du système. Ces derniers y figurent d'une manière homogène, en jouant exactement le même rôle que les coefficients d'une simple forme dans les cas où il s'en présente une seule. Si l'on modifie arbitrairement les formes du système sans qu'il cesse de rester équivalent à lui-même, ils varient tous dans le même rapport (**74**), etc.; bref, on peut les considérer, eux ou des quantités proportionnelles, comme les *coefficients* du système conçu en bloc et, indépendamment de l'individualité spéciale et variable à l'infini, de chacune des formes qui peuvent y entrer, la nature de ce système, caractérisée par sa propriété d'être équivalent ou non équivalent à tels ou tels autres donnés de mêmes dimensions, restant toujours invariable.

Ces considérations nous conduisent à chercher s'il existe un système de formes ayant des déterminants proportionnels à des quantités données et à le construire le cas échéant. La solution de cette question est fournie par le théorème suivant :

Pour qu'il existe quelque système de m formes linéaires à $n(\geqq m)$ variables, dont les déterminants soient proportionnels à des quantités données, il est nécessaire et suffisant que ces quantités satisfassent à la relation (15) *et à toutes celles du même genre.*

La nécessité de la condition posée résulte immédiatement de ce que les relations en question sont homogènes (du deuxième degré) par rapport aux déterminants qui y figurent, par suite, qu'elles ont lieu aussi entre des quantités proportionnelles à ces déterminants.

Pour démontrer qu'elle est suffisante, supposons d'abord que les quantités données ne soient pas toutes nulles; représentons-les en ajoutant un accent aux notations mêmes des déterminants qui doivent leur être proportionnels. Avec une de ces quantités d', différente de zéro, et celles auxquelles doivent être proportionnels les déterminants contigus à d, formons l'abaque de m lignes et n colonnes

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{cccccccc} d' & 0 & 0 & \ldots & 0 & d'_{ah} & \ldots & d'_{aj}, \\ 0 & d' & 0 & \ldots & 0 & d'_{bh} & \ldots & d'_{bj}, \\ 0 & 0 & d' & \ldots & 0 & d'_{ch} & \ldots & d'_{cj}, \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots, \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d' & d'_{gh} & \ldots & d'_{gj}, \end{array}\right.$$

et prouvons qu'il appartient à un système qui satisfait aux conditions voulues.

D'abord, en développant le déterminant d des m premières colonnes et tous ses contigus d_{ah}, ..., d_{gj}, on constate immédiatement l'existence des proportions

$$(17) \qquad \frac{d}{d'} = \frac{d_{ah}}{d'_{ah}} = \cdots = \frac{d_{gj}}{d'_{gj}} = d'^{m-1}.$$

Ensuite, en appelant (h) un déterminant du même abaque contenant $m-2$ colonnes de d, et deux autres colonnes ne lui appartenant pas, dont la $(m+1)^{\text{ième}}$ pour fixer les idées, la relation (15) donne

$$d(h) = d_{ah}(a) + d_{bh}(b) + \ldots + d_{gh}(g),$$

et (a), (b), ..., (g) qui ont chacun en commun avec d une colonne de plus que (h) sont maintenant contigus à ce déterminant comme d_{ah}, ..., d_{gh}. D'autre part, on a, par hypothèse,

$$d'(h)' = d'_{ah}(a)' + d'_{bh}(b)' + \ldots + d'_{gh}(g).$$

Ces deux relations divisées membre à membre donnent

$$(18) \qquad \frac{d}{d'}\frac{(h)}{(h)'} = \frac{d_{ah}(a) + \ldots + d_{gh}(g)}{d'_{ah}(a)' + \ldots + d'_{gh}(g)'} = (d'^{m-1})^2.$$

Effectivement, les déterminants qui entrent dans le numérateur du second membre étant tous contigus à d, les proportions (17) donnent

$$\frac{d_{ah}}{d'_{ah}} = \frac{(a)}{(a)'} = \cdots = \frac{d_{gh}}{d'_{gh}} = \frac{(g)}{(g)'} = d'^{m-1};$$

d'où

$$\frac{d_{ah}(a)}{d'_{ah}(a)'} = \cdots = \frac{d_{gh}(g)}{d'_{gh}(g)'} = (d'^{m-1})^2.$$

En divisant les deux membres de (18) par $\frac{d}{d'}$ qui est égal à d'^{m-1}, il vient finalement

$$\frac{(h)}{(h)'} = d'^{m-1}.$$

Ainsi les déterminants (h), qui ont seulement $m-2$ colonnes communes avec d, sont bien aussi, comme ce déterminant et ses contigus, proportionnels aux quantités correspondantes dans la suite donnée.

En s'appuyant sur cette extension de la proportionnalité voulue, aux déterminants dont il s'agit, on l'étendra au moyen du même raisonnement à ceux qui ont seulement $m - 3$ colonnes communes avec d, puis de là à ceux qui n'en ont que $m - 4$, $m - 5$, ..., puis finalement à tous les déterminants de l'abaque (16).

En induisant (16) par tous les abaques carrés imaginables de hauteur m et de déterminant non $= 0$, on obtiendra évidemment (**71**), (**74**) les abaques de tous les systèmes irréductibles qui répondent à la question.

En prenant enfin un système réductible quelconque de m formes, ses déterminants seront nuls, partant proportionnels à la rigueur aux quantités données, et l'on aura le reste des systèmes qui peuvent être considérés comme satisfaisant aux conditions du problème.

Si les quantités données sont toutes nulles, ce qui n'est pas incompatible avec les relations (15), le problème n'a pas d'autre solution qu'un système réductible quelconque de m formes.

93. Le problème que nous venons de résoudre est un cas particulier de celui-ci :

Étant donnés les éléments d'un abaque de $M = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots q}$ *lignes et de* $N = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1.2\ldots q}$ *colonnes* $(n \geqq m \geqq q)$, *trouver un système de m formes linéaires à n variables, dont l'abaque des déterminants mineurs d'ordre q soit équivalent au proposé (par les lignes).*

Puisque l'abaque des mineurs d'ordre q du système cherché doit être équivalent à celui des quantités données, les déterminants majeurs de ces deux abaques doivent être proportionnels (**74**). Les relations (12) subsisteront donc encore si, à leurs dénominateurs qui sont inconnus, on substitue les déterminants majeurs correspondants de l'abaque donné qui sont connus. Transformées de cette manière, elles fournissent évidemment des quantités proportionnelles à un déterminant du système cherché et à tous ses contigus, quantités à l'aide desquelles on formera les coefficients de ce système en opérant comme ci-dessus (**92**).

Théoriquement, ce problème a autant d'importance que le précédent; car, à un certain point de vue, les éléments de l'abaque des mineurs d'ordre quelconque q d'un système de formes linéaires, comme ceux de l'abaque unilinéaire des majeurs, comme ceux des mineurs d'ordre 1, c'est-à-dire comme les coefficients eux-mêmes, peuvent être considérés comme constituant un ensemble d'autres coefficients spéciaux du système. Ce point de vue s'impose de lui-même quand on a à concevoir les formes par groupes de q. Mais son utilité pratique qui est encore nulle me dispense d'insister davantage, et notamment de formuler les conditions de possibilité.