

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. JABLONSKI

Recherches sur l'action de la matière pondérable sur l'éther

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 10 (1884), p. 147-180.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10__147_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Recherches sur l'action de la matière pondérable sur l'éther ;

PAR M. E. JABLONSKI,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon.

OBJET DE CE TRAVAIL.

Pour arriver à l'explication mécanique des lois de la double réfraction, Fresnel a admis que l'éther qui pénètre un milieu pondérable, et plus particulièrement un milieu cristallisé, subit dans sa constitution des déformations parallèlement aux lignes du cristal, et que l'on peut interpréter géométriquement au moyen d'un ellipsoïde. M. Briot, dans son essai sur la théorie mathématique de la lumière, a repris cette idée et, en y appliquant le calcul, a retrouvé les lois de ces phénomènes. Il paraît donc probable que cette hypothèse est vraie, mais on peut se demander s'il ne serait pas possible de remonter plus haut et de calculer ces déformations, en s'appuyant sur cette idée simple, point de départ des travaux de Cauchy sur la lumière, à savoir que tout se passe comme si les particules matérielles étaient douées de la propriété de s'attirer ou de se repousser mutuellement par une force proportionnelle à leurs masses, fonction de leur distance et dirigée suivant la droite qui les joint. Que cette force soit une propriété inhérente à la matière ou qu'elle soit purement explicative, cela importe peu ; le but de la Physique mathématique étant de ramener, par le calcul, toutes les lois de la Physique trouvées par l'expérience à une seule et même loi, ce but pourrait être considéré comme atteint, si l'application des Mathématiques réduisait la Physique à l'état actuel

de l'Astronomie, où la seule loi de Newton permet d'embrasser dans un même problème de pure Mécanique tous les mouvements des corps célestes.

Je me suis donc proposé de voir si, de la supposition d'une action à distance, il n'était pas possible de déduire l'état d'équilibre de l'éther engagé dans un milieu pondérable et d'exprimer les déformations en un point du milieu éthéré primitivement libre, en fonction des masses des particules pondérables et des distances de ce point à ces particules. J'ai été ainsi conduit à des équations aux différentielles partielles que j'intègre, et, en interprétant les résultats obtenus, je retrouve l'hypothèse de Fresnel et celle qu'a adoptée M. Briot.

Connaissant l'expression des déformations, on peut former les équations du mouvement de l'éther engagé dans un milieu pondérable d'une structure déterminée et l'on trouve ainsi, pour un milieu cubique ou isotrope, une valeur très simple de l'indice unique de réfraction. En discutant le résultat obtenu, on est conduit à cette conclusion importante, savoir :

Si dans l'éther libre les vibrations longitudinales peuvent se propager, l'éther est repoussé par le milieu pondérable, et la densité moyenne de l'éther engagé dans ce milieu est moindre que dans l'éther libre.

L'application des formules trouvées aux milieux non cubiques donne les équations du mouvement de l'éther dans ces milieux, sous la forme où M. Briot les a trouvées, et dont on déduit, comme on peut le voir dans son Ouvrage, toutes les lois principales du phénomène de la réfraction multiple. Elle donne, en outre, une relation très simple et non remarquée encore, entre les indices de réfraction et le coefficient de dilatation ou de contraction de l'éther, ce qui permet de calculer ce coefficient. On en tire la même conclusion, énoncée plus haut, pour le sens de l'action subie par l'éther.

Il n'y avait pas lieu de refaire la théorie de la double réfraction; mais, pour confirmer les résultats déjà trouvés, j'ai cru devoir soumettre au calcul une propriété optique des cristaux biréfringents qui m'a paru intimement liée à la forme cristalline et qui, jusqu'ici, n'avait été soumise à aucune loi. Cette propriété consiste dans les différences que l'on

observe entre l'indice ordinaire et l'indice extraordinaire. Pour certains cristaux, le premier est supérieur au second; on les appelle *répulsifs*: c'est l'inverse qui se présente dans d'autres, que l'on appelle *attractifs*.

Pour les cristaux appartenant au système du prisme droit à base carrée, le calcul conduit à cette conséquence, que : *le signe de la différence des deux indices dépend seulement du signe de la différence entre le côté de la base et la hauteur*. Les données numériques, empruntées à l'Ouvrage de Dufrénoy, montrent que cette conclusion est conforme à l'observation, et que *les cristaux répulsifs sont ceux qui ont le côté de la base moindre que la hauteur*. On en déduit immédiatement que l'éther est repoussé par le milieu pondérable, si l'éther libre peut propager les vibrations longitudinales.

Pour les cristaux du système rhomboédrique, le calcul montre encore que : *le signe de la différence des deux indices dépend seulement du signe du cosinus de l'angle des faces du trièdre, dont le sommet est à l'une des extrémités de l'axe*. Les nombres empruntés à l'Ouvrage déjà cité montrent qu'il en est en effet ainsi, et que *les cristaux répulsifs sont ceux dont l'angle est aigu*, d'où encore la même conclusion pour l'action du milieu pondérable sur l'éther.

On la retrouve encore confirmée par un phénomène particulier que présente le spath. On sait que ce corps, sous l'influence d'une élévation de température, se dilate suivant son axe et se contracte perpendiculairement à cet axe; c'est Mitscherlich qui l'a montré le premier, et qui, par des mesures directes, a prouvé que le rhomboèdre se rapprochait du cube. M. Fizeau a recherché quelles étaient les modifications que subissaient alors les propriétés optiques, et il a conclu que l'indice ordinaire décroît, tandis que l'indice extraordinaire croît, de telle sorte que la double réfraction tend à disparaître. Le calcul est pleinement d'accord avec ces observations, si l'on admet encore la conclusion à laquelle on a été conduit précédemment, et, comme on le voit, par des voies bien distinctes.

Les travaux de Cauchy sur la réflexion et la réfraction semblent impliquer la nécessité des vibrations longitudinales qui, invisibles par elles-mêmes, modifient les vibrations transversales réfléchies ou réfractées, de façon à établir l'accord entre le calcul et l'observation. Si

on en admet l'existence, il faut aussi admettre que l'éther est repoussé par la matière pondérable.

Cette conclusion est contraire à l'hypothèse de Fresnel, à savoir que *les densités moyennes de deux milieux éthérés sont inversement proportionnelles aux carrés des vitesses de propagation des vibrations transversales*; dans un autre travail, je reprendrai l'étude de la réfraction et je montrerai que cette hypothèse n'est nullement nécessaire.

I. — ÉQUILIBRE DE L'ÉTHER ENGAGÉ DANS UN MILIEU PONDÉRABLE.

Soient m la masse d'une particule d'éther, x, y, z ses coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires quelconques. Soient, de même, m_1 la masse d'une particule pondérable, x_1, y_1, z_1 ses coordonnées par rapport aux mêmes axes. Désignons par r la distance de deux particules d'éther, par r_1 la distance d'une particule d'éther à une particule pondérable, par $f(r)$ l'action mutuelle de deux particules d'éther, rapportée à l'unité de masse, et enfin par $f_1(r_1)$ l'action d'une particule pondérable sur une particule d'éther. Si l'on appelle x', y', z' les coordonnées d'une particule d'éther voisine de la première, on a

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2};$$

on aura les équations d'équilibre d'une particule d'éther, en écrivant que les composantes de toutes les actions exercées sur elle, suivant les trois axes, ont une somme nulle, ce qui donne

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum m \frac{f(r)}{r} (x' - x) + \sum_1 m_1 \frac{f_1(r_1)}{r_1} (x_1 - x) = 0, \\ \sum m \frac{f(r)}{r} (y' - y) + \sum_1 m_1 \frac{f_1(r_1)}{r_1} (y_1 - y) = 0, \\ \sum m \frac{f(r)}{r} (z' - z) + \sum_1 m_1 \frac{f_1(r_1)}{r_1} (z_1 - z) = 0. \end{array} \right.$$

La somme Σ s'étend à tout le milieu éthéré et Σ_1 à tout le milieu pondérable.

Si ces dernières sommes se réduisaient à zéro, on aurait les équations d'équilibre de l'éther libre, lequel prendrait évidemment une disposition telle que tout serait semblable autour d'une particule quelconque, ce que l'on traduit analytiquement en écrivant que tout y est indépendant de la direction des axes de coordonnées. La présence des particules pondérables altère cet état d'équilibre et modifie la position de chaque particule d'éther, c'est-à-dire en affecte les coordonnées de certaines variations que nous nous proposons d'évaluer; nous les désignerons par δx , δy , δz .

Pour abrégé, nous représenterons par Δx , Δy , Δz les différences $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$, pour le fluide éthéré libre et isotrope. Ces différences subiront les variations

$$\begin{aligned} \delta \Delta x & \text{ ou } \Delta \delta x, \\ \delta \Delta y & \text{ ou } \Delta \delta y, \\ \delta \Delta z & \text{ ou } \Delta \delta z. \end{aligned}$$

Nous supposerons ces différences assez petites pour qu'on puisse en négliger les deuxièmes puissances; dans cette hypothèse, on aura

$$\delta r = \frac{\Delta x \Delta \delta x + \Delta y \Delta \delta y + \Delta z \Delta \delta z}{r},$$

et les équations d'équilibre prendront la forme

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & \sum m \left[F(r) + \frac{F'(r)}{r} \Delta x^2 \right] \Delta \delta x + \sum m \frac{F'(r)}{r} \Delta x \Delta y \Delta \delta y \\ & \quad + \sum m \frac{F'(r)}{r} \Delta x \Delta z \Delta \delta z + \sum_1 m_1 F_1(r_1) (x_1 - x) = 0, \\ & \sum m \frac{F'(r)}{r} \Delta x \Delta y \Delta \delta x + \sum m \left[F(r) + \frac{F'(r)}{r} \Delta y^2 \right] \Delta \delta y \\ & \quad + \sum m \frac{F'(r)}{r} \Delta y \Delta z \Delta \delta z + \sum_1 m_1 F_1(r_1) (y_1 - y) = 0, \\ & \sum m \frac{F'(r)}{r} \Delta x \Delta z \Delta \delta x + \sum m \frac{F'(r)}{r} \Delta y \Delta z \Delta \delta y \\ & \quad + \sum m \left[F(r) + \frac{F'(r)}{r} \delta z^2 \right] \Delta \delta z + \sum_1 m_1 F_1(r_1) (z_1 - z) = 0, \end{aligned} \right.$$

en faisant, pour abrégier,

$$F(r) = \frac{f(r)}{r}$$

et

$$F_1(r_1) = \frac{f_1(r_1)}{r_1}.$$

On a, symboliquement,

$$\Delta \delta x = (e^{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z} - 1) \delta x,$$

et de même pour δy et δz , pourvu que dans le développement on con-
vienne de remplacer les puissances des caractéristiques u, v, w par des
indices de dérivation. Alors, si l'on pose

$$L = \sum m \left[F(r) + \frac{F'(r)}{r} \Delta x^2 \right] \Delta,$$

$$P = \sum m \frac{F'(r)}{r} \Delta x \Delta y \Delta,$$

.....,

le système (2) s'écrit symboliquement

$$(3) \quad \begin{cases} L \delta x + P \delta y + Q \delta z + \sum m_1 F_1(r_1)(x_1 - x) = 0, \\ P \delta x + M \delta y + R \delta z + \sum m_1 F_1(r_1)(y_1 - y) = 0, \\ Q \delta x + R \delta y + N \delta z + \sum m_1 F_1(r_1)(z_1 - z) = 0. \end{cases}$$

Cauchy a remarqué que les expressions L, P, Q, ... peuvent se dé-
duire des deux autres, savoir :

$$G = \sum m F(r) (e^{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z} - 1),$$

$$H = \sum m \frac{F'(r)}{r} \times [e^{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z} - 1 - (u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z) - \frac{1}{2}(u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z)^2],$$

de telle sorte que

$$L = G + D_{xx}^2 H, \quad P = D_{xy}^2 H, \quad \dots,$$

les équations (3) peuvent donc s'écrire ;

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} G \delta x + D_{ii}^2 H \delta x + D_{ii'}^2 H \delta y + D_{ii''}^2 H \delta z + \sum_i m_i F_i(r_i)(x_i - x) = 0, \\ G \delta y + D_{ii'}^2 H \delta x + D_{ii}^2 H \delta y + D_{ii''}^2 H \delta z + \sum_i m_i F_i(r_i)(y_i - y) = 0, \\ G \delta z + D_{ii''}^2 H \delta x + D_{ii'}^2 H \delta y + D_{ii}^2 H \delta z + \sum_i m_i F_i(r_i)(z_i - z) = 0. \end{array} \right.$$

Les $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ étant supposés relatifs à l'éther libre et isotrope, les termes contenant des puissances impaires de ces quantités sont identiquement nuls, puisqu'ils ne doivent pas changer de valeur lorsqu'on change la direction des axes, c'est-à-dire le signe de ces termes, d'après cela, le premier terme à conserver dans G dépendra de

$$(u \Delta x + v \Delta y + w \Delta z)^2,$$

et dans H de

$$(u \Delta x + v \Delta y + w \Delta z)^4.$$

Nous négligerons pour un instant les termes qui suivent, sauf à voir plus tard l'erreur qui peut en résulter. On a alors simplement

$$G = \frac{1}{2} \sum m F(r) (u \Delta x + v \Delta y + w \Delta z)^2,$$

$$H = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \sum m \frac{F'(r)}{r} (u \Delta x + v \Delta y + w \Delta z)^4,$$

ou enfin

$$G = \frac{1}{2 \cdot 3} \sum m F(r) r^2 (u^2 + v^2 + w^2),$$

$$H = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sum m \frac{F'(r)}{r} r^4 (u^2 + v^2 + w^2)^2.$$

Nous ferons

$$g = \frac{1}{2 \cdot 3} \sum m F(r) r^2,$$

$$h = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} \sum m F'(r) r^3.$$

Ces sommes se rapportent à l'éther libre, tel qu'il serait sans l'action du milieu pondérable. Alors

$$G = g (u^2 + v^2 + w^2),$$

$$H = \frac{h}{4} (u^2 + v^2 + w^2),$$

on en tire

$$D_{uu}^2 H = h(u^2 + v^2 + w^2) + 2hu^2,$$

$$D_{uv}^2 H = 2huv,$$

.....,

et les équations de l'équilibre deviennent

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} (g + h)(u^2 + v^2 + w^2) \delta x \\ \quad + 2h(u^2 \delta x + uv \delta y + uw \delta z) + \sum_1 m_1 F_1(r_1)(x_1 - x) = 0, \\ (g + h)(u^2 + v^2 + w^2) \delta y \\ \quad + 2h(uv \delta x + v^2 \delta y + vw \delta z) + \sum_1 m_1 F_1(r_1)(y_1 - y) = 0, \\ (g + h)(u^2 + v^2 + w^2) \delta z \\ \quad + 2h(uw \delta x + vw \delta y + w^2 \delta z) + \sum_1 m_1 F_1(r_1)(z_1 - z) = 0, \end{array} \right.$$

équations linéaires aux différentielles partielles qu'il s'agit d'intégrer.

A cet effet, cherchons d'abord si l'on ne pourrait pas y satisfaire par une solution particulière, savoir :

$$\delta x = \sum_1 m_1 \varphi(r_1)(x_1 - x),$$

$$\delta y = \sum_1 m_1 \varphi(r_1)(y_1 - y),$$

$$\delta z = \sum_1 m_1 \varphi(r_1)(z_1 - z),$$

en choisissant convenablement la fonction inconnue $\varphi(r_1)$. On a alors

$$u \delta x = - \sum_1 m_1 \frac{\varphi'(r_1)}{r_1} (x_1 - x)^2 - \sum_1 m_1 \varphi(r_1),$$

$$u^2 \delta x = \sum_1 m_1 \left[\frac{\varphi'(r_1)}{r_1} \right]' \frac{(x_1 - x)^3}{r_1} + 3 \sum_1 m_1 \frac{\varphi'(r_1)}{r_1} (x_1 - x),$$

$$uv \delta x = \sum_1 m_1 \left[\frac{\varphi'(r_1)}{r_1} \right]' \frac{(x_1 - x)^2 (y_1 - y)}{r_1} + \sum_1 m_1 \frac{\varphi'(r_1)}{r_1} (y_1 - y),$$

.....;

il en résulte

$$(u^2 + v^2 + w^2) \delta x = \sum_1 m_1 \left[\frac{\varphi'(r_1)}{r_1} \right]' r_1 (x_1 - x) + 5 \sum_1 m_1 \frac{\varphi'(r_1)}{r_1} (x_1 - x),$$

$$u^2 \delta x + uv \delta y + uw \delta z = \sum_1 m_1 \left[\frac{\varphi'(r_1)}{r_1} \right]' r_1 (x_1 - x) + 5 \sum_1 m_1 \frac{\varphi'(r_1)}{r_1} (x_1 - x),$$

.....

Les équations (5) deviennent alors

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 m_i \left\{ (g + 3h) \left\{ \left[\frac{\varphi'(r_i)}{r_i} \right]' r_i + 5 \frac{\varphi'(r_i)}{r_i} \right\} + F_i(r_i) \right\} (x_i - x) = 0, \\ \Sigma_1 m_i \left\{ (g + 3h) \left\{ \left[\frac{\varphi'(r_i)}{r_i} \right]' r_i + 5 \frac{\varphi'(r_i)}{r_i} \right\} + F_i(r_i) \right\} (y_i - y) = 0, \\ \Sigma_1 m_i \left\{ (g + 3h) \left\{ \left[\frac{\varphi'(r_i)}{r_i} \right]' r_i + 5 \frac{\varphi'(r_i)}{r_i} \right\} + F_i(r_i) \right\} (z_i - z) = 0. \end{array} \right.$$

Elles sont satisfaites simultanément, si l'on choisit la fonction φ de manière à satisfaire à l'équation unique

$$(g + 3h) \left\{ \left[\frac{\varphi'(r_i)}{r_i} \right]' r_i + 5 \frac{\varphi'(r_i)}{r_i} \right\} + F_i(r_i) = 0$$

ou, en faisant, pour abrégier, $\psi(r_i) = \frac{\varphi'(r_i)}{r_i}$,

$$(7) \quad (g + 3h) \left(\frac{d\psi}{dr_i} r_i + 5\psi \right) + F_i(r_i) = 0,$$

φ ayant été ainsi choisi, et $\delta x, \delta y, \delta z$ étant toujours les solutions les plus générales des équations (5), faisons

$$\begin{aligned} \delta x &= \Sigma_1 m_i \varphi(r_i) (x_i - x) + \delta' x, \\ \delta y &= \Sigma_1 m_i \varphi(r_i) (y_i - y) + \delta' y, \\ \delta z &= \Sigma_1 m_i \varphi(r_i) (z_i - z) + \delta' z, \end{aligned}$$

$\delta' x, \delta' y, \delta' z$ étant maintenant les inconnues de la question. Elles sont déterminées par les équations

$$\begin{aligned} (g + h)(u^2 + v^2 + w^2) \delta' x + 2h(u^2 \delta' x + uv \delta' y + uw \delta' z) &= 0, \\ (g + h)(u^2 + v^2 + w^2) \delta' y + 2h(uv \delta' x + v^2 \delta' y + vw \delta' z) &= 0, \\ (g + h)(u^2 + v^2 + w^2) \delta' z + 2h(uw \delta' x + vw \delta' y + w^2 \delta' z) &= 0, \end{aligned}$$

tirées par substitutions des équations (5). Dans l'éther libre, les solu-

tions seraient visiblement

$$\delta'x = 0, \quad \delta'y = 0, \quad \delta'z = 0.$$

Or, si l'on passe de l'éther libre à l'éther qui pénètre le milieu pondérable, les coefficients g et h ne changent pas; on en conclut que les solutions restent les mêmes, et, par suite, que les solutions trouvées sous forme de solutions particulières sont en réalité les solutions générales des équations de l'équilibre.

Elles ont une interprétation simple. Considérons les trois déplacements élémentaires

$$m_1 \varphi(r_1)(x_1 - x), \quad m_1 \varphi(r_1)(y_1 - y), \quad m_1 \varphi(r_1)(z_1 - z),$$

que l'on peut écrire

$$m_1 \varphi(r_1) r_1 \frac{(x_1 - x)}{r_1}, \quad m_1 \varphi(r_1) r_1 \frac{(y_1 - y)}{r_1}, \quad m_1 \varphi(r_1) r_1 \frac{(z_1 - z)}{r_1};$$

ce sont les composantes suivant les axes coordonnés d'un déplacement unique représenté par $m_1 \varphi(r_1) r_1$, et dirigé suivant la droite qui joint le point du milieu éthéré à une particule pondérable. Ce déplacement est, comme on voit, proportionnel à la masse de la particule pondérable et fonction de la distance à cette particule.

Le déplacement total d'une particule d'éther est, d'après la forme trouvée, la résultante des déplacements élémentaires.

Toute la question est donc ramenée à intégrer l'équation (7), ce qui ne présente aucune difficulté.

II. — INTÉGRATION.

L'équation (7) est linéaire, on en a immédiatement l'intégrale

$$\psi(r_1) = \frac{C}{r_1^3} - \frac{1}{r_1^3(g + 3h)} \int \frac{F_1(r_1)}{r_1} r_1^5 dx_1,$$

où C est une constante arbitraire.

Pour la déterminer, remarquons que ψ doit se réduire à zéro, lorsque

l'éther est supposé libre, c'est-à-dire lorsque l'on supprime l'action du milieu pondérable, ou enfin lorsqu'on fait $F_1(r_1) = 0$; il en résulte $C = 0$, et l'on a simplement

$$(8) \quad \psi(r_1) = - \frac{1}{r_1^3(g+3h)} \int F_1(r_1) r_1^4 dr_1.$$

La fonction $F_1(r_1)$ est généralement considérée comme étant inversement proportionnelle à une certaine puissance entière de la distance; en effet, si l'on suppose qu'il en soit ainsi, pour la force d'action de la matière pondérable sur l'éther, on a

$$f_1(r_1) = \frac{\mu_1}{r_1^{n_1}},$$

μ_1 étant une constante positive, si la force est attractive, négative dans le cas contraire; on en conclut

$$F_1(r_1) = \frac{\mu_1}{r_1^{n_1+1}}.$$

Plus généralement, on peut imaginer $f_1(r_1)$ développée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{r_1}$, soit

$$f_1(r_1) = \frac{\mu_1}{r_1^{n_1}} + \frac{\mu_1}{r_1^{n_1+1}} + \dots,$$

et si l'on admet qu'à une petite distance, comparable au rayon de la sphère d'activité, le premier terme est prépondérant et donne son signe à $f_1(r_1)$, on pourra encore, quand on se bornera à étudier le sens des phénomènes, limiter $f_1(r_1)$ à ce premier terme; c'est ce que nous ferons.

Remplaçant donc $F_1(r_1)$ par la valeur précédemment écrite, on a

$$\int F_1(r_1) r_1^4 dr_1 = \mu_1 \int \frac{dr_1}{r_1^{n_1+1}}.$$

1° Si $n_1 \neq 4$, on a

$$\mu_1 \int \frac{dr_1}{r_1^{n_1+1}} = - \frac{\mu_1}{n_1-4} \frac{1}{r_1^{n_1-4}},$$

donc

$$\psi(r_1) = \frac{\mu_1}{(g+3h)(n_1-4)} \frac{1}{r_1^{\mu_1+1}};$$

par suite,

$$\psi'(r_1) = \frac{\mu_1}{(g+3h)(n_1-4)} \frac{1}{r_1^{\mu_1}},$$

ou enfin, si $n_1 \neq 1$,

$$(9) \quad \varphi_1(r_1) = - \frac{\mu_1}{(n_1-1)(n_1-4)(g+3h)} \frac{1}{r_1^{\mu_1-1}}.$$

Il en résulte

$$(10) \quad \begin{cases} \delta x = \frac{-\mu_1}{(n_1-1)(n_1-4)(g+3h)} \sum_1 \frac{m_1}{r_1^{\mu_1-1}} (x_1 - x), \\ \delta y = \frac{-\mu_1}{(n_1-1)(n_1-4)(g+3h)} \sum_1 \frac{m_1}{r_1^{\mu_1-1}} (y_1 - y), \\ \delta z = \frac{-\mu_1}{(n_1-1)(n_1-4)(g+3h)} \sum_1 \frac{m_1}{r_1^{\mu_1-1}} (z_1 - z). \end{cases}$$

On a supposé n_1 différent de 1 et de 4.

2° Si $n_1 = 1$, on trouve

$$(11) \quad \varphi = \frac{-\mu_1}{3(g+3h)} \text{L}r_1,$$

L désignant un logarithme népérien.

3° Si $n_1 = 4$, on trouve

$$(12) \quad \varphi = \frac{\mu_1}{3(g+3h)} \left(\text{L}r_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{r_1^3}.$$

L'unité de longueur est arbitraire, on la supposera très grande par rapport au rayon de la sphère d'activité, de sorte que le nombre r_1 sera toujours petit.

Avant d'aller plus loin, proposons-nous d'apprécier l'erreur commise en réduisant G et H à leurs premiers termes; bornons-nous à G : le résultat serait le même pour H.

Le premier terme négligé dans G est

$$\frac{1}{2} \sum m F(r) (u \Delta x + v \Delta y + w \Delta z)^4$$

ou

$$\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} \sum m^2 F(r) r^4 (u^2 + v^2 + w^2)^2;$$

donc, dans la première équation, par exemple dans $G \delta x$, on a négligé

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2.5} \Sigma m F(r) r^4 (u^2 + v^2 + w^2)^2 \delta x \\ & = \frac{1}{2.5} \Sigma m F(r) r^4 (u^2 + v^2 + w^2) \left(r_1 \frac{d\psi}{dr_1} + \rho \psi \right) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{2.5} \Sigma m F(r) r^4 (u^2 + v^2 + w^2) \frac{F_1(r_1)}{g + 3h} \\ & = - \frac{n_1(n_1-1)}{2.5(g+3h)} \Sigma m F(r) r^4 \Sigma_1 m_1 \frac{\mu_1}{r_1^{n_1+2}}; \end{aligned}$$

le premier terme conservé est

$$- \frac{1}{2.3(g+3h)} \Sigma m F(r) r^2 \Sigma_1 m_1 \frac{\mu_1}{r_1^{n_1+2}};$$

donc deux termes relatifs aux mêmes valeurs de r et de r_1 sont un rapport de l'ordre $\frac{r^2}{r_1^2}$.

Si l'on désigne par ε le rayon de la sphère d'activité de l'éther sur lui-même, par l la demi-distance moyenne des particules pondérables, ce rapport pour deux termes quelconques est moindre que $\frac{\varepsilon^2}{l^2}$. Dans l'idée que l'on se fait du milieu éthéré, on conçoit que chaque cellule du milieu pondérable contient un très grand nombre de particules d'éther, la distance de deux particules d'éther voisines est donc très petite par rapport à l , et si l'on admet que l'action du milieu éthéré sur une de ses particules se réduise à celle des particules très voisines, le rapport précédent sera assez petit pour que l'on puisse négliger, au moins dans une première approximation, les termes que nous avons rejetés.

III. — INTERPRÉTATION.

Nous avons trouvé pour les composantes de la déformation totale

$$\begin{cases} \delta x = \Sigma_1 m_1 \varphi(r_1)(x_1 - x), \\ \delta y = \Sigma_1 m_1 \varphi(r_1)(y_1 - y), \\ \delta z = \Sigma_1 m_1 \varphi(r_1)(z_1 - z), \end{cases}$$

et déterminé la fonction φ ; voyons maintenant comment ces formules s'accordent avec l'hypothèse de Fresnel et l'idée que M. Briot a émise sur la constitution de l'éther.

Considérons, par exemple, un milieu cristallisé dans le système du prisme droit à base rectangle; prenons pour origine le centre d'une cellule, et soient a, b, c les demi-dimensions de cette cellule : les coordonnées d'une particule pondérable quelconque seront

$$ma, nb, pc,$$

m, n, p étant des nombres entiers impairs positifs ou négatifs et pouvant prendre toutes les valeurs possibles; on a donc

$$\delta x = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} m_1 (ma - x) \varphi \left[\sqrt{(ma - x)^2 + (nb - y)^2 + (pc - z)^2} \right].$$

Actuellement, imaginons que l'on passe d'une particule d'éther à une autre occupant dans une autre cellule une position homologue à celle de la première; le centre de cette cellule aura pour coordonnées

$$2m'a, 2n'b, 2p'c,$$

m', n', p' étant des nombres entiers déterminés. Donc il faudra remplacer

$$x, y, z$$

par

$$x + 2m'a, y + 2n'b, z + 2p'c$$

et si l'on pose

$$m'' = m - 2m', \quad n'' = n - 2n', \quad p'' = p - 2p',$$

m'', n'', p'' seront encore des nombres impairs pouvant prendre toutes les valeurs possibles, et l'on aura pour la seconde particule

$$\delta x = \sum_{m''=-\infty}^{m''=+\infty} \sum_{n''=-\infty}^{n''=+\infty} \sum_{p''=-\infty}^{p''=+\infty} m_1 (m''a - x) \times \varphi \left[\sqrt{(m''a - x)^2 + (n''b - y)^2 + (p''c - z)^2} \right],$$

qui est évidemment la même chose que pour la première. Donc δx , δy , δz reprennent, comme on devait s'y attendre, la même valeur aux points homologues des cellules cristallines : ce sont bien des fonctions périodiques de x , y , z dont les périodes sont $2a$, $2b$, $2c$. C'est sur cette considération que M. Briot a fondé la théorie mathématique de la dispersion et de la polarisation circulaire.

Si l'on considère une fonction $\varpi(r_1)$, telle que l'on ait

$$-\frac{\varpi'(r_1)}{r_1} = \varphi(r_1)$$

et que l'on forme la fonction

$$\Sigma_1 m_1 \varpi(r_1),$$

on voit que δx , δy , δz sont les dérivées partielles de cette fonction, prises respectivement par rapport à x , y , z .

Donc le déplacement d'une particule est dirigé suivant la normale à la surface représentée par l'équation

$$(13) \quad \Sigma_1 m_1 \varpi(r_1) = \lambda,$$

λ étant choisi de façon que cette surface passe par le point considéré. C'est l'analogie des surfaces de niveau, en hydrostatique.

Pour les points voisins du centre d'une cellule, cette surface est sensiblement un ellipsoïde ou une sphère. En effet, prenons toujours pour origine le centre de cette cellule, et désignons par λ_0 la valeur que prend λ ou $\Sigma_1 m_1 \varpi(r_1)$ quand on y fait

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Développons λ suivant les puissances de x , y , z ; on a

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + u\lambda_0 x + v\lambda_0 y + w\lambda_0 z \\ &+ \frac{1}{2}(u^2\lambda_0 x^2 + v^2\lambda_0 y^2 + w^2\lambda_0 z^2 + 2uv\lambda_0 xy + 2uw\lambda_0 xz + 2vw\lambda_0 yz) + \dots \end{aligned}$$

Si l'on fait

$$\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

on a

$$u\lambda_0 = \sum_1 m_1 \frac{\varpi'(\rho_1)}{\rho_1} x_1,$$

$$v\lambda_0 = \sum_1 m_1 \frac{\varpi'(\rho_1)}{\rho_1} y_1,$$

$$w\lambda_0 = \sum_1 m_1 \frac{\varpi'(\rho_1)}{\rho_1} z_1,$$

ces quantités sont nulles dans un milieu homoédrique. Nous ferons ensuite

$$u^2\lambda_0 \quad \text{ou} \quad - \sum_1 m_1 \varphi'(\rho_1) \frac{\rho_1^2}{\rho_1} - \sum_1 m_1 \varphi(\rho_1) = A,$$

$$v^2\lambda_0 \quad \text{ou} \quad - \sum_1 m_1 \varphi'(\rho_1) \frac{\rho_1^2}{\rho_1} - \sum_1 m_1 \varphi(\rho_1) = A',$$

$$w^2\lambda_0 \quad \text{ou} \quad - \sum_1 m_1 \varphi'(\rho_1) \frac{\rho_1^2}{\rho_1} - \sum_1 m_1 \varphi(\rho_1) = A'',$$

$$vw\lambda_0 \quad \text{ou} \quad - \sum_1 m_1 \varphi'(\rho_1) \frac{\rho_1 \rho_1'}{\rho_1} = B,$$

$$uw\lambda_0 \quad \text{ou} \quad - \sum_1 m_1 \varphi'(\rho_1) \frac{\rho_1 \rho_1'}{\rho_1} = B',$$

$$uw\lambda_0 \quad \text{ou} \quad - \sum_1 m_1 \varphi'(\rho_1) \frac{\rho_1 \rho_1'}{\rho_1} = B''.$$

On a donc, en se bornant aux termes du deuxième degré en x, y, z , ce qui revient en réalité à négliger ceux du quatrième degré, car les coefficients des termes du troisième degré sont identiquement nuls :

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{2}(Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy),$$

et si λ' est la valeur de λ relative à un point donné du milieu fluide, l'équation (13) devient

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 2(\lambda' - \lambda_0).$$

Dans un cristal à lignes rectangulaires, si l'on dirige les axes suivant ces trois lignes, B, B', B'' sont nuls; il en est de même dans un milieu isotrope, quelles que soient les directions des axes; dans tous les cas,

ils le deviennent si l'on prend pour axes de coordonnées les axes de la surface dont on vient de trouver l'équation.

Dans le cas particulier d'un milieu cubique ou isotrope, on a

$$A = A' = A'';$$

la surface se réduit à une sphère. En tenant compte des termes d'un degré plus élevé en x, y, z à mesure que l'on s'éloigne du centre, on pourrait avoir, avec une exactitude plus grande, l'équation de la surface véritable. Mais je ne m'arrête pas à cette recherche facile.

Les axes étant dirigés suivant ceux de la surface du deuxième degré, on a

$$\delta x = Ax,$$

$$\delta y = A'y,$$

$$\delta z = A''z.$$

ce que l'on peut exprimer en disant que le milieu, dans une même cellule, a subi des contractions ou dilatations parallèlement à trois axes principaux, et telles que la variation de chacune des coordonnées est proportionnelle à sa valeur. C'est l'hypothèse de M. Briot.

IV. — MOUVEMENT DE L'ÉTHÉR MODIFIÉ PAR LA PRÉSENCE
D'UN MILIEU PONDÉRABLE.

Les équations de l'équilibre étant, comme nous l'avons vu,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma m F(r) \Delta x + \Sigma_1 m_1(r_1)(x_1 - x) = 0, \\ \Sigma m F(r) \Delta y + \Sigma_1 m_1(r_1)(y_1 - y) = 0, \\ \Sigma m F(r) \Delta z + \Sigma_1 m_1(r_1)(z_1 - z) = 0, \end{array} \right.$$

on obtient les équations du mouvement vibratoire en imaginant que chaque particule subisse autour de sa position moyenne un petit déplacement dont les composantes ξ, η, ζ suivant les trois axes sont assez petites pour qu'on puisse en négliger les secondes puissances, et en exprimant que les forces élastiques ainsi développées et rapportées

à l'unité de masse sont justement, suivant les trois axes, les composantes de l'accélération.

Si l'on fait toujours

$$G = \Sigma m F(x) [e^{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z} - 1],$$

$$H = \Sigma m \frac{F'(r)}{r} [e^{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z} - 1 - (u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z) - \frac{1}{2}(u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z)^2]$$

et

$$L = G + D_{tt}^2 H, \quad P = D_{tt}^2 H, \quad \dots,$$

et qu'on désigne D_t la dérivée prise par rapport au temps, on aura, pour le mouvement de l'éther, en négligeant celui du milieu pondérable, ce qui est sensiblement vrai pour les milieux transparents :

$$(14) \left\{ \begin{aligned} & (D_t^2 - L)\xi - R\eta - Q\zeta + \xi \Sigma_1 m_1 \left[F_1(r_1) + \frac{F'(r_1)}{r_1} (x_1 - x)^2 \right] \\ & \quad + \eta \Sigma_1 m_1 \frac{F'(r_1)}{r_1} (x_1 - x)(y_1 - y) + \zeta \Sigma_1 m_1 \frac{F'(r_1)}{r_1} (x_1 - x)(z_1 - z) = 0, \\ & (D_t^2 - M)\eta - P\zeta - R\xi + \eta \Sigma_1 m_1 \left[F_1(r_1) + \frac{F'(r_1)}{r_1} (y_1 - y)^2 \right] \\ & \quad + \zeta \Sigma_1 m_1 \frac{F'(r_1)}{r_1} (y_1 - y)(z_1 - z) + \xi \Sigma_1 m_1 \frac{F'(r_1)}{r_1} (y_1 - y)(x_1 - x) = 0, \\ & (D_t^2 - N)\zeta - Q\xi - P\eta + \zeta \Sigma_1 m_1 \left[F_1(r_1) + \frac{F'(r_1)}{r_1} (z_1 - z)^2 \right] \\ & \quad + \xi \Sigma_1 m_1 \frac{F'(r_1)}{r_1} (x_1 - x)(z_1 - z) + \eta \Sigma_1 m_1 \frac{F'(r_1)}{r_1} (y_1 - y)(z_1 - z) = 0. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients de cette équation ne sont pas constants, mais nous les réduirons à leurs valeurs moyennes, ce qui revient dans un milieu homoédrique à prendre leurs valeurs pour le point qui occupe le centre d'une cellule.

Pour calculer les modifications que subissent les coefficients L, M, N, P, Q, R , quand on imagine que l'on passe d'un milieu éthéré libre au milieu modifié, comme il a été dit, il suffira de faire varier

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z$$

de

$$\delta \Delta x, \delta \Delta y, \delta \Delta z$$

ou

$$\Delta \delta x, \Delta \delta y, \Delta \delta z,$$

on a, en général et sous forme symbolique,

$$\Delta \delta x = (e^{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z} - 1) \delta x,$$

$$\Delta \delta y = (e^{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z} - 1) \delta y,$$

$$\Delta \delta z = (e^{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z} - 1) \delta z.$$

Il suffira de conserver les termes du premier degré en Δx , Δy , Δz , et si l'on observe que, moyennant un choix convenable des axes, on peut faire que les valeurs moyennes de

$$v \delta x, u \delta y; w \delta x, u \delta z; v \delta z, w \delta y$$

soient nulles, on a

$$\delta \Delta x = u \delta x \Delta x,$$

$$\delta \Delta y = v \delta y \Delta y,$$

$$\delta \Delta z = w \delta z \Delta z;$$

donc, tout se réduit à remplacer

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z$$

par

$$(1 + u \delta x) \Delta x, (1 + v \delta y) \Delta y, (1 + w \delta z) \Delta z,$$

les Δx , Δy , Δz se rapportant toujours au fluide éthéré libre.

V. — MILIEU CUBIQUE OU ISOTROPE.

En dirigeant les axes de coordonnées suivant les lignes du cristal, si le milieu appartient au système cubique ou suivant trois droites rectangulaires quelconques s'il est isotrope comme le verre, les liquides,

les vapeurs, les gaz, on voit que l'on a

$$u \delta x = v \delta y = w \delta z = \frac{1}{3}(u \delta x + v \delta y + w \delta z);$$

or

$$u \delta x = - \sum_1 m_1 \frac{\varphi'(r_1)}{r_1} (x_1 - x)^2 - \sum_1 m_1 \varphi(r_1),$$

$$v \delta y = - \sum_1 m_1 \frac{\varphi'(r_1)}{r_1} (y_1 - y)^2 - \sum_1 m_1 \varphi(r_1),$$

$$w \delta z = - \sum_1 m_1 \frac{\varphi'(r_1)}{r_1} (z_1 - z)^2 - \sum_1 m_1 \varphi(r_1).$$

Donc

$$u \delta x + v \delta y + w \delta z = - \sum_1 m_1 \varphi'(r_1) r_1 - 3 \sum_1 m_1 \varphi(r_1).$$

1° Si $n_1 \neq 1$ et de 4, on a (9),

$$\varphi(r_1) = \frac{-\mu_1}{(n_1-1)(n_1-4)(g+3h)} \frac{1}{r_1^{n_1-1}},$$

$$r_1 \varphi'(r_1) = \frac{\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)} \frac{1}{r_1^{n_1-1}},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} u \delta x + v \delta y + w \delta z &= \frac{-\mu_1}{(n_1-4)(g+3h)} \sum_1 m_1 \frac{1}{r_1^{n_1-1}} \left(\frac{-3}{n_1-1} + 1 \right) \\ &= \frac{-\mu_1}{(n_1-1)(g+3h)} \sum_1 m_1 \frac{1}{r_1^{n_1-1}}. \end{aligned}$$

Réduite à sa valeur moyenne, cette quantité sera

$$\frac{-\mu_1}{(n_1-1)(g+3h)} \sum_1 \frac{m_1}{\rho_1^{n_1-1}},$$

ρ_1 étant, comme plus haut, $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Nous désignerons par $3g$, cette constante, et nous aurons

$$u \delta x = v \delta y = w \delta z = g_1.$$

2° Si $n_1 = 1$, on a (11)

$$\varphi(r_1) = \frac{-\mu_1}{3(g+3h)} \mathbf{L}r_1;$$

on en conclut

$$3g_1 = \frac{\mu_1}{g+3h} \Sigma_1 m_1 L_1 \rho_1 - \frac{\mu_1}{g+3h} \Sigma_1 m_1.$$

On peut réduire le second membre à son premier terme, qui est très grand par rapport au second.

3° Si $n_1 = 4$, on a (12)

$$\varphi(r_1) = \frac{\mu_1}{3(g+3h)} \frac{1}{r_1^3} (Lr_1 + \frac{1}{3}),$$

d'où

$$3g_1 = \frac{-\mu_1}{3(g+3h)} \Sigma_1 m_1 \frac{1}{\rho_1^3}.$$

Dans G et H réduits à

$$\frac{1}{2} \sum m F(r) (u \Delta x + v \Delta y + w \Delta z)^2$$

et

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \sum m \frac{F'(r)}{r} (u \Delta x + v \Delta y + w \Delta z)^4,$$

il faut maintenant remplacer

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z$$

par

$$(1+g_1) \Delta x, (1+g_1) \Delta y, (1+g_1) \Delta z.$$

Nous ferons

$$f(r)_1 = \frac{\mu}{r^n},$$

r se trouvera remplacé par $(1+g_1)r$; donc, si l'on pose

$$g = \frac{1}{2 \cdot 3} \sum \frac{m \mu}{r^{n-1}}, \quad h = - \frac{n+1}{2 \cdot 3 \cdot 5} \sum \frac{m \mu}{r^{n-1}},$$

les Σ se rapportant ici à l'éther libre, on aura simplement

$$G = \frac{g}{(1+g_1)^{n-1}} (u^2 + v^2 + w^2),$$

$$H = \frac{h}{4(1+g_1)^{n-1}} (u^2 + v^2 + w^2)^2;$$

on en déduit immédiatement L, M,

Les autres coefficients ont pour valeurs moyennes

$$\begin{aligned} & \sum_1 m_1 \left[F_1(\rho_1) + \frac{F'(\rho_1)}{\rho_1} x_1^2 \right], \quad \sum_1 m_1 \left[F_1(\rho_1) + \frac{F'(\rho_1)}{\rho_1} y_1^2 \right], \\ & \quad \sum_1 m_1 \left[F_1(\rho_1) + \frac{F'(\rho_1)}{\rho_1} z_1^2 \right], \\ & \sum_1 m_1 \frac{F'(\rho_1)}{\rho_1} x_1 y_1, \quad \sum_1 m_1 \frac{F'(\rho_1)}{\rho_1} x_1 z_1, \quad \sum_1 m_1 \frac{F'(\rho_1)}{\rho_1} y_1 z_1; \end{aligned}$$

les trois derniers sont nuls, les autres sont égaux; leur somme est

$$\sum_1 m_1 [3F_1(\rho_1) + F'(\rho_1)\rho_1] \quad \text{ou} \quad -(n_1 - 2) \sum_1 \frac{m_1 \mu_1}{\rho_1^{n_1+1}}.$$

Nous la désignerons par $3l_1$; chacun des trois premiers coefficients aura donc pour valeur l_1 , et les équations du mouvement deviendront

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[D_t^2 - \frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \xi - \frac{2h}{(1+g_1)^{n-1}} (u^2 \xi + uv\eta + uw\zeta) + l_1 \xi = 0, \\ & \left[D_t^2 - \frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \eta - \frac{2h}{(1+g_1)^{n-1}} (uv\xi + v^2\eta + vw\zeta) + l_1 \eta = 0, \\ & \left[D_t^2 - \frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \zeta - \frac{2h}{(1+g_1)^{n-1}} (uw\xi + vw\eta + w^2\zeta) + l_1 \zeta = 0, \end{aligned} \right.$$

Les ondes planes persistantes, solutions particulières de ces équations, sont données par

$$\xi = A e^{i(ax+by+cz-st)},$$

$$\eta = B e^{i(ax+by+cz-st)},$$

$$\zeta = C e^{i(ax+by+cz-st)},$$

i étant mis pour $\sqrt{-1}$, et a, b, c étant proportionnels aux cosinus directeurs de la normale au plan de l'onde. Si l'on désigne par λ la longueur d'onde, on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2},$$

et la durée d'une vibration est $\frac{2\pi}{s}$. A, B, C, a, b, c, s sont réels.

Les amplitudes A, B, C sont liées par les équations

$$(16) \quad \begin{cases} \left[s^2 - \frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2 + b^2 + c^2) - l_1 \right] A - \frac{2ha}{(1+g_1)^{n-1}}(aA + bB + cC) = 0, \\ \left[s^2 - \frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2 + b^2 + c^2) - l_1 \right] B - \frac{2hb}{(1+g_1)^{n-1}}(aA + bB + cC) = 0, \\ \left[s^2 - \frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2 + b^2 + c^2) - l_1 \right] C - \frac{2hc}{(1+g_1)^{n-1}}(aA + bB + cC) = 0. \end{cases}$$

Si l'on multiplie ces équations respectivement par a, b, c et qu'on les ajoute, on a

$$\begin{aligned} & \left[s^2 - \frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2 + b^2 + c^2) - l_1 \right] (aA + bB + cC) \\ & - \frac{2h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2 + b^2 + c^2)(aA + bB + cC) = 0; \end{aligned}$$

de là deux manières d'y satisfaire :

$$1^\circ \quad aA + bB + cC = 0,$$

ce qui fournit une vibration transversale non polarisée avec

$$s^2 - \frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2 + b^2 + c^2) - l_1 = 0;$$

$$2^\circ \quad s^2 - \frac{g+3h}{(1+g_1)^{n-1}}(a^2 + b^2 + c^2) - l_1 = 0,$$

avec $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$, ce qui fournit une vibration longitudinale.

La vitesse de propagation de l'onde est fournie par

$$\omega = \frac{S}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{Sl}{2\pi}.$$

Donc, pour les vibrations transversales, on a

$$\omega^2 = \frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}} + \frac{l_1 l^2}{4\pi^2}$$

et, pour les vibrations longitudinales,

$$\omega'^2 = \frac{g + 3h}{(1 + g_1)^{n-1}} + \frac{l_1 I^2}{4\pi^2}.$$

Dans l'éther libre, g_1 et l_1 sont nuls : donc, si ω_0 et ω'_0 sont les vitesses de propagation des deux espèces de vibrations ; dans l'éther libre, on voit que

$$\omega_0^2 = g + h \quad \text{et} \quad \omega'_0{}^2 = g + 3h;$$

les formules précédentes deviennent donc

$$\text{Vibr. transv.} \dots \dots \omega^2 = \frac{\omega_0^2}{(1 + g_1)^{n-1}} + \frac{l_1 I^2}{4\pi^2},$$

$$\text{Vibr. longit.} \dots \dots \omega'^2 = \frac{\omega'_0{}^2}{(1 + g_1)^{n-1}} + \frac{l_1 I^2}{4\pi^2},$$

I est la longueur, dans le milieu pondérable, de l'onde réfractée; soit I_0 la longueur de l'onde incidente, on a

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \text{d'où} \quad I = I_0 \frac{\omega}{\omega_0};$$

donc, pour les vibrations transversales, on a

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{(1 + g_1)^{n-1}} + \frac{l_1 I_0^2 \omega^2}{\omega_0^2 4\pi^2}$$

ou

$$\omega^2 \left(1 - \frac{l_1 I_0^2}{\omega_0^2 4\pi^2} \right) = \frac{\omega_0^2}{(1 + g_1)^{n-1}};$$

l'indice de réfraction ν est égal à $\frac{\omega_0}{\omega}$, donc

$$\nu^2 = (1 + g_1)^{n-1} \left(1 - \frac{l_1 I_0^2}{4\pi^2 \omega_0^2} \right).$$

De même, pour les vibrations longitudinales, on aura

$$\nu'^2 = (1 + g_1)^{n-1} \left(1 - \frac{l_1 I_0^2}{4\pi^2 \omega_0'^2} \right).$$

Les deux vibrations incidentes transversale et longitudinale qui composent un rayon de lumière naturelle ayant même durée, on a

$$\frac{I_0}{\omega_0} = \frac{I'_0}{\omega'_0},$$

donc

$$\nu^2 = \nu'^2 \quad \text{ou} \quad \nu = \nu'.$$

Il en résulte que la simple réfraction ne sépare pas les deux vibrations.

Le second terme dans la parenthèse dépend de I_0 : il représente la dispersion ; comme l'indice croît lorsque I_0 décroît, il faut que l_1 soit positif. Ce terme est proportionnel au carré de la longueur de l'onde ; des expériences faites sur une grande étude du spectre ont montré qu'il doit y avoir, en effet, dans l'expression de l'indice de réfraction un terme proportionnel à I_0^2 .

Si l'on néglige la dispersion, on a simplement

$$\nu^2 = (1 + g_1)^{n-1},$$

ν étant supérieur à 1, ainsi que n ; il en résulte $g_1 > 0$.

VI. — DISCUSSION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS ET CONSÉQUENCES.

On peut, par ce qui précède, se faire une idée de la grandeur de g_1 ; admettons $n = 6$, supposition à laquelle M. Briot a été conduit par l'étude de la double réfraction ; on trouve

Pour le diamant. . .	$\nu = 2,5$	$g_1 = 0,43$	Phosphore	g_1 0,38
Pour le verre.	$\nu = 1,5$	$g_1 = 0,18$	Sulfure de carbone.	0,22
Pour l'eau.	$\nu = 1,33$	$g_1 = 0,12$	Acide sulfurique.	0,16

Dans les équations qui ont servi à déterminer δx , δy , δz , on a négligé les puissances de $\delta \Delta x$, $\delta \Delta y$, $\delta \Delta z$ supérieures à la première ; les deuxièmes puissances donnant des termes identiquement nuls, on n'a, en réalité, négligé que des termes du troisième degré contenant en facteur g_1^3 . Dans le cas extrême du diamant, ce facteur est moindre que 0,08.

La considération du signe de g_1 et de celui de l_1 conduit à des conséquences plus importantes et indépendantes de la valeur de n .

1° Supposons d'abord $n_1 \neq 1$ et de 4, on a trouvé

$$g_1 = - \frac{\mu_1}{3(n_1-1)(g+3h)} \sum_1 \frac{m_1}{\rho_1^{n_1-1}},$$

$$l_1 = - \frac{(n_1-2)\mu_1}{3} \sum_1 \frac{m_1}{\rho_1^{n_1+1}};$$

g_1 devant être positif, on voit que l'on doit avoir

$$\frac{\mu_1}{g+3h} < 0.$$

Si $n_1 \neq 2$, l_1 n'est pas nul, et, comme il doit être positif, on en conclut $\mu_1 < 0$, car $n_1 - 2 > 0$.

De la première condition on conclut que si $g+3h > 0$, c'est-à-dire si $\omega_0^2 > 0$, ou enfin si l'éther libre peut propager des vibrations longitudinales persistantes, *il faut que μ_1 soit négatif, c'est-à-dire que l'éther soit repoussé par le milieu pondérable.*

La seconde condition donne directement cette même conclusion et en outre semble impliquer que l'on doit en effet avoir

$$g+3h > 0.$$

2° Si $n_1 = 4$, on a

$$g_1 = \frac{-\mu_1}{9(g+3h)} \sum_1 \frac{m_1}{\rho_1^3},$$

$$l_1 = \frac{-2\mu_1}{3} \sum_1 \frac{m_1}{\rho_1^5};$$

d'où l'on tire les mêmes conséquences que précédemment.

3° Si $n_1 = 1$, on a

$$g_1 = \frac{\mu_1}{g+3h} \sum_1 m_1 L_1 \rho_1 - \frac{\mu_1}{3(g+3h)} \sum_1 m_1,$$

$$l_1 = \frac{\mu_1}{3} \sum_1 \frac{m_1}{\rho_1^2};$$

le premier terme, dans la valeur de g_1 , lui donne son signe; or, si l'on se borne aux particules pondérables voisines, on voit que $L_1 \rho_1$ est très

grand et négatif : donc il faut

$$\frac{\mu_1}{g + 3h} < 0.$$

De ce que l_1 est positif, on conclurait $\mu_1 > 0$ et, par suite, $g + 3h < 0$.

Les conclusions sont renversées dans ce cas, mais il faut observer que, d'après une remarque faite par M. Briot (*Essai*, 33), n_1 doit être supérieur à 1 et même à 2, sans quoi l'action des particules pondérables les plus éloignées serait prépondérante ou tout au moins égale à celle des plus voisines, ce qui est contraire à l'observation; il est donc certain qu'il faut rejeter la supposition $n_1 = 1$.

Quant à la supposition $n_1 = 2$, bien qu'elle soit peu probable, nous ne la rejeterons pas absolument, et nous nous bornerons à conserver la conclusion tirée du signe de g_1 , à savoir :

$$\frac{\mu_1}{g + 3h} < 0.$$

On a vu que la distance r de deux particules d'éther se trouve remplacée par $(1 + g_1)r$: donc g_1 est le coefficient moyen de dilatation linéaire; les densités moyennes dans l'éther libre et dans celui qui pénètre le milieu pondérable sont dans le rapport $(1 + g_1)^3$; d'où l'on conclut que *la densité de l'éther est diminuée par la présence des particules pondérables.*

VII. — MILIEUX NON CUBIQUES.

Dans les cristaux qui n'appartiennent pas au système cubique, les valeurs moyennes de quantités $u \delta x$, $v \delta y$, $w \delta z$ ne sont pas les mêmes; nous poserons

$$(17) \quad \begin{cases} u \delta x = g_1 + \alpha(1 + g_1), \\ v \delta y = g_1 + \beta(1 + g_1), \\ w \delta z = g_1 + \gamma(1 + g_1), \end{cases}$$

g_1 étant toujours donné par la formule

$$g_1 = \frac{1}{3}(u \delta x + v \delta y + w \delta z),$$

et les coefficients α , β , γ étant déterminés par ces équations mêmes. On en tire immédiatement

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Il s'agit maintenant de calculer les variations qu'éprouvent G et H lorsqu'on y remplace

$$\begin{aligned} \Delta x & \text{ par } (1 + g_1)(1 + \alpha)\Delta x, \\ \Delta y & \text{ par } (1 + g_1)(1 + \beta)\Delta y, \\ \Delta z & \text{ par } (1 + g_1)(1 + \gamma)\Delta z. \end{aligned}$$

Nous désignerons pour un instant

$$(1 + \alpha)\Delta x, (1 + \beta)\Delta y, (1 + \gamma)\Delta z$$

par

$$\Delta' x, \Delta' y, \Delta' z.$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} G & \text{ ou } \frac{1}{2} \sum \frac{m\mu}{r^{n+1}} (u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z)^2 \\ & = \frac{1}{2(1 + g_1)^{n-1}} \sum \frac{m\mu}{r'^{n+1}} (u\Delta' x + v\Delta' y + w\Delta' z)^2, \end{aligned}$$

où

$$r' = \sqrt{\Delta' x^2 + \Delta' y^2 + \Delta' z^2}.$$

Nous verrons que α , β , γ sont très petits; si l'on en néglige les secondes puissances, on aura

$$\begin{aligned} \delta G & = \frac{1}{(1 + g_1)^{n-1}} \sum \frac{m\mu}{r^{n+1}} (u^2 \alpha \Delta x^2 + v^2 \beta \Delta y^2 + w^2 \gamma \Delta z^2) \\ & \quad - \frac{n+1}{2(1 + g_1)^{n-1}} \sum \frac{m\mu}{r^{n+3}} (u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z)^2 (\alpha \Delta x^2 + \beta \Delta y^2 + \gamma \Delta z^2), \end{aligned}$$

et si l'on observe que les Σ se rapportent ici à l'éther libre et isotrope, on a, toutes réductions faites,

$$\delta G = \frac{2(g+h)}{(1 + g_1)^{n-1}} (\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2);$$

donc G prend la valeur

$$\frac{g}{(1+g_1)^{n-1}}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{2(g+h)}{(1+g_1)^{n-1}}(\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2).$$

Par de semblables calculs, on trouve

$$\delta H = \frac{h+l}{(1+g_1)^{n-1}}(\alpha x^2 + \beta v^2 + \gamma w^2)(u^2 + v^2 + w^2),$$

l désignant la constante

$$\frac{(n+1)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \sum \frac{m_i \mu}{r_i^{n-1}};$$

donc H prend la valeur

$$\frac{h}{4(1+g_1)^{n-1}}(u^2 + v^2 + w^2)^2 + \frac{h+l}{(1+g_1)^{n-1}}(\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2)(u^2 + v^2 + w^2).$$

Nous poserons, pour abréger,

$$h' = \frac{h}{(1+g_1)^{n-1}}, \quad g' = \frac{g}{(1+g_1)^{n-1}}, \quad l' = \frac{l}{(1+g_1)^{n-1}},$$

et nous aurons finalement

$$G = g'(u^2 + v^2 + w^2) + 2(g' + h')(\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2),$$

$$H = \frac{h'}{4}(u^2 + v^2 + w^2)^2 + (h' + l')(\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2)(u^2 + v^2 + w^2).$$

Les axes de coordonnées étant choisis, comme on l'a dit, les coefficients

$$\sum_1 m_i \frac{F'_1(r_1)}{r_1} x_i y_i, \quad \sum_1 m_i \frac{F'_1(r_1)}{r_1} x_i z_i, \quad \sum_1 m_i \frac{F'_1(r_1)}{r_1} y_i z_i$$

sont toujours nuls; mais les coefficients

$$\sum_1 m_i \left[F_1(r_1) + \frac{F'_1(r_1)}{r_1} x_i^2 \right], \quad \sum_1 m_i \left[F_1(r_1) + \frac{F'_1(r_1)}{r_1} y_i^2 \right], \\ \sum_1 m_i \left[F_1(r_1) + \frac{F'_1(r_1)}{r_1} z_i^2 \right]$$

ne sont plus égaux ; leur somme est toujours

$$3l_1 \text{ ou } -(n_1 - 2) \sum_1 \frac{m_1 \mu_1}{\rho_1^{n_1+1}}, \text{ valeur moyenne.}$$

Nous les désignerons par L_1, M_1, N_1 . On a maintenant

$$L = [(g' + h') + 2\alpha(h' + l')(u^2 + v^2 + w^2) + 2u^2[h' + 4\alpha(h' + l')]] \\ + 2(g' + 2h' + l')(au^2 + \beta v^2 + \gamma w^2) - L_1,$$

$$M = [(g' + h') + 2\beta(h' + l')(u^2 + v^2 + w^2) + 2v^2[h' + 4\beta(h' + l')]] \\ + 2(g' + 2h' + l')(au^2 + \beta v^2 + \gamma w^2) - M_1,$$

$$N = [(g' + h') + 2\gamma(h' + l')(u^2 + v^2 + w^2) + 2w^2[h' + 4\gamma(h' + l')]] \\ + 2(g' + 2h' + l')(au^2 + \beta v^2 + \gamma w^2) - N_1;$$

$$P = 2uv[h' - 2\gamma(h' + l')],$$

$$Q = 2uv[h' - 2\beta(h' + l')],$$

$$R = 2vw[h' - 2\alpha(h' + l')].$$

De ce que la vitesse du rayon ordinaire, dans les cristaux à un seul axe optique, est la même dans toutes les directions et des lois relatives à la réfraction biaxiale, M. Briot a déduit $n = 6$; il en résulte

$$g' + 2h' + l' = 0.$$

Les équations du mouvement prennent la forme

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} \{D_t^2 - [g' + h' + 2\alpha(h' + l')](u^2 + v^2 + w^2) + L_1\} \xi \\ \quad - 2u\{u[h' + 4\alpha(h' + l')]\xi \\ \quad \quad + v[h' - 2\gamma(h' + l')]\eta + w[h' - 2\beta(h' + l')]\zeta\} = 0, \\ \{D_t^2 - [g' + h' + 2\beta(h' + l')](u^2 + v^2 + w^2) + M_1\} \eta \\ \quad - 2v\{u[h' + 2\gamma(h' + l')]\xi \\ \quad \quad + v[h' + 4\beta(h' + l')]\eta + w[h' - 2\alpha(h' + l')]\zeta\} = 0, \\ \{D_t^2 - [g' + h' + 2\gamma(h' + l')](u^2 + v^2 + w^2) + N_1\} \zeta \\ \quad - 2w\{u[h' - 2\beta(h' + l')]\xi \\ \quad \quad + v[h' - 2\alpha(h' + l')]\eta + w[h' + 4\gamma(h' + l')]\zeta\} = 0. \end{array} \right.$$

Considérons une vibration transversale incidente et dont le plan de l'onde soit perpendiculaire à l'axe ox ; cette onde sera représentée par

$$\xi = 0, \quad \eta = B e^{i(a_1 x - st)}, \quad \zeta = C e^{i(a_1 x - st)}.$$

Cette vibration donne naissance, dans l'éther qui pénètre le milieu pondérable, à trois vibrations; soit

$$\begin{aligned} \xi' &= A' e^{i(a'x + b'y + c'z - s't)}, \\ \eta' &= B' e^{i(a'x + b'y + c'z - s't)}, \\ \zeta' &= C' e^{i(a'x + b'y + c'z - s't)} \end{aligned}$$

l'une d'elles : les équations d'accord à la surface de séparation que nous supposons être un plan perpendiculaire à ox donneront

$$b' = 0, \quad c' = 0, \quad s' = s;$$

donc on a simplement

$$\xi' = A' e^{i(a'x - st)}, \quad \eta' = B' e^{i(a'x - st)}, \quad \zeta' = C' e^{i(a'x - st)}.$$

Les équations (18) donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} \{-s^2 [g' + 3h' + 10\alpha(h' + l')] a'^2 + L_1\} A' = 0, \\ \{-s^2 [g' + h' + 2\beta(h' + l')] a'^2 + M_1\} B' = 0, \\ \{-s^2 [g' + h' + 2\gamma(h' + l')] a'^2 + N_1\} C' = 0. \end{array} \right.$$

De là trois solutions, savoir :

1° $B' = 0, \quad C' = 0$ avec $s^2 = [g' + h' + 10\alpha(h' + l')] a'^2 + L_1,$

vibration longitudinale s'exécutant suivant ox ;

2° $A' = 0, \quad C' = 0$ avec $s^2 = [g' + h' + 2\beta(h' + l')] a'^2 + M_1,$

vibration rigoureusement transversale s'exécutant suivant oy ;

3° $A' = 0, \quad B' = 0$ avec $s^2 = [g' + h' + 2\gamma(h' + l')] a'^2 + N_1,$

vibration rigoureusement transversale s'exécutant suivant oz .

Ne nous occupons que des vibrations transversales, de la deuxième par exemple, on a

$$a' = \frac{2\pi}{l}, \quad s = \frac{\omega}{l} 2\pi,$$

puis, à cause de $g' + 2h' + l' = 0$ ou $n = 6$,

$$h' + l' = -(g' + h') = -\frac{g' + h}{(1 + g_1)^3} = -\frac{\omega_0^2}{(1 + g_1)^3},$$

ω_0 désignant toujours la vitesse de propagation des vibrations transversales dans l'éther libre.

On a donc

$$\frac{4\pi^2\omega^2}{l^2} = \frac{\omega_0^2}{(1 + g_1)^3} (1 - 2\beta) \frac{4\pi^2}{l^2} + M_1$$

et, comme $\frac{l}{\omega} = \frac{l_0}{\omega_0}$,

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{(1 + g_1)^3}{1 - 2\beta} \left(1 - \frac{M_1}{4\pi^2} \frac{l_0^2}{\omega_0^2} \right).$$

Or $\frac{\omega_0}{\omega}$ est ce que l'on appelle l'indice de réfraction relatif à l'axe oy ; donc si ν_1, ν_2, ν_3 désignent ces indices relatifs aux trois axes ox, oy, oz , on aura

$$(19) \quad \begin{cases} \nu_1^2 = \frac{(1 + g_1)^3}{1 - 2\alpha} \left(1 - L_1 \frac{l_0^2}{4\pi^2\omega_0^2} \right), \\ \nu_2^2 = \frac{(1 + g_1)^3}{1 - 2\beta} \left(1 - M_1 \frac{l_0^2}{4\pi^2\omega_0^2} \right), \\ \nu_3^2 = \frac{(1 + g_1)^3}{1 - 2\gamma} \left(1 - N_1 \frac{l_0^2}{4\pi^2\omega_0^2} \right). \end{cases}$$

l_0 est la longueur d'onde incidente.

On observe que la loi de la dispersion est la même dans ce cas que dans un milieu isotrope; de plus, en supposant même que l'on eût $n_1 = 2$, c'est-à-dire $l_1 = 0$, on voit que L_1, M_1, N_1 , tout en ayant une somme nulle, ne seraient pas nuls séparément, car, comme nous le verrons bientôt sur des coefficients analogues, ces trois coefficients ne

peuvent pas être égaux dans un milieu non cubique. Ainsi le terme en L_1^2 pourrait ne pas intervenir dans la dispersion observée sur un morceau de verre, et influer, au contraire, sur la dispersion dans le spath ou le quartz, par exemple. Dans ce qui va suivre, nous négligerons la dispersion, mais auparavant je ferai une dernière remarque sur ce phénomène. Si L_1 était nul, c'est-à-dire $n_1 = 2$, comme on a

$$L_1 + M_1 + N_1 = 3L_1 = 0,$$

L_1, M_1, N_1 ne seraient pas de même signe : l'un au moins serait négatif. Dans les cristaux à un axe optique, le spath par exemple, on aurait

$$v_1 = v_2 = v_o, \quad v_3 = v_e,$$

v_o étant l'indice ordinaire, v_e l'indice extraordinaire, puis $L_1 = M_1$ et, par suite, $N_1 = -2L_1$.

En supposant oz dirigé suivant l'axe du cristal, L_1 et N_1 seraient donc de signes contraires : donc la dispersion serait inverse pour les deux rayons, ce qui est contraire à l'observation.

Quand on néglige la dispersion, on peut lier les trois indices par une relation très simple, indépendante des coefficients α, β, γ .

On a alors

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{1}{v_1^2} = \frac{1 - 2\alpha}{(1 + g_1)^3}, \\ \frac{1}{v_2^2} = \frac{1 - 2\beta}{(1 + g_1)^3}, \\ \frac{1}{v_3^2} = \frac{1 - 2\gamma}{(1 + g_1)^3}; \end{cases}$$

en ajoutant et tenant compte de la relation $\alpha + \beta + \gamma = 0$, on a simplement

$$(21) \quad \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} = \frac{3}{(1 + g_1)^3}.$$

Cette relation permet de calculer g_1 pour un milieu cristallisé quelconque.

Ainsi on trouve

Pour le spath	$g_1 = 0,205$
Pour le quartz	$g_1 = 0,190$

Chacun des indices v_1, v_2, v_3 étant supérieur à 1, le premier membre est inférieur à 3; on en conclut que $\frac{1}{(1+g_1)^3}$ est moindre que l'unité ou enfin que $g_1 > 0$.

De là on tire les mêmes conséquences que pour un milieu cubique ou isotrope.

A suivre.)