JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL LE CORDIER

Actions mécaniques produites par les aimants et par le magnétisme terrestre

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 10 (1884), p. 113-146.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10__113_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Actions mécaniques produites par les aimants et par le magnétisme terrestre [1];

PAR M. PAUL LE CORDIER,
Docteur ès Sciences mathématiques.

INTRODUCTION.

Dans la célèbre hypothèse proposée par Ampère pour ramener à une seule les trois actions mécaniques produites par les courants fermés, par les aimants et par le magnétisme terrestre, on peut distinguer les deux hypothèses suivantes :

117 [2]. Ces trois actions, en apparence différentes, sont dues à une cause unique.

118. Cette cause consiste dans l'existence de courants électriques fermés à l'intérieur de chaque molécule magnétique et de la Terre.

La première est démontrée, sauf deux coïncidences fortuites très invraisemblables; la seconde ne l'est pas : voilà la conclusion de ce Mémoire. Tout le monde croyait, il est vrai, à la première, mais on y

[1] Présenté à l'Académie des Sciences le 16 avril 1883 (*Comptes rendus*, t. XCVI, p. 1123).

[2] Les numéros de ce Mémoire font suite à ceux du premier (t. X de ce Journal, p. 43).

croyait sans preuve. Toutes les conséquences observables de la seconde, qui implique la première, ont été vérifiées. Le silence des expérimentateurs le prouve depuis soixante ans; car, si un seul fait contradictoire eût été observé, on l'aurait aussitôt signalé comme renversant la théorie d'Ampère.

Les auteurs, sans le dire explicitement, ont paru admettre l'accord de tous les phénomènes observables avec cette théorie, non comme un fait physique, mais comme une identité purement mathématique, résultant uniquement de ce que, parmi les neuf actions mutuelles entre les courants, les aimants et le magnétisme terrestre, les cinq qu'on a pu observer satisfont aux mêmes lois; ils n'ont pas paru apercevoir qu'il y a en outre, entre les cinq coefficients absolus de ces actions, deux équations de condition résultant de la seconde hypothèse **118**, et n'ayant pas de raison d'être, toutes les lois étant sauvegardées, si la première **117** n'était pas vraie. Au lieu d'être admis comme un principe rationnel, cet accord de la théorie et de l'expérience aurait dû, à défaut de démonstration, être contesté, comme il l'a été, pour la première fois peut-être, par MM. Mascart et Joubert au n° 455 des *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*.

Il est facile de voir, d'ailleurs, ce qui manque à la démonstration de l'énoncé **117**, quand on sait seulement que les actions reçues et produites par les solénoïdes passent par leurs pôles, et sont réciproques aux carrés des distances. L'unité de pôle de solénoïde étant définie celle qui repousse son égale avec l'unité de force à l'unité de distance, et l'unité de pôle d'aimant celle que l'unité de pôle de solénoïde repousse avec la même force à la même distance, il reste à démontrer : 1° que l'unité de pôle d'aimant repousse aussi son égale avec l'unité de force à l'unité de distance; 2° que le magnétisme terrestre agit avec la même intensité sur l'unité de pôle de solénoïde et sur l'unité de pôle d'aimant. Voilà les deux faits que l'expérience seule peut établir, et qui reviennent au suivant.

119. Parmi les neuf actions mutuelles entre les courants, les aimants et le magnétisme terrestre, toutes celles que l'on peut observer, au nombre de cinq, sont réductibles à un seul système d'unités absolues. On l'appelle *système électromagnétique*.

Ainsi les énoncés **117** et **119** sont équivalents.

Les expériences directes qui démontreraient l'énoncé **119** n'ont pas été faites : elles consistent dans des mesures absolues d'attractions et de répulsions. Mais on verra, dans ce Mémoire, qu'elles se ramènent à d'autres beaucoup plus simples, plus faciles, susceptibles d'une plus grande précision, qui n'ont pas été faites, mais dont le résultat n'est pas douteux, en sorte qu'elles peuvent être invoquées comme des principes expérimentaux. Elles établissent le fait suivant.

120. Dans le champ de force du magnétisme terrestre, troublé ou non par des courants et des aimants, les axes d'un aimant et d'un solénoïde infiniment petits prennent toujours la même direction d'équilibre stable, quand ces deux corps sont mobiles autour de leurs centres de gravité respectifs, placés successivement en un même point.

Ce principe, déjà démontré en 1870, dans une Note qui paraît n'avoir pas été aperçue (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXI, p. 533), va l'être de nouveau dans ce Mémoire, où il est ramené à des cas d'équilibre encore plus simples, dispensant de déterminer les axes magnétiques et de mesurer des angles. Le premier de ces équilibres, adjoint aux quatre principes expérimentaux **21**, **23**, **24** et **25**, va suffire pour démontrer l'existence des pôles d'un élément magnétique, et pour en déterminer le potentiel.

121. Si le principe **117** n'était pas vrai, les axes magnétiques de l'aimant et du solénoïde **120** oscilleraient au contraire autour de deux directions généralement différentes, comme on le verra à la fin de ce Mémoire, à moins que la coïncidence ne résultât d'un hasard bien singulier.

Le second principe d'Ampère **118** reste sans démonstration, et n'est pas le seul qui puisse expliquer le premier **117**. La théorie conçue par Faraday, développée par Maxwell, et qui attribue les neuf actions mutuelles à un même mode de propagation dans un même milieu, en rend également compte. L'unité de la cause de ces neuf actions doit résider dans l'unité de la constitution des trois corps agissants, pour ceux qui croient aux actions directes à distance, et dans l'unité du milieu qui les transmet et du mode de transmission, pour ceux qui attribuent ces actions apparentes à l'éther où les corps sont plongés.

§ VI. — Sur un cas d'équilibre qui, adjoint a ceux du mémoire précédent, démontre l'existence des poles d'un élément magnétique.

Si cet équilibre ne démontrait rien de plus, l'existence des pôles et les lois de Coulomb seraient admises ici comme principes expérimentaux. Mais il suffira pour déterminer le potentiel d'un élément magnétique, et l'une des deux relations qu'il s'agit d'établir entre les coefficients des cinq actions mécaniques étudiées dans ce Mémoire. Il faudra toutefois qu'on lui adjoigne les trois cas d'équilibre démontrant les quatre principes **21**, **23**, **24** et **25**. Il peut s'énoncer, sous forme abstraite, de la manière suivante.

122. *Cinquième principe expérimental.* — Les centres de gravité d'un courant fermé et d'un aimant infiniment petits, étant placés successivement en un même point O, lorsqu'un système extérieur M' a fait prendre à ces deux corps, mobiles autour de la verticale Oz, qui les traverse suivant des droites arbitraires, des positions d'équilibre stable, aucune modification de M' ne peut troubler l'équilibre de l'un, sans troubler celui de l'autre, ni rendre l'un astatique, sans que l'autre le devienne en même temps.

Quand on aura trouvé un courant fermé et un aimant vérifiant la propriété énoncée avec une précision nécessairement limitée par les variations du magnétisme terrestre, dans l'intervalle des deux équilibres, on en conclura que cette propriété subsisterait *a fortiori,* si les deux corps, restant semblables à eux-mêmes, devenaient infiniment petits.

Or il est nécessaire, pour qu'un courant circulaire s'oriente bien, que le rayon en soit suffisamment grand, le moment du couple qui tend à le ramener à sa position d'équilibre, dans un champ de force uniforme, étant proportionnel au carré de ce rayon. Mais on peut trouver un système de courants circulaires, de dimensions suffisantes, et qui satisfasse à la condition demandée, c'est-à-dire dont l'axe s'oriente sensiblement comme celui d'un courant fermé infiniment petit. Une bobine sphérique y satisferait rigoureusement; et, comme la construction précise de cet instrument offrirait des difficultés, on peut employer des systèmes de bobines, construits pour d'autres usages, constituant des bobines sphériques approchées, et réalisant la condition demandée avec toute la précision désirable. Le plus simple de ces systèmes est la boussole des tangentes de M. Gaugain, modifiée par M. Helmholtz : elle se compose de deux bobines coniques égales, formant les deux nappes d'un même cône de révolution, dont le rayon est égal à la hauteur. On verra qu'une simple bobine, d'un seul rang de fil, offrirait au moins la même précision, si elle formait un cylindre ayant pour diamètre et pour hauteur la base et la hauteur d'un triangle équilatéral. En réduisant le système agissant à un élément de solénoïde, ayant son axe dans le plan horizontal mené par le point O, et plaçant ce courant à une distance de cinq diamètres, on verra (**351**) que l'azimut de l'axe de la bobine, mobile autour de la verticale qui passe par le milieu de cet axe, serait en équilibre stable dans une position faisant en ce point, avec le plan vertical mené par la force directrice du système agissant, un angle dont le maximum est de $5'',318$; que l'azimut de l'axe d'une aiguille aimantée, ayant ensuite son centre de gravité placé au même point, et mobile autour de la même verticale, ferait avec celui de la même force directrice un angle également très petit, et du même ordre de grandeur que le premier, si la longueur magnétique de l'aiguille était environ $\frac{1}{10}$ du diamètre de la bobine. On verra aussi qu'on obtiendrait la même approximation avec une bobine creuse de rayons

$$U = \rho(1+e) \quad \text{et} \quad u = \rho(1-e),$$

et de hauteur

$$(145) \quad \left\{ \begin{aligned} 2h &= \sqrt{1,8}\sqrt{\frac{U^5-u^5}{U^3-u^3}} \\ &= \rho\sqrt{3}\,[1 + 0,83333\ldots e^2 - 0,525e^4 + 0,4967592592\ldots e^6 + \ldots]. \end{aligned} \right.$$

Pour $\rho = 50^{\text{cm}}$ et $e = 0,1$, on trouve

$$(146) \qquad U = 5^{\text{cm}},5, \quad u = 4^{\text{cm}},5, \quad 2h = 8^{\text{cm}},731972\ldots.$$

En adoptant ces dimensions, construisant une bobine avec un fil assez fin pour offrir, par ses extrémités, une suspension bifilaire, prenant une aiguille aimantée de 1^{cm} de longueur, fixant un petit miroir à chacun de ces corps, et plaçant tous les points du système agissant à 1^{m} au moins, on vérifierait la première partie du principe **122** à une fraction de seconde près, si les variations du magnétisme terrestre n'étaient pas beaucoup plus grandes. La seconde se démontrerait, sachant par expérience que les petites oscillations de l'aimant sont isochrones, comme celles de la bobine le sont (n° **102**), en observant qu'aucune modification du système agissant ne change le rapport des durées des oscillations des deux appareils, corrigées des effets de l'induction et des couples de torsion des fils de suspension; d'où l'on conclurait que ces durées deviennent infinies en même temps.

123. *Sixième principe expérimental.* — Quand un aimant permanent est brisé, le plus petit fragment sur lequel on puisse expérimenter jouit de toutes les propriétés renfermées dans les cinq principes expérimentaux déjà invoqués (n^{os} **21**, **23**, **24**, **25** et **122**).

124. *Définition d'un élément magnétique.* — Si les fragments d'un aimant sont aussi petits que la constitution de ce corps permet de les concevoir, sans qu'ils cessent de jouir de toutes ces propriétés, chacun d'eux K est un *élément magnétique*. Cette définition ne renferme aucune hypothèse : elle laisse indéterminée une limite que l'expérience n'a pas fait connaître.

Soient

$$k,\ \mathrm{I},\ \lambda \quad \text{et} \quad \mathrm{k} = \mathrm{I}\lambda \tag{147}$$

un élément de solénoïde, son intensité, son aire et son moment;

$$\mathrm{O},\ \mathfrak{L} \quad \text{et} \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \tag{147'}$$

son centre, son axe et les cosinus directeurs de cet axe;

$$M' \tag{147''}$$

le système extérieur agissant, susceptible de comprendre tous les corps qui produisent des forces observables sur les courants;

$$\text{(147''')} \qquad \mathrm{D} \quad \text{et} \quad \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$$

la force directrice de M' au point O et ses composantes.

L'action de M' sur k a pour moments (56') par rapport aux axes

$$\text{(148)} \qquad \left\{ \begin{aligned} (M', k)_{yz} &= \mathrm{k}(\beta \mathrm{C} - \gamma \mathrm{B}), \\ (M', k)_{zx} &= \mathrm{k}(\gamma \mathrm{A} - \alpha \mathrm{C}), \\ (M', k)_{xy} &= \mathrm{k}(\alpha \mathrm{B} - \beta \mathrm{A}). \end{aligned} \right.$$

Posant (*fig.* 9)

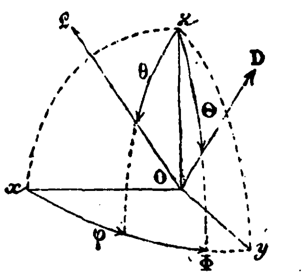
$$\text{(149)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha = \sin\theta \cos\varphi, && \beta = \sin\theta \sin\varphi, && \gamma = \cos\theta; \\ &\mathrm{A} = \mathrm{D} \sin\Theta \cos\Phi, && \mathrm{B} = \mathrm{D} \sin\Theta \sin\Phi, && \mathrm{C} = \mathrm{D} \cos\Theta, \end{aligned} \right.$$

et substituant dans la dernière équation (10), on trouve

$$\text{(148')} \qquad (M', k)_{xy} = \mathrm{k} \sin\theta \, \mathrm{D} \sin\Theta \sin(\Phi - \varphi),$$

équation qui fait voir, par le signe de son second membre, que, si l'élément k de solénoïde est assujetti à tourner autour de l'axe des z,

Fig. 9.



l'action de M' tendra à diminuer la valeur absolue de l'angle $\Phi - \varphi$. Donc, dans le cas général où k et D sont tous deux différents de zéro, et k mobile autour d'un axe fixe Oz, mené par son centre de gravité O :

125. Pour que k soit en équilibre, il faut et il suffit que Oz soit dans le plan de l'angle ($\mathcal{L}$, D).

126. Pour que k ne soit pas en équilibre, il faut et il suffit que Oz soit en dehors de ce plan.

127. Pour que k soit en équilibre stable, il faut et il suffit que Oz soit dans le plan et en dehors de l'angle ($\mathcal{L}$, D).

128. Pour que k soit en équilibre instable, il faut et il suffit que Oz soit dans le plan et à l'intérieur de l'angle ($\mathcal{L}$, D).

129. Pour que k soit astatique, il faut et il suffit que Oz soit sur un côté de l'angle ($\mathcal{L}$, D).

En prenant pour plan des xy celui de l'angle ($\mathcal{L}$, D), et faisant $\gamma = 0$, $C = 0$ dans les deux premières équations (148), par suite, $\theta = \Theta = \frac{\pi}{2}$ dans l'équation (148′), on trouve

$$(148'') \qquad (M'k)_{yz} = 0, \quad (M', k)_{zx} = 0, \quad (M', k)_{xy} = \mathrm{kD}\sin(\Phi - \varphi).$$

Ainsi, l'action de M' sur k se réduit à une force appliquée au centre de gravité de k et à un couple, dont le plan passe par $\mathcal{L}$ et par D, qui tend à diminuer l'angle de ces deux directions, et dont le moment est proportionnel au sinus de cet angle. Donc :

130. Lorsque k est assujetti uniquement à avoir son centre de gravité fixé en O, son axe $\mathcal{L}$ n'a qu'une position d'équilibre stable coïncidant avec D; et, dans cette position, k serait en équilibre stable, s'il était assujetti à tourner autour d'un axe mené arbitrairement par le point O, excepté son axe $\mathcal{L}$, par rapport auquel il serait astatique.

131. *Définition.* — Un système rigide, dans une position donnée, sera dit *en équilibre stable par rapport au point* O, qui en fait partie, lorsqu'il est en équilibre stable, quand on l'assujettit à tourner autour de tout axe mené par ce point, sauf un ou plusieurs axes exceptionnels, par rapport auxquels il peut être astatique; et la propriété **130** donne lieu à l'énoncé suivant.

132. Pour qu'un élément k de solénoïde soit en équilibre stable par rapport à son centre de gravité O, il faut et il suffit que son axe $\mathcal{L}$ coïncide, en direction et sens, avec la force directrice D, en ce point, du système agissant M'.

Ces propriétés et le principe **122** conduisent à l'énoncé suivant :

133. *Toutes les surfaces de niveau d'un élément magnétique K ont un axe commun de révolution, qui passe par cet élément.* On le verra au moyen des quatre lemmes suivants :

134. *Lemme.* — Si la force directrice D du système M', au centre de gravité O d'un élément magnétique K, est dirigée suivant la verticale Oz, K sera astatique par rapport à Oz.

Car, en déplaçant un corps du système agissant M', de manière que D devienne oblique, on pourra toujours obtenir un système M'', sous l'action duquel K ne soit plus astatique : sinon, le lemme est évidemment démontré par la continuité. Mais alors, en présence de M'', l'élément k de solénoïde, assujetti à tourner autour de la verticale de son centre de gravité placé en O, ne sera pas astatique, pourvu qu'on évite le cas particulier **129**, et le deviendra, si M'' reprend la position M'. Donc (n° **122**) K le deviendra en même temps. C. Q. F. D.

135. *Corollaire.* — En adjoignant au magnétisme terrestre un courant dont la force directrice, composée avec celle de la Terre, donne au point O une résultante verticale, on obtient un système M_0, sous l'action duquel K est astatique par rapport à la verticale de son centre de gravité placé en O.

136. *Lemme.* — S'il était possible d'empêcher le magnétisme terrestre d'agir sur l'élément magnétique K, celui-ci serait astatique par rapport à son axe dirigé suivant la force directrice D, au point O, du système $\mathfrak{M}'$ de tous les corps agissant sur lui.

Car, en prenant O pour origine et D pour axe des z, fixant aux axes le système $\mathfrak{M}'$ et les points de l'élément magnétique K placés sur Oz, et faisant tourner le système comme s'il était rigide, de manière que Oz devienne vertical, on ne change rien à l'action de $\mathfrak{M}'$ sur K, qui ne dépend que des positions relatives. Si l'on fait ensuite intervenir l'action du système M_0 (n° **135**), dont la force directrice est verticale, celle de $\mathfrak{M}'$ l'étant devenue, celle du système résultant le sera aussi. Donc K est astatique (n° **134**) relativement à Oz, sous l'action de ce système total, comme sous celle du système partiel M_0, et par suite sous celle de $\mathfrak{M}'$. C. Q. F. D.

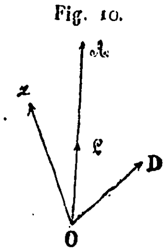
137. *Lemme*. — Le principe **122** aurait encore lieu, s'il était possible d'empêcher le magnétisme terrestre de faire partie du système agissant $\mathfrak{M}'$, et si l'axe de rotation Oz avait une direction quelconque.

Car on ne change rien aux actions mutuelles, par suite aux positions relatives d'équilibre, ni à la nature des équilibres, en faisant les deux transformations du lemme précédent, dont la première rend Oz vertical, et dont la seconde introduit et neutralise, par rapport à Oz, l'action magnétique de la Terre; et l'on est ramené aux conditions expérimentales du n° **122**; ce qui démontre le lemme **137**.

138. *Lemme*. — Étant donné un système $\mathfrak{M}'$, dont le magnétisme terrestre ne fait pas partie, et l'action qu'il exerce sur l'élément magnétique K étant représentée par une force, appliquée au centre de gravité O de K, et par un couple, il existe dans cet élément une droite $\mathcal{A}$, solidaire avec lui, issue du point O, indépendante de $\mathfrak{M}'$, et toujours comprise dans le plan du couple.

En effet, en vertu de l'équation (31), l'élément magnétique K, s'il était sollicité uniquement par un élément k' de solénoïde, aurait au moins une position d'équilibre stable par rapport à son centre de gravité fixé en O : c'est celle qui répond à la plus petite valeur, compa-

Fig. 10.



tible avec la fixité de ce point, de l'énergie $W_{k',K}$. Soit $\mathcal{A}$ (*fig.* 10) la droite, liée invariablement à K, qui coïnciderait alors, en direction et sens, avec la force directrice de k' au point O. Le corps K étant considéré dans cette position fixe, soient D la force directrice de $\mathcal{M}'$ au point O et Oz un axe quelconque, mené dans le plan et en dehors de l'angle (D, $\mathcal{A}$). Un élément k de solénoïde, qui aurait son centre de gravité fixé en O, et son axe $\mathcal{L}$ dirigé suivant $\mathcal{A}$, serait (nº **130**) en équilibre stable, par rapport à Oz, sous l'action de k' et (nº **127**) sous celle de $\mathcal{M}'$. Donc K, étant, par hypothèse, en équilibre stable par rapport à Oz sous l'action de k', y sera encore (nº **137**) sous celle de $\mathcal{M}'$. Donc le plan du couple de l'énoncé **138** passe par Oz. Mais cet axe est arbitraire dans le plan (D, $\mathcal{A}$); donc le couple est dans ce plan, lequel passe par la droite $\mathcal{A}$, quel que soit $\mathcal{M}'$. C. Q. F. D.

139. *Définition.* — La droite $\mathcal{A}$ est appelée l'*axe magnétique* de l'élément K. Lorsqu'elle coïncide, en direction et sens, avec la force directrice de k', au centre de gravité O de l'élément K, celui-ci est en équilibre stable, par rapport au point O, sous l'action de k'.

139'. Cette propriété sera étendue (nº **176**) à la force directrice de tout système M'.

140. L'élément magnétique K est astatique par rapport à son axe, quand le magnétisme terrestre n'agit pas sur lui. Cette restriction sera écartée (**222'**).

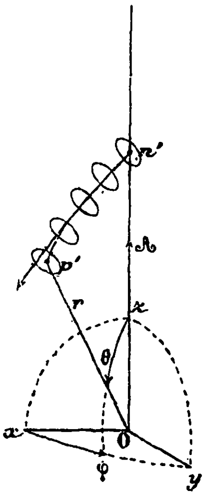
Car, si l'on fait tourner K autour de son axe $\mathcal{A}$, sous l'action de $\mathcal{M}'$, cette action, dont le plan du couple passe toujours (nº **138**) par l'axe, ne peut développer aucun travail.

Démonstration du lemme **133**. — Si l'élément magnétique K tourne autour de son axe $\mathcal{A}$, par rapport auquel (nº **140**) il est astatique, le travail $\Delta\mathcal{T}(\mathcal{M}', K)$ des actions sur K d'un système extérieur et fixe $\mathcal{M}'$, ne comprenant pas le magnétisme terrestre, sera nul. Or, en fixant à K trois axes rectangulaires, mobiles avec ce corps, prenant son centre de gravité O pour origine, son axe $\mathcal{A}$ pour celui des z, et pour $\mathcal{M}'$ un solénoïde fixe $\mathcal{S}'$ (nº **19**), dont l'axe L' va (44) du pôle négatif n' au pôle positif p', défini par les coordonnées (*fig.* 11)

$$x' = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y' = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z' = r\cos\theta;$$

ce travail, qu'il est permis de rapporter aux axes mobiles, sera (32) égal et de signe contraire à la variation de l'énergie $W_{K,\mathcal{S}'}$ du système

Fig. 11.



de ces deux corps. Or l'équation (26) devient $W_{K,k'} = \mathrm{k}' \frac{\partial V_K}{\partial \mathcal{L}'}$, en désignant par $\mathcal{L}'$ et $\mathbf{k}'$ l'axe et le moment de l'élément k' de solénoïde, qui fait partie de $\mathcal{S}'$, et par V_K le potentiel de l'élément magnétique K au commencement de $\mathcal{L}'$; d'où

$$(150) \qquad W_{K,\mathcal{S}'} = \sum W_{K,k'} = \frac{\mathrm{k}'}{\delta\mathcal{L}'} \int_0^{\mathcal{L}'} \frac{\partial V_K}{\partial \mathcal{L}'} d\mathcal{L}' = \frac{\mathrm{k}'}{\delta\mathcal{L}'} (V_{p'} - V_{n'}),$$

$V_{p'}$ et $V_{n'}$ désignant les valeurs de V_K aux pôles p' et n'. Donc, dans la rotation de K autour de son axe $\mathcal{A}$, $V_{p'} - V_{n'}$ ne change pas; et, en plaçant sur $\mathcal{A}$ le pôle n', on voit que $V_{p'}$ est, comme $V_{n'}$, indépendant de φ, ou fonction des deux autres coordonnées r et θ seulement. Comme elles sont arbitraires, le lemme **133** est démontré.

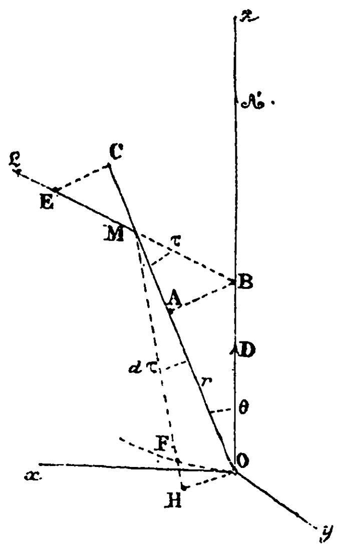
§ VII. — Identification des potentiels d'un élément magnétique et d'un élément de solénoïde.

141. Soient k un élément de solénoïde placé en M (*fig.* 12), k son moment, $\mathcal{L}$ son axe, τ le supplément BMO de l'angle $\mathcal{L}$MO que fait cet axe avec le rayon vecteur $r = \mathrm{MO}$, et (52)

$$(151) \qquad \varphi' = -\mathrm{k}\frac{\cos\tau}{r^2}$$

la partie bien définie du potentiel de k au point O, laquelle, ne dépendant que des deux coordonnées polaires r et τ, montre que les surfaces de niveau de l'élément de solénoïde sont de révolution autour de son

Fig. 12.



axe $\mathcal{L}$; la force directrice D de ce courant, au point O, rencontre donc la direction de $\mathcal{L}$ en un point B. Soit θ l'angle BOM que fait cette force avec OM, le sens positif de cet angle étant défini par la condition qu'il soit de même signe que τ, quand il est du même côté de OM. Alors on a, dans le triangle rectangle OHF, dont l'hypoténuse OF est un élément du méridien de la surface de niveau passant par ce point,

$$(152) \qquad \mathrm{tang\,HOF} = \frac{\mathrm{HF}}{\mathrm{OH}} = \frac{-dr}{r\,d\tau} \quad \text{ou} \quad \mathrm{tang}\,\theta = -\frac{dr}{r\,d\tau},$$

et l'équation différentielle de ce méridien, tirée de l'équation (151),

$$(153) \qquad 0 = d\varphi' = \frac{\mathrm{k}}{r^3}(r\sin\tau\,d\tau + 2\cos\tau\,dr),$$

donne

$$\tang \tau = -\frac{2\,dr}{r\,d\tau};$$

d'où, en comparant cette équation avec l'équation (152),

$$(154) \qquad \tang \tau = 2 \tang \theta.$$

Des deux directions opposées que cette formule donne pour D, une seule satisfait à la condition **43** d'être dirigée du côté où φ' décroît. Pour $\tau = 0$, l'équation (154) donne $\theta = (0 \text{ ou } \pi)$; mais la condition $d\varphi' < 0$, portée dans la seconde équation (153), dont le dernier membre devient $\frac{\mathrm{k}}{r^3}\, 2\,dr$, se réduit à $dr < 0$, et lève l'ambiguïté en faisant rejeter la valeur $\theta = \pi$. Ainsi les angles θ et τ sont nuls ensemble, et leurs tangentes trigonométriques sont (154) de mêmes signes. Donc ils croissent ensemble de 0 à π.

142. Soit K' un élément magnétique ayant son centre de gravité fixé en O, et son axe $\mathcal{A}'$ dans la direction D. Il sera (n° **139**) en équilibre stable par rapport au point O, s'il est soumis uniquement à l'action de k.

142′. Soient $V_{K'}$, ou simplement V, son potentiel au point M, et $W_{K',k}$, ou W, l'énergie du système des deux corps K' et k.

142″. Soient Ox, Oy, Oz trois axes à gauche rectangulaires, fixés au corps K', et mobiles avec lui autour du point O; Oz étant dirigé suivant son axe $\mathcal{A}'$, et Ox dans le plan de l'angle θ.

142‴. Soit $-dW$ le travail virtuel élémentaire (63) de l'action du courant fixe k sur K', tournant d'un angle infiniment petit $d\theta$ autour de Oy; travail toujours négatif, en vertu de la stabilité de l'équilibre de K'.

Les conditions pour que

$$(155)\qquad -dW = -\frac{\partial W}{\partial \theta}d\theta - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}d\theta^2 - \ldots$$

ne soit jamais positif sont, d'après la théorie des minima,

$$(156)\qquad \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0,$$

$$(157)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} > 0,$$

ou du moins que la première dérivée de W, par rapport à θ, qui ne s'annule pas, soit d'ordre pair et positive.

On a (26)

$$(158)\qquad W = k\frac{\partial V}{\partial \varrho};$$

et (n° **133**) la valeur de V au point M ne dépend que des deux coordonnées polaires r et θ. Donc

$$W = k\left(\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \varrho} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \varrho}\right).$$

Le triangle infiniment petit MCE, rectangle en C, donne

$$MC = ME\cos\tau, \quad EC = ME\sin\tau,$$

ou

$$dr = d\varrho\cos\tau, \quad r\,d\theta = d\varrho\sin\tau,$$

et, en substituant,

$$(159)\qquad W = k\left(\frac{\partial V}{\partial r}\cos\tau + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\sin\tau}{r}\right).$$

Lorsqu'on fait tourner K' autour de Oy, r et τ restent fixes, et (156) devient, en y substituant successivement (159) et (154),

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial \theta}\cos\tau + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\frac{\sin\tau}{r} = 0,$$

$$(160)\qquad r\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial \theta} + 2\tan\!g\,\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0.$$

En posant

$$(161) \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \rho,$$

(160) devient

$$(162) \qquad r\frac{\partial \rho}{\partial r} + 2\tang\theta\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0.$$

Cette dernière équation détermine la fonction ρ des deux variables indépendantes r et θ, et s'intègre au moyen du système auxiliaire $\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{2\tang\theta} = \frac{d\rho}{0}$ ou $2\frac{dr}{r} = \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta} = \frac{d\rho}{0}$, dont l'intégrale générale, résolue par rapport aux constantes a et b, est

$$(163) \qquad a = \rho, \quad b = \frac{\sin\theta}{r^2}.$$

L'intégrale générale de (162) est donc, $\mathcal{F}$ désignant une fonction arbitraire,

$$(164) \qquad a = \mathcal{F}(b) \quad \text{ou} \quad \rho = \mathcal{F}\left(\frac{\sin\theta}{r^2}\right).$$

143. La fonction ρ est assujettie, outre l'équation (162), à une seconde équation différentielle, exprimant que V est le potentiel d'une surface de niveau, de révolution autour de l'axe des z (n° **133**). L'équation générale des surfaces de niveau, en fonction des coordonnées polaires r, θ, φ, est

$$(165) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

On exprime qu'elles sont de révolution autour de l'axe des z, en supprimant le terme $\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$. En dérivant (165) par rapport à θ, et substituant (161), on a la seconde équation différentielle partielle en ρ, qui va servir à déterminer $\mathcal{F}$,

$$(166) \qquad \frac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + r^2\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial\rho}{\partial r} - \frac{\rho}{\sin^2\theta} = 0;$$

substituant (164) dans (166), on trouve, toutes réductions faites,

$$-\frac{1}{\sin^2\theta}\mathfrak{F}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\mathfrak{F}'+\left(\frac{1}{r^4}+3\frac{\sin^2\theta}{r^4}\right)\mathfrak{F}''=0.$$

Quand on prend

$$(167)\qquad r \quad\text{et}\quad b=\frac{\sin\theta}{r^2}$$

pour variables indépendantes, cette équation devient

$$-\frac{1}{b^2r^4}\mathfrak{F}+\frac{1}{br^4}\mathfrak{F}'+\left(\frac{1}{r^4}+3b^2\right)\mathfrak{F}''=0.$$

La fonction $\mathfrak{F}$ est donc assujettie à identifier, par rapport aux deux variables indépendantes (167), l'équation

$$-\frac{1}{b^2}\mathfrak{F}(b)+\frac{1}{b}\mathfrak{F}'(b)+\mathfrak{F}''(b)+3r^4b^2\mathfrak{F}''(b)=0,$$

dans laquelle r n'entre qu'explicitement, ce qui exige que $3b^2\mathfrak{F}''(b)$ soit identiquement nulle; et, comme b ne peut l'être, il faut que $\mathfrak{F}''(b)$ le soit; d'où

$$\mathfrak{F}(b)=\mathrm{K}-\mathrm{K}'b,$$

K et K′ désignant deux constantes arbitraires. Alors l'avant-dernière équation se réduit à $\mathfrak{F}(b)=b\mathfrak{F}'(b)$, et par suite à $\mathrm{K}=0$; d'où

$$\mathfrak{F}(b)=-\mathrm{K}'b.$$

L'équation (164) devient

$$\mathrm{F}=-\mathrm{K}'\frac{\sin\theta}{r^2},$$

et, en substituant (161),

$$(168)\qquad \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\theta}=-\mathrm{K}'\frac{\sin\theta}{r^2},$$

puis intégrant (168) de θ à $\frac{\pi}{2}$,

$$(169)\qquad \mathrm{V}(r,\theta)=\mathrm{K}'\frac{\cos\theta}{r^2}+\mathrm{V}\left(r,\frac{\pi}{2}\right);$$

mais

$$(170) \qquad V\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

en vertu de l'énoncé suivant.

144. *Septième principe expérimental.* — Quand les pôles d'un aimant A', dont le magnétisme est rigide, sont intervertis par retournement, toute action observable entre ce corps et un système extérieur M', change de signe seulement.

Ce principe s'applique à l'élément magnétique K'; l'action de K' sur un élément k de solénoïde est représentée par une force appliquée à k et par un couple, dont le moment, par rapport à un axe quelconque, est une fonction linéaire et homogène (56″) des dérivées premières du potentiel $V_{K'}$. Or chacune d'elles se compose de la dérivée du premier terme (169) $K' \frac{\cos\theta}{r^2}$, dont l'inversion des pôles ne change que le signe, et de la dérivée du second terme $V\left(r, \frac{\pi}{2}\right)$, qui ne change pas. Le septième principe exige que cette dernière soit nulle; donc $V\left(r, \frac{\pi}{2}\right)$ est indépendant de r dans tout l'espace extérieur à K'. On est convenu de donner à cette constante arbitraire la valeur zéro (170), et la fonction (169) devient, en observant d'ailleurs (n° **142**″) que l'axe $\mathcal{A}'$ est dirigé suivant Oz,

$$(171) \qquad V = K' \frac{\cos\theta}{r^2},$$

$$(171') \qquad V = K' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathcal{A}'}.$$

Cette fonction V satisfait nécessairement à la condition (156), qui a servi à la calculer. Mais elle doit encore satisfaire à la condition (157) pour que l'équilibre de K' soit stable, quand l'axe $\mathcal{A}'$ en est dirigé suivant Oz. Or l'équation (159) donne

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = k\left(\frac{\partial^3 V}{\partial r\, \partial \theta^2}\cos\tau + \frac{\partial^3 V}{\partial \theta^3}\,\frac{\sin\tau}{r}\right);$$

et, en substituant (171),

$$(172) \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = k K' \frac{2\cos\tau\cos\theta + \sin\tau\sin\theta}{r'^3}.$$

On peut toujours supposer, dans le plan des zx, les angles θ et τ compris entre o et π; leurs tangentes trigonométriques étant (154) de mêmes signes, ils sont tous deux aigus ou tous deux obtus; par suite, $\cos\tau\cos\theta$ et $\sin\tau\sin\theta$ sont positifs; k l'est par définition. Donc (172) la condition (157) exige que K′ ne soit pas négatif. D'ailleurs K′ ne peut être nul: V le serait aussi (171), et K' ne serait point aimanté, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc K′ est positif, et dès lors la condition (157) est satisfaite.

145. Le coefficient essentiellement positif K′ du potentiel (171) est appelé le *moment magnétique* de l'élément magnétique K'.

146. Deux systèmes doués de potentiels électrodynamiques seront dits équivalents dans un espace déterminé, quand la différence de ces potentiels y sera constante.

147. Pour qu'un élément k' de solénoïde et un élément magnétique K' soient équivalents en tout point M(x, y, z) situé à des distances finies de chacun d'eux, il faut et il suffit qu'ils aient mêmes centres de gravité O et O′(x', y', z'), mêmes axes $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{A}'$, et mêmes moments magnétiques k′ et K′.

La démonstration n'offre aucune difficulté. L'équivalence est exprimée (n° **146**) par l'équation

$$(173) \qquad \varphi_{k'} = V_{K'}.$$

Si un élément k' de solénoïde et un élément magnétique équivalent K' agissent successivement sur un même élément k de solénoïde, de moment k, placé au point (r, θ), comme dans la *fig.* 12, mais ayant son axe $\mathcal{L}$ dirigé d'une manière quelconque, on déduit de l'équation (26)

$$(174) \qquad W_{k',k} = k\frac{\partial \varphi_{k'}}{\partial \mathcal{L}},$$

$$(175) \qquad W_{K',k} = k\frac{\partial V_{K'}}{\partial \mathcal{L}};$$

substituant (52) et (171′), on a

$$(174') \qquad W_{k',k} = kk' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \mathcal{L}\, \partial \mathcal{L}'},$$

$$(175') \qquad W_{K',k} = kK' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \mathcal{L}\, \partial \mathcal{A}'}.$$

On en conclut, lorsque k' et K' sont équivalents (n° **147**),

$$(176) \qquad W_{k',k} = W_{K',k}.$$

148. Un élément magnétique K' et l'élément équivalent k' de solénoïde produisent des actions identiques sur un même élément de courant $I\,ds$.

En effet, ces actions sont exprimées, l'une et l'autre, par les formules (50), qui représentent les composantes de deux forces appliquées au même élément ds, et dans lesquelles on introduit successivement les deux potentiels dont l'identité (173) démontre le principe **148.**

149. Un élément magnétique K' et l'élément équivalent k' de solénoïde produisent des actions identiques sur un même courant, fermé ou non fermé, linéaire ou à plusieurs dimensions, pourvu qu'il soit décomposable en éléments linéaires.

Car les actions de ces deux corps sur chaque élément de courant qui les reçoit sont identiques (n° **148**).

150. Les actions d'un courant fermé, fixe et permanent, $\mathcal{C}'$, sur un élément magnétique extérieur K, et sur l'élément équivalent k de solénoïde, sont identiques.

Car elles feraient successivement équilibre, sur un même système rigide, aux deux actions, identiques entre elles (n° **149**), que produiraient K et k sur $\mathcal{C}'$.

La première est donc exprimable par une énergie, qui n'est autre que l'énergie de la seconde,

$$(177) \qquad W_{\mathcal{C}',K} = W_{\mathcal{C}',k}.$$

Elle représente le travail virtuel des actions réciproques entre $\mathfrak{S}'$ et K, telles qu'elles seraient au repos dans chaque position successive, si leur distance mutuelle devenait infinie, sans altération de leurs constitutions physiques. Elle a aussi pour expression

$$W_{\mathfrak{S}',K} = K \frac{\partial V_{\mathfrak{S}'}}{\partial \mathcal{A}}, \tag{178}$$

comme cela résulte des trois identités

$$W_{\mathfrak{S}',K} = W_{\mathfrak{S}',k}, \quad W_{\mathfrak{S}',k} = k\frac{\partial V_{\mathfrak{S}'}}{\partial \mathcal{L}}, \quad k\frac{\partial V_{\mathfrak{S}'}}{\partial \mathcal{L}} = K\frac{\partial V_{\mathfrak{S}'}}{\partial \mathcal{A}},$$

dont la première est l'équation (177), la deuxième est la relation (26), et la troisième résulte des conditions **147** d'équivalence.

§ VIII. — Actions mutuelles de deux aimants.

Identification des actions produites, sur un élément magnétique K, par un élément k' de solénoïde, et par l'élément magnétique équivalent K'.

Cette identification sera la conséquence mathématique des sept principes expérimentaux déjà invoqués et du suivant. L'intervention du principe de la conservation de l'énergie, sur laquelle elle repose, est empruntée au cours de M. Maurice Lévy.

151. *Huitième principe expérimental.* — L'aimantation de l'acier trempé se conserve indéfiniment, sans aucune dépense de travail.

152. Lorsque les états magnétiques d'un aimant fixe A' et d'un aimant mobile A sont invariables, le travail virtuel des actions magnétiques de A' sur A, ramené à sa position initiale, est identiquement nul.

Sinon ces actions, sans travail moteur (n° **151**), pourraient entretenir un travail perpétuel, ce qui est contraire au principe de la conservation de l'énergie.

153. Ici encore il faut considérer les actions telles qu'elles seraient au repos, dans chaque position successive, et distinguer en outre les actions *magnétiques* des forces dues aux courants induits dans les aimants, en vertu de leur mouvement relatif, forces dont le travail est essentiellement négatif, et qui sont exclues de ce paragraphe.

Les actions mutuelles de deux aimants, ne dépendant que de leurs positions relatives et étant de nature à se faire équilibre sur un système rigide, la somme des travaux de leurs actions mutuelles, quand tous deux sont mobiles, ne dépend que de leur mouvement relatif. En combinant ce principe avec l'énoncé **152**, on obtient le suivant.

154. Lorsque les états magnétiques de deux aimants A, A' sont invariables et qu'ils sont ramenés à leurs positions relatives initiales, la somme des travaux de leurs actions mutuelles est identiquement nulle.

Soit

$$(x, y, z, \theta, \varphi, \psi) \tag{179}$$

un système quelconque de six variables indépendantes, définissant la position de A par rapport à trois axes rectangulaires fixés à A' : la somme ϖ des travaux virtuels des actions mutuelles de ces aimants, lorsqu'ils passent, sans variation magnétique, d'une position relative $(x_0, y_0, \ldots)$ à une autre $(x, y, \ldots)$, est une fonction bien déterminée de ces deux systèmes de coordonnées, indépendante des positions intermédiaires :

$$\varpi = f(x, x_0; y, y_0, \ldots). \tag{180}$$

Car soit ϖ' la somme des travaux virtuels des actions mutuelles des deux aimants, ramenés de la position $(x, y, \ldots)$ à la position $(x_0, y_0, \ldots)$. L'énoncé **154** équivaut à l'identité $\varpi + \varpi' = 0$, qui doit subsister, de quelque manière qu'on modifie les positions intermédiaires du premier mouvement, sans changer celles du second. Donc alors, ϖ' étant le même, ϖ reste invariable. C. Q. F. D.

155. On appelle *énergie de l'action mutuelle* de deux aimants A, A', dont les états magnétiques sont invariables, la fonction (180) changée de signe

$$W_{A',A} = W(x, y, z, \theta, \varphi, \psi) = -f(x, x_0, y, y_0, \ldots), \tag{181}$$

et l'on a identiquement, par définition,

$$W(x_0, y_0, z_0, \theta_0, \varphi_0, \psi_0) = 0. \tag{182}$$

Si les deux aimants passent, sans variation magnétique, de la position relative $(x, y, \ldots)$ à une autre $(x_1, y_1, \ldots)$, on aura, pour la somme des travaux virtuels des actions mutuelles de ces deux corps, transportés

de la position $(x_0, y_0, \ldots)$ à la position $(x, y, \ldots)$.... $\mathfrak{T} = \mathrm{W}(x, y, \ldots)$,

» $(x_0, y_0, \ldots)$ » $(x_1, y_1, \ldots)$... $\mathfrak{T} + \Delta\mathfrak{T} = -\mathrm{W}(x_1, y_1, \ldots)$,

» $(x, y, \ldots)$ » $(x_1, y_1, \ldots)$... $\Delta\mathfrak{T} = \mathrm{W}(x, y, \ldots) - \mathrm{W}(x_1, y_1, \ldots)$,

ou

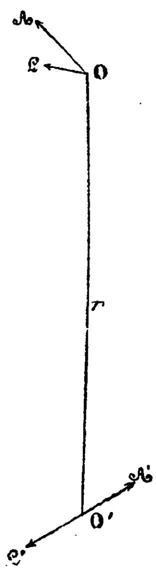
$$\Delta\mathfrak{T} = -\Delta\mathrm{W}; \tag{183}$$

ce qui donne, pour la somme des travaux virtuels élémentaires des actions mutuelles,

$$d\mathfrak{T} = -d\mathrm{W} = -\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}dx - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}dy - \ldots. \tag{184}$$

Soit $\mathfrak{M}'$ le système d'un élément k' de solénoïde et d'un élément

Fig. 13.



magnétique K', fixes dans l'espace, invariables dans leurs constitutions physiques, ayant même centre de gravité $\mathrm{O}'(x', y', z')$ (*fig.* 13), mêmes moments k', K', et leurs axes $\mathcal{L}'$, $\mathcal{A}'$ dans le prolongement l'un de l'autre. Soient k et K un second élément de solénoïde et un second élément magnétique, rigides, invariables dans leurs constitutions physiques, et dont les centres de gravité sont placés successivement en un même point $O(x, y, z)$; k et K leurs moments, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ leurs axes, et r la distance OO'. Les actions de k' et de K' sur k étant représentées par les énergies (174') et (175'), l'action de $\mathfrak{M}'$ sur k le sera par une certaine énergie égale à la somme des deux premières, c'est-à-dire sera nulle. Donc, sous l'action seule de $\mathfrak{M}'$, k est astatique par rapport à tout axe mené par le point O; et K (n° **137**) l'est aussi. Chacune des actions de k' (26) et de K' (181) sur K étant exprimable par une énergie, celle de $\mathfrak{M}'$ l'est aussi par une certaine énergie

$$W_{\mathfrak{M}', K} = f(x, y, z, \theta, \varphi, \psi);$$

les trois angles θ, φ, ψ, convenablement choisis, définissant l'orientation de K par rapport à $\mathfrak{M}'$, et formant avec x, y, z un système de six variables indépendantes, qui déterminent la position relative de ces deux corps rigides. Le travail virtuel élémentaire de l'action de $\mathfrak{M}'$ sur K, par rapport aux axes fixés à $\mathfrak{M}'$, est $\frac{\partial f}{\partial x}dx - \ldots - \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta - \ldots$; et l'on vient de voir que ce travail est identiquement nul avec dx, dy et dz : dès lors $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$, ce qui exprime que la fonction f est indépendante de θ, φ, ψ; on a donc

$$W_{\mathfrak{M}', K} = f(x, y, z), \quad d\mathfrak{T} = -\frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy - \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Par suite, $\mathfrak{M}'$ ne peut produire sur K qu'une force unique, appliquée au point O, et dont les composantes $-\frac{\partial f}{\partial x}$, $-\frac{\partial f}{\partial y}$, $-\frac{\partial f}{\partial z}$ sont indépendantes de l'orientation de K. En vertu du septième principe (n° **144**), cette force est nulle; donc $\mathfrak{M}'$ n'agit point sur K. Si donc, $\mathfrak{M}'$ restant fixe, K est transporté à l'infini, la somme des travaux $W_{K', K}$ et (175')

$$(185) \qquad W_{K', K} = \mathrm{K}\mathrm{k}' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \mathcal{A}\, \partial \mathcal{L}'},$$

des actions de K' et de k' sur K, sera nulle; d'où, en remplaçant k' par son égal K', et $\frac{\partial}{\partial\mathcal{L}'}$ par $-\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}'}$,

$$(186) \qquad W_{K',K} = \mathrm{K}\mathrm{K}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\mathcal{M}\,\partial\mathcal{M}'}.$$

D'ailleurs (171'), on a pour expression du potentiel de K' au point O

$$V_{K'} = \mathrm{K}'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathcal{M}'},$$

ce qui permet d'écrire (186) sous la première des deux formes

$$(186') \qquad W_{K',K} = \mathrm{K}\frac{\partial V_{K'}}{\partial\mathcal{M}} = \mathrm{K}'\frac{\partial V_K}{\partial\mathcal{M}'}.$$

156. Un élément magnétique K' produit des actions identiques sur un élément magnétique K et sur l'élément équivalent k de solénoïde.

Car les actions de K' sur K et sur k sont représentées par les énergies (186) et

$$(187) \qquad W_{K',k} = \mathrm{k}\mathrm{K}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\mathcal{L}\,\partial\mathcal{M}'}; \qquad (175')$$

et ces énergies sont identiques en vertu des conditions **147**, qu'on suppose satisfaites.

Assimilation du potentiel d'un aimant à celui d'un système d'éléments de solénoïdes.

157. *Neuvième principe.* — Avant la rupture d'un aimant, les parties jouissaient de toutes les propriétés des aimants, précédemment invoquées, mais constatées par l'expérience après la séparation seulement.

Ce postulatum, qui ne paraît pas avoir été contesté, mais qui pourrait l'être, conduit immédiatement à la propriété suivante.

158. Un aimant A' est un système d'éléments magnétiques K'.

Il en résulte (83) que le potentiel d'un aimant a pour expression

(188) $$V_{A'} = \Sigma V_{K'};$$

et la constante arbitraire, qui s'ajoute au second membre, est nulle par définition (170); ce qui revient à convenir que ce potentiel est infiniment petit à l'infini.

L'énergie $W_{A',K}$ des actions magnétiques mutuelles d'un aimant $\mathcal{A}'$ et d'un élément magnétique K, doués l'un et l'autre d'une aimantation rigide, est la somme des énergies des systèmes que les éléments magnétiques K' de l'aimant forment avec K. Le moment et l'axe de K étant K et $\mathcal{A}$, on a (186') $\sum \mathrm{K}\frac{\partial V_{K'}}{\partial \mathcal{A}}$ ou $\mathrm{K}\frac{\partial \sum V_{K'}}{\partial \mathcal{A}}$ pour expression de $W_{A',K}$; et en substituant (188), puis récrivant (26),

(189) $$W_{A',K} = \mathrm{K}\frac{\partial V_{A'}}{\partial \mathcal{A}},$$

(190) $$W_{A',k} = \mathrm{k}\frac{\partial V_{A'}}{\partial \rho}.$$

On voit, soit par la comparaison de ces formules, soit par le principe **156**, que $W_{A',K}$ et $W_{A',k}$ sont identiques, si K et k sont équivalents. Donc :

159. Les actions d'un aimant A' sur un élément magnétique K, et sur l'élément équivalent k de solénoïde, sont identiques.

160. Par définition, le *système d'éléments de solénoïdes équivalent à un aimant* donné sera le système des éléments de solénoïdes équivalents aux éléments magnétiques constitutifs de l'aimant. Cette définition est conforme à la définition **146**, en vertu du principe suivant :

161. Le potentiel d'un aimant est identique à la partie bien définie du potentiel du système équivalent d'éléments de solénoïdes.

Cela résulte immédiatement des équations (188) et (173).

162. Un aimant et le système équivalent d'éléments de solénoïdes produisent des actions identiques sur un même courant extérieur, fermé ou non fermé, linéaire ou à plusieurs dimensions, pourvu qu'il soit décomposable en éléments linéaires.

On le voit par les principes **158** et **149**.

163. Les actions mutuelles de deux éléments magnétiques K, K', et celles des deux éléments équivalents k, k' de solénoïdes, sont identiques.

Car elles sont identiques à celles de k et K' (n^{os} **156** et **149**).

Les énergies correspondantes sont dès lors identiques

$$(191) \qquad W_{K', K} = W_{k', k}.$$

163'. Les actions mutuelles de deux aimants A, A' et celles des deux systèmes équivalents $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ d'éléments de solénoïdes sont identiques.

Car la relation (191) donne, par une double sommation,

$$(192) \qquad W_{A', A} = W_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}}.$$

164. L'*axe* et le *moment magnétiques* d'un aimant seront définis l'axe et le moment du système équivalent d'éléments de solénoïdes, définis eux-mêmes (n° **98**).

Expressions, en fonction des potentiels des trois composantes de l'aimantation, du potentiel $V_{A'}$ d'un aimant A', en un point extérieur (x, y, z), et de l'énergie $W_{A', \mathfrak{S}}$ des actions mutuelles d'un courant fermé permanent $\mathfrak{S}$ et de l'aimant A', considéré dans un état magnétique donné.

Pour appliquer (188), soient x', y', z' les coordonnées de l'élément magnétique K', K' son moment magnétique, et $\mathcal{A}'$ son axe. On peut mettre son potentiel (171') sous la forme

$$(193) \quad V_{K'} = \mathrm{K}'\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \mathcal{A}'} + \cdots\right) = -\mathrm{K}'\left(\frac{\partial x'}{\partial \mathcal{A}'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial \mathcal{A}'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial \mathcal{A}'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right).$$

Soit

$$(194) \qquad d\varpi'$$

un élément du volume ϖ' de l'aimant, comprenant un grand nombre d'éléments magnétiques, auxquels s'étendra le signe Σ, et terminé par une surface qui n'en traverse aucun. On aura

$$(195)\quad V_{A'} = -\underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \frac{\sum\left[K'\left(\frac{\partial x'}{\partial \mathcal{A}'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial \mathcal{A}'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial \mathcal{A}'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)\right]}{d\varpi'} d\varpi'$$

ou

$$(196)\quad V_{A'} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

en posant

$$(197)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi = \underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \dfrac{\sum\left(\frac{K'}{r}\frac{\partial x'}{\partial \mathcal{A}'}\right)}{d\varpi'} d\varpi', \\ \eta = \underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \dfrac{\sum\left(\frac{K'}{r}\frac{\partial y'}{\partial \mathcal{A}'}\right)}{d\varpi'} d\varpi', \quad \zeta = \underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \dfrac{\sum\left(\frac{K'}{r}\frac{\partial z'}{\partial \mathcal{A}'}\right)}{d\varpi'} d\varpi'; \end{array}\right.$$

et en définissant l'*intensité* Φ' *de l'aimantation*, au point (x', y', z'), la quantité essentiellement positive définie en grandeur, direction et sens, par ses *composantes*

$$(198)\quad \alpha'\Phi' = \frac{\sum\left(K'\frac{\partial x'}{\partial \mathcal{A}'}\right)}{d\varpi'}, \quad \beta'\Phi' = \frac{\sum\left(K'\frac{\partial y'}{\partial \mathcal{A}'}\right)}{d\varpi'}, \quad \gamma'\Phi' = \frac{\sum\left(K'\frac{\partial z'}{\partial \mathcal{A}'}\right)}{d\varpi'},$$

on aura

$$(199)\quad \xi = \underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \frac{\alpha'\Phi'}{r} d\varpi', \quad \eta = \underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \frac{\beta'\Phi'}{r} d\varpi', \quad \zeta = \underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \frac{\gamma'\Phi'}{r} d\varpi',$$

expressions qu'on peut appeler les *potentiels des trois composantes de l'aimantation*.

On déduit de **162** une expression de l'énergie $W_{A',\mathcal{C}}$ de l'action d'un aimant A' sur un courant linéaire extérieur $\mathcal{C}$, fermé et d'intensité I constante. En récrivant des notations déjà employées, soient

$$(200)\quad x', \ y', \ z', \ K' \text{ et } \mathcal{A}'$$

les coordonnées, le moment et l'axe de son élément magnétique K';

$$(201)\qquad S',\ I',\ \lambda',\ k' = I'\lambda' = K' \quad \text{et} \quad \mathfrak{L}' \quad \text{ou} \quad \mathfrak{A}'$$

la longueur, l'intensité, l'aire, le moment et l'axe de l'élément équivalent k' de solénoïde. On a (117 et 118), pour les *potentiels des trois composantes des courants*,

$$(202)\qquad \begin{cases} F = \underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \dfrac{\sum I' \int_0^{S'} \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds'}{d\varpi'} d\varpi', \\ G = \underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \dfrac{\sum I' \int_0^{S'} \frac{1}{r} \frac{\partial y'}{\partial s'} ds'}{d\varpi'} d\varpi', \\ H = \underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \dfrac{\sum I' \int_0^{S'} \frac{1}{r} \frac{\partial z'}{\partial s'} ds'}{d\varpi'} d\varpi'; \end{cases}$$

et, pour l'énergie demandée,

$$(203)\qquad W_{A',\mathfrak{S}} = -I\int_0^S \left(F\frac{\partial x}{\partial s} + G\frac{\partial y}{\partial s} + H\frac{\partial z}{\partial s}\right) ds.$$

L'identité (7), appliquée à la première équation (202), donne, en vertu de (201),

$$F = \underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \frac{\sum\left[k'\left(\frac{\partial y'}{\partial \mathfrak{A}'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - \frac{\partial z'}{\partial \mathfrak{A}'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\right)\right]}{d\varpi'} d\varpi'$$

$$= \underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \frac{\sum\left[K'\left(\frac{\partial z'}{\partial \mathfrak{A}'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\partial y'}{\partial \mathfrak{A}'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)\right]}{d\varpi'} d\varpi'$$

$$= \frac{\partial \underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \dfrac{\left[\dfrac{\sum\left(K'\frac{\partial z'}{\partial \mathfrak{A}'}\right)}{d\varpi'}\right]}{r} d\varpi'}{\partial y} - \frac{\partial \underbrace{\int\int\int}_{\varpi'} \dfrac{\left[\dfrac{\sum\left(K'\frac{\partial y'}{\partial \mathfrak{A}'}\right)}{d\varpi'}\right]}{r} d\varpi'}{\partial z};$$

et, en substituant successivement (198) et (199), on trouve la première des trois équations

$$(204) \qquad F = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad G = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad H = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Elles satisfont à l'identité

$$(205) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Les équations (23) donnent, pour les composantes A, B, C de la force directrice D de l'aimant, au point (x, y, z),

$$(206) \qquad A = -\frac{\partial V_{A'}}{\partial x}, \quad B = -\frac{\partial V_{A'}}{\partial y}, \quad C = -\frac{\partial V_{A'}}{\partial z};$$

et la première formule (199) donnant $\Delta_2 \xi = \underbrace{\int\int\int}_{ }\alpha' \Phi' \Delta_2\left(\frac{1}{r}\right) d\varpi' = 0$, on déduit de (196)

$$A = -\frac{\partial V_{A'}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z};$$

et l'on retrouve ainsi la première des trois équations (111)

$$(207) \qquad A = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad B = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad C = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

§ IX. — Actions du magnétisme terrestre sur les courants et les aimants.

Identification des actions du magnétisme terrestre sur un élément magnétique K et sur l'élément équivalent k de solénoïde.

Pour établir cette identification sur des données purement expérimentales, il faut invoquer trois nouveaux principes.

165. *Dixième principe expérimental.* — Les centres de gravité d'un élément k de solénoïde, et d'un élément magnétique K, étant placés l'un après l'autre en un même point O, ces deux corps, assujettis successivement à tourner autour de la verticale fixe Oz, et de l'horizontale fixe et arbitraire Ox, sollicités d'ailleurs uniquement par un même courant fermé $\mathfrak{S}'$ et par le magnétisme terrestre T', ne deviennent jamais astatiques l'un sans l'autre.

166. *Onzième principe expérimental.* — En chaque point d'une enceinte éloignée de toute substance magnétique, les directions de l'aiguille de déclinaison sont sensiblement parallèles entre elles, ainsi que les directions de l'aiguille d'inclinaison.

167. *Douzième principe expérimental.* — Le magnétisme terrestre n'agit pas sur le centre de gravité d'un aimant.

168. Lemme. — *Lorsqu'aux deux potentiels* V *et* φ *correspondent des surfaces de niveau qui ont les mêmes trajectoires orthogonales, en tous les points d'un volume donné* E, *il existe entre ces deux fonctions une équation du premier degré*

$$V = V_0 + D\varphi,$$

V_0 *et* D *désignant deux constantes.*

En effet les surfaces des deux systèmes, qui passent par un même point (x, y, z) de l'espace E, ayant mêmes normales, on a

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = \text{une fonction U de } x, y \text{ et } z;$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = U\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz\right),$$

ou

$$dV = U\,d\varphi.$$

Donc les deux potentiels, ne pouvant varier l'un sans l'autre, sont fonctions l'un de l'autre

$$V = f(\varphi). \tag{208}$$

Mais ils sont définis par les équations

$$(209) \qquad \Delta_2 V = 0, \quad \Delta_2 \varphi = 0,$$

et l'on déduit de (208)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f' \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f'' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + f' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Formant pareillement $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, ajoutant membre à membre et supprimant les deux sommes nulles (209), on a

$$0 = f'' \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Si l'accolade était nulle dans tout l'espace E, le système, dont le potentiel φ représente l'action, n'agirait en aucun point de ce volume, et n'aurait pas de surfaces de niveau à son intérieur, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, en tout point de E,

$$f''(\varphi) = 0, \quad \text{d'où} \quad f(\varphi) = V_0 + D\varphi,$$

et (208) devient

$$(210) \qquad V = V_0 + D\varphi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

169. Les travaux des actions du magnétisme terrestre T' sur un élément magnétique K et sur l'élément équivalent k de solénoïde sont identiques, lorsque leur centre commun de gravité O reste fixe, et qu'ils tournent solidairement autour de ce point.

En effet, soit M' le système du magnétisme terrestre T' et d'un courant fermé $\mathfrak{C}'$, ayant sa force directrice en O égale et opposée à celle de T'. Si D devient nulle dans l'équation (148'), on voit que, sous l'action de M', k deviendra astatique par rapport à tout axe mené par le point O : donc K le deviendra aussi (n° **122**) par rapport à tout axe, horizontal ou vertical, mené par ce point. Les travaux des actions de M' sur chacun des deux corps mobiles autour du point O seront donc identiquement nuls :

$$(211) \qquad \mathfrak{T}(\mathfrak{C}', K) + \mathfrak{T}(T', K) = 0, \quad \mathfrak{T}(\mathfrak{C}', k) + \mathfrak{T}(T', k) = 0,$$

identités qui ont lieu indépendamment de toute relation entre les directions des axes, les moments et les déplacements de l'élément magnétique et de l'élément de solénoïde. Mais, étant équivalents et solidaires, ils satisfont en outre (n° **150**) à l'identité $\mathfrak{T}(\mathfrak{S}', K) = \mathfrak{T}(\mathfrak{S}', k)$; et celle-ci, adjointe aux identités (211), établit celle qu'il fallait démontrer :

$$(212) \qquad \mathfrak{T}(T', K) = \mathfrak{T}(T', k).$$

170. Lorsqu'un élément magnétique K et l'élément équivalent k de solénoïde sont assujettis uniquement à avoir leurs centres de gravité fixes, et que ceux-ci sont placés successivement en un même point O, les axes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ de ces deux corps, sollicités uniquement par la Terre, oscillent l'un et l'autre autour de la force directrice du magnétisme terrestre au point O.

On l'a vu (n° **103**) pour k, sollicité par un système extérieur quelconque, dont le magnétisme terrestre peut faire partie, et qui dès lors peut se réduire au magnétisme terrestre.

Les travaux du magnétisme terrestre sur k et sur K étant (n° **169**) identiques, lorsque ces deux corps sont équivalents et qu'ils se meuvent solidairement autour du point O, sont maximum en même temps; et leurs positions d'équilibre stable, répondant à ces maxima, coïncident, ainsi que celles des axes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$: d'où résulte que l'énoncé **170**, démontré pour k, est vrai pour K.

171. *Potentiel local du magnétisme terrestre dans une enceinte* E. — Le principe expérimental **166**, se vérifiant indépendamment des dimensions de l'aiguille aimantée, s'applique à un élément magnétique K, placé en différents points de l'enceinte E : ce corps, s'il était mobile autour de son centre de gravité, prendrait sensiblement en tous ces points la même direction. Donc, dans cet espace, les lignes de force du magnétisme terrestre peuvent être regardées (n° **170**) comme des droites parallèles. Soient l, m, n leurs cosinus directeurs. La fonction

$$(213) \qquad \varphi = -lx - my - nz$$

satisfait à l'équation de définition des potentiels $\Delta_2\varphi = 0$, et définit un système de surfaces de niveau ayant, dans toute l'enceinte E, les mêmes trajectoires orthogonales que celles du magnétisme terrestre. Donc, dans cet espace, le *potentiel local* du magnétisme terrestre est (n° **168**) de la forme $V = V_0 + D\varphi$ ou

$$(214) \qquad V = V_0 - D(lx + my + nz).$$

On en déduit, pour les composantes de la force directrice du magnétisme terrestre,

$$(215) \quad A = -\frac{\partial V}{\partial x} = Dl, \quad B = -\frac{\partial V}{\partial y} = Dm, \quad C = -\frac{\partial V}{\partial z} = Dn,$$

et pour cette force le coefficient D de l'équation (214). Il est positif, puisque l, m, n désignent les cosinus directeurs de la force.

172. *Action du magnétisme terrestre sur un aimant.* — L'action du magnétisme terrestre T′ sur un aimant A, dont le magnétisme est rigide, placé dans l'enceinte E, est identique à celle de T′ sur le système équivalent $\mathfrak{S}$ d'éléments de solénoïdes.

Il suffit de démontrer cet énoncé en réduisant A à un élément magnétique K, et $\mathfrak{S}$ à l'élément équivalent k de solénoïde. Or chacune des actions de T′ sur K et sur k étant représentée par une force appliquée au centre commun de gravité O de ces deux corps et par un couple, la force est nulle pour K (n° **167**), et pour k placé dans un *champ de force uniforme* (124), c'est-à-dire dans un espace où les composantes A, B, C (215) sont indépendantes de x, y, z; et les couples, produisant (n° **169**) des travaux égaux sur les deux corps, solidaires et mobiles autour du point O, sont identiques, ce qui démontre **172**.