JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G.-J. LEGEBEKE

Sur une formule générale relative à l'électrisation par influence de M. R. Clausius

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 10 (1884), p. 109-112.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10__109_0>

Sur une formule générale relative à l'électrisation par influence de M. R. Clausius [1];

PAR M. G.-J. LEGEBEKE,

Professeur à l'École Polytechnique de Delft.

M. Clausius a démontré [2] une formule se rapportant à l'influence mutuelle des charges électriques d'une série de conducteurs. L'auteur, en parlant de cette formule, la nomme *nouvelle* et *très générale*. Je me propose, dans les pages suivantes, de démontrer que cette formule de M. Clausius n'est qu'un cas particulier d'une formule plus générale qui, à son tour, peut être considérée comme une généralisation d'une équation connue de Gauss.

Soient

C_1, C_2, ..., généralement C, des surfaces fermées, et supposons que sur chacune d'elles est étendue une couche d'un agent quelconque agissant suivant les lois connues de l'attraction;

h_1, h_2, ..., généralement h, la densité de l'agent dans les divers points de C_1, C_2, ..., C;

U_1, U_2, ..., généralement U, le niveau potentiel de toutes ces couches aux mêmes points;

V_1, V_2, ..., généralement V, les équivalents des U quand on rem-

---

(1) Traduction française, faite par l'auteur, d'un Mémoire qu'il a publié dans les *Annales de Physique et de Chimie* de Wiedemann, t. X, p. 154.

(2) *Journal de Mathématiques,* t. VIII, p. 73.

place les charges de C par d'autres avec les densités $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, ..., généralement $\mathfrak{h}$;

$d\omega_1$, $d\omega_2$, ..., généralement $d\omega$, les éléments de la surface de C_1, C_2, ..., C.

Avec ces notations, je dis qu'on a

$$\int U_1 \mathfrak{h}_1 \, d\omega_1 + \int U_2 \mathfrak{h}_2 \, d\omega_2 + \ldots = \int V_1 h_1 \, d\omega_1 + \int V_2 h_2 \, d\omega_2 + \ldots$$

ou

$$\Sigma \int U \mathfrak{h} \, d\omega = \Sigma \int V h \, d\omega. \tag{1}$$

Avant de la démontrer, j'observe qu'il est permis d'appliquer cette formule à une série de corps conducteurs C_1, C_2, ... chargés de deux manières différentes qui s'influencent mutuellement; or, dans ce cas, les niveaux potentiels U et V sont des constantes et la formule nous donne l'équation de Clausius.

Pour démontrer la formule (1), je me servirai, comme le fait M. Clausius, de l'équation connue de Green. Concevons l'espace enveloppé par la surface C et prenons pour les deux fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation de Green les fonctions U_i et V_i, qui seront respectivement les niveaux potentiels, à l'intérieur de C, de toutes les couches avec les densités h et $\mathfrak{h}$; la formule de Green nous donne

$$\int U_i \frac{dV_i}{dn} d\omega = \int V_i \frac{dU_i}{dn} d\omega.$$

L'opération $\frac{d}{dn}$ est la différentiation suivant la normale dirigée intérieurement de C. En appliquant le théorème de Green successivement aux espaces enveloppés par toutes les surfaces et en ajoutant tous les résultats, on obtient

$$\sum \int U_i \frac{dV_i}{dn} d\omega = \sum \int V_i \frac{dU_i}{dn} d\omega. \tag{2}$$

Concevons maintenant un espace limité par les surfaces des conducteurs C et par celle d'une sphère d'un rayon aussi grand que l'on voudra et qui enveloppe tous les corps, et substituons les niveaux potentiels des couches h et $\mathfrak{h}$ aux points situés à l'extérieur de C, que nous nommerons U_e et V_e, aux fonctions arbitraires de la formule de Green ; on a

$$(3)\qquad \sum\int U_e \frac{dV_e}{dN}\,d\omega = \sum\int V_e \frac{dU_e}{dN}\,d\omega,$$

le rayon de la sphère étant infini.

L'opération $\frac{d}{dN}$ est la différentiation suivant la normale dirigée extérieurement de C. Évidemment les fonctions U_i et U_e, V_i et V_e dans les équations (2) et (3) ont la même valeur U et V pour le même point d'une des surfaces C; quant aux quotients différentiels, il se présente une différence.

Soit P_i le niveau potentiel de la couche étendue à la surface de C aux points à l'intérieur de C et Π_i le niveau potentiel des couches restantes; soient P_e et Π_e les niveaux potentiels correspondants dans les points à l'extérieur de C, et soient les densités des couches h, on aura

$$\frac{dU_i}{dn} = \frac{dP_i}{dn} + \frac{d\Pi_i}{dn} \quad \text{et} \quad \frac{dU_e}{dN} = \frac{dP_e}{dN} + \frac{d\Pi_e}{dN}.$$

Évidemment on a, pour les points de C,

$$\frac{d\Pi_i}{dn} = -\frac{d\Pi_e}{dN}$$

et, d'après une propriété connue,

$$\frac{dP_i}{dn} + \frac{dP_e}{dN} = -4\pi\varepsilon h,$$

où ε est une constante; par conséquent, on a

$$\frac{dU_i}{dn} + \frac{dU_e}{dN} = -4\pi\varepsilon h$$

et, de la même manière,

$$\frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_e}{dN} = -4\pi\varepsilon \mathfrak{h}.$$

En ajoutant les membres correspondants des équations (2) et (3), on a donc

$$\Sigma \int U \mathfrak{h} \, d\omega = \Sigma \int V h \, d\omega.$$

Il me reste encore à faire voir que cette équation peut être considérée comme une généralisation d'une formule de Gauss.

Soient U le niveau potentiel d'un système de masses m_1, m_2, ..., qui sont situées aux points p_1, p_2, ..., et V le niveau potentiel des masses μ_1, μ_2, ..., qui se trouvent aux points π_1, π_2, ...; soient encore U_1, U_2, ..., les valeurs de U dans ces derniers points et V_1, V_2, ... les valeurs de V aux points p_1, p_2, ...; la formule de Gauss nous donne

$$U_1 \mu_1 + U_2 \mu_2 + \ldots = V_1 m_1 + V_2 m_2 + \ldots,$$

ou

$$\Sigma U \mu = \Sigma V m.$$

Cette équation est identique, parce que les deux membres contiennent les mêmes combinaisons. Gauss [1] n'a pas démontré rigoureusement que cette formule est applicable au cas où l'on étend d'abord les masses m sur une surface C, et ensuite les masses μ sur la même surface; seulement il a donné quelques points essentiels de la manière dont on pourrait se servir pour justifier cette généralisation.

Dans ce qui précède, cette formule, qui a lieu pour un nombre arbitraire de surfaces, est déduite d'une manière bien simple de l'équation de Green.

---

(1) Gauss, *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte*, § 19.