JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULES FARKAS

Sur les fonctions itératives

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 10 (1884), p. 101-108.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10__101_0>

Sur les fonctions itératives;

PAR M. JULES FARKAS,

Professeur à l'Université de Budapesth.

En supposant k un nombre entier et positif, l'itérative de $k^{\text{ième}}$ degré de la fonction $f(z)$, désignée par $f^k(z)$, ou z_k, est définie par la formule récurrente

$$z_k = f(z_{k-1}), \quad z_0 = z.$$

Sur la théorie générale des fonctions itératives, il n'y a que deux Mémoires, publiés par M. E. Schroeder dans les *Annales de Clebsch*. Les questions traitées par M. Schroeder sont celles de la convergence [1] et celle de l'itération analytique [2]. En supposant la fonction $f(z)$ holomorphe dans l'aire T, et que toutes ses itératives soient des points de l'aire T, si l'algorithme z_k tend vers une même limite quand le nombre k devient infini d'une manière quelconque, la limite $\lim z_k = \zeta$ est une racine de l'équation $f(z) = z$, parce qu'alors on a

$$\lim z_{k+1} = \lim z_k;$$

d'où, en vertu de la définition, $\lim f(z_k) = \lim z_k$, c'est-à-dire $f(\zeta) = \zeta$. C'est dans ce cas que les itératives sont dites convergentes dans l'aire T.

---

(1) *Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*, t. II.

(2) *Ueber iterirte Functionen*, t. III.

Si la fonction $f(z)$ satisfait à certaines conditions, ses itératives sont convergentes, et, dans ma première Note, j'établis une sorte de telles conditions. Le problème de l'itération analytique a pour but d'exprimer les itératives d'une fonction analytique par une fonction analytique de l'indice k considérée comme variable indépendante. En étendant la définition de z_k sur des valeurs fractionnaires et négatives de l'indice k; dans ma seconde Note, j'établis et je traite la forme générale de la fonction analytique de deux variables $F(k, z)$ définie par l'expression

$$F(k, z) = f^k(z).$$

I. — Sur la convergence des fonctions itératives.

1. Désignons par $f(T)$ l'aire décrite par le point $z_1 = f(z)$ quand le point z décrit l'aire T.

Si l'aire $f(T)$ *est située dans l'aire* T *et que l'aire* T *se puisse concentrer en un point* ζ *de manière que l'aire* $f(T)$ *reste toujours dans l'aire* T, *les itératives de* $f(z)$ *sont convergentes dans cette aire.*

En effet, que le contour de l'aire en concentration T soit arrivé au point z, et à ce moment désignons par T_1 l'aire diminuée T. Le point $z_1 = f(z)$ est dans l'aire T_1, parce que, en vertu de la supposition, l'aire $f(T_1)$ est dans l'aire T_1. En continuant la concentration, le contour de l'aire T_1 est arrivé au point z_1; à ce moment, désignons par T_2 l'aire diminuée T. Le point $z_2 = f(z_1)$ est dans l'aire T_2, parce que l'aire $f(T_2)$ est dans l'aire T_2, et ainsi de suite; que le contour de l'aire en concentration soit arrivé au point $z_k = f(z_{k-1})$, et à ce moment désignons par T_k l'aire diminuée T. Le point $z_{k+1} = f(z_k)$ est dans l'aire T_k, parce que l'aire $f(T_k)$ est dans l'aire T_k. Or $\lim T_k = \zeta$, par conséquent $\lim z_k = \zeta$ et $\lim z_{k+1} = \lim z_k$.

Considérons, par exemple, la fonction

$$f(z) = a + \sqrt[n]{z}, \tag{1}$$

où n est un nombre positif supérieur à l'unité. La fonction $\sqrt[n]{z}$ est holomorphe dans toute l'étendue du plan traversé par une droite R dont l'un des points extrêmes est dans l'origine, et l'autre dans l'infini. Désignons par α l'argument du point fixe a. Si l'argument commun des points de la droite R est $\alpha+\pi$ ou $\alpha-\pi$ ou dans le voisinage soit de $\alpha+\pi$, soit de $\alpha-\pi$, le plan traversé par la droite R satisfait à l'exigence attribuée à l'aire T dans notre théorème. Ainsi, en posant

$$z_k - a = z'_{k-1},$$

c'est-à-dire

$$z' = \sqrt[n]{z}, \quad z'_1 = \sqrt[n]{a+z'}, \quad z'_2 = \sqrt[n]{a+z'_1}, \quad z'_3 = \sqrt[n]{a+z'_2}, \quad \ldots,$$

la limite $\lim z'_k$ est une racine de l'équation $z^n = z + a$, et l'on en obtient l'une ou l'autre des racines suivant que l'on sort de l'une ou de l'autre des valeurs de la racine $z' = \sqrt[n]{z}$.

2. Du théorème général on tire aisément le suivant : *Si* (1) *la fonction $f(x)$ est d'une valeur réelle et croissante pour une valeur réelle et croissante de x comprise entre les limites p et q, et que l'on ait*

$$p < q, \tag{2}$$

$$p < f(p), \quad q > f(q), \tag{3}$$

les itératives de $f(x)$ sont convergentes, théorème dont voici la preuve directe :

En vertu de (1) et (2),

$$f(p) < f(x) < f(q),$$

par conséquent (3)

$$p < f(x) < q,$$

c'est-à-dire $p < x_1 < q$. On en conclut (1)

$$f(p) < f(x_1) < f(q),$$

d'où (3)

$$p < f(x_1) < q,$$

c'est-à-dire $p < x_2 < q$, et ainsi de suite. On a, en général, $p < x_k < q$; toutes les itératives de $f(x)$ sont comprises entre les limites p et q. Cela étant, considérons les deux cas suivants : celui d'un x, tel que l'on ait $x_1 > x$, et celui d'un x, tel que l'on ait $x_1 < x$. Comme x et x_1 sont compris entre les limites p et q, on a (1)

$$(cas\ 1)\quad f(x_1) > f(x), \qquad (cas\ 2)\quad f(x_1) < f(x),$$

c'est-à-dire (cas 1) $x_2 > x_1$, (cas 2) $x_2 < x_1$. Comme x_1 et x_2 sont compris de même entre les limites p et q, on a (1)

$$(cas\ 1)\quad f(x_2) > f(x_1), \qquad (cas\ 2)\quad f(x_2) < f(x_1),$$

ou bien $x_3 > x_2$ (cas 1), $x_3 < x_2$ (cas 2), et ainsi de suite; en général,

$$(cas\ 1)\quad p < x < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < q,$$
$$(cas\ 2)\quad q > x > x_1 > x_2 > \ldots > x_k > q.$$

On en conclut $\lim x_{k+1} = \lim x_k$ quelle que soit la valeur de x, pourvu qu'elle soit comprise entre les limites p et q.

Exemples.

Exemple I :

$$f(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1})^{\frac{1}{n}},$$

où les constantes a sont des quantités positives. Si x est d'une valeur positive, et que l'on opère toujours par la valeur positive de la fonction, la limite $\lim x_k$ est une racine de l'équation

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} = x^n.$$

Exemple II :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

où les constantes a sont des quantités positives inférieures à $\frac{1}{4}$. Les itératives sont convergentes pour des valeurs positives de x inférieures à $\frac{1}{2}$.

Exemple III :

$$f(x) = a + b(\sin x)^n,$$

où n est un nombre entier positif, a et b sont des quantités positives et $a + b < \frac{\pi}{2}$. La condition de la convergence est $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Exemple IV :

$$f(x) = a + b(\log x)^n,$$

où n est un nombre entier et positif supérieur à l'unité, a et b sont des quantités positives et

$$a > 1, \quad b < \left(\frac{n-1}{a-1}\right)^{n-1}.$$

La convergence subsiste si $1 < x^{n-1} < e^{a-1}$.

Exemple V :

$$f(x) = \cos(a - bx),$$

où a et b sont des quantités positives et $b < a < \frac{\pi}{2}$. Si $0 < bx < a$, les itératives sont convergentes.

Exemple VI :

$$f(x) = \log(a + bx),$$

où a et b sont des quantités positives, $a > 1$, $b < 1$. Dans ce cas, la condition de la convergence est $0 < (1 - b)x < a - 1$.

II. — Sur l'itération analytique.

1. En supposant n et m des nombres entiers et positifs pour définition de l'itérative de degré $\frac{n}{m}$ de la fonction $f(z)$, désignée par $q_1 = z_{\frac{n}{m}}$, posons

$$q_m = z_n.$$

Ainsi l'itérative de degré $\frac{n}{m}$ de la fonction $f(z)$ n'est autre chose que la fonction dont l'itérative de degré m est égale à l'itérative de degré n de la fonction $f(z)$. La définition de l'itérative de degré négatif de la fonction $f(z)$ est donnée par l'équation

$$f^k(z_{-k}) = z,$$

où k est un nombre positif ou négatif. Donc l'itérative de degré négatif de la fonction $f(z)$ désignée par p est la solution de l'équation $f^k(p) = z$, où k est un nombre positif, et le degré de l'itérative p est $-k : p = f^{-k}(z)$.

De ces définitions on déduit aisément

$$f^h(z_k) = f^k(z_h) = f^{h+k}(z), \tag{1}$$

où h et k sont des nombres réels. Ainsi, en écrivant $f^k(z) = \mathrm{F}(k, z)$, on a

$$\mathrm{F}(h+k, z) = \mathrm{F}[k, \mathrm{F}(h, z)]. \tag{2}$$

Admettons que la fonction z_k ait une dérivée par rapport à k. Alors nous avons (2)

$$\frac{\partial z_{h+k}}{\partial h} = \frac{\partial z_{h+k}}{\partial z_h}\frac{\partial z_h}{\partial h}.$$

Ainsi, comme (2),

$$\frac{\partial z_{h+k}}{\partial z} = \frac{\partial z_{h+k}}{\partial z_h}\frac{\partial z_h}{\partial z},$$

on a

$$\frac{\partial z_{h+k}}{\partial h} : \frac{\partial z_{h+k}}{\partial z} = \frac{\partial z_h}{\partial h} : \frac{\partial z_h}{\partial z};$$

d'où, en posant $h + k = u$, $h = v$,

$$\frac{\partial z_u}{\partial u} : \frac{\partial z_u}{\partial z} = \frac{\partial z_v}{\partial v} : \frac{\partial z_v}{\partial z}.$$

Donc le rapport des dérivées $\frac{\partial z_k}{\partial k}$ et $\frac{\partial z_k}{\partial z}$ est indépendant de la variable k. Posons

$$\frac{\partial z_k}{\partial k} : \frac{\partial z_k}{\partial z} = c\,\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

où c est une constante. La solution générale de cette équation étant

$$z_k = \psi\left[c^{\frac{k}{e}}\varphi(z)\right],$$

comme $z_0 = z$, et, par conséquent, $\psi[\varphi(z)] = z$, *la forme générale de la fonction* $F(k, z)$ *est*

$$(3) \qquad F(k, z) = \varphi^{-1}[a^k\varphi(z)],$$

où a est une constante, et φ *est une fonction définie par l'équation*

$$(4) \qquad \varphi[f(z)] = a\varphi(z).$$

De (4) on déduit, en effet, aisément

$$(5) \qquad \varphi[f^k(z)] = a^k\varphi(z),$$

formule indiquée aussi par M. Schrœder dans un Mémoire sur les fonctions itératives, mais sans en reconnaître la généralité.

2. Ainsi l'étude de l'itération analytique est réduite à celle de la fonction φ.

Désignons par ζ l'une des racines de l'équation $f(z) = z$, et supposons la fonction $f(z)$ holomorphe dans un cercle C décrit du point ζ comme centre avec un rayon plus grand que l'unité. Posons

$$(6) \qquad a(1 - a^n)\alpha_{n+1} = \alpha_1 D_{1,n+1} + \alpha_2 D_{2,n+1} + \ldots + \alpha_n D_{n,n+1},$$

où

$$(7) \qquad \alpha_1 = 1, \quad a = f'(\zeta),$$

et $D_{m,n+1}$ est le coefficient de $(z-\zeta)^{n+1}$ dans le développement de $[f(z) - \zeta]^m$:

$$(8) \qquad (n+1)!\, D_{m,n+1} = \frac{d^{n+1}[f(z) - \zeta]^m}{dz^{n+1}}, \quad z = \zeta.$$

Dans le cercle de convergence de la série

$$\Phi(z) = \alpha_1(z-\zeta) + \alpha_2(z-\zeta)^2 + \ldots,$$

on a évidemment $\varphi(z) = \Phi(z)$. Écrivons

$$f(z) = a_0 + a_1(z-\zeta) + a_2(z-\zeta)^2 + \ldots, \quad \operatorname{mod} a_m = a'_m,$$

où $a_0 = \zeta$, $a_1 = a$. Évidemment la série

$$F(z) = a'_1(z-\zeta) + a'_2(z-\zeta)^2 + \ldots$$

est convergente dans le cercle C, et, en posant

$$\alpha'_{n+1} \operatorname{mod} a(1-a^n) = \alpha'_1 F(\zeta+1) + \alpha'_2 F(\zeta+1)^2 + \ldots + \alpha'_n F(\zeta+1)^n,$$
$$\alpha'_1 = 1,$$

comme (8)

$$F(\zeta+1)^m > \operatorname{mod} D_{m,n+1},$$

on a (6)

$$\alpha'_{n+1} > \operatorname{mod} \alpha_{n+1};$$

par conséquent, la série $\Phi(z)$ est convergente dans le cercle de convergence de la série

$$\alpha'_1(z-\zeta) + \alpha'_2(z-\zeta)^2 + \ldots.$$

Or

$$\frac{\alpha'_{n+1}}{\alpha'_n} = \operatorname{mod}\frac{1-a^{n-1}}{1-a^n} + \frac{F(\zeta+1)^n}{\operatorname{mod} a(1-a^n)},$$

d'où, dans le cas de $\operatorname{mod} a > 0$, $F(\zeta+1) < 1$; $\lim \frac{\alpha'_{n+1}}{\alpha'_n} = 1$. Nous avons donc ce théorème : *Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans un cercle décrit d'une des racines ζ de l'équation $f(z) = z$ comme centre avec un rayon plus grand que l'unité, et que l'on ait*

$$\operatorname{mod} f'(\zeta) + \tfrac{1}{2}\operatorname{mod} f''(\zeta) + \tfrac{1}{2.3}\operatorname{mod} f'''(\zeta) + \ldots < 1, \quad 1 < \operatorname{mod} f'(\zeta) = 0,$$

la fonction φ est holomorphe dans le cercle décrit du même centre ζ avec un rayon égal à l'unité.