

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

H. RESAL

**Commentaire à la théorie mathématique du jeu de billard**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 3<sup>e</sup> série*, tome 9 (1883), p. 65-98.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1883\\_3\\_9\\_65\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9_65_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

---

*Commentaire à la théorie mathématique du jeu de billard;*

PAR M. H. RESAL.

---

§ I. — GÉNÉRALITÉS.

1. Coriolis doit être considéré comme étant le créateur de cette théorie, quoiqu'il ait été précédé, dans la solution d'un problème spécial dont nous nous occuperons plus loin, par Jean-Albert Euler <sup>(1)</sup>.

Le remarquable Ouvrage de Coriolis sur ce sujet a paru en 1835, mais il a fait peu de sensation, peut-être même à cause de son titre; car les analystes ne sont généralement pas des joueurs de billard et inversement. Mais il y a dans cet Ouvrage des aperçus nouveaux et des méthodes de calculs et d'intégrations spéciales qui peuvent recevoir leur application dans bien des circonstances.

Si nous nous permettons de commenter l'Ouvrage dont il s'agit, ce n'est pas seulement en vue d'apporter des simplifications dans les démonstrations, mais c'est surtout parce que nous différons avec Coriolis sur la manière d'évaluer la force vive perdue dans le choc de deux corps imparfaitement élastiques. Ainsi, par exemple, dans le calcul de l'effet d'un coup de queue horizontal, Coriolis exprime que, après le choc, la force vive totale est une fraction de la force vive initiale de la queue, fraction qu'il a déterminée expérimentalement, et il ne tient

---

(1) Fils aîné (1734-1800) du célèbre géomètre Léonard Euler.

pas ainsi compte du terme auquel donne lieu l'action mutuelle tangentielle développée au contact de la queue et de la bille.

L'équation des forces vives, telle que nous l'établissons, conduit à des résultats beaucoup plus simples, et qui sont même d'une simplicité à laquelle nous étions loin de nous attendre.

**2. Rappel des principes de la théorie du choc des corps.** — Lorsque deux corps solides en mouvement, l'un par rapport à l'autre, viennent à se rencontrer, il se produit ce que l'on appelle un *choc* ou une *percussion*. Quoique la durée d'un choc soit très courte et presque inappréciable, elle se divise cependant en deux parties bien distinctes. Dans la première, les corps se compriment ou se refoulent jusqu'au moment où leur déformation et, par suite, leur action mutuelle normale au contact atteignent leur maximum. Dans la seconde partie, qui suit cet instant, les corps reviennent graduellement à une forme plus ou moins différente de leur forme primitive et tendent finalement à se séparer en vertu de l'énergie plus ou moins grande de leur force de ressort.

Pendant le choc, les molécules des corps ne peuvent éprouver que des déplacements du même ordre de grandeur que sa durée, déplacements que l'on peut, par suite, négliger sans erreur sensible. Mais, à la fin du choc, leurs vitesses peuvent être très différentes, soit en grandeur, soit en direction, de ce qu'elles étaient au commencement; d'où il suit que les actions moléculaires développées dans les corps, pendant le choc, ont une intensité comparablement plus considérable que celle des forces qui produisent les phénomènes ordinaires continus, tels que la pesanteur. On peut donc faire abstraction de ces dernières forces pendant la durée du choc.

A l'instant de la plus grande compression, les composantes normales des vitesses des molécules au contact des deux corps sont égales, et ces corps se comportent par suite, dans cet instant, l'un par rapport à l'autre, comme deux solides invariables qui peuvent d'ailleurs glisser l'un sur l'autre.

S'il y a glissement pendant le choc, il se développera au contact une action tangentielle qui, généralement, atteindra le frottement de glissement et dont on devra tenir compte.

Comme, même en faisant abstraction des résistances passives déve-

loppées au contact, il y a une consommation de travail pour produire la déformation finale, la force vive totale des corps à la fin du choc sera nécessairement inférieure à ce qu'elle était au commencement, et nous devrons par suite commencer par déterminer la valeur de la différence.

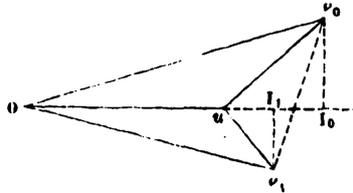
5. *Évaluation de la perte de force vive éprouvée par deux corps choquants à la fin du choc.* — Soient (fig. 1), pour une molécule de masse  $m$  de l'un ou l'autre des deux corps,

$Ov_0, Ov_1, Ou$  les droites, menées par un point  $O$ , qui représentent respectivement les vitesses  $v_0$  avant le choc,  $v_1$  après le choc, et  $u$  à l'instant de la plus grande compression;

$U = \overline{v_0 v_1} = \overline{v_0} - \overline{v_1}$  la vitesse perdue à la fin du choc;

$\varphi_0 = \overline{v_0 u} = \overline{v_0} - \overline{u}$  la vitesse perdue dans la première partie du choc;

Fig. 1.



$\varphi_1 = \overline{v_1 u} = \overline{v_1} - \overline{u}$  la vitesse regagnée dans la seconde partie;

$I_0, I_1$  les projections des points  $v_0$  et  $v_1$  sur la direction de  $Ou$ .

On a

$$v_0^2 = u^2 + \varphi_0^2 + 2u \cdot \overline{u I_0}, \quad v_1^2 = u^2 + \varphi_1^2 + 2u \cdot \overline{u I_1};$$

d'où, en remarquant que  $I_0 I_1 = U \cos(U, u)$ ,

$$m v_0^2 - m v_1^2 = m(\varphi_0^2 - \varphi_1^2) + 2mU \cos(U, u)u.$$

Si l'on fait la somme des équations semblables à cette dernière, établies pour toutes les masses  $m$ , on a

$$(1) \quad \Sigma m v_0^2 - \Sigma m v_1^2 = \Sigma m(\varphi_0^2 - \varphi_1^2) + 2 \Sigma m U \cos(U, u)u.$$

L'expression

$$\Sigma m U \cos(U, u) u dt$$

représente le travail élémentaire des quantités de mouvement perdues à la fin du choc, estimé dans le mouvement des deux corps à l'instant de la plus grande compression. Or à cet instant, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, les corps se meuvent comme deux solides invariables qui peuvent d'ailleurs glisser ou rouler l'un sur l'autre; d'où il suit que le travail ci-dessus est égal au travail élémentaire, évalué de la même manière, mais changé de signe, de l'impulsion due à l'action moléculaire mutuelle tangentielle développée au contact. Si donc on désigne par  $J$  cette impulsion et par  $\omega$  la projection de la vitesse de glissement, sur sa direction, on a

$$\Sigma m U \cos(U, u) dt = - J \omega dt,$$

et la formule (1) devient

$$(2) \quad \Sigma m v_0^2 - \Sigma m v_1^2 = \Sigma m (\varphi_0^2 - \varphi_1^2) - 2J\omega.$$

Jusqu'ici nous n'avons fait intervenir que les hypothèses qui sont admises depuis longtemps par tous les auteurs. Nous allons maintenant supposer, ce qui paraît plausible, que  $\varphi_1$  est directement opposé à  $\varphi_0$ ; de sorte que, en posant

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = n, \quad \frac{1-n}{1+n} = \varepsilon,$$

nous aurons

$$U = \varphi + \varphi_0 = \varphi_0(1+n), \quad \varphi_0 = \frac{U}{1+n}, \quad \varphi_1 = \frac{nU}{1+n},$$

$$\varphi_0^2 - \varphi_1^2 = \frac{1-n}{1+n} U^2 = \varepsilon U^2.$$

L'équation (2) devient alors

$$(3) \quad \Sigma m v_0^2 - \Sigma m v_1^2 = \Sigma \varepsilon m U^2 - 2J\omega.$$

Si les corps choquants étaient complètement dénués d'élasticité, la seconde partie du choc ne se produirait pas, et l'on aurait

$$\varphi_1 = 0, \text{ d'où } n = 0, \quad \varepsilon = 1;$$

par suite

$$(4) \quad \Sigma m v_0^2 - \Sigma m v_1^2 = \Sigma m U^2 - 2J\omega,$$

équation qui, traduite en langage ordinaire et abstraction faite du terme en  $J$ , constitue le théorème de Carnot.

Si les deux corps étaient parfaitement élastiques, les vitesses des molécules à la fin du choc seraient égales et de sens contraire à ce qu'elles étaient au commencement, et l'on aurait

$$n = 1, \quad \varepsilon = 0.$$

Mais, comme il n'existe pas dans la nature des corps parfaitement élastiques, ni complètement dénués d'élasticité, on ne devra avoir égard qu'à l'équation (3) considérée dans toute sa généralité, et dans laquelle  $\varepsilon$  représentera une fraction qui pourra varier d'une molécule à une autre.

Soient  $M$  la masse du corps choquant et  $M'$  celle du corps choqué : nous conviendrons, en ce qui concerne le second membre de l'équation (3), de réserver les lettres  $m$ ,  $U$ ,  $\varepsilon$  pour représenter exclusivement la masse d'une molécule de  $M$ , sa vitesse perdue et le coefficient de la force vive due à cette vitesse. Nous accentuerons ces lettres pour une molécule de  $M'$ .

L'équation précitée prend alors la forme suivante :

$$(5) \quad \Sigma m v_0^2 - \Sigma m v^2 = S\varepsilon m U^2 + S'\varepsilon' m U'^2 - 2J\omega,$$

les symboles  $S$ ,  $S'$  ayant la signification de somme étendue aux molécules de l'un et l'autre corps.

Supposons maintenant que les coefficients  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  soient respectivement constants pour les molécules  $m$ ,  $m'$ , quoique pouvant différer l'un de l'autre, il viendra

$$(6) \quad \Sigma m v_0^2 - \Sigma m v^2 = \varepsilon S m U^2 + \varepsilon' S' m' U'^2 - 2J\omega.$$

D'après notre mode de démonstration, il est évident que, si plusieurs corps viennent simultanément à se choquer, on devra introduire dans le second membre de l'équation précédente autant de termes en  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  qu'il y a de corps et autant de termes semblables à  $2J\omega$  qu'il y a de chocs.

Mais bornons-nous à considérer l'équation (6) dans toute sa simplicité. Il paraîtrait résulter de notre dernière hypothèse que les constantes  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  devraient être spécifiques pour l'un et l'autre corps, et que leurs valeurs pourraient se déterminer, une fois pour toutes, dans des cas simples, facilement accessibles à l'expérimentation. Mais il ne peut pas en être ainsi; car l'équation (6), jointe aux équations ordinaires de la Mécanique, afférentes à chaque problème, pourrait conduire à des résultats en désaccord avec les faits observés, comme cela arrive d'ailleurs pour les formules moins générales que (6), qui ont été proposées jusqu'ici. La raison en est que nous avons fait abstraction des vibrations des molécules des deux corps, produites par le choc, dont la force vive, qui se transforme plus ou moins en chaleur, vient s'ajouter à la force vive perdue telle que nous l'avons estimée. La force vive vibratoire pour chacun des corps ne dépend pas seulement de la nature de ce corps, mais encore de la forme, des dimensions et des positions relatives des deux corps. On peut comprendre empiriquement et respectivement les deux forces vives de cette nature qui se rapportent à  $M$ ,  $M'$  dans les deux premiers termes du second membre de l'équation (6), à la condition de considérer les coefficients  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  comme dépendant l'un de la nature de  $M$ , l'autre de celle de  $M'$ , et tous deux des formes, des dimensions et des positions relatives des deux corps.

4. Les billes employées dans le jeu de billard étant à peu près identiques, les coefficients  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  peuvent être considérés comme ayant la même valeur, et l'on sait que cette valeur est très petite, quoiqu'elle n'ait pas été déterminée.

*Dans le choc oblique d'une bille contre un plan fixe ou contre une bande*, l'expérience indique que le rapport des composantes normales de la vitesse de la bille après et avant le choc est à très peu près indépendant de l'obliquité et a, par suite, la même valeur que dans le choc normal; et, en admettant ce principe, on n'a pas, dans ce cas, à prendre en considération l'équation (6).

Nous en resterons à ces généralités, qui seront rendues plus claires, par l'étude du cas particulier suivant et les résultats des expériences qui s'y rapportent.

§. *Du choc direct de deux corps.* — Supposons que les deux masses  $M, M'$  soient animées chacune d'un mouvement de translation parallèle à une direction déterminée et qu'elles viennent à se rencontrer de manière que la normale au contact passe par les centres de gravité  $C, C'$  des deux corps et soit parallèle à la direction ci-dessus; comme il ne développe aucune action mutuelle tangentielle au contact, les corps choquants seront encore animés à la fin du choc de mouvements de translation parallèles à  $CC'$ .

Soient  $V_0, V_1$  les vitesses de la masse choquante  $M$ , avant et après le choc;  $V'_0, V'_1$  les vitesses semblables de l'autre masse.

Nous avons, d'après le principe de la conservation des quantités de mouvement,

$$MV_1 + M'V'_1 = MV_0 + M'V'_0$$

ou

$$(a) \quad M'(V'_0 - V'_1) = M(V_1 - V_0).$$

D'autre part, l'équation (6) se réduit à la suivante :

$$M(V_0^2 - V_1^2) + M'(V'_0{}^2 - V'_1{}^2) = \epsilon M(V_0 - V_1)^2 + \epsilon' M'(V'_0 - V'_1)^2$$

ou

$$\begin{aligned} M(V_0 - V_1)(V_0 + V_1) + M'(V'_0 - V'_1)(V'_0 + V'_1) \\ = \epsilon M(V_0 - V_1)^2 + \epsilon' M'(V'_0 - V'_1)^2. \end{aligned}$$

En remplaçant, dans cette dernière équation, le facteur  $M'(V'_0 - V'_1)$  par sa valeur (a) et supprimant un facteur commun aux deux membres, on trouve

$$(b) \quad V_0 + V_1 - (V'_0 + V'_1) = \epsilon(V_0 - V_1) - \epsilon'(V'_0 - V'_1),$$

et, en éliminant successivement  $V'_1$  et  $V_1$  entre (a) et (b), on obtient

$$(7) \quad \begin{cases} V_1 = V_0 - \frac{2M'(V_0 - V'_0)}{M'(1 + \epsilon) + M(1 + \epsilon')}, \\ V'_1 = V'_0 + \frac{2M(V_0 - V'_0)}{M'(1 + \epsilon) + M(1 + \epsilon')}. \end{cases}$$

Si le corps choqué est en repos avant le choc, on a simplement

$$(8) \quad \begin{cases} V_1 = V_0 \left[ 1 - \frac{2M'}{M'(1+\varepsilon) + M(1+\varepsilon')} \right], \\ V'_1 = \frac{2MV_0}{M'(1+\varepsilon) + M(1+\varepsilon')}. \end{cases}$$

Supposons : 1° que l'on suspende par des fils les deux corps à deux points fixes de niveau, de manière que la ligne des centres de gravité soit horizontale, passe par le contact et qu'elle soit normale; 2° que l'on installe, à côté des billes et parallèlement à cette ligne, deux arcs circulaires verticaux métalliques gradués. En écartant la masse  $M$  de sa position jusqu'à une certaine hauteur, puis l'abandonnant à elle-même, sa vitesse au moment où elle viendra toucher  $M'$  sera due à cette hauteur; à l'aide des arcs gradués, on déterminera les hauteurs auxquelles se sont élevés les centres de gravité des deux corps à la suite du choc, et on calculera, par suite, les vitesses que les corps possédaient à la fin du choc. Si, en portant les valeurs de  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V'_1$ , ainsi obtenues, dans les formules (8), on obtient deux équations distinctes en  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ , on pourra déterminer les valeurs de ces inconnues.

Dans le cas d'une queue et d'une bille dont le poids était le tiers de celui de la queue, et pour des vitesses  $V_0$  égales ou inférieures à 2<sup>m</sup>, 80, Coriolis, en opérant, comme on vient de l'indiquer, a trouvé

$$V_1 = \frac{7}{12} V_0, \quad V'_1 = \frac{5}{4} V_0;$$

en portant ces valeurs dans les formules (8), on obtient un résultat unique, savoir

$$1 + \varepsilon + 3(1 + \varepsilon') = \frac{24}{5},$$

ce qui est insuffisant pour déterminer  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ . Si l'on considère qu'une bille, à la suite d'un grand nombre de chocs, ne change pas sensiblement de forme, on peut, sans grande erreur, supposer  $\varepsilon = 0$ , et alors on trouve

$$\varepsilon' = \frac{4}{15} = 0,27,$$

REVUE

chiffre que nous admettrons également et par extension, pour un coup de queue sur une bille, de quelque manière qu'il soit donné.

Supposons maintenant que la masse  $M'$  soit assez grande, par rapport à  $M$ , pour que l'on puisse la considérer comme infinie ; on aura

$$(9) \quad V_1 = -\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} V_0, \quad V'_1 = 0.$$

D'après l'expérience, le rapport  $\frac{V_1}{V_0}$ , par suite  $\epsilon$ , n'est pas indépendant de la nature de la masse choquée, et c'est ce qui nous a conduit aux considérations de la fin du n° 3.

Ce cas est à peu près celui du choc d'une bille contre une bande, et Coriolis a trouvé que le rapport des vitesses normales de la bille, après et avant le choc, différait peu de 0,55 pour des vitesses initiales variant jusqu'à 7<sup>m</sup>, ce qui est à peu près la limite maximum que l'on atteint au billard. En faisant  $-\frac{V_1}{V_0} = 0,55$ , la formule (9) donne

$$\epsilon = 0,29.$$

Si on laisse tomber verticalement une bille de billard sur une plaque de marbre horizontale, la bille se relève après le choc aux  $\frac{2}{3}$  de la hauteur de chute ; on a ainsi

$$\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

d'où

$$\epsilon = 0,155.$$

Un disque en ivoire qu'on laisse retomber à plat sur une plaque de marbre ne rejaillit pas ; ce que l'on ne peut expliquer que par la transformation complète de la force vive acquise en force vive vibratoire.

**6. Conventions et notations.** — Nous appellerons *point de choc* le point de contact dans le choc d'une queue et d'une bille, de deux billes, d'une bille et d'une bande.

Nous supposerons qu'une bille est composée de couches sphériques homogènes dont la densité peut varier de l'une à l'autre.

Si dans un problème on n'a qu'une bille à considérer, nous désignerons par

$R$ ,  $M$  son rayon et sa masse;

$M \frac{R^2}{k}$  son moment d'inertie par rapport à un diamètre;

$\chi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  les composantes, parallèles à trois axes rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , de la vitesse, à un instant quelconque, du centre gravité  $C$  de la bille;

$r$ ,  $p$ ,  $q$  les composantes semblables de la rotation de la bille autour de ce centre.

Dans le cas où deux billes entreraient en ligne de compte, on accentuera les lettres précédentes pour la seconde bille.

Les éléments du mouvement d'un corps, à un instant considéré comme initial, seront caractérisés par l'indice 0; pour un choc, cet instant sera celui du commencement du choc, et l'on distinguera par l'indice 1 les éléments du mouvement qui se rapportent à la fin du choc.

## § II. — MOUVEMENT D'UNE BILLE SUR UN TAPIS, EN AYANT ÉGARD AU FROTTEMENT DE GLISSEMENT.

7. La bille peut être lancée sur le tapis par un procédé quelconque; mais, au point de vue spécial où nous nous plaçons, elle le sera par le choc d'une queue dont nous étudierons plus loin les effets; nous ferons coïncider le plan  $xOy$  avec celui du tapis,  $Oz$  se trouvant à l'extérieur.

Soient  $f$  le coefficient de frottement qui, d'après Coriolis, peut être pris égal à 0,25;  $v_x$ ,  $v_y$  les composantes parallèles à  $Ox$ ,  $Oy$  de la vitesse de glissement  $v$  de la bille sur le tapis.

La rotation  $q$  restant évidemment constante, nous pouvons en faire abstraction, puisqu'elle n'a aucune influence sur la direction du frottement.

Nous avons les relations

$$(1) \quad v_x = \chi - pR, \quad v_y = \eta + rR,$$

et les équations

$$(2) \quad \begin{cases} M \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{v_x}{v} f M g, \\ M \frac{d\eta}{dt} = -\frac{v_y}{v} f M g, \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dn}{dt} = -\frac{v_y}{v} f M g R, \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dp}{dt} = \frac{v_x}{v} f M g R. \end{cases}$$

On déduit des deux premières de ces équations, en ayant égard aux valeurs (1),

$$(3) \quad \frac{d\gamma}{\gamma - pR} = \frac{d\eta}{\eta + nR}.$$

En divisant l'une par l'autre, la première et la quatrième, puis la deuxième et la troisième des équations (2), on trouve, après intégration,

$$\begin{aligned} pR &= p_0 R - k(\gamma - \gamma_0), \\ nR &= n_0 R + k(\eta - \eta_0). \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3), elle devient

$$\frac{d\gamma}{\gamma(1+k) - k\gamma_0 - p_0 R} = \frac{d\eta}{\eta(1+k) - k\eta_0 + n_0 R},$$

et son intégrale exprime que le rapport des deux dénominateurs ou  $\frac{v_y}{v_x}$  est constant. Ainsi donc la direction de la vitesse de glissement, par suite celle du frottement, restent constantes; l'intensité du frottement, étant elle-même constante, on voit que, en *projection sur le tapis, le centre de la bille décrit une parabole* (théorème de J.-A. Euler). Cette courbe sera tracée par le point de contact. Plaçons l'origine O à la position qu'occupait, à un certain instant considéré comme initial, la projection horizontale du centre C de la bille et prenons l'axe Oy parallèle à la vitesse de glissement. Nous aurons

$$v_x = 0, \quad v_y = v,$$

et les équations (2) donnent, par suite,

$$(3) \quad \begin{cases} \chi = \chi_0, & \eta = \eta_0 - fgt, \\ nR = n_0R - fgkt, & p = p_0 \quad (1). \end{cases}$$

Soient

$a$  la vitesse initiale du centre C de la bille;

$\alpha$  son inclinaison sur l'axe  $Ox$ ;

$x, y$  les coordonnées d'un point quelconque de la parabole.

Nous avons

$$\chi_0 = a \cos \alpha, \quad \eta_0 = a \sin \alpha, \quad \chi = \frac{dx}{dt}, \quad \eta = \frac{dy}{dt};$$

par suite

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \cos \alpha, & \frac{dy}{dt} = a \sin \alpha - fgt, \\ x = a \cos \alpha t, & y = a \sin \alpha t - \frac{fgt^2}{2} \end{cases}$$

et, pour l'équation de la parabole,

$$(5) \quad y = a \operatorname{tang} \alpha x - \frac{fg}{2} (1 + \operatorname{tang}^2 \alpha) x^2.$$

Le roulement succédera au glissement, à partir du moment où la vitesse de glissement sera nulle ou lorsque l'on aura

$$0 = \eta + nR = \eta_0 + n_0R - fg(1+k)t;$$

(1) La vitesse du point de la verticale du centre C situé à la hauteur  $h$ , au-dessus de ce centre, a pour composantes

$$\text{Suivant } Ox \dots\dots\dots \chi + hp = \chi_0 + hp_0$$

$$\text{Suivant } Oy \dots\dots\dots \eta - hn = \eta_0 - hn_0 - fgt \left(1 - \frac{kh}{R}\right).$$

Cette vitesse restera donc constante en grandeur et en direction si l'on a  $h = \frac{R}{k}$ ; d'où ce théorème de Coriolis :

*La vitesse du centre d'oscillation situé au-dessus du centre de gravité de la bille reste constante en grandeur et en direction.*

d'où, en désignant par  $v_0$  la vitesse de glissement initiale,

$$t = \frac{v_0}{fg(1+k)}.$$

Le point correspondant de la parabole aura pour coordonnées

$$x_1 = \frac{av_0 \cos \alpha}{fg(1+k)}, \quad y_1 = \left( a \sin \alpha - \frac{v_0}{1+k} \right) \frac{v_0}{fg(1+k)};$$

à partir de ce point, le centre C décrira la tangente à la parabole. Nous ne croyons pas devoir nous arrêter aux équations du mouvement que prend alors la bille, en ayant égard au frottement de roulement, cette question offrant peu d'intérêt et rentrant d'ailleurs dans le domaine de l'enseignement ordinaire.

### § III. — DU CHOC D'UNE SPHÈRE LIBRE CONTRE UN PLAN FIXE.

8. Quoique cette question n'ait pas un rapport immédiat avec le jeu de billard, nous avons cru cependant devoir nous en occuper en raison des résultats intéressants auxquels on parvient, et qui peuvent avoir leur utilité au point de vue de certaines expériences.

Conservons les notations et conventions du numéro précédent et désignons de plus par  $Z$  la réaction normale du plan sur la sphère. Nous aurons, en continuant à faire abstraction de la rotation constante  $q$ ,

$$(1) \quad v_x = \chi - pR, \quad v_y = \eta + nR,$$

et

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \frac{d\chi}{dt} = -\frac{v_x}{v} fZ, \\ M \frac{d\eta}{dt} = -\frac{v_y}{v} fZ, \\ M \frac{dn}{dt} = Z, \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dn}{dt} = -\frac{v_x}{v} fZR, \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dp}{dt} = \frac{v_y}{v} fZR. \end{array} \right.$$

On démontrera comme plus haut que la direction de la vitesse de glissement de la bille sur le tapis reste constante. En prenant l'axe  $Ox$  parallèle à cette direction, nous aurons d'abord

$$(3) \quad \eta = \eta_0, \quad n = n_0,$$

puis

$$(4) \quad M \frac{dx}{dt} = -fZ, \quad M \frac{dz}{dt} = Z, \quad M \frac{R}{k} \frac{dp}{dt} = fZ.$$

De ces dernières équations on déduit, par l'élimination de  $Z$  au moyen de la seconde et en intégrant entre les limites du choc,

$$(5) \quad \begin{cases} \chi_1 = \chi_0 - f(\zeta_1 - \zeta_0), \\ p_1 R = p_0 R + fk(\zeta_1 - \zeta_0). \end{cases}$$

Si nous désignons par  $\nu$  le rendement de la vitesse normale, nous avons, en remarquant que  $\zeta_0$  est négatif,

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_0} = -\nu,$$

et enfin

$$(6) \quad \begin{cases} \chi_1 = \chi_0 + f(1 + \nu)\zeta_0, \\ p_1 R = p_0 R - fk(1 + \nu)\zeta_0. \end{cases}$$

Soient  $a_0, a_1$  les résultantes de  $\chi_0, \zeta_0$  et de  $\chi_1, \zeta_1$ ;  $\alpha_0, \alpha_1$  les angles aigus que font leurs directions avec  $Ox$ ; nous aurons

$$\begin{aligned} \chi_0 &= a_0 \cos \alpha_0, & \zeta_0 &= -a_0 \sin \alpha_0, \\ \chi_1 &= a_1 \cos \alpha_1, & \zeta_1 &= a_1 \sin \alpha_1. \end{aligned}$$

par suite

$$(7) \quad \begin{cases} a_1 \cos \alpha_1 = a_0 \cos \alpha_0 - f(1 + \nu)a_0 \sin \alpha_0, \\ a_1 \sin \alpha_1 = \nu a_0 \sin \alpha_0, \\ \text{tang } \alpha_1 = \frac{\nu \text{ tang } \alpha_0}{1 - f(1 + \nu) \text{ tang } \alpha_0}. \end{cases}$$

9. *Ricochets.* — Supposons que, sous un certain angle, on lance la

sphère sur le plan censé horizontal, de manière que la translation  $\eta$  soit nulle à l'origine. Il se produira une suite de ricochets dans lesquels le centre C du mobile restera constamment dans un même plan normal au plan fixe; si  $\alpha_0, \alpha_0$  se rapportent à la fin de l'un de ses ricochets, le centre C décrira un arc parabolique dont la portée sera

$$P_0 = \frac{\alpha_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{g},$$

et l'on aura de même, pour la portée du ricochet suivant,

$$P_1 = \frac{\alpha_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{g};$$

d'où

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{\alpha_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\alpha_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0},$$

et, en vertu des deux premières des formules (7),

$$(8) \quad \frac{P_1}{P_0} = \nu [1 - f(1 + \nu) \operatorname{tang} \alpha_0].$$

Si l'angle  $\alpha_0$  est assez petit pour qu'on puisse négliger  $f \operatorname{tang} \alpha_0$  devant l'unité, à plus forte raison en sera-t-il de même pour les ricochets suivants, eu égard à la troisième des formules (7); et alors on aura simplement

$$(9) \quad \frac{P_1}{P_0} = \nu.$$

**10. Expériences de M. Rozé.** — Cet habile expérimentateur a eu l'idée de lancer, dans les conditions ci-dessus indiquées, une bille d'ivoire sur une face plane horizontale de corps de différentes natures qui, par leurs masses relativement considérables, pouvaient être considérés comme absolument fixes.

Il a déterminé le rapport de deux consécutives des empreintes laissées par la bille sur le plan, empreintes dont le nombre s'est élevé jusqu'à 12 dans quelques-unes de ses expériences. Il est ainsi arrivé à établir

les moyennes suivantes, qui diffèrent relativement peu des chiffres réels :

Plaque de marbre poli, recouverte de noir de fumée . . . . .	$v = 0,80^{(1)}$
Plaque de marbre mal poli à l'état naturel (hauteur initiale de chute au plus égale à $0^m, 10$ ) . . . . .	$v = 0,85$
Plaque de marbre recouverte d'une feuille de papier au noir de fumée (hauteur initiale de chute au plus égale à $0^m, 15$ ) . . . . .	$v = 0,65$
Madrier de sapin au noir de fumée . . . . .	$v = 0,63$

Comme le papier et le bois ne sont en définitive que du ligneux, il paraît résulter des deux derniers de ces chiffres que, lorsque l'énergie du choc ne dépasse pas certaines limites, le rendement de la vitesse normale du plan fixe est principalement dû à une plaque d'une certaine nature recouvrant un massif d'une nature différente.

#### § IV. — DU CHOC D'UNE BILLE CONTRE UNE BANDE.

11. Nous prendrons les axes  $Oy$  et  $Oz$  respectivement normaux au tapis et à la bande, et nous supposerons avec Coriolis  $j = 0,20$ .

Si, pendant le choc, le frottement de la bille contre la bande donnait lieu à une composante verticale dirigée de bas en haut, le mobile, à la fin du choc, pourrait être animé, dans le même sens, d'une petite vitesse translatrice, mais qui serait presque immédiatement annulée par l'effet de la pesanteur. Si la composante ci-dessus avait une direction inverse de la précédente, elle produirait sur le tapis une percussion de l'ordre de grandeur de cette composante, d'où, à la fin du choc, une vitesse de translation verticale de la bille de bas en haut due à l'élasticité du tapis, qui est très faible, et cette vitesse très petite serait aussi annulée presque immédiatement par la pesanteur. Ainsi donc, quoi qu'il arrive, on peut supposer que la bille ne quitte pas le tapis, ce qui est d'ailleurs conforme à l'observation. Nous aurons donc  $\eta = 0$ , et nous n'aurons pas à considérer la seconde des équations (2) du n° 8.

Nous ferons abstraction, comme ci-dessus et pour les mêmes motifs, de la rotation constante  $q$ .

---

(<sup>1</sup>) Ce chiffre diffère peu de celui  $\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,81$ , que nous avons indiqué au n° 5.

Nous substituerons, pour plus de commodité, mais seulement dans la question actuelle, les notations  $\varphi$  et  $\psi$  à  $v_x, v_y$ , en affectant ces lettres des indices 0 et 1, lorsqu'elles se rapporteront au commencement et à la fin du choc.

Nous avons ainsi les relations

$$(1) \quad \varphi = \chi - pR, \quad \psi = nR,$$

et les équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \frac{dy}{dt} = -\frac{\varphi}{v} fZ, \\ M \frac{dz}{dt} = Z, \\ M \frac{R}{k} \frac{dn}{dt} = -\frac{\psi}{v} fZ, \\ M \frac{R}{k} \frac{dp}{dt} = \frac{\varphi}{v} fZ. \end{array} \right.$$

Des deux dernières de ces équations on déduit, en ayant égard aux valeurs (1),

$$(3) \quad \frac{dn}{nR} = -\frac{dp}{\chi - pR}.$$

Si l'on divise l'une par l'autre la première et la dernière des mêmes équations, puis que l'on effectue l'intégration, on trouve

$$(4) \quad \chi = \chi_0 - \frac{R}{k} (p - p_0),$$

par suite

$$(5) \quad \varphi = \chi_0 + \frac{p_0 R}{k} - \frac{1+k}{k} p R.$$

L'équation (3) prend ainsi la forme

$$\frac{dn}{nR} = \frac{dp}{\frac{1+k}{k} p R - \left( \chi_0 + \frac{p_0 R}{k} \right)}.$$

On déduit de là

$$n = n_0 \left[ \frac{\frac{1+k}{k} \rho R - \left( \chi_0 + \frac{\rho_0 R}{k} \right)}{\frac{1+k}{k} \rho_0 R - \left( \chi_0 + \frac{\rho_0 R}{k} \right)} \right]^{\frac{k}{1+k}}$$

ou simplement

$$(6) \quad n R = n_0 R \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^{\frac{k}{1+k}} = \psi.$$

Nous avons aussi

$$(7) \quad v = \pm \varphi \sqrt{1 + \frac{\mu_0^2 R^2}{\varphi_0^2} \left( \frac{\varphi_0}{\varphi} \right)^{\frac{1+k}{2}}}$$

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que  $\varphi$  sera positif ou négatif, ce qui sera d'ailleurs indiqué par le signe de  $\varphi_0$ .

En divisant l'une par l'autre les deux premières des équations (2) et ayant égard à la valeur précédente, on trouve

$$(8) \quad f d\zeta_1 = \mp \sqrt{1 + \frac{\mu_0^2 R^2}{\varphi_0^2} \left( \frac{\varphi_0}{\varphi} \right)^{\frac{1+k}{2}}} d\varphi.$$

De la première des formules (1) et de l'équation (5) on déduit, par l'élimination de  $p$ ,

$$(9) \quad \chi = \frac{k\gamma_0 + \rho_0 R + \varphi}{1+k};$$

d'où

$$d\chi = \frac{d\varphi}{1+k},$$

et l'équation (8) donne par suite, en effectuant l'intégration dans l'étendue du choc,

$$(\zeta_1 - \zeta_0) f(1+k) = \mp \int_{\varphi}^{\varphi_0} \sqrt{1 + \frac{\mu_0^2 R^2}{\varphi_0^2} \left( \frac{\varphi_0}{\varphi} \right)^{\frac{1+k}{2}}} d\varphi.$$

Soient  $a$  la valeur absolue de  $\zeta_0$ ,  $v$  la fraction de la vitesse normale

initiale rendue par la bande, estimée à 0,55 (n° 5); nous avons

$$\zeta_0 = -a, \quad \zeta_1 = \nu a,$$

et enfin

$$(10) \quad af(1+k)(1+\nu) = \mp \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \sqrt{1 + \frac{n_0^2 R^2}{\varphi_0^2} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi}\right)^{\frac{1+k}{2}}} d\varphi.$$

En admettant que l'on puisse tirer la valeur  $\varphi_1$  de cette équation, le problème sera complètement résolu, puisque les équations (5), (6), (9) feront connaître respectivement  $p_1$ ,  $n_1$ ,  $\chi_1$ . Mais il est visible que pratiquement cette solution n'est guère possible, excepté dans le cas de  $n_0 = 0$ .

Toutefois, si nous remarquons que  $\frac{\varphi_0 - \varphi}{\varphi}$  est de l'ordre de  $f$ , et si nous admettons que l'on puisse négliger le carré de cette quantité, nous aurons

$$\left(\frac{\varphi_0}{\varphi}\right)^{\frac{1+k}{2}} = \left(1 + \frac{\varphi_0 - \varphi}{\varphi_0}\right)^{\frac{1+k}{2}} = 1 + \left(\frac{1+k}{2}\right) \frac{\varphi_0 - \varphi}{\varphi_0};$$

par suite

$$(11) \quad af(1+k)(1+\nu) = \pm \int_{\varphi}^{\varphi_0} \sqrt{1 + \frac{n_0^2 R^2}{\varphi_0^2} - \frac{1+k}{2} \frac{n_0^2 R^2}{\varphi_0^2} (\varphi - \varphi_0)} d\varphi.$$

L'intégration pourra alors s'effectuer, mais nous ne croyons pas utile de pousser plus loin le calcul.

§ V. — DU CHOC DE DEUX SPHÈRES LIBRES EN AYANT ÉGARD AU FROTTEMENT ET A LEUR DEGRÉ D'ELASTICITÉ.

12. Nous prendrons pour axe des  $x$  la droite qui joint les centres  $C$ ,  $C'$  de la bille choquante et de la bille choquée, dont les masses seront respectivement représentées par  $M$ ,  $M'$ , et nous placerons l'origine  $O$  des coordonnées au delà de  $C$  par rapport à  $C'$ . Nous désignerons par  $X$  l'action normale exercée, pendant le choc, par  $M$  sur  $M'$ , par  $f$  le coefficient du frottement développé au point du choc, et enfin par  $v_1$ ,  $v_2$  les composantes parallèles à  $Ox$ ,  $Oy$  de la vitesse de glissement  $v$  de  $M$  sur  $M'$ . Nous ferons abstraction des rotations  $n$ ,  $n'$ , qui restent constantes du commencement à la fin du choc et qui n'interviennent

ni dans la direction du frottement ni dans l'équation des forces vives.

Nous avons les relations

$$(1) \quad v_y = \eta - \eta' + Rq + R'q', \quad v_z = \zeta - \zeta' - pR - p'R'$$

et les équations.

$$(2) \quad \begin{cases} M \frac{dy}{dt} = -X, & M \frac{R^2}{k} \frac{dp}{dt} = \frac{v_z}{v} f R X, \\ M \frac{dz}{dt} = -\frac{v_y}{v} f X, & M \frac{R^2}{k} \frac{dq}{dt} = -\frac{v_z}{v} f R X, \\ M \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{v_z}{v} f X, \end{cases}$$

$$(2') \quad \begin{cases} M' \frac{dy'}{dt} = X, & \frac{M'R'^2}{k'} \frac{dp'}{dt} = \frac{v_z}{v} f R' X, \\ M' \frac{dz'}{dt} = \frac{v_y}{v} f X, & \frac{M'R'^2}{k'} \frac{dq'}{dt} = -\frac{v_z}{v} f R' X, \\ M' \frac{d\zeta'}{dt} = \frac{v_z}{v} f X. \end{cases}$$

En divisant entre elles la seconde et la troisième des équations (2), en ayant égard aux valeurs (1), on trouve

$$(3) \quad \frac{d\eta}{\eta - \eta' + Rq + R'q'} = \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta' - Rp - R'p'}$$

Portons les valeurs de  $\frac{v_y}{v} f X$ ,  $\frac{v_z}{v} f X$  déduites de la seconde et de la troisième des équations (2) dans les autres équations (2) et les équations (2') qui renferment ces quantités, puis effectuons les intégrations; nous aurons

$$\begin{aligned} \eta' &= \eta'_0 - \frac{M}{M'} (\eta - \eta_0), \\ Rq &= Rq_0 + k(\eta - \eta_0), \\ Rp &= Rp_0 - k(\zeta - \zeta_0), \\ \zeta' &= \zeta'_0 - \frac{M}{M'} (\zeta - \zeta_0), \\ R'q' &= R'q'_0 + \frac{M}{M'} k(\eta - \eta_0), \\ R'p' &= R'p'_0 - \frac{M}{M'} k(\zeta - \zeta_0), \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3), elle devient

$$\frac{d\eta}{\tau_0 - \tau'_0 + Rq_0 + Rq'_0 + \left[1 + k + \frac{M}{M'}(1 + k')\right](\tau_1 - \tau_0)} = \frac{d\zeta}{\zeta_0 - \zeta'_0 - Rp_0 - k'p'_0 + \left[1 + k + \frac{M}{M'}(1 + k')\right](\zeta_1 - \zeta_0)},$$

et son intégrale exprime que le rapport des dénominateurs, ou  $\frac{v_y}{v_z}$ , est constant.

Donc, pendant la durée du choc, *la vitesse de glissement de M sur M' conserve une direction constante et ne dépend que du mouvement relatif des deux sphères à l'instant où le choc commence.*

En prenant Oy parallèle à cette direction, nous aurons  $v_y = v$ ,  $v_z = 0$ , et, d'après deux équations de chacun des groupes (2) et (2'), les composantes  $\zeta$ ,  $\zeta'$ ,  $p$ ,  $p'$  resteront constantes; nous pourrions en faire abstraction, puisqu'elles ne donneraient aucun terme dans l'équation des forces vives. Nous aurons ensuite, en intégrant les autres équations de ces deux groupes entre les limites du choc,

$$\begin{aligned} M(\chi_1 - \chi_0) &= - \int X dt, & \frac{MR}{k}(q_1 - q_0) &= - \int \int X dt, \\ M(\eta_1 - \eta_0) &= - \int \int X dt, & \frac{M'R'}{R}(q'_1 - q'_0) &= - \int \int X dt, \\ M(\chi'_1 - \chi'_0) &= \int X dt, \\ M'(\eta'_1 - \eta'_0) &= - \int \int X dt, \end{aligned}$$

et, en posant

$$(4) \quad \chi_0 - \chi_1 = \omega_1,$$

il vient

$$(5) \quad \begin{cases} \eta_0 - \eta_1 = \int \omega_1, & q_0 - q_1 = f \frac{k}{R} \omega_1, \\ \chi'_0 - \chi'_1 = - \frac{M}{M'} \omega_1, & q'_0 - q'_1 = f \frac{M}{M'} \frac{k'}{R'} \omega_1, \\ \eta'_0 - \eta'_1 = - \int \frac{M}{M'} \omega_1, \end{cases}$$

En ayant égard à ces valeurs et faisant l'application du théorème de Koenig, on a, pour la perte de force vive perdue par les deux corps après le choc,

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & M \left[ \chi_0^2 - \chi_1^2 + \eta_0^2 - \eta_1^2 + \frac{R^2}{k} (q_0^2 - q_1^2) \right] \\
 & + M' \left[ \chi_0'^2 - \chi_1'^2 + q_0'^2 - q_1'^2 + \frac{R'^2}{k'} (q_0'^2 - q_1'^2) \right] \\
 & = M \omega_1 \left[ \chi_0 + \chi_1 + f(\eta_0 + \eta_1) + fR(q_0 + q_1) \right. \\
 & \quad \left. - (\chi_0' + \chi_1') - f(\eta_0' + \eta_1') + fR'(q_0' + q_1') \right] \\
 & = M \omega_1 \left\{ A - \omega_1 [1 + f^2(1 + k)] \right. \\
 & \quad \left. - \omega_1 \frac{M}{M'} [1 + f^2(1 + k')] \right\},
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

en posant

$$A = 2 [\chi_0 - \chi_0' + f(\eta_0 - \eta_0' + Rq_0 + R'q_0')].$$

On a de même, pour les forces vives de M, M' dues aux vitesses perdues,

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & M \left[ (\chi_0 - \chi_1)^2 + (\eta_0 - \eta_1)^2 + \frac{R^2}{k} (q_0 - q_1)^2 \right] \\
 & = M \omega_1^2 [1 + f^2(1 + k)],
 \end{aligned} \right.$$

$$(b') \quad \left\{ \begin{aligned}
 & M' \left[ (\chi_0' - \chi_1')^2 + (\eta_0' - \eta_1')^2 + \frac{R'^2}{k'} (q_0' - q_1')^2 \right] \\
 & = M \omega_1^2 \frac{M}{M'} [1 + f^2(1 + k')],
 \end{aligned} \right.$$

L'impulsion du frottement, relative à la durée du choc, en ayant égard à la première des équations (a), a pour valeur

$$(c) \quad f \int X dt = f M \omega_1.$$

En désignant par  $\omega$  la vitesse de glissement M' sur M à l'instant de la compression maximum, d'après l'équation (6) du n° 3, l'expression (a) et la somme des valeurs (b), (b'), (c) multipliées respectivement par  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $-2\omega$ , ce qui donne

$$(6) \quad \omega_1 \left\{ [1 + f^2(1 + k)](1 + \varepsilon) + \frac{M}{M'} [1 + f^2(1 + k')](1 + \varepsilon') \right\} = A + 2f\omega.$$

Toutes les formules que nous venons d'établir s'appliquent à l'instant de la plus grande compression substitué à celui de la fin du choc ; mais, comme les corps choquants se comportent à cet instant comme étant complètement dénués d'élasticité, nous devons prendre  $\epsilon = \epsilon' = 1$ . Si nous supprimons l'indice 1, pour établir une distinction entre les éléments du mouvement qui se rapportent au même instant et ceux qui sont relatifs à la fin du choc, l'équation (6) nous donnera

$$(7) \quad 2\omega \left\{ 1 + f^2(1+k) + \frac{M}{M'} [1 + f^2(1+k')] \right\} = A + 2f\omega,$$

d'où

$$(8) \quad \omega_1 = \frac{2\omega \left\{ 1 + f^2(1+k) + \frac{M}{M'} [1 + f^2(1+k')] \right\}}{[1 + f^2(1+k)](1+\epsilon) + \frac{M}{M'} [1 + f^2(1+k)](1+\epsilon')}$$

Mais nous avons  $\chi' = \chi$  et la seconde des équations (5) devient

$$\chi'_0 - \chi = -\frac{M}{M'} \omega = -\frac{M}{M'} (\chi_0 - \chi),$$

d'où

$$\chi = \frac{\chi'_0 + \frac{M}{M'} \chi_0}{1 + \frac{M}{M'}}, \quad \omega = \frac{\chi_0 - \chi'_0}{1 + \frac{M}{M'}}$$

par suite

$$(9) \quad \omega_1 = \frac{2 \left\{ 1 + f^2(1+k) + \frac{M}{M'} [1 + f^2(1+k')] \right\}}{[1 + f^2(1+k)](1+\epsilon) + \frac{M}{M'} [1 + f^2(1+k)](1+\epsilon')}$$

et, en se reportant aux formules (4) et (5), tous les éléments du mouvement des deux sphères à la fin du choc se trouveront déterminés.

#### VI. — DU CHOC DE DEUX BILLES POSÉES SUR UN TAPIS.

15. Il importe, dans le jeu de billard, que les billes aient le même diamètre pour que la ligne des centres, sur laquelle se trouve le point

de choc de deux d'entre elles, soit parallèle au tapis. Car, si le joueur, dans diverses parties, se servait de billes dans lesquelles les rapports seraient différents, sa tactique pourrait se trouver en défaut quelle que soit son habileté.

Malgré l'égalité des diamètres, il arrive, ce qui est peu favorable au jeu, que les masses de deux billes soient différentes, ainsi que leurs moments d'inertie par rapport à un diamètre. Coriolis, dans le titre de son Chapitre V, avait annoncé qu'il tiendrait compte de ces différences; néanmoins tous ses calculs se rapportent au choc de deux billes identiques et homogènes.

En ce qui concerne le choc des billes, Coriolis s'exprime ainsi : « En tenant compte du frottement des billes entre elles, nous pourrions tout à fait négliger celui qui se produit sur le tapis aux points d'appui des billes pendant le choc, puisque celui-ci ne peut résulter que de la composante verticale de la quantité de mouvement produite seulement par le frottement entre les billes, lequel est fort petit, d'après les expériences que nous avons rapportées précédemment. Nous négligerons aussi, à plus forte raison, la très petite vitesse verticale que les centres des billes peuvent prendre par l'effet du frottement, cet effet étant détruit par la résistance du tapis ou rendu insensible par le poids des billes qui les ramène ensuite contre le tapis qu'elles ne quittent même pas. » Ce raisonnement est très correct, mais on a le droit de s'étonner que son auteur n'en ait pas tenu compte; car, dans ses développements analytiques, il admet implicitement que les deux billes sont libres.

Le coefficient de frottement  $f$  d'une bille sur l'autre, d'après Coriolis, ne paraît pas devoir atteindre 0,03. Comme les billes sont de même nature, on peut admettre que les coefficients  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  sont égaux, mais leur valeur, qui est très petite, n'a pas été déterminée.

Nous conserverons les notations du numéro précédent, mais nous devons supposer  $R' = R$ ,  $\zeta = 0$ ,  $\zeta' = 0$  et faire abstraction des deux équations de translation verticale.

Nous avons donc les relations

$$(1) \quad v_y = \eta - \eta' + R(q + q'), \quad v_z = -R(p + p'),$$

et les équations

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \begin{cases} M \frac{dx}{dt} = -X, & M \frac{R^2}{k} \frac{dp}{dt} = \frac{v_z}{v} fX \cdot R, \\ M \frac{dx_i}{dt} = -\frac{v_y}{v} fX, & M \frac{R^2}{k} \frac{dq}{dt} = -\frac{v_y}{v} fX \cdot R. \end{cases} \\
 (2') \quad & \begin{cases} M' \frac{dx'}{dt} = X, & M' \frac{R^2}{k'} \frac{dp'}{dt} = \frac{v_z}{v'} fX \cdot R, \\ M' \frac{dx'_i}{dt} = \frac{v_y}{v'} fX, & M' \frac{R^2}{k'} \frac{dq'}{dt} = -\frac{v_y}{v'} fX \cdot R. \end{cases}
 \end{aligned}$$

De la première et de la troisième des équations (2) on déduit

$$(3) \quad \frac{dx_i}{v_y} = -\frac{R}{k} \frac{dp}{v_z}.$$

Nous allons maintenant chercher à exprimer  $v_y$  et  $v_z$  respectivement en fonction de  $\eta$  et  $p$ .

Divisons respectivement entre elles les secondes, les quatrièmes, les troisièmes des équations des groupes (2) et (2'); nous trouvons, après avoir effectué les intégrations,

$$(4) \quad \begin{cases} \eta' = \eta'_0 - \frac{M}{M'}(\eta - \eta_0), \\ Rq = Rq_0 + k(\eta - \eta_0), \\ Rq' = Rq'_0 + k' \frac{M}{M'}(\eta - \eta_0), \\ Rp' = Rp'_0 + \frac{k'}{k} \frac{M}{M'}(p - p_0); \end{cases}$$

et les formules (1) deviennent

$$(1') \quad \begin{cases} v_y = (\eta - \eta_0) \left[ 1 + k + \frac{M}{M'}(1 + k') \right] + \eta_0 - \eta'_0 + R(q_0 + q'_0), \\ v_z = -R(p - p_0) \left( 1 + \frac{Mk'}{M'k} \right) - R(p_0 + p'_0). \end{cases}$$

Soient  $v_0$  la vitesse de glissement de M sur M' au commencement du

choc,  $\gamma$  l'angle que forme sa direction avec  $Oy$ ; en posant

$$(5) \quad a = 1 + k + \frac{M}{M'}(1 + k'), \quad \frac{b}{k} = 1 + \frac{Mk'}{M'k},$$

les formules (1') prennent la forme suivante :

$$(6) \quad \begin{cases} v_y = v_0 \cos \gamma + a(\eta - \eta_0), \\ v_z = v_0 \sin \gamma - \frac{bR}{k}(p - p_0). \end{cases}$$

L'équation (3) devient alors

$$\frac{d\eta}{v_0 \cos \gamma + a(\eta - \eta_0)} = \frac{dp}{b(p - p_0) - \frac{Kv_0 \sin \gamma}{R}},$$

d'où

$$(7) \quad R(p - p_0) = \frac{Kv_0 \sin \gamma}{b} \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{a(\eta - \eta_0)}{v_0 \cos \gamma} \right]^{\frac{b}{a}} \right\}.$$

La seconde des équations (6) prend la forme

$$(8) \quad v_z = v_0 \sin \gamma \left[ 1 + a \frac{(\eta - \eta_0)}{v_0 \cos \gamma} \right]^{\frac{b}{a}},$$

et l'on a, par suite,

$$(9) \quad \frac{v_y}{v} = \frac{v_0 \cos \gamma + a(\eta - \eta_0)}{\sqrt{[v_0 \cos \gamma + a(\eta - \eta_0)]^2 + v_0^2 \sin^2 \gamma \left[ 1 + \frac{a(\eta - \eta_0)}{v_0 \cos \gamma} \right]^{\frac{2b}{a}}}}.$$

Il résulte de là que, pendant le choc, la direction du frottement n'est pas constante, comme l'avait supposé Coriolis.

Des deux premières des équations (1) on déduit

$$(10) \quad f(\chi_1 - \chi_0) = \int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{v}{v_y} d\eta;$$

d'où une relation entre  $\chi_1$  et l'inconnue  $\eta_1$  au moyen de laquelle s'expriment les autres éléments du mouvement après le choc, en vertu des équations (4) et (7) et des premières des équations (2) et (2'), après avoir effectué l'élimination de X et l'intégration. On n'aura plus ensuite qu'à établir l'équation des forces vives pour avoir la solution complète du problème; mais, en restant dans ces généralités, on voit que cette solution ne sera pas explicite, même dans le cas de deux billes identiques et homogènes, cas où l'on aurait  $\frac{b}{a} = \frac{7}{5}$ .

Cependant, comme le coefficient  $f$  est très petit, on peut en négliger le carré, par suite, la seconde puissance des variations éprouvées par les éléments du mouvement du commencement à la fin du choc, qui seraient nulles avec ce coefficient. A ce degré d'approximation, on peut supposer  $\frac{v'}{v} = \frac{1}{\cos \gamma}$  dans l'équation (10), qui donne alors

$$(11) \quad \eta_0 - \eta_1 = f\omega_1 \cos \gamma,$$

en posant

$$(12) \quad \chi_0 - \chi_1 = \omega_1.$$

Des deux premières équations des groupes (2) et (2') et des équations (4) et (7), on déduit les suivantes :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi'_0 - \chi'_1 = -\frac{M}{M'} \omega_1, \\ \eta'_0 - \eta'_1 = -f \frac{M}{M'} \omega_1 \cos \gamma, \\ Rq_0 - Rq_1 = fk \omega_1 \cos \gamma, \\ Rq'_0 - Rq'_1 = f k' \frac{M}{M'} \omega_1 \cos \gamma, \\ Rp_0 - Rp_1 = -fk \omega_1 \sin \gamma, \\ Rp'_0 - Rp'_1 = -f k' \frac{M}{M'} \omega_1 \sin \gamma. \end{array} \right.$$

Au degré d'approximation convenu, la perte de force vive éprouvée

par les billes après le choc a pour valeur

$$M \omega_1 \left\{ 2\chi_0 - \omega_1 \left( 1 + \frac{M}{M'} \right) + 2f \cos \gamma [r_0 - r'_0 + R(q_0 + q'_0) - 2f \sin \gamma R(p_0 + p'_0)] \right\}.$$

Les pertes de forces vives des deux mobiles dues aux vitesses perdues étant  $M \omega_1^2$ ,  $M \frac{M}{M'} \omega_1^2$ , on trouve, en opérant comme au numéro précédent, que l'équation des forces vives se réduit à

$$(14) \quad \omega_1 \left( 1 + \frac{M}{M'} \right) (1 + \varepsilon) = A + 2fv,$$

A étant une constante dépendant uniquement des éléments du mouvement au commencement du choc et dont il est inutile d'écrire l'expression.

On a aussi

$$(14') \quad 2\omega \left( 1 + \frac{M}{M'} \right) = A + 2fv,$$

d'où

$$\omega_1 = \frac{2\omega}{1 + \varepsilon}.$$

Nous avons trouvé plus haut (n° 12)

$$\omega = \frac{\chi_0 - \chi'_0}{1 + \frac{M}{M'}},$$

par suite

$$(15) \quad \omega_1 = \frac{2(\chi_0 - \chi'_0)}{1 + \frac{M}{M'}}.$$

Les formules (11), (12), (13) feront connaître dès lors tous les éléments du mouvement après le choc.

Dans la pratique du jeu de billard, la masse  $M'$  est en repos avant le

choc, et l'on devra dans ce cas supprimer toutes les lettres affectées en même temps d'un accent et de l'indice o.

#### VII. — DE L'EFFET D'UN COUP DE QUEUE SUR UNE BILLE.

14. Nous admettrons que, lorsque le choc commence, le joueur n'exerce aucune pression sur la queue (ce que font d'ailleurs en général les joueurs d'un certain ordre), que le coup de queue est donné de telle manière qu'il ne se produise pas de percussion sur les mains qui servent de guides au mouvement, et que l'angle aigu formé par l'axe de la queue avec la normale au point de choc soit intérieur à l'angle de frottement (<sup>1</sup>). De la dernière de ces conditions résulte que l'action mutuelle tangentielle au point de choc est inférieure au frottement de glissement; s'il n'en était pas ainsi, la queue glisserait sur la bille, ou l'on ferait *fausse queue*, et l'on ne peut tirer aucun parti sérieux des coups de cette nature.

Lorsque la queue est inclinée sur le tapis, comme nous le supposons pour plus de généralité, il se produit simultanément deux chocs, l'un de la queue sur la bille, l'autre de la bille sur le tapis. Nous admettrons avec Coriolis que la vitesse normale que pourrait prendre la bille par suite de l'élasticité du tapis est assez petite pour qu'on puisse en faire abstraction, ce qui a réellement lieu pour les coups ordinaires et lorsque la queue n'est pas trop inclinée sur le tapis. Nous n'aurons pas ainsi à tenir compte de l'équation du mouvement de translation vertical de la bille.

Soient

$M'$  la masse de la queue, et  $i$  l'inclinaison de son axe sur le tapis;

$M$  la masse de la bille;

$\mu$  le rapport  $\frac{M'}{M}$  qui diffère généralement peu de trois unités;

---

(<sup>1</sup>) Selon la manière dont le *procédé* (tampon en peau de buffle, ayant à peu près la forme d'une calotte sphérique, ajouté au bout de la queue) est plus ou moins bien enduit de matière crayeuse, le coefficient de ce frottement varie entre 0,50 et 0,20, ce qui correspond aux angles de frottement de 26°34' et 11°20'.

$f$  le coefficient de frottement de la bille sur le tapis (1);

$Cz, Cx$  la verticale du centre  $I$  de la bille et l'horizontale de ce point, compris dans le plan vertical mené par  $Cz$  parallèlement à la direction de l'axe de la queue;

$a, b, c$  les coordonnées du point de choc parallèles à  $Cx, Cy, Cz$ .

Soient de plus, à un instant quelconque du choc,

$V'$  la vitesse de la queue;

$v_x, v_y$  les composantes parallèles à  $Cx, Cy$  de la vitesse de glissement  $v$  de la bille sur le tapis;

$F$  l'action exercée par la queue sur la bille, la pression sur le tapis étant par suite  $F \sin i$ .

En dehors de ces nouvelles notations, nous conserverons celles dont nous avons fait usage dans ce qui précède.

Nous avons les relations

$$(1) \quad v_x = \chi - pR, \quad v_y = \eta + nR,$$

et les équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} M' \frac{dV'}{dt} = -F, \\ M \frac{d\eta}{dt} = F \left( \cos i - f \frac{v_x}{v} \cos i \right), \\ M \frac{d\eta}{dt} = -f \frac{v_y}{v} F \sin i, \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dv}{dt} = -F \left( b + f \frac{v_y}{v} R \right) \sin i, \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dp}{dt} = F \left( c \cos i + f \frac{v_x}{v} R \sin i \right), \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dq}{dt} = -b F \cos i. \end{array} \right.$$

(1) Nous avons vu que ce coefficient pouvait être pris égal à 0, 25.

ou

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\chi = -\mu \left( \cos i - f \frac{v'_x}{v} \sin i \right) . dV', \\ d\eta = \mu f \frac{v'_y}{v} \sin i . dV', \\ \frac{R^2}{k} dn = \mu \left( b + f \frac{v'_y}{v} R \right) \sin i . dV', \\ \frac{R^2}{k} dp = \mu \left( c \cos i + f \frac{v'_x}{v} R \sin i \right) . dV', \\ \frac{R^2}{k} dq = \mu b \cos i . dV'. \end{array} \right.$$

En désignant par  $\gamma$  l'angle que forme la vitesse de glissement  $v$  avec  $Cx$ , nous avons

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = \chi - pR = v \cos \gamma, \quad v_y = \eta + nR = v \sin \gamma, \\ \eta + nR = (\chi - pR) \operatorname{tang} \gamma. \end{array} \right.$$

Nous allons essayer de voir si, en supposant l'angle  $\gamma$  constant, on peut satisfaire aux équations (3). Substituons, à cet effet, dans la relation

$$d\eta + Rdn = (d\chi - Rdp) \operatorname{tang} \gamma,$$

les valeurs des différentielles qu'elle renferme et qui sont données par les équations ci-dessus; nous trouvons

$$(5) \quad \operatorname{tang} \gamma = \frac{kb \operatorname{tang} i}{kc - R};$$

l'angle  $\gamma$  est ainsi constant, comme nous l'avons supposé.

Les équations (3) s'intègrent alors immédiatement et, en posant,

$$(6) \quad \omega_1 = V'_0 - V'_1,$$

elles donnent

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_1 = \mu (\cos i - f \cos \gamma \sin i) \omega_1, \\ \eta_1 = -\mu f \sin \gamma \sin i . \omega_1, \\ \frac{R^2 n_1}{k} = -\mu (b + fR \cos \gamma \sin i) \omega_1, \\ \frac{R^2 p_1}{k} = \mu (c \cos i + fR \cos \gamma \sin i) \omega_1, \\ \frac{R^2 q_1}{k} = -\mu b \cos i . \omega_1. \end{array} \right.$$

La force vive totale perdue après le choc a pour expression

$$(a) \quad M' \omega_1 (2V'_0 - A \omega_1),$$

en posant

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= 1 + \mu \left\{ (\cos i - f \cos \gamma \sin i)^2 + f^2 \sin^2 \gamma \sin^2 i \right. \\ &\quad \left. + \frac{k^2}{R} [(b + fR)^2 \sin^2 i + (c \cos i + R \cos \gamma \sin i)^2 + b^2 \cos^2 i] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Les forces vives dues aux vitesses perdues de la bille et de la queue, multipliées par les coefficients de rendement  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ , ont respectivement pour valeurs

$$(b) \quad \varepsilon M' (A - 1) \omega_1^2,$$

$$(c) \quad \varepsilon' M' \omega_1^2 (1).$$

Désignons par  $\psi$  l'angle formé par  $F$  avec sa projection sur le plan tangent au point du choc; par  $\omega$  la vitesse de glissement, à l'instant de la plus grande compression, de la bille sur la queue estimée suivant cette projection, et par  $\omega'$  la vitesse de glissement, au même instant de la bille sur le tapis. Nous avons, eu égard à la première des formules (2),

$$(d) \quad \left\{ \begin{aligned} -2\omega \int F \cos \psi dt &= 2M' \cos \psi \omega_1, \\ 2\omega' \int f F \sin i dt &= -2\omega' M' f \sin i \omega_1. \end{aligned} \right.$$

La quantité (a) devant être égale à la somme des expressions (b), (c), (d), il vient

$$(9) \quad 2V'_0 - [A + \varepsilon(A - 1) + \varepsilon'] \omega_1 = 2\omega \cos \psi - 2\omega' f \sin i.$$

Supprimons l'indice 1 pour caractériser les éléments du mouvement

(1) On a vu au n° 5 que l'on pouvait prendre  $\varepsilon = 0$  et  $\varepsilon' = \frac{1}{14} = 0,27$ .

qui se rapportent à l'instant de la plus grande compression pour lequel nous devons prendre  $\varepsilon = \varepsilon' = 1$ , nous aurons aussi

$$(9') \quad 2V'_0 - 2A\omega = 2w \cos \psi - 2w'f \sin i,$$

d'où

$$(10) \quad \omega = \frac{2A\omega}{A + (A-1)\varepsilon + \varepsilon'}$$

Soit  $\varphi$  l'angle formé par l'axe de la queue avec la normale au point de choc; on a

$$(11) \quad \cos \varphi = - \frac{(a \cos i + c \sin i)}{R},$$

et, en exprimant que, à l'instant ci-dessus, les composantes normales des vitesses de la bille et de la queue au point de choc sont égales,

$$V' \cos \varphi = - \left( \chi \frac{a}{R} + \eta \frac{b}{R} \right),$$

ou, en vertu des deux premières équations du groupe (7) et de l'équation (6),

$$(V'_0 - \omega) \cos \varphi = - \mu [(\cos i - f \cos \gamma \sin i)a - fb \sin \gamma \sin i] \frac{\omega}{R},$$

d'où

$$(12) \quad \omega = \frac{V'_0 \cos \varphi}{\cos \varphi + \frac{\mu}{R} [bf \sin \gamma \sin i - a(\cos i - f \cos \gamma \sin i)]},$$

valeur que l'on devra substituer dans l'équation (10), et les équations (6) et (7) feront connaître par la suite tous les éléments du mouvement après le choc.

Nous ferons remarquer, en terminant, que, d'après la première des équations du groupe (7), le mouvement du centre de la bille parallèle

à  $Cx$  sera direct ou rétrograde selon que l'on aura

$$\cos \gamma \lesseqgtr f \cos i,$$

et il est clair que la seconde de ces circonstances ne pourra se présenter que lorsque la queue sera assez fortement inclinée sur le tapis, ce qui est conforme à l'observation.