JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

APPELL

Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 9 (1883), p. 5-24.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce (¹);

PAR M. APPELL.

1. Soit

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une courbe algébrique d'ordre m et de genre p; on peut toujours supposer, comme il est connu, que cette équation contient un terme en y^m, et que le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers m valeurs distinctes quand x croît indéfiniment.

Les fonctions que je considère dans ce Mémoire, comme analogues des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, sont des

(¹) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances du 18 avril 1881 et du 23 octobre 1882.

fonctions du point analytique (x, y) qui n'ont sur toute la sphère que des pôles et des points critiques algébriques, à savoir les points critiques de la fonction y de x; de plus, ces fonctions se reproduisent, multipliées par un facteur constant, quand le point (x, y) décrit un cycle quelconque. Je me propose de démontrer ici quelques-unes des propriétés fondamentales de ces fonctions et, en particulier, d'indiquer un mode de décomposition en éléments simples analogue à celui que M. Hermite a donné pour les fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

2. Nous dirons avec Riemann (*Werke, Theorie der Abelschen Functionen*, p. 96, § 2) qu'une fonction du point analytique (x, y) qui s'annule en un point (ξ, η) est, dans le voisinage de ce point, infiniment petite du premier ordre :

1° Si le point (ξ, η) est un point ordinaire de $F = 0$, lorsque cette fonction devient infiniment petite, comme $(x - \xi)$;

2° Si le point (ξ, η) est un point critique dans le voisinage duquel y appartient à un système circulaire de r racines, lorsque cette fonction devient infiniment petite, comme $(x - \xi)^{\frac{1}{r}}$.

Une fonction est dite *infiniment petite d'ordre n en un point*, lorsqu'elle devient en ce point infiniment petite, comme la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une fonction infiniment petite du premier ordre.

Enfin une fonction est dite *infinie d'ordre n en un point* lorsque son inverse est infiniment petite d'ordre n.

Dans ces définitions $x - \xi$ doit être remplacé par $\frac{1}{x}$ quand $\xi = \infty$.

3. Désignons par

$$u^{(1)}(x, y),\ u^{(2)}(x, y),\ \ldots,\ u^{(p)}(x, y)$$

les intégrales abéliennes normales de première espèce relatives à la courbe $F = 0$, et par

$$\begin{array}{llllll} \Omega_1^{(i)} = 0, & \Omega_3^{(i)} = 0, & \ldots, & \Omega_{2i-1}^{(i)} = 2\pi\sqrt{-1}, & \ldots, & \Omega_{2p-1}^{(i)} = 0, \\ \Omega_2^{(i)} = 2\alpha_{i1}, & \Omega_4^{(i)} = 2\alpha_{i2}, & \ldots, & \Omega_{2i}^{(i)} = 2\alpha_{ii}, & \ldots, & \Omega_{2p}^{(i)} = 2\alpha_{ip} \end{array}$$

les $2p$ périodes normales de l'intégrale $u^{(i)}(x, y)$. Lorsque le point (x, y) décrit le cycle correspondant à la période $\Omega_k^{(i)}$, l'une des fonctions $\Phi(x, y)$ que nous considérons se reproduit multipliée par un *facteur* ou *multiplicateur* $\mu_k(k = 1, 2, \ldots, 2p)$. Il y a donc $2p$ multiplicateurs μ_k correspondant respectivement aux $2p$ cycles qui donnent les périodes normales.

Soit $\Theta(u_i)$ la fonction Θ de p variables formée avec les périodes normales (Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 114). On a déjà une première expression de la fonction $\Phi(x, y)$ en prenant

$$(2) \qquad \Phi(x, y) = e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)} \frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - k_i - g_i]}{\Theta[u^{(i)}(x, y) - k_i]} \mathrm{R}(x, y),$$

$\mathrm{R}(x, y)$ désignant une fonction rationnelle de x et y, λ_i, g_i et k_i des constantes. Les p constantes k_i sont arbitraires; les $2p$ constantes λ_i et g_i sont déterminées par les équations suivantes, qui expriment que la fonction Φ possède $2p$ multiplicateurs donnés μ_k:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu_{2i-1} &= e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_i} \\ \mu_{2i} &= e^{2(\lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i} + \ldots + \lambda_p a_{pi}) + g_i} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots p).$$

Ces équations donnent toujours un système de valeurs pour ces constantes; les λ_i sont déterminés à des entiers près et les g_i à des multiples près de périodes conjuguées.

Cette forme (2) est analogue à la forme

$$e^{\lambda u} \frac{\mathrm{H}(u - k - g)}{\mathrm{H}(u - k)} \varphi(u),$$

sous laquelle peut se mettre une fonction doublement périodique de seconde espèce, $\varphi(u)$ désignant une fonction doublement périodique et λ, k, g des constantes.

4. Soient maintenant

$$(\xi, \eta), \ (x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ \ldots, \ (x_{p-1}, y_{p-1})$$

p points de la courbe $F = 0$. On sait que la fonction

$$\Theta\left[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) + C_i\right]$$

devient en chacun de ces p points infiniment petite du premier ordre (Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 145). Si l'on fait, pour simplifier,

$$(4) \qquad h_i = C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k),$$

la fonction

$$(5) \qquad \begin{bmatrix} \xi', \eta' \\ \xi, \eta \end{bmatrix} = \frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi', \eta') + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}$$

devient infiniment petite du premier ordre au seul point (ξ', η') et infinie du premier ordre au seul point (ξ, η).

On voit facilement que toute fonction $\Phi(x, y)$ de l'espèce de celles que nous considérons peut se mettre sous la forme

$$(6) \qquad \Phi(x, y) = A \prod_{k=1}^{k=n} \begin{bmatrix} \xi'_k, \eta'_k \\ \xi_k, \eta_k \end{bmatrix} e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)},$$

où les zéros et les infinis de la fonction sont en évidence. Cette forme (6) est analogue à la forme

$$A e^{\lambda u} \prod_{k=1}^{k=n} \frac{H(u - a'_k)}{H(u - a_k)}$$

des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

5. Occupons-nous maintenant de la décomposition de la fonction $\Phi(x, y)$ en éléments simples, et *écartons* d'abord le cas *exceptionnel* où, dans la forme (2), les constantes g_i seraient nulles à des multiples près de périodes conjuguées, c'est-à-dire où les $2p$ multiplicateurs μ_k

sont de la forme

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mu_{2i-1} = e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_i} \\ \mu_{2i} \;\;\; = e^{2(\lambda_1\alpha_{1i}+\lambda_2\alpha_{2i}+\ldots+\lambda_p\alpha_{pi})} \end{array}\right\} \quad (i=1, 2, \ldots, p).$$

Ce cas exceptionnel est analogue à celui qui se présente déjà pour les fonctions doublement périodiques de seconde espèce et qui a été signalé d'abord par M. Fuchs (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3^e^ série, t. IV, p. 132, § 6) et étudié d'une façon plus approfondie par M. Mittag-Leffler (*Comptes rendus*, t. XC, p. 177).

Ce cas étant pour le moment écarté, l'élément de la décomposition est la fonction

$$(8)\quad \mathfrak{F}(x, y; \xi, \eta) = \mathrm{K} e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x,y)} \frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i - g_i]}{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]},$$

où les constantes λ_i et g_i sont déterminées par les équations (3) et où h_i désigne la quantité (4). Cette fonction $\mathfrak{F}$ admet les mêmes multiplicateurs que la fonction Φ à décomposer; elle devient infinie du premier ordre au plus aux p points

$$(\xi, \eta),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_{p-1}, y_{p-1}).$$

De ces p points, je considère les $(p-1)$ derniers

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_{p-1}, y_{p-1})$$

comme ***entièrement arbitraires***, le premier seul (ξ, η) devant recevoir par la suite des valeurs numériques déterminées.

Il importe tout d'abord de montrer que, dans ces conditions, le numérateur de $\mathfrak{F}$ ne peut pas admettre le zéro (ξ, η) et que, par conséquent, cette fonction devient effectivement infinie au point (ξ, η). On démontre cette proposition en remarquant que, si le numérateur de $\mathfrak{F}$ s'annulait pour $(x, y) = (\xi, \eta)$, on aurait

$$h_i - g_i \equiv \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k, y'_k) - \mathrm{C}_i \quad (i = 1, \ldots, p),$$

les $(p-1)$ points (x'_k, y'_k) étant convenablement choisis. Or, en remplaçant h_i par sa valeur (4), on obtient ainsi les p équations

$$(9)\qquad \sum_{k=1}^{k=p-1} [u^{(i)}(x'_k, y'_k) + u^{(i)}(x_k, y_k)] = 2C_i - g_i \quad (i = 1, 2, \ldots p).$$

Mais, comme les $(p-1)$ points (x_k, y_k) sont *arbitraires*, ces relations (9) ne peuvent avoir lieu que si les g_i sont nulles à des multiples près des périodes; car, autrement, ces relations détermineraient un des points (x_k, y_h) en fonction des $(p-2)$ autres, ce qui est absurde. On aurait, par exemple,

$$u^{(i)}(x_1, y_1) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k, y'_k) = 2C_i - g_i - \sum_{k=2}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k),$$

équations qui déterminent les p points

$$(x_1, y_1),\ (x'_1, y'_1),\ \ldots,\ (x'_{p-1}, y'_{p-1}),$$

à moins que les seconds membres n'aient une forme particulière pour laquelle il y a indétermination, et cette forme particulière exige précisément

$$g_i = 0$$

(*voir* BRIOT, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 96, § 56). Or, ce cas de $g_i = 0$ est le cas exceptionnel que nous avons écarté.

La constante K, qui figure dans l'expression (8) de $\mathfrak{F}$, se détermine par les considérations suivantes. Supposant d'abord que le point (ξ, η) est un point ordinaire de la courbe $F = 0$, on détermine K de façon que l'une des déterminations de $\mathfrak{F}(x, y; \xi, \eta)$, obtenue en faisant arriver le point (x, y) dans le voisinage de (ξ, η), suivant un chemin déterminé, soit de la forme

$$(10)\qquad \frac{1}{x-\xi} + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu (x-\xi)^\nu,$$

les a_ν étant indépendants de x. Si, au contraire, le point (ξ, η) coïncide avec un point critique dans le voisinage duquel y appartient à un système circulaire de r racines, on détermine K, de façon que l'une des déterminations de $\mathcal{F}$ soit, dans le voisinage du point (ξ, η), de la forme

$$(11) \qquad \frac{1}{(x-\xi)^{\frac{1}{r}}} + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu (x-\xi)^{\frac{\nu}{r}}.$$

Cela posé, supposons que la fonction $\Phi(x,y)$ à décomposer ait n infinis simples

$$(\xi_1, \eta_1), \quad (\xi_2, \eta_2), \quad \ldots, \quad (\xi_n, \eta_n),$$

et appelons A_i le coefficient de $\frac{1}{x-\xi_i}$, ou de $\frac{1}{(x-\xi_i)^{\frac{1}{r}}}$ dans le développement d'une des déterminations de Φ dans le voisinage du point (ξ_i, η_i), cette détermination étant précisément celle que l'on obtient en faisant suivre au point (x, y) le chemin qui fournit en (ξ_i, η_i) la détermination (10) ou (11) de $\mathcal{F}(x, y; \xi_i, \eta_i)$. On a alors la formule suivante :

$$(12) \qquad \Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \mathcal{F}(x, y; \xi_i, \eta_i).$$

Lorsque q des points (ξ_i, η_i) coïncident en un point qui devient un infini d'ordre q, les q termes correspondants dans cette formule (12) doivent être remplacés par l'un d'eux et ses $(q-1)$ premières dérivées par rapport au paramètre (ξ, η).

6. Pour démontrer la formule (12), je remarque que la fonction

$$\Psi(x,y) = \Phi(x,y) - \sum_{i=1}^{i=n} A_i \mathcal{F}(x, y; \xi_i, \eta_i)$$

est une fonction admettant les $2p$ multiplicateurs donnés μ_k de $\Phi(x, y)$ et ne devenant plus infinie en aucun des points $(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$. Mais cette fonction devient infinie du premier ordre au plus aux $p-1$ points arbitraires

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_{p-1}, y_{p-1})$$

qui figurent dans la fonction $\mathfrak{F}(x, y; \xi, \eta)$. Je vais montrer que $\Psi(x, y)$ est identiquement nulle.

Supposons, en effet, que $\Psi(x, y)$ devienne effectivement infinie du premier ordre en p' des $p-1$ points (x_k, y_k), par exemple aux points

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_{p'}, y_{p'})$$

où

$$p' \leq p-1.$$

Cette fonction Ψ pourra, d'après (6), se mettre sous la forme

$$\Psi(x, y) = \mathrm{C}e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)} \prod_{k=1}^{k=p'} \begin{bmatrix} x'_k, y'_k \\ x_k, y_k \end{bmatrix},$$

les p' points (x'_k, y'_k) étant convenablement choisis. Cette fonction Ψ admet les $2p$ multiplicateurs donnés μ_k, quels que soient les p' points (x_k, y_k) $(k = 1, 2, \ldots, p')$.

On a d'abord, en prenant les cycles qui donnent des multiplicateurs à indices impairs,

$$\mu_{2i-1} = e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

équations qui déterminent les λ_i; puis, pour les cycles qui donnent des multiplicateurs à indices pairs,

$$\mu_{2i} = e^{2\sum\limits_{k=1}^{k=p} \lambda_k a_{ik} + \sum\limits_{k=1}^{k=p'} [u^{(i)}(x'_k, y'_k) - u^{(i)}(x_k, y_k)]},$$

d'où

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{k=p'} [u^{(i)}(x'_k, y'_k) - u^{(i)}(x_k, y_k)] \equiv \log\mu_{2i} - 2\sum_{k=1}^{k=p} \lambda_k a_{ik}.$$

On a ainsi p équations, telles que (13), dans lesquelles les seconds membres sont donnés à des multiples près des périodes, les premiers membres contenant p' points (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, $(x_{p'}, y_{p'})$ entièrement arbitraires. Je vais montrer qu'il est impossible, dans ces conditions, de satisfaire aux équations (13) en déterminant convenablement les points (x'_k, y'_k), $(k = 1, 2, \ldots, p')$, sauf dans le cas exceptionnel que nous avons écarté [5, éq. (7)].

En effet, soit $\int \frac{Q(x, y)}{F_y(x, y)} dx$ l'intégrale abélienne la plus générale de première espèce; faisons passer la courbe $Q(x, y) = 0$ par les p' points (x'_k, y'_k) et par $(p - 1 - p')$ points arbitraires $(x_{p'+1}, y_{p'+1}), (x_{p'+2}, y_{p'+2}), \ldots, (x_{p-1}, y_{p-1})$. Cette courbe $Q = 0$ coupera $F = 0$ en $(p - 1)$ autres points (x''_k, y''_k) tels que

$$\sum_{k=1}^{k=p'} u^{(i)}(x'_k, y'_k) + \sum_{k=p'+1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x''_k, y''_k) \equiv 2C_i.$$

Tirant de là $\sum_{k=1}^{k=p'} u^{(i)}(x'_k, y'_k)$ pour le porter dans les équations (13), ces équations deviennent

$$(13') \qquad \sum_{k=1}^{k=p-1} [u^{(i)}(x''_k, y''_k) + u^{(i)}(x_k, y_k)] \equiv 2C_i - g_i,$$

où les $(p - 1)$ points

$$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ \ldots, \ (x_{p-1}, y_{p-1})$$

sont entièrement arbitraires. Or ces équations (13′) sont justement de la forme (9) que nous avons démontrée être impossible, sauf dans le cas exceptionnel $g_i \equiv 0$.

Cette fonction $\Psi(x, y)$ ne peut donc être que zéro identiquement, et la formule (12) se trouve démontrée. Je donne plus loin (9) une seconde démonstration de la formule (12).

7. Je m'occupe maintenant du cas particulier, déjà signalé précédemment, où les $2p$ multiplicateurs ont la forme (7). On pourrait déduire ce cas du précédent comme cas limite, mais il est bien plus simple d'employer la méthode suivante, qui s'applique facilement aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

Lorsque les multiplicateurs de la fonction Φ à décomposer ont cette forme (7), cette fonction peut se mettre sous la forme

$$(14) \qquad \Phi(x, y) = e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)} R(x, y),$$

$R(x, y)$ étant une fonction rationnelle. Cette fonction rationnelle R peut être décomposée en éléments simples par la formule suivante, de Roch, indiquée par M. Lindemann dans une lettre à M. Hermite *Journal de Crelle*, t. 84, p. 294),

$$(15)\qquad R = R_0 + A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + \ldots + A_n Z_n;$$

Z_i étant l'intégrale abélienne normale de seconde espèce, dont le pôle se trouve au point (ξ_i, η_i), et les résidus A_i de la fonction rationnelle $R(x, y)$ satisfaisant aux relations

$$(16)\qquad A_1 \psi_i(\xi_1, \eta_1) + A_2 \psi_i(\xi_2, \eta_2) + \ldots + A_n \psi_i(\xi_n, \eta_n) = 0,$$

où

$$\psi_i(x, y) = \frac{du^{(i)}(x, y)}{dx}, \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces p équations (16) doivent d'ailleurs être modifiées lorsque certains des points (ξ_k, η_k) sont des points critiques de $F = 0$.

Multipliant alors les deux membres de la formule (15) par

$$e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)},$$

et faisant, pour simplifier,

$$(17)\qquad e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)} Z_i = H_i,$$

on a la formule

$$(18)\qquad \Phi(x, y) = R_0 e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)} + \sum_{k=1}^{k=n} A_k H_k.$$

L'élément de décomposition est ici la fonction H_k, définie par l'équation (17).

Cette formule (18) comprend, comme cas particulier, celle qui a été donnée par M. Mittag-Leffler.

8. De même que M. Hermite a déduit de la formule de décomposition des fonctions doublement périodiques de seconde espèce celle des fonctions doublement périodiques ordinaires (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXV, p. 694), on peut déduire de la formule générale (12) la formule de décomposition (15) relative aux fonctions rationnelles. Il faut, pour cela, supposer que tous les multiplicateurs deviennent égaux à l'unité.

A cet effet, supposons d'abord que les multiplicateurs à indices impairs μ_{2i-1} deviennent égaux à l'unité. La formule (12) continue à subsister; les constantes λ_i sont toutes nulles. L'élément de décomposition est alors

$$(19) \qquad \mathfrak{F}(x, y; \xi, \eta) = \mathrm{K}\frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i - g_i]}{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}.$$

Pour simplifier l'écriture, désignons par $\Theta_k(u_i)$ la dérivée partielle $\frac{\partial\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_p)}{\partial u_k}$, et par $\mathrm{S}(u_k)$ la somme $\sum_{k=1}^{k=p} u_k$; puis posons

$$u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i = v_i,$$

et imaginons que le point (ξ, η) soit un point ordinaire de la courbe $\mathrm{F} = 0$. Alors la constante K de la formule (19) est donnée par

$$(20) \qquad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{S}[\psi_k(\xi, \eta)\Theta_k(h_i)]}{\Theta(h_i - g_i)}.$$

Les constantes g_i devant tendre vers zéro, faisons

$$g_i = \rho_i t \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les ρ_i étant des constantes et t une variable infiniment petite.

On a, par la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} \Theta(v_i - g_i) &= \Theta(v_i) - t\mathrm{S}[\rho_k\Theta_k(v_i)] + t^2\Theta', \\ \Theta(h_i - g_i) &= \qquad\quad - t\mathrm{S}[\rho_k\Theta_k(h_i)] + t^2\Theta'', \end{aligned}$$

car $\Theta(h_i) = 0$. On en déduit

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{t}\frac{\mathrm{S}[\psi_k(\xi, \eta)\Theta_k(h_i)]}{\mathrm{S}[\rho_k\Theta_k(h_i)]} + \mathrm{K}' + \mathrm{K}''t,$$

$$\frac{\Theta(v_i - g_i)}{\Theta(v_i)} = 1 - t\frac{\mathrm{S}[\rho_k\Theta_k(v_i)]}{\Theta(v_i)} + t^2\frac{\Theta'}{\Theta(v_i)},$$

et, par suite,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{F}(x,y;\xi,\eta) = & -\frac{1}{t}\,\frac{\mathrm{S}[\psi_k(\xi,\eta)\theta_k(h_i)]}{\mathrm{S}[\rho_k\theta_k(h_i)]} \\ & + \frac{\mathrm{S}[\psi_k(\xi,\eta)\theta_k(h_i)]}{\mathrm{S}[\rho_k\theta_k(h_i)]}\,\frac{\mathrm{S}[\rho_k\theta_k(v_i)]}{\theta(v_i)} + \mathrm{K}' + \mathrm{Q}t, \end{aligned}\right.$$

où K′ ne dépend pas de (x, y).

Il faut maintenant transformer encore cette expression de

$$\mathcal{F}(x, y; \xi, \eta).$$

Employons les notations suivantes (¹) :

$$\mathcal{G}(\xi,\eta) = -\frac{d\log\theta(v_i)}{d\xi} = \frac{\mathrm{S}[\theta_k(v_i)\psi_k(\xi,\eta)]}{\theta(v_i)},$$

$$\mathcal{G}(x_i, y_i) = -\frac{d\log\theta(v_i)}{dx_i} = \frac{\mathrm{S}[\theta_k(v_i)\psi_k(x_i,y_i)]}{\theta(v_i)}.$$

On a, par suite,

$$(22)\quad \frac{\mathrm{S}[\rho_k\theta_k(v_i)]}{\theta(v_i)} = \alpha\mathcal{G}(\xi,\eta) + \alpha_1\mathcal{G}(x_1,y_1) + \ldots + \alpha_{p-1}\mathcal{G}(x_{p-1},y_{p-1}),$$

les constantes $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ étant déterminées par les p équations du premier degré

$$(23)\qquad \alpha\psi_i(\xi,\eta) + \sum_{k=1}^{k=p-1}\alpha_k\psi_i(x_k,y_k) = \rho_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Si l'on fait

$$\Delta = \begin{vmatrix} \psi_1(\xi,\eta) & \psi_1(x_1,y_1) & \ldots & \psi_1(x_{p-1},y_{p-1}) \\ \psi_2(\xi,\eta) & \psi_2(x_1,y_1) & \ldots & \psi_2(x_{p-1},y_{p-1}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \psi_p(\xi,\eta) & \psi_p(x_1,y_1) & \ldots & \psi_p(x_{p-1},y_{p-1}) \end{vmatrix},$$

on tire des équations (23) des valeurs de la forme

$$(23')\qquad \alpha = \frac{\beta}{\Delta},\quad \alpha_1 = \frac{\beta_1}{\Delta},\quad \ldots,\quad \alpha_{p-1} = \frac{\beta_{p-1}}{\Delta},$$

où β *ne dépend pas de* (ξ, η), $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1}$ étant au contraire des

---

(¹) L'intégrale abélienne normale de seconde espèce $\mathrm{Z}(\xi,\eta)$, qui a un pôle au point (ξ,η), est égale à $\mathcal{G}(\xi,\eta) - \mathcal{G}_0(\xi,\eta)$, où $\mathcal{G}_0(\xi,\eta)$ désigne ce que devient $\mathcal{G}(\xi,\eta)$ quand on y remplace (x, y) par (x_0, y_0).

fonctions linéaires homogènes de $\psi_1(\xi,\eta)$, $\psi_2(\xi,\eta)$, ..., $\psi_p(\xi,\eta)$,

$$(24)\quad \beta_i = a_{i1}\psi_1(\xi,\eta) + a_{i2}\psi_2(\xi,\eta) + \ldots + a_{ip}\psi_p(\xi,\eta) \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Dans la formule (21), remplaçons $\frac{S[\rho_k\theta_k(v_i)]}{\theta(v_i)}$ par l'expression (22); on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x,y;\xi,\eta) = &-\frac{1}{t}\frac{S[\psi_k(\xi,\eta)\theta_k(h_i)]}{S[\rho_k\theta_k(h_i)]}\\ &+\frac{S[\psi_k(\xi,\eta)\theta_k(h_i)]}{S[\rho_k\theta_k(h_i)]}\left[\alpha\mathcal{G}(\xi,\eta)+\sum_{k=1}^{k=p-1}\alpha_k\mathcal{G}(x_k,y_k)\right]+\mathrm{K}'+\mathrm{Q}t.\end{aligned}$$

Comme le résidu de $\mathcal{F}$, par rapport à l'infini (ξ,η), est l'unité, et que celui de $\mathcal{G}(\xi,\eta)$ est aussi l'unité, on a

$$(25)\qquad \alpha\frac{S[\psi_k(\xi,\eta)\theta_k(h_i)]}{S[\rho_k\theta_k(h_i)]} = 1.$$

Alors, d'après (23'), on peut écrire

$$\alpha_i = \frac{\beta_i}{\Delta} = \frac{\beta_i}{\beta}\alpha = \frac{\beta_i}{\beta}\frac{S[\rho_k\theta_k(h_i)]}{S[\psi_k(\xi,\eta)\theta_k(h_i)]},$$

et alors l'expression de $\mathcal{F}(x,y;\xi,\eta)$ devient

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}\mathcal{F}(x,y;\xi,\eta) = &-\frac{1}{t}\frac{S[\psi_k(\xi,\eta)\theta_k(h_i)]}{S[\rho_k\theta_k(h_i)]}\\ &+\mathcal{G}(\xi,\eta)+\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{i=p-1}\beta_i\mathcal{G}(x_i,y_i)+\mathrm{K}'+\mathrm{Q}t.\end{aligned}\right.$$

Cela posé, prenons la formule de décomposition (12), et remplaçons-y les différents termes $\mathcal{F}(x,y;\xi_k,\eta_k)$ par l'expression précédente (26); les résidus A_k de la fonction Φ doivent être considérés comme fonctions de t,

$$(27)\qquad \mathrm{A}_k = \mathcal{A}_k + \mathcal{A}'_k t + \ldots.$$

Les premiers termes $\mathcal{A}_k$ de ces développements sont les résidus de la fonction rationnelle $\mathrm{R}(x,y)$, vers laquelle tend $\Phi(x,y)$ quand t tend vers zéro. Ces résidus $\mathcal{A}_k$ satisfont donc aux p conditions

$$(28)\qquad \sum_{k=1}^{k=n}\mathcal{A}_k\psi_i(\xi_k,\eta_k) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

On voit alors que, dans la nouvelle forme que prend la formule (12), le coefficient de $\frac{1}{t}$ est nul, en vertu des équations (28), ainsi que les coefficients de $\mathcal{G}(x_i, y_i)$, car on a

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\beta_i)_k \mathcal{A}_k = 0,$$

$(\beta_i)_k$ désignant l'expression (24) de β_i, où l'on a remplacé (ξ, η) par (ξ_k, η_k). On a, par suite,

$$\Phi(x, y) = \text{const.} + \sum_{k=1}^{k=n} \mathcal{A}_k \mathcal{G}(\xi_k, \eta_k) + \mathrm{B}t;$$

en faisant $t = 0$ et se reportant à la note de la page 16, on trouve bien la formule de Roch.

9. La formule fondamentale (12) peut encore s'obtenir de la façon suivante. Soit $\Phi(x, y)$ la fonction à décomposer, et faisons

$$(29)\quad \mathrm{T}(\xi, \eta) = \mathrm{C} e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} \lambda_i [u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta)]} \frac{\theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i - g_i]}{\theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}.$$

Cette fonction T, considérée comme fonction de (ξ, η), a p infinis

$$(x, y),\ (x'_1, y'_1),\ \ldots,\ (x'_{p-1}, y'_{p-1})$$

les $(p-1)$ points (x'_k, y'_k) étant les $(p-1)$ points où la courbe

$$\mathrm{Q}(x, y) = 0,$$

qui passe par les points $(x_1, y_1), \ldots, (x_{p-1}, y_{p-1})$ coupe la courbe $\mathrm{F} = 0$. Déterminons C de façon que le résidu de T relatif à l'infini (x, y) soit égal à -1,

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{S}[\theta_k(h_i)\psi_k(x, y)]}{\theta(h_i - g_i)}.$$

On remarque de plus que $\mathrm{T}(\xi, \eta)$, considéré comme fonction de (ξ, η), admet les multiplicateurs inverses de $\Phi(\xi, \eta)$. Le produit

$$\Phi(\xi, \eta)\,\mathrm{T}(\xi, \eta)$$

est donc une fonction *rationnelle* de (ξ, η), devenant infinie aux n points

(ξ_k, η_k) qui sont les infinis de Φ, et aux p points (x, y), (x'_1, y'_1), ..., (x'_{p-1}, y'_{p-1}), qui sont les infinis de T. Or les résidus de cette fonction rationnelle sont, pour les points (ξ_k, η_k),

$$A_k T(\xi_k, \eta_k),$$

A_k étant le résidu de Φ; pour le point (x, y),

$$-\Phi(x, y),$$

et pour les $(p-1)$ points (x'_k, y'_k),

$$B_k \Phi(x'_k, y'_k),$$

B_k étant le résidu de T relatif à l'infini (x'_k, y'_k).

On a donc, d'après les relations connues entre les résidus d'une fonction rationnelle,

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=n} A_k T(\xi_k, \eta_k)\psi_i(\xi_k, \eta_k) - \Phi(x, y)\psi_i(x, y) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{k=p-1} B_k \Phi(x'_k, y'_k)\psi_i(x'_k, y'_k) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned} \right.$$

Soit posé

$$\Delta(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \psi_1(\xi, \eta) & \psi_2(\xi, \eta) & \ldots & \psi_p(\xi, \eta) \\ \psi_1(x'_1, y'_1) & \psi_2(x'_1, y'_1) & \ldots & \psi_p(x'_1, y'_1) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \psi_1(x'_{p-1}, y'_{p-1}) & \psi_2(x'_{p-1}, y'_{p-1}) & \ldots & \psi_p(x'_{p-1}, y'_{p-1}) \end{vmatrix}$$
$$= \psi_1(\xi, \eta)\Delta'_1 + \psi_2(\xi, \eta)\Delta'_2 + \ldots + \psi_p(\xi, \eta)\Delta'_p.$$

On a, en multipliant la première des équations (30) par Δ'_1, la deuxième par Δ'_2, ... la $p^{\text{ième}}$ par Δ'_p, et ajoutant,

$$(31) \qquad \Phi(x, y) = \frac{1}{\Delta(x, y)} \sum_{k=1}^{k=n} A_k T(\xi_k, \eta_k)\Delta(\xi_k, \eta_k),$$

et cette formule est identique à la formule de décomposition (12). Je vais, en effet, montrer que l'on a

$$(32) \qquad T(\xi_k, \eta_k)\frac{\Delta(\xi_k, \eta_k)}{\Delta(x, y)} = \mathfrak{F}(x, y; \xi_k, \eta_k).$$

Pour vérifier cette formule (32), remplaçons $T(\xi, \eta)$ et $\mathfrak{F}(x, y; \xi, \eta)$ par leurs valeurs (29) et (8), les constantes K et C étant aussi remplacées par leurs valeurs. La formule à vérifier devient

$$(33) \qquad \frac{S[\Theta_k(h_i)\psi_k(\xi, \eta)]}{S[\Theta_k(h_i)\psi_k(x, y)]} = \frac{\Delta(\xi, \eta)}{\Delta(x, y)},$$

vérification que l'on peut faire par la méthode suivante, qui pourrait déjà servir à démontrer la relation (25). On a, par le théorème d'Abel,

$$h_i = u^{(i)}(x'_1, y'_1) + u^{(i)}(x'_2, y'_2) + \ldots + u^{(i)}(x'_{p-1}, y'_{p-1}) - C_i;$$

d'autre part,

$$\Theta(h_i) = 0$$

identiquement, quels que soient (x'_i, y'_i). Donc les dérivées par rapport à x'_i sont nulles aussi, et l'on a ainsi $(p-1)$ équations

$$\Theta_1(h_i)\psi_1(x'_i, y'_i) + \ldots + \Theta_p(h_i)\psi_p(x'_i, y'_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1);$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Theta_1(h_i)}{\Delta'_1} = \frac{\Theta_2(h_i)}{\Delta'_2} = \ldots = \frac{\Theta_p(h_i)}{\Delta'_p} = \frac{S[\Theta_k(h_i)\psi_k(\xi, \eta)]}{\Delta(\xi, \eta)} = \frac{S[\Theta_k(h_i)\psi_k(x, y)]}{\Delta(x, y)},$$

ce qui démontre l'identité (33).

10. Dans la formule générale (12), il se présente cette circonstance singulière que l'élément de la décomposition $\mathfrak{F}(x, y; \xi, \eta)$ devient infini au pôle (ξ, η) et en $(p-1)$ autres points arbitraires. Cette circonstance ne peut pas être évitée si l'on veut prendre pour élément de décomposition une fonction admettant les $2p$ multiplicateurs donnés. Il est, en effet, impossible de former une fonction admettant les $2p$ multiplicateurs donnés et ne devenant infinie qu'en un pôle variable (ξ, η), sauf dans le cas de $p = 1$; car une pareille fonction serait de la forme

$$e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)} \begin{bmatrix} \xi', & \eta' \\ \xi, & \eta \end{bmatrix},$$

et, en écrivant que cette fonction admet les $2p$ multiplicateurs μ_k, on trouve, pour déterminer (ξ', η'), p équations qui sont en général incompatibles.

Mais on pourrait chercher un élément de décomposition ne devenant infini qu'en un point, et se reproduisant *multiplié par un facteur* μ_k *et augmenté d'une constante* γ_k quand le point (x, y) décrit un cycle. Une pareille fonction aurait pour dérivée une fonction admettant les $2p$ multiplicateurs μ_k. Voici comment on peut la former.

Soit $\int \frac{Q}{F'_y}\,dx$ l'intégrale abélienne la plus générale de première espèce. La courbe $Q = 0$ coupe $F = 0$ en $2p - 2$ points ordinaires

$$(x'_k, y'_k), \quad (k = 1, 2, \ldots, 2p - 2)$$

dont $p - 1$ sont arbitraires. Soient, en outre,

$$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ \ldots, \ (x_{2p-2}, y_{2p-2}),$$
$$(\xi', \eta'), \ (\xi'', \eta''), \ (\xi, \eta),$$

$(2p - 2) + 3$ points arbitraires, dont le dernier (ξ, η) est essentiellement distinct des premiers.

La fonction

$$(34) \quad \mathfrak{P}(x, y; \xi, \eta) = \int \frac{Q}{F'_y} \begin{bmatrix} \xi', & \eta' \\ \xi, & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi'', & \eta'' \\ \xi, & \eta \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{i=2p-1} \begin{bmatrix} x_i, & y_i \\ x'_i, & y'_i \end{bmatrix} e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^i(x, y)}\, dx$$

ne devient infinie qu'au seul point (ξ, η).

Disposons des constantes λ_i et des $2p$ points

$$(\xi', \eta'), \ (\xi'', \eta''),$$
$$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ (x_{2p-2}, y_{2p-2}),$$

de façon que la fonction sous le signe $\int$ admette les $2p$ multiplicateurs μ_k, et que le résidu de cette fonction relatif à l'infini $x = \xi$ soit nul; alors la fonction $\mathfrak{P}$ admet l'infini simple (ξ, η), et si le point (x, y) décrit un cycle, elle se reproduit multipliée par μ_k et augmentée d'une constante γ_k. Une pareille fonction pourrait servir d'élément de décomposition.

On voit les recherches auxquelles cette remarque peut conduire; je me propose d'y revenir plus tard dans un Mémoire sur les intégrales de la forme

$$\int \Phi(x,y)\,dx,$$

$\Phi(x,y)$ désignant une fonction telle que (2); ces intégrales comprennent les intégrales abéliennes comme cas particuliers.

11. *Relations entre les résidus d'une fonction quelconque telle que* $\Phi(x,y)$. Soit, comme dans le n° **5**, $\Phi(x,y)$ une fonction du point analytique (x,y) admettant les $2p$ multiplicateurs μ_k, $(k = 1, 2, \ldots, 2p)$, et devenant infinie du premier ordre aux points

$$(\xi_1,\eta_1),\ (\xi_2,\eta_2),\ \ldots,\ (\xi_n,\eta_n)$$

avec les résidus respectifs $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que ces points ξ_k, η_k ne sont pas des points critiques, et qu'ils sont tous à distance finie.

Désignons, comme dans le n° **10**, par

$$\int \frac{Q(x,y)}{F'_y(x,y)}\,dx,$$

l'intégrale abélienne la plus générale de première espèce; par

$$(x'_1,y'_1),\ (x'_2,y'_2),\ \ldots,\ (x'_{2p-2},y'_{2p-2})$$

les $(2p-2)$ points variables où la courbe $Q = 0$ coupe $F = 0$; enfin par

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \ldots,\ (x_{2p-2},y_{2p-2})$$

$(2p-2)$ points analytiques pour le moment indéterminés. Considérons la fonction

$$\varpi(x,y) = \frac{Q(x,y)}{F'_y(x,y)} \prod_{k=1}^{k=2p-2} \begin{bmatrix} x_k, y_k \\ x'_k, y'_k \end{bmatrix} e^{\sum_{i=1}^{i=p} l_i u^{(i)}(x,y)}. \tag{35}$$

Écrivons que cette fonction $\varpi(x,y)$ admet les multiplicateurs inverses des multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2p}$ de $\Phi(x,y)$. On a les $2p$

équations

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_{2i-1}} = e^{2l_i\pi\sqrt{-1}}, \\ \dfrac{1}{\mu_{2i}} = e^{2(l_1\alpha_{1i}+l_2\alpha_{2i}+\ldots+l_p\alpha_{pi})} + \sum\limits_{k=1}^{k=2p-2} [u^{(i)}(x'_k, y'_k) - u^{(i)}(x_k, y_k)], \end{cases}$$

où $i = 1, 2, \ldots, p$.

Les p premières équations déterminent $l_1, l_2, \ldots, l_p$; les p suivantes donnent ensuite, en vertu de la relation connue,

$$\sum_{k=1}^{k=2p-2} u^{(i)}(x'_k, y'_k) = 2C_i,$$

qui lie les $(2p-2)$ points (x'_k, y'_k), les équations

$$(37)\quad \sum_{k=1}^{k=2p-2} u^{(i)}(x_k, y_k) = 2C_i + 2(l_1\alpha_{1i} + \ldots + l_p\alpha_{pi}) + \log\mu_{2i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

et ces équations (37) déterminent p des points (x_k, y_k) en fonction des $p-2$ autres qui restent arbitraires. Nous supposerons, par exemple, que les équations (37) déterminent les points

$$(x_{p-1}, y_{p-1}),\ (x_p, y_p),\ (x_{p+1}, y_{p+1}),\ \ldots,\ (x_{2p-2}, y_{2p-2})$$

en fonction des $(p-2)$ points

$$(38)\qquad (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_{p-2}, y_{p-2})$$

qui restent arbitraires. La fonction $\varpi(x,y)$ contient alors $(p-2)$ paramètres qui sont les points arbitraires (38). Le produit

$$(39)\qquad \Phi(x,y)\,\varpi(x,y)$$

est une fonction rationnelle de x et y devenant infiniment petite comme $\frac{1}{x^2}$ aux m points analytiques éloignés indéfiniment; donc, d'après un théorème connu, la somme des résidus de cette fonction rationnelle est nulle. Or la fonction (39) admet pour pôles, d'une part les pôles (ξ_1, η_1), ..., (ξ_n, η_n) de $\Phi(x, y)$ avec les résidus respectifs

$$A_1 \varpi(\xi_1, \eta_1),\ A_2 \varpi(\xi_2, \eta_2),\ \ldots,\ A_n \varpi(\xi_n, \eta_n),$$

et, d'autre part, les pôles de $\varpi(x, y)$ dont les résidus sont nuls, car l'intégrale $\int \varpi(x, y)\, dx$ est partout finie. On a donc la relation

$$(40) \qquad A_1 \varpi(\xi_1, \eta_1) + A_2 \varpi(\xi_2, \eta_2) + \ldots + A_n \varpi(\xi_n, \eta_n) = 0.$$

Comme la fonction ϖ contient $p - 2$ points arbitraires (x_1, y_1), ..., (x_{p-2}, y_{p-2}), on obtient différentes relations, telles que (40), en donnant à ces points différentes positions. *Mais, parmi les relations en nombre infini que l'on obtient ainsi, il n'y en a que $p - 1$ qui soient distinctes.* Considérons en effet $(p - 1)$ systèmes de valeurs des points (38), et soient

$$\varpi_1(x, y),\ \varpi_2(x, y),\ \ldots,\ \varpi_{p-1}(x, y)$$

les $(p - 1)$ fonctions ϖ correspondantes; soit toute autre fonction ϖ_p obtenue en donnant aux points (38) les valeurs déterminées

$$(x''_1, y''_1),\ (x''_2, y''_2),\ \ldots,\ (x''_{p-2}, y''_{p-2});$$

je vais montrer que cette fonction ϖ_p est égale à

$$(41) \qquad m_1 \varpi_1(x, y) + m_2 \varpi_2(x, y) + \ldots + m_{p-1} \varpi_{p-1}(x, y),$$

$m_1, m_2, \ldots, m_{p-1}$ étant des constantes.

En effet, l'expression (41) est une fonction ϖ et peut, par suite, se mettre sous la forme (35); en déterminant les coefficients $m_1, m_2, \ldots, m_{p-1}$, de façon que la fonction (41) s'annule aux $(p - 2)$ points (x''_1, y''_1), (x''_2, y''_2), ..., (x''_{p-2}, y''_{p-2}), on obtiendra une fonction s'annulant aux mêmes points que ϖ_p en vertu des relations (37) qui déterminent tous les zéros de ϖ, dès qu'on en connaît $(p - 2)$; la fonction (41), devenant nulle ou infinie aux mêmes points que ϖ_p, ne peut donc en différer que par un facteur constant; ce qui démontre la proposition.

Remarque. — Les raisonnements précédents sont en défaut dans le cas exceptionnel qui fait l'objet du n° **7**. Les résidus satisfont alors à p relations, que l'on obtient immédiatement à l'aide des relations (16) entre les résidus d'une fonction rationnelle.