JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AOUST

Des bissectrices d'un réseau de lignes tracées sur une surface quelconque

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 9 (1883), p. 43-64.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9__43_0>

Des bissectrices d'un réseau de lignes tracées sur une surface quelconque;

PAR M. L'ABBÉ AOUST.

ÉTAT DE LA QUESTION.

Le problème des bissectrices d'un réseau de courbes tracées sur une surface consiste à déterminer les courbes qui, en un point quelconque de leur parcours, partagent en deux parties égales l'angle qu'une ligne d'un faisceau de courbes données tracées sur une surface fait avec une ligne d'un autre faisceau de courbes données, également tracées sur la même surface.

Ce problème présente deux cas : le premier où les courbes des deux faisceaux sont les lignes coordonnées, le second où les courbes des deux faisceaux sont distinctes des lignes coordonnées.

Bien souvent, on peut prendre pour réseau de lignes coordonnées les deux faisceaux de courbes données : alors la mise en équation du problème et les calculs sont facilités, comme nous l'avons montré dans notre *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque*, publiée en 1869; mais il arrive aussi souvent que les deux faisceaux de courbes données ne peuvent pas être pris pour système de lignes coordonnées, comme cela arrive lorsque ce double faisceau est donné par une équation différentielle du second degré, non intégrable : alors la question doit être traitée d'une manière générale, c'est-à-dire, en admettant que le réseau des lignes données est distinct du réseau des lignes coordonnées.

Cette méthode générale a l'avantage de faire connaître les relations qui existent entre les rapports différentiels des lignes données et les rapports différentiels des bissectrices, intérieure et extérieure, de l'angle du réseau, ainsi que les théorèmes de Géométrie qui résultent de ces relations. C'est à ce point de vue, tout à fait général, que la question est traitée dans notre présent travail. Nous établissons ces relations avec simplicité et nous montrons comment elles conduisent à l'intégration des équations différentielles qui en résultent. Cette théorie donne avec la même facilité les bissectrices réelles d'un réseau de courbes imaginaires.

Les lignes de courbure se présentent comme conséquence de cette analyse, nous avons soin d'étudier ces courbes à ce point de vue et d'en faire la généralisation. Nous arrivons à quelques théorèmes importants, suivant nous, en ce qu'ils donnent divers modes de génération des lignes de courbure.

§ I.

1. *Trajectoire d'un faisceau de courbes.* — Soit un faisceau de courbes tracées sur une surface donnée et représentées par l'équation

$$F(\rho, \rho_1) = u, \tag{1}$$

rapportée à des coordonnées curvilignes ρ et ρ_1, u étant un paramètre dont la variation donne toutes les courbes du faisceau. Si l'on représente par M, M_1 les dérivées de F par rapport à ρ et ρ_1, l'équation différentielle des courbes (1) sera

$$\frac{d\rho}{M_1} = -\frac{d\rho_1}{M}. \tag{1'}$$

Soient

ds le déplacement effectué sur la courbe que l'on considère dans le faisceau (u);

$d\sigma$, $d\sigma_1$ les arcs coordonnés qui sont les composantes obliques de ce déplacement dans le système coordonné (ρ, ρ_1);

φ l'angle de ce système;

H, H_1 et G les paramètres différentiels.

On a les relations

$$(2) \qquad d\sigma = \mathrm{H}\, d\rho, \quad d\sigma_1 = \mathrm{H}_1\, d\rho_1,$$

$$(3) \qquad ds^2 = \mathrm{H}^2 d\rho^2 + \mathrm{H}_1^2 d\rho_1^2 + 2\mathrm{G}^2 d\rho\, d\rho_1;$$

de sorte que, si l'on pose

$$(4) \qquad \mathrm{K}^2 = \mathrm{M}_1^2 \mathrm{H}^2 + \mathrm{M}^2 \mathrm{H}_1^2 - 2\mathrm{M}\mathrm{M}_1 \mathrm{G}^2,$$

on a les deux équations

$$(1'') \qquad \frac{d\rho}{\mathrm{M}_1} = -\frac{d\rho_1}{\mathrm{M}} = \frac{ds}{\mathrm{K}}.$$

Soient maintenant δs le déplacement effectué sur une courbe C_1 qui coupe les courbes du faisceau (u) sous un angle ψ; $\delta\sigma$, $\delta\sigma_1$ les arcs coordonnés de ce déplacement; le double de l'aire du triangle infinitésimal dont les deux côtés sont ds, δs, qui comprennent l'angle ψ, a pour expression

$$(5) \qquad ds\, \delta s \sin\psi = \sin\varphi (d\sigma\, \delta\sigma_1 - d\sigma_1\, \delta\sigma);$$

si l'on représente par $\delta\rho$, $\delta\rho_1$ les variations de ρ et ρ_1 relatives à $\delta\sigma$, $\delta\sigma_1$, on obtient par l'élimination de $d\sigma$, $d\sigma_1$; $\delta\sigma$, $\delta\sigma_1$ au moyen des équations précédentes, la condition suivante :

$$(6) \qquad \mathrm{K}\, \delta s \sin\psi = \mathrm{H}\mathrm{H}_1 \sin\varphi (\mathrm{M}_1\, \delta\rho_1 + \mathrm{M}\, \delta\rho);$$

or, si dans l'équation (1) on regardait u comme variable et δu la variation de u correspondant aux variations $\delta\rho$, $\delta\rho_1$, l'équation précédente s'écrirait sous la forme plus simple

$$(6') \qquad \mathrm{K}\, \delta s \sin\psi = \mathrm{H}\mathrm{H}_1 \sin\varphi\, \delta u.$$

Cette équation est l'équation des trajectoires sous l'angle ψ des courbes du faisceau (u).

2. *Bissectrices d'un réseau de courbes.* — Soit un second faisceau de courbes donné par l'équation

$$(7)\qquad F_1(\rho, \rho_1) = u_1;$$

les courbes du faisceau (u) coupées par les courbes du faisceau (u_1) forment un réseau (u, u_1); on se propose de calculer les courbes bissectrices de l'angle sous lequel le faisceau (u) est coupé par le faisceau (u_1).

Soient, comme précédemment, N, N_1 les dérivées de u_1 par rapport à ρ et à ρ_1; appelons K_1 ce que devient K quand on y remplace u par u_1; soit ds_1 le déplacement effectué sur la courbe du faisceau (u_1), on aura

$$(7')\qquad \frac{d\rho}{N_1} = -\frac{d\rho_1}{N} = \frac{ds_1}{K_1}.$$

Or, si la trajectoire δs déjà considérée coupe, sous l'angle ψ_1, ce nouveau faisceau de courbes, on aura, d'après les équations (6) et (6'), la condition

$$(8)\qquad K_1\,\delta s \sin\psi_1 = HH_1 \sin\varphi(N_1\,\delta\rho_1 + N\,\delta\rho) = HH_1 \sin\varphi\,\delta u_1.$$

Si dans cette équation on fait ψ_1 égal à $-\psi$, la courbe δs sera bissectrice de l'angle 2ψ que l'une des courbes du faisceau (u) fait avec une quelconque des courbes du faisceau (u_1) en leurs points d'intersection situés sur cette bissectrice; on aura donc l'équation de cette bissectrice en divisant membre à membre l'équation (6) par l'équation (8). On obtient ainsi

$$(9)\qquad \frac{K}{K_1} = -\frac{M_1\,\delta\rho_1 + M\,\delta\rho}{N_1\,\delta\rho_1 + N\,\delta\rho} = -\frac{\delta u}{\delta u_1}.$$

Cette équation est celle de la bissectrice intérieure de l'angle 2ψ; l'équation de la bissectrice extérieure se déduit de la précédente, en y changeant le signe du second membre; on a donc la double équation différentielle suivante :

$$(9')\qquad \left(\frac{N_1}{K_1} \pm \frac{M_1}{K}\right)\delta\rho_1 + \left(\frac{N}{K_1} \pm \frac{M}{K}\right)\delta\rho = 0,$$

dont les signes supérieurs se rapportent à la bissectrice intérieure et les signes inférieurs à la bissectrice extérieure de l'angle du réseau.

3. *Équation différentielle de la double bissectrice.* — Il résulte de ce que nous venons de dire que l'équation (9) élevée au carré donnera le système des deux bissectrices des courbes (u) et (u_1). Cette équation, quand on remplace K et K_1 par leurs valeurs tirées du type (4), et que l'on représente par ν et ν_1 les valeurs des coefficients différentiels $\frac{d\rho_1}{d\rho}$ tirés des équations (u) et (u_1), prend la forme suivante :

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} &[2G^2 + H_1^2(\nu+\nu_1)]\,\delta\rho_1^2 + 2[H^2 - H_1^2\nu\nu_1]\,\delta\rho\,\delta\rho_1 \\ &\qquad - [2G^2\nu\nu_1 + H^2(\nu+\nu_1)]\,\delta\rho^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

On peut aussi lui donner une autre forme non moins commode; car on a la relation

$$\cos\varphi = \frac{G^2}{HH_1},$$

et l'on peut introduire, pour représenter chaque courbe (u) et (u_1), les rapports de $d\sigma_1$ à $d\sigma$ tirés des équations (2), (1) et (7), rapports que nous représentons par n, n_1 : alors l'équation (B) prend la forme

$$(\mathrm{B}_1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(2\cos\varphi + n + n_1)\,\delta\sigma_1^2 + 2(1 - nn_1)\,\delta\sigma\,\delta\sigma_1 \\ &\qquad - (2nn_1\cos\varphi + n + n_1)\,\delta\sigma^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

La forme de ces équations est rationnelle en tant que ν, ν_1 dans la première et n, n_1 dans la seconde sont rationnels; mais cette condition, qui est suffisante, n'est pas nécessaire; car, si les valeurs de ν et ν_1, ou bien les valeurs de n, n_1, sont données par une équation rationnelle du second degré en $\frac{d\rho_1}{d\rho}$ ou en $\frac{d\sigma_1}{d\sigma}$, les valeurs de ν et ν_1 seront conjuguées : il en sera de même des valeurs de n, n_1; donc la somme des deux premières ou des deux secondes sera rationnelle, le produit des deux premières ou des deux secondes sera aussi rationnel; par conséquent, la forme des équations (B) et (B_1) restera rationnelle dans cette hypothèse.

Si le système des coordonnées curvilignes ρ et ρ_1 est orthogonal, les termes en G^2 de l'équation (B) et les termes en $\cos\varphi$ de l'équation (B_1) disparaissent et l'on a alors deux équations plus simples de la double bissectrice.

4. *Réalité des racines.* — Cherchons les conditions de réalité des racines des équations (B) ou (B_1). Si l'on résout cette dernière par rapport au coefficient différentiel $\frac{\delta\sigma_1}{\delta\sigma}$, on trouve deux valeurs, chacune d'elles correspondant à l'une des deux bissectrices, de sorte que si l'on pose

$$(10)\quad \begin{cases} P = -(1 - nn_1), \\ Q = [(nn_1 + 1)\cos\varphi + (n + n_1)]^2 + (1 - nn_1)^2 \sin^2\varphi, \\ T = 2\cos\varphi + (n + n_1); \end{cases}$$

on aura la double valeur suivante de ce coefficient différentiel :

$$\frac{\delta\sigma_1}{\delta\sigma} = \frac{P}{T} \pm \frac{\sqrt{Q}}{T}.$$

La composition des fonctions P, Q, T prouve que les deux bissectrices des deux courbes (u) et (u_1) sont réelles, non seulement lorsque les courbes (u) et (u_1) sont réelles, mais encore lorsqu'elles sont imaginaires, pourvu qu'elles soient conjuguées entre elles, ce qui arrivera toujours lorsque ces deux courbes seront données par une équation du second degré, ayant les coefficients réels; on a donc cette proposition.

Théorème. — *Étant donnés deux faisceaux de courbes réelles, ou imaginaires conjuguées, les bissectrices curvilignes du réseau formé par ces deux faisceaux sont toujours réelles.*

5. *Orthogonalité des bissectrices.* — Cette orthogonalité résulte de ce fait géométrique que les bissectrices de deux angles supplémentaires se coupent sous angle droit; mais, dans le cas actuel, elle doit ressortir de notre analyse, parce que les courbes peuvent être imaginaires.

Soient B et B_1 les deux bissectrices, intérieure et extérieure, des angles des deux courbes C et C_1 des faisceaux (u) et (u_1); soient γ et γ_1 les angles que la première et la seconde bissectrice forment avec l'arc coordonné $d\sigma$: la condition d'orthogonalité est exprimée par la condition

$$1 + \operatorname{tang}\gamma \operatorname{tang}\gamma_1 = 0;$$

or, si l'on représente par m, m_1 les rapports $\frac{\delta\sigma_1}{\delta\sigma}$ des deux courbes B et B_1, on a les relations

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{m \sin\varphi}{1 + m\cos\varphi}, \quad \operatorname{tang}\gamma_1 = \frac{m_1 \sin\varphi}{1 + m_1\cos\varphi};$$

d'après cela, la condition précédente deviendra

$$(10_1) \qquad 1 + (m + m_1)\cos\varphi + mm_1 = 0.$$

Or, d'après l'équation (B_1), on a

$$m + m_1 = -\frac{2(1 - nn_1)}{T}, \quad mm_1 = -\frac{2nn_1\cos\varphi + (n + n_1)}{T},$$

de sorte que, si l'on porte ces valeurs dans l'équation (10_1), on trouve la condition

$$(11) \qquad T = 2\cos\varphi + (n + n_1),$$

laquelle est une identité par suite de la troisième des équations (10).

Il résulte de là que les deux bissectrices B et B_1 sont orthogonales entre elles.

Si l'on considère l'ensemble des bissectrices intérieures et extérieures des angles du réseau (u, u_1), on a un second réseau jouissant de cette propriété que tous les angles de ce réseau sont droits, et l'élément du réseau est un quadrilatère curviligne dont les angles sont droits.

6. *Généralité des équations de la double bissectrice.* — Les équations (B), se rapportant à un système quelconque de coordonnées curvilignes, renferment, par cela même, les équations des bissectrices dans chaque système particulier de coordonnées et le passage des unes aux autres se fait avec la plus grande facilité, à cause de la forme significative que nous avons donnée aux équations (B) et (B_1). C'est ce que nous allons montrer par l'application suivante.

Équations des bissectrices dans le système cartésien. — Dans ce système, l'équation de la surface, quand on représente par p et q les dérivées de z par rapport à x et à y, s'écrit sous la forme

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Or les courbes coordonnées sont $x = \rho$, $y = \rho_1$, de sorte que le déplacement effectué sur la surface est

$$ds^2 = (1+p^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+q^2)\,dy^2;$$

par suite, les valeurs des paramètres H, H_1, G, sont données par les relations

$$H^2 = (1+p^2),\quad H_1^2 = (1+q^2),\quad G^2 = pq.$$

En faisant ces substitutions dans l'équation (B_1), on trouve l'équation suivante :

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} &[2pq + (1+q^2)(m+m_1)]\,dy^2\\ &\quad + 2[1+p^2 - (1+q^2)(mm_1)]\,dy\,dx\\ &\quad - [2pqmm_1 + (1+p^2)(m+m_1)]\,dx^2 = 0,\end{aligned}\right.$$

qu'on ne pourrait établir directement sans de longs calculs.

7. *Intégration des équations de la double bissectrice.* — Il se présente deux cas : ou bien l'équation (B) se décompose en deux équations du premier degré intégrables, ou bien l'intégration ne peut s'effectuer séparément.

Dans le premier cas, chacune des équations étant intégrée, on a les deux intégrales suivantes en termes finis, v et v_1 étant des constantes arbitraires,

$$f(\rho, \rho_1) = v, \quad f_1(\rho, \rho_1) = v_1;$$

et les variations de v et v_1 donnent le réseau complet des bissectrices.

Dans le second cas, l'intégration de l'équation différentielle du second degré conduira à une intégrale unique

$$F(\rho, \rho_1, a) = 0,$$

dans laquelle a est la constante d'intégration; mais cette constante y entrera élevée au carré, de sorte que l'on aura une équation du second degré en a qui donnera deux valeurs de a : a_1 et a_2 correspondant à un même point (ρ, ρ_1); et, suivant que l'on prendra l'une ou l'autre de ces valeurs de a, on aura une première branche ou une seconde branche d'une même courbe, ou même deux courbes distinctes. On aura donc, par la variation du point que l'on considère sur la surface, le réseau complet des bissectrices curvilignes.

Pour effectuer plus facilement l'intégration de l'équation (B), on procédera de la manière suivante. Ou bien les équations des faisceaux (u) et (u_1) sont données, ou peuvent être obtenues sous forme finie, ou bien ces équations ont essentiellement la forme différentielle. Dans le premier cas, on prendra le système de coordonnées curvilignes provenant des variations de u et de u_1, et, si l'on représente par $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}_1$ les paramètres différentiels linéaires de ce système, les équations de la bissectrice seront données par la double forme suivante :

$$\mathfrak{z}\,du \pm \mathfrak{z}_1\,du_1 = 0,$$

dans laquelle les variables seront bien souvent séparées; dans ce cas, l'intégration est ramenée aux quadratures. Dans le second cas, comme les rapports ν et ν_1 des deux courbes (u) et (u_1), donnés par les équations de ces courbes, entrent seuls dans l'équation (B), on voit que l'intégration de cette équation n'exige pas que l'on connaisse, sous forme finie, les courbes (u) et (u_1); alors la forme de l'équation (B) ne peut se simplifier, et cette forme s'impose nécessairement; c'est pour cela qu'il nous a été nécessaire de calculer l'équation (B) d'une manière générale. On intégrera cette équation sans recourir aux intégrales des équations différentielles C et C_1.

8. *Applications des théories précédentes.* — Nous allons résoudre quelques questions au moyen de notre analyse.

Problème I. — *Étant donné le réseau formé sur une sphère par deux faisceaux de plans tournant autour de deux diamètres orthogonaux, trouver les bissectrices du réseau.*

Soient les équations de la sphère et des deux faisceaux de plans :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad y = \rho z, \quad x = \rho_1 z,$$

dans lesquelles les paramètres variables sont ρ et ρ_1. Prenons pour système de coordonnées ρ et ρ_1; il faut différentier les trois équations en faisant aussi varier ρ et ρ_1, et déduire de ces trois équations différentielles les valeurs de dx, dy, dz en fonction de ρ, ρ_1, $d\rho$, $d\rho_1$; on obtient ainsi, en posant

$$D = 1 + \rho^2 + \rho_1^2,$$

les trois relations

$$dz = -\frac{a}{D^{\frac{3}{2}}}(\rho\, d\rho + \rho_1\, d\rho_1),$$

$$dx = -\frac{a\rho_1}{D^{\frac{3}{2}}}(\rho\, d\rho + \rho_1\, d\rho_1) + \frac{a\, d\rho_1}{D^{\frac{1}{2}}},$$

$$dy = -\frac{a\rho}{D^{\frac{3}{2}}}(\rho\, d\rho + \rho_1\, d\rho_1) + \frac{a\, d\rho}{D^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on fait la somme des carrés et qu'on ajoute, on trouve l'expression du carré du déplacement effectué sur la sphère

$$\frac{ds^2}{a^2} = \frac{d\rho^2}{D^2}(1 + \rho_1^2) + \frac{d\rho_1^2}{D^2}(1 + \rho^2) - 2\frac{d\rho\, d\rho_1}{D^2}\rho\rho_1.$$

D'après cela, les équations des deux bissectrices du réseau sont

$$\frac{d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = \pm \frac{d\rho_1}{\sqrt{1+\rho_1^2}},$$

dont les intégrales, en représentant par ν les constantes d'intégration, sont

$$\rho + \sqrt{1+\rho^2} = \nu(\rho_1 \pm \sqrt{1+\rho_1^2}).$$

Si l'on remplace ρ et ρ_1 par leurs valeurs tirées des équations des faisceaux des plans et qu'on chasse les radicaux, on obtient les deux séries de surfaces coniques,

$$x^2 + y^2 \pm \frac{\nu^2+1}{\nu} xy - \frac{\nu^2-1}{4\nu^2} z^2 = 0,$$

lesquelles déterminent sur la surface un réseau orthogonal d'une double série de coniques sphériques. Le signe supérieur se rapporte à une série, et le signe inférieur à l'autre série.

La généralité de la solution n'est pas altérée quoique les deux constantes soient représentées par une seule lettre ν, parce que les deux équations contenues dans chacune des deux formules précédentes doivent être considérées séparément. Si ces deux équations devaient être considérées simultanément, on représenterait les constantes par deux lettres distinctes.

9. Problème II. — *Bissectrices du réseau des génératrices du paraboloïde hyperbolique.*

Soient les équations du paraboloïde hyperbolique et des deux faisceaux de plans qui coupent cette surface suivant des droites

$$2\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \rho, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \rho_1,$$

ρ et ρ_1 étant les paramètres variables. En opérant comme précédemment, on obtient les équations

$$dx = \frac{a}{2}(d\rho + d\rho_1), \quad dy = \frac{b}{2}(d\rho_1 - d\rho), \quad dz = \frac{c}{2}(\rho_1\, d\rho + \rho\, d\rho_1);$$

si l'on pose, pour abréger,

$$a^2 + b^2 = m^2c^2, \quad a^2 - b^2 = n^2c^2,$$

les paramètres différentiels sont

$$H^2 = \frac{c^2}{4}(m^2 + \rho_1^2), \quad H_1^2 = \frac{c^2}{4}(m^2 + \rho^2), \quad G^2 = \frac{c^2}{4}(n^2 + \rho\rho_1).$$

D'après ces expressions, les équations de la double bissectrice sont

$$\frac{d\rho}{\sqrt{m^2 + \rho^2}} \pm \frac{d\rho_1}{\sqrt{m^2 + \rho_1^2}} = 0,$$

dont les intégrales, en représentant par γ la constante arbitraire, peuvent être mises sous la forme rationnelle

$$\rho^2 + \rho_1^2 \pm \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma}\rho\rho_1 = \frac{\gamma^2 - 1}{4\gamma^2}m^2.$$

Si l'on passe aux coordonnées cartésiennes, on obtient les deux équations

$$(\gamma + 1)^2\frac{x^2}{a^2} - (\gamma - 1)^2\frac{y^2}{b^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{4\gamma}m^2,$$

$$(\gamma + 1)^2\frac{y^2}{b^2} - (\gamma - 1)^2\frac{x^2}{a^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{4\gamma}m^2.$$

Les demi-axes de ces deux coniques étant représentées par A, B, A_1, B_1, on a les relations

$$A^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\,\frac{m^2a^2}{4\gamma}, \quad B^2 = \frac{\gamma + 1}{1 - \gamma}\,\frac{m^2b^2}{4\gamma},$$

$$A_1^2 = \frac{\gamma + 1}{1 - \gamma}\,\frac{m^2a^2}{4\gamma}, \quad B_1^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\,\frac{m^2b^2}{4\gamma}.$$

10. Problème III. — *Trouver les bissectrices du réseau formé par le double système de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.*

Ce problème a été déjà résolu par nous dans notre Analyse ([1]), à laquelle nous renvoyons le lecteur; mais cette question est susceptible d'une généralisation importante résultant de nos équations (B). Cette généralisation consiste en ce que la solution que nous avons trouvée s'étend à toutes les surfaces du second ordre, bien que l'hyperboloïde à une nappe soit la seule des trois surfaces du second degré, douées d'un centre, qui possède des génératrices rectilignes. Les deux autres surfaces n'ont pas de génératrices rectilignes réelles; mais dans la géométrie des symboles imaginaires elles possèdent deux séries de génératrices rectilignes imaginaires; or, comme les deux génératrices imaginaires sont conjuguées entre elles, il résulte qu'elles possèdent, d'après notre théorème du n° **4**, deux séries de bissectrices réelles du réseau de ces deux séries de droites imaginaires. Donc l'intégrale que nous avons donnée fournit également les bissectrices des angles formés par la double série de génératrices imaginaires de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à deux nappes.

§ II.

11. *Questions inverses.* — L'équation (B_1) des bissectrices de l'angle des deux courbes (C) et (C_1) appartenant aux faisceaux (u) et (u_1) met en relief les coefficients différentiels n, n_1 des deux courbes (C) et (C_1) et les coefficients différentiels m_0 et m_1 des deux bissectrices; par conséquent, cette équation permet de traiter les questions inverses et donne les conditions de chaque problème avec facilité.

Problème IV. — *Étant donnée l'équation différentielle du second degré relative à deux courbes conjuguées, trouver tous les couples de courbes, tracées sur la même surface, ayant les mêmes bissectrices que les courbes données.*

Soit l'équation des deux courbes C et C_1 donnée sous la forme différentielle

$$(c) \qquad R_1\, d\sigma_1^2 + 2L\, d\sigma_1\, d\sigma + R\, d\sigma^2 = 0,$$

---

[1] Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque*, p. 115. Paris, Gauthier-Villars, 1869.

dans laquelle R, R_1, L sont des fonctions de ρ et de ρ_1; soit l'équation de deux autres courbes E, E_1 donnée sous la forme

$$(e)\qquad (R_1 + A_1)d\sigma_1^2 + 2(L + B)d\sigma\, d\sigma_1 + (R + A)d\sigma^2 = 0,$$

dans laquelle A, A_1, B sont des fonctions arbitraires de ρ et de ρ_1; on se propose de déterminer ces fonctions de telle sorte que les courbes E, E_1 aient les mêmes bissectrices que les courbes C et C_1.

L'équation des bissectrices des courbes C et C_1 est, d'après l'équation (B_1),

$$(R_1 \cos\varphi - L)\,\delta\sigma_1^2 + (R_1 - R)\,\delta\sigma_1\,\delta\sigma - (R\cos\varphi - L)\,\delta\sigma^2 = 0,$$

et l'équation des bissectrices E et E_1 est, d'après la même équation (B_1),

$$\begin{aligned}&[(R_1 + A_1)\cos\varphi - (L + B)]\,\delta\sigma_1^2\\ &\quad + (R_1 - R + A_1 - A)\,\delta\sigma_1\,\delta\sigma - [(R + A)\cos\varphi - (L + B)]\,\delta\sigma^2 = 0;\end{aligned}$$

il suffit de poser les conditions

$$A_1\cos\varphi - B = 0,\quad A_1 - A = 0,\quad A\cos\varphi - B = 0,$$

pour que les deux équations précédentes soient identiques. Ces conditions sont aussi nécessaires, parce que l'équation des courbes (E) et (E_1) ne comporte que deux fonctions arbitraires. De ces conditions on déduit les relations

$$A = A_1 = \frac{B}{\cos\varphi};$$

de là résulte qu'une seule de ces fonctions reste arbitraire. Soit A cette fonction, l'équation des courbes E, E_1 sera donc

$$(e_1)\qquad (R_1 + A)d\sigma_1^2 + 2(L + A\cos\varphi)d\sigma_1\,d\sigma + (R + A)\,d\sigma^2;$$

or, si l'on a égard à la relation (3) du n° **1**, cette équation peut s'écrire sous la forme

$$(e_2)\qquad A\,ds^2 + R_1\,d\sigma_1^2 + 2L\,d\sigma_1\,d\sigma + R\,d\sigma^2 = 0,$$

Comme la fonction A reste arbitraire, elle peut prendre toutes les formes possibles, et à chaque forme correspond, après intégration de l'équation, un réseau complet de lignes, telles que E et E_1, qui admettent le même réseau de bissectrices que le réseau correspondant aux courbes C et C_1; on a donc cette proposition :

THÉORÈME. — *Il existe une infinité de réseaux de courbes tracées sur une surface, lesquels possèdent un seul et même réseau de bissectrices tracées sur la même surface.*

12. COROLLAIRES DE L'ANALYSE PRÉCÉDENTE. — *Corollaire I.* — Si les courbes C et C_1 ne sont autres que les courbes coordonnées ρ et ρ_1, l'équation (c) est

$$d\sigma\, d\sigma_1 = 0,$$

et l'équation (e_1) se réduit à

$$A\, d\sigma_1^2 + 2(1 + A\cos\varphi)\, d\sigma_1\, d\sigma + A\, d\sigma^2;$$

de sorte que, si l'on représente par $2AM$ le coefficient de $d\sigma_1 d\sigma$, on a les deux valeurs suivantes du rapport $\frac{d\sigma_1}{d\sigma}$:

$$\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_0 = -M + \sqrt{M^2 - 1}, \quad \left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_1 = \frac{1}{-M + \sqrt{M^2 - 1}}.$$

Maintenant, si l'on représente par $\pm \Psi(\rho, \rho_1)$ la première valeur, la seconde valeur sera $\pm \frac{1}{\Psi(\rho, \rho_1)}$; les équations des deux courbes (e) sont, en prenant simultanément les signes supérieurs ou les signes inférieurs,

$$(\varepsilon) \qquad d\sigma_1 = \pm \frac{1}{\Psi(\rho, \rho_1)} d\sigma, \quad d\sigma_1 = \pm \Psi(\rho, \rho_1)\, d\sigma,$$

dans lesquelles $\Psi(\rho, \rho_1)$ est une fonction arbitraire des coordonnées ρ et ρ_1.

Ceci démontre que le nombre des systèmes de courbes (e), ayant même bissectrice que les lignes coordonnées ρ et ρ_1, est infini et représenté par l'ensemble des équations précédentes, dont le produit, membre à membre, donne l'équation invariable des deux bissectrices, malgré la variation de Ψ.

Corollaire II. — La première équation double (ε) représente deux courbes qui coupent harmoniquement les courbes coordonnées ρ et ρ_1, c'est-à-dire que les quatre tangentes au point d'intersection (ρ, ρ_1), forment un faisceau harmonique dont le rapport harmonique au point d'intersection des quatre courbes est une fonction des coordonnées de ce point marqué par $\pm \frac{1}{\Psi(\rho, \rho_1)}$ et la seconde équation double (ε) représente deux autres courbes qui coupent harmoniquement les courbes coordonnées ρ et ρ_1, le rapport harmonique étant $\pm \Psi(\rho, \rho_1)$ inverse du précédent; et de ce que nous venons de dire, il résulte qu'en ce point les deux faisceaux ont deux courbes communes ρ et ρ_1 qui sont les lignes coordonnées et que leurs conjuguées harmoniques dans le premier et second faisceau, comparées chacune à chacune, ont les mêmes courbes bissectrices que les lignes coordonnées ρ et ρ_1.

Cette propriété se vérifie facilement pour des lignes droites tracées dans un plan.

§ III.

DES LIGNES DE COURBURE CONSIDÉRÉES COMME BISSECTRICES DE DIVERS RÉSEAUX.

13. Problème V. — *Trouver l'équation générale des lignes de courbure par la condition qu'elles soient bissectrices du réseau formé par le double système des lignes asymptotiques d'une surface.*

On définit la ligne asymptotique d'une surface la courbe tracée sur cette surface, sous cette condition que la courbure de la courbe projetée sur la normale à la surface donne une projection nulle. L'expression de la courbure normale $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ d'une courbe ds dans le système des coordonnées ρ et ρ_1 lorsqu'on représente par $\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma_1}$ les courbures normales des lignes $d\sigma$, $d\sigma_1$ et par $\frac{1}{l}$ la composante normale de la courbure inclinée de l'une de ces courbes par rapport à l'autre, a la forme simple que nous avons établie dans notre *Analyse des courbes tracées sur une surface*, p. 70,

$$(\mathfrak{R}) \qquad \frac{ds^2}{\mathfrak{R}} = \frac{d\sigma_1^2}{\gamma_1} + \frac{2\,d\sigma\,d\sigma_1}{l} + \frac{d\sigma^2}{\gamma}.$$

Cette équation, dans laquelle ds, $d\sigma$, $d\sigma_1$ sont proportionnels aux sinus des angles φ, α, α_1 que les lignes coordonnées font entre elles et que ds fait avec $d\sigma_1$ et $d\sigma$ est celle d'une conique dans laquelle le rayon vecteur issu du centre et les demi-axes seraient proportionnels à $\sqrt{\mathfrak{R}}$, $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\gamma_1}$. Elle montre que, les deux axes étant bissecteurs de l'angle que deux rayons vecteurs égaux font entre eux, les plans des deux sections normales à la surface, correspondant aux rayons de courbure maximum et minimum, bissectent l'angle des plans de deux sections normales correspondant à des rayons de courbure égaux, et par conséquent l'angle de deux sections normales ayant leurs courbures nulles. Or les sections normales à courbure maxima et minima ont la même direction, au point que l'on considère, que les deux lignes de courbure passant en ce point; et les sections normales dont les courbures sont nulles ont même direction en ce point que les lignes asymptotiques. Il résulte de là que les lignes de courbure sont bissectrices des lignes asymptotiques et aussi des lignes qui ont des courbures normales égales.

Ces principes étant posés, l'équation des lignes asymptotiques s'obtient en faisant dans l'équation $(\mathfrak{R})$ $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ nul; on obtient ainsi

$$(a) \qquad \frac{d\sigma_1^2}{\gamma_1} + \frac{2\,d\sigma\,d\sigma_1}{l} + \frac{d\sigma^2}{\gamma} = 0;$$

cette équation donne

$$n + n_1 = -\frac{2\gamma_1}{l}, \quad nn_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma},$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation (B_1), on trouve

$$\left(\frac{\cos\varphi}{\gamma_1} - \frac{1}{l}\right)\delta\sigma_1^2 + \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma}\right)\delta\sigma_1\,\delta\sigma - \left(\frac{\cos\varphi}{\gamma} - \frac{1}{l}\right)\delta\sigma^2 = 0,$$

qui est l'équation des lignes de courbure dans un système quelconque de coordonnées, comme nous l'avons déjà établi dans notre *Analyse*, p. 155, par une démonstration directe.

Dans le système cartésien, l'équation des lignes asymptotiques est

$$(a_1) \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2 z}{dx\, dy} dx\, dy + \frac{d^2 z}{dy^2} dy^2;$$

en portant les valeurs de la somme et du produit des racines de cette équation dans l'équation (b) du n° **6**, et en représentant par r, s, t les dérivées secondes de z par rapport à x, x par rapport à x, y par rapport à y, y, on trouve l'équation suivante :

$$\begin{aligned}&[2pqt - (1 + q^2)s]\,\partial y^2 \\ &\quad + [(1 + p^2)t - (1 + q^2)r]\,\partial y\,\partial x - [pqr - (1 + p^2)s]\,\partial x^2 = 0,\end{aligned}$$

qui est l'équation des lignes de courbure propre au système cartésien.

14. *Conséquences.* — Toutes les propriétés connues et les propriétés nouvelles des lignes de courbure se présentent maintenant comme conséquences de notre théorie des lignes bissectrices d'un réseau de lignes tracées sur une surface. Voici l'énumération des principales de ces propriétés :

1° Les racines de l'équation des lignes de courbure sont réelles (n° **4**).

2° Les lignes de courbure d'une surface forment un réseau orthogonal (n° **5**).

3° Les lignes de courbure d'une surface sont bissectrices de l'angle des lignes asymptotiques imaginaires. Cela résulte du théorème énoncé à la fin du n° **4** et de la forme de l'équation des lignes asymptotiques (n° **13**), lesquelles en chaque point sont conjuguées entre elles.

4° L'équation (B) des lignes de courbure de l'hyperboloïde à une nappe (n° **10**) représente aussi les lignes de courbure des deux autres surfaces du second degré, douées de centres; et l'équation des lignes de courbure du paraboloïde hyperbolique, obtenue par le même procédé (n° **9**), représente aussi les lignes de courbure du paraboloïde elliptique.

5° Les lignes de courbure sont aussi bissectrices des réseaux, en nombre infini, donnés par les lignes qui ont même courbure normale, constante ou variable avec les coordonnées du point; ces réseaux sont composés de lignes réelles ou imaginaires; mais une catégorie d'entre eux sera toujours réelle par suite de la valeur que l'on donnera à la courbure normale : cela résulte de l'identité de forme de l'équation (e_2) du n° **11** et de l'équation $(\mathfrak{A})$ du n° **13**, ainsi que de la discussion des racines de ces équations.

6° Il est toujours permis, quand on répudie de la Géométrie les symboles imaginaires, de considérer les lignes de courbure d'une surface comme bissectrices d'un réseau réel de courbes tracées sur la surface. Cela résulte de la proposition 5° du présent Mémoire.

La doctrine que nous venons de développer dans ce numéro et dans ceux qui précèdent sera corroborée par la solution de la question suivante.

15. Problème VI. — *Bissectrices du réseau formé sur la surface de l'ellipsoïde par deux séries de plans parallèles, perpendiculaires au même plan principal et coupant chacun des axes situés dans ce plan sous deux angles supplémentaires.*

Soient les équations de l'ellipsoïde et des deux faisceaux de plans

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad y=\lambda(x-\rho),\quad y=-\lambda(x-\rho_1),$$

dans lesquelles ρ et ρ_1 sont les paramètres variables.

Si l'on fait usage de l'équation (b), on aura

$$\nu+\nu_1=0,\quad \nu\nu_1=-\lambda^2,$$

de sorte que, en ayant égard à ces relations et aux valeurs de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ tirées de l'équation de l'ellipsoïde, l'équation des deux bissectrices sera

$$\frac{c^2xy}{a^2b^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\left[\frac{c^2-(1+\lambda^2)a^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{\lambda^2c^2-(1+\lambda^2)b^2}{b^2}\frac{y^2}{b^2}+(1+\lambda^2)\right]\frac{dy}{dx}+\frac{c^2\lambda^2xy}{a^2b^2}=0.$$

Si l'on pose, pour abrég r,

$$\frac{c^2-(1+\lambda^2)a^2}{a^2}=\frac{1}{A^2},\quad \frac{\lambda^2c^2-(1+\lambda^2)b^2}{b^2}=\frac{1}{B^2},$$

elle deviendra

$$\frac{c^2xy}{a^2b^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\left[\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+(1+\lambda^2)\right]\frac{dy}{dx}+\frac{c^2\lambda^2}{a^2b^2}xy=0.$$

Cette équation ne nous paraît pas intégrable d'une manière générale, quoique nous sachions déterminer une solution particulière; mais, si l'on suppose que les deux faisceaux de plans sont ceux des sections circulaires de l'ellipsoïde et que l'on suppose que c est le demi-axe moyen, ce qui fournit la relation

$$\lambda^2=\frac{b^2}{a^2}\frac{a^2-c^2}{c^2-b^2},$$

on a les conditions

$$1+\lambda^2=\frac{c^2}{a^2}\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2},\quad \frac{1}{A^2}=\frac{c^2}{a^4}\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2},\quad \frac{1}{B^2}=-\frac{c^2}{a^2b^2};$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$\frac{xy}{B^2}\frac{dy^2}{dx^2}-\left[\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+(1+\lambda^2)\right]\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{A^2}=0,$$

laquelle est intégrable. En effet, cette équation est celle de Monge représentant la projection des lignes de courbure de l'ellipsoïde sur le plan des x, y, lequel, dans notre hypothèse, est le plan de la section principale moyenne.

Cette équation s'intègre d'après la méthode due à Monge lui-même, laquelle il est inutile de développer, parce qu'elle est classique.

Nous n'avons donc qu'à signaler les propositions qui résultent de cette analyse.

THÉORÈME I. — *Les bissectrices du réseau formé par les sections circulaires sur une surface du second degré douée de centre sont les lignes de courbure de cette surface.*

Les plans des sections circulaires de l'ellipsoïde sont perpendiculaires au plan de la section principale moyenne; perpendiculairement au plan de la section maximum, il existe une double série de sections circulaires imaginaires; mais, comme ces sections sont conjuguées entre elles, il en résulte que les bissectrices de ce réseau de courbes imaginaires sont réelles et ne sont pas distinctes des lignes de courbure de l'ellipsoïde.

De même, perpendiculairement au plan de la section minimum de l'ellipsoïde, il existe une double série de sections circulaires imaginaires conjuguées, et les bissectrices de ce troisième réseau sont encore les lignes de courbure de l'ellipsoïde; et, comme les mêmes propriétés existent pour les deux autres surfaces du second degré, douées de centre, on a aussi la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Perpendiculairement à l'un des trois axes principaux d'une surface de second degré douée de centre, il existe une double série de sections circulaires, réelles ou imaginaires conjuguées; les bissectrices du réseau formé par une quelconque de ces trois doubles séries sont les lignes de courbure de cette surface.*

Pour se rendre compte de l'existence de ces trois doubles séries de sections circulaires, il suffit de considérer une sphère doublement tangente à la surface du second degré que l'on considère, par exemple à l'ellipsoïde. Si la sphère doublement tangente a son centre situé sur le plan de la section principale moyenne, cette sphère coupe la surface suivant deux sections circulaires réelles, si le double contact de la sphère et de l'ellipsoïde est réel. Si la sphère, doublement tangente à l'ellipsoïde, a son centre situé sur l'un des deux autres plans principaux de l'ellipsoïde, elle coupe la surface suivant deux sections circulaires imaginaires conjuguées, lors même que le double contact de la sphère et de l'ellipsoïde est réel [1].

Il existe deux théorèmes semblables aux précédents pour les surfaces du second degré dépourvues de centre.

THÉORÈME III. — *Les bissectrices du réseau formé par les sections circulaires des surfaces du quatrième degré qui sont les transformées, par rayons vecteurs réciproques, des surfaces du second degré, forment le réseau des lignes de courbure de ces surfaces du quatrième degré.*

16. *Remarques.* — La question que nous venons de traiter justifie la forme de l'équation (e_2) du n° **11**, ainsi que le corollaire V du n° **14**; elle montre, de plus, la fécondité de la méthode des bissectrices pour la détermination des lignes de courbure d'une surface.

En effet, les sections circulaires ellipsoïdales n'appartiennent ni à la catégorie des lignes asymptotiques, ni à la catégorie des courbes dont le rayon de courbure normale est constant, mais bien à la classe des lignes dont le rayon de courbure normale est une fonction déterminée des coordonnées du point. Pour les lignes circulaires ellipsoïdales, ce rayon est proportionnel à l'aire de la section faite par un plan diamétral parallèlement au plan tangent [2], de sorte que l'on a

$$R = b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Donc, en chaque point d'intersection de deux sections circulaires appartenant à deux séries différentes, les bissectrices des angles, intérieur et extérieur, des deux tangentes coïncident avec les tangentes aux lignes de courbure en ce point.

Il suffira donc généralement, pour connaître les lignes de courbure d'une surface, de connaître les deux séries de courbes dont le rayon de courbure normale est la même fonction des coordonnées du point.

---

[1] Voir nos *Recherches sur les surfaces du second ordre*, Ire Partie, p. 32 et suivantes.

[2] *Ibid.*, IIe Partie, p. 54.