JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

SCHIFF

Sur l'équilibre d'un cylindre élastique

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 9 (1883), p. 407-424.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9__407_0>

Sur l'équilibre d'un cylindre élastique;

PAR M. SCHIFF,

Professeur à l'Académie d'Artillerie de Saint-Pétersbourg.

Dans la théorie de l'élasticité des corps solides, on est obligé, afin d'éviter les difficultés qui se présentent dans la résolution des problèmes, de faire certaines hypothèses sur la nature des forces d'élasticité, suivant le cas que l'on considère. Ces hypothèses se rapprochent plus ou moins de la réalité et facilitent l'intégration des équations de l'élasticité.

Dans un grand nombre de cas, ce mode de résolution des problèmes est d'une grande fécondité, les solutions obtenues à l'aide de ces hypothèses étant bien d'accord avec les résultats de l'expérience Mais il y a des cas où les solutions ainsi obtenues se trouvent en contradiction avec l'expérience. Une telle contradiction s'observe, par exemple, quand on traite le problème de la pression des cylindres.

Dans ce cas, les résultats obtenus comme conséquence de l'important et très élégant problème de M. de Saint-Venant diffèrent beaucoup des résultats fournis par l'expérience. Nous allons examiner les causes principales de cette contradiction :

1° Dans la solution du problème de M. de Saint-Venant, on admet que les fibres parallèles à l'axe du cylindre ne subissent pas de pressions normales, ce qui n'est vrai que pour les fibres formant la surface latérale du cylindre; mais rigoureusement on ne peut pas affirmer la même chose lorsqu'il s'agit des fibres situées au milieu du cylindre; celles-ci peuvent subir des pressions normales.

2° Dans la théorie, on admet que l'effort de la pression est dirigé rigoureusement suivant l'axe du cylindre; mais ceci est difficile à réaliser; ordinairement, en dépit de tous les efforts qu'on met à centrer le cylindre, son axe fait un angle, quoique très faible, avec la direction de la pression; de là résulte une flexion, qui est la cause de la différence entre le phénomène observé et les prévisions de la théorie.

3° Entre les plans des bases du cylindre et les plans qui le compriment il se produit un frottement, quelquefois assez considérable, qu'on néglige dans la solution du problème de M. de Saint-Venant.

4° En discutant le problème, on admet que le corps est parfaitement isotrope, ce qui n'est pas tout à fait rigoureux.

On admet ordinairement que la différence entre la théorie et la réalité, dans le cas considéré, provient seulement de la deuxième et de la quatrième des causes indiquées; mais il faut admettre que les autres causes jouent un rôle, sinon plus grand, au moins aussi important.

Je m'en suis assuré dans une série d'expériences sur la pression de cylindres de caoutchouc que j'avais exécutés dans le but d'étudier les particularités de cette substance. Dans ces expériences, j'ai constaté les effets suivants :

1° Le cylindre se change pendant la pression en une sorte de corps de révolution convexe.

2° Quand on retire le corps de la presse, après une pression considérable, les bases du cylindre cessent d'être planes, en prenant la forme de surfaces de révolution. Si, au lieu de cylindres, on comprime des troncs de cône, des segments sphériques ou ellipsoïdaux, ceux-ci, grâce aux concavités qui se forment, se trouvent, quand la pression cesse, fortement attachés à la partie de la presse en contact avec les bases, de sorte que, pour les en arracher, il faut employer un effort assez considérable

3° Si l'on coupe un cylindre ainsi déformé suivant un plan diamétral, ce dernier se change, presque instantanément, en une surface qui rappelle beaucoup celle d'un paraboloïde hyperbolique.

Tous ces phénomènes nous paraissent prouver clairement, au moins pour le caoutchouc, que pendant la pression il se produit en effet, entre les surfaces en contact, un très grand frottement, et que les fibres parallèles à l'axe subissent des pressions normales. J'ai essayé de diminuer le frottement, en graissant les bases du cylindre avec de la stéarine, du talc ou du graphite. Dans ces conditions, la déformation du cylindre était chaque fois notablement moindre et les compressions étaient beaucoup plus grandes que celles qu'on pouvait obtenir avec des cylindres de mêmes dimensions non graissés, soumis aux mêmes efforts, toutes les autres conditions restant identiques d'ailleurs.

Certes, tous ces résultats des essais faits avec le caoutchouc ne peuvent pas être entièrement appliqués au cas de la compression d'un solide élastique; néanmoins on peut affirmer que, même dans un tel corps, il se passe quelque chose d'analogue, les effets ne différant dans les deux cas que par leur degré d'intensité. Ce que je viens de dire s'est trouvé confirmé par des essais que j'avais faits avec un grand nombre d'échantillons de caoutchouc en allant des plus mous aux plus durs jusqu'à l'ébonite. On voyait clairement la transition successive du caoutchouc au solide élastique; les phénomènes indiqués se produisaient toujours. Ces expériences m'ont conduit à m'occuper du problème suivant :

Trouver l'état d'équilibre d'un solide de révolution terminé par deux bases planes soumises à des forces normales appliquées à sa surface latérale et à des forces tangentielles appliquées à ses bases, ces dernières forces étant symétriques par rapport à l'axe.

En rapportant le corps aux coordonnées semi-polaires r, φ et z, il faut admettre que tous les points situés sur la même circonférence de la section transversale reçoivent les mêmes déplacements. Ceux-ci sont indépendants de l'angle φ. Dans ce qui va suivre, nous nous proposons de donner la résolution de notre problème pour le cas d'un cylindre, en nous servant des coordonnées semi-polaires.

Dans une Note postérieure, nous tâcherons de résoudre ce problème dans le cas plus général d'un solide de révolution quelconque; nous serons alors obligé d'employer les coordonnées curvilignes orthogonales, que Lamé désigne sous le nom de *coordonnées isostatiques*, celles-ci étant en effet les plus commodes dans la résolution des problèmes de la théorie de l'élasticité.

Rapportons le solide aux coordonnées semi-polaires et désignons par

u, v et w les déplacements suivant le rayon, la perpendiculaire au plan méridien et l'axe;
λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 les déformations;
p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 les tensions normales et tangentielles.

Comme toutes ces quantités ne dépendent que de leur distance à l'axe et au plan des coordonnées, c'est-à-dire de r et de z, nous aurons, en supposant le cylindre isotrope,

$$p_1 = \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu\theta}{1-2\mu} + \lambda_1\right), \quad p_2 = \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu\theta}{1-2\mu} + \lambda_2\right),$$
$$p_3 = \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu\theta}{1-2\mu} + \lambda_3\right), \quad p_4 = \frac{E}{2(1+\mu)}\lambda_4,$$
$$p_5 = \frac{E}{2(1+\mu)}\lambda_5, \quad p_6 = \frac{E}{2(1+\mu)}\lambda_6$$

où

$$\lambda_1 = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \lambda_2 = \frac{u}{r},$$
$$\lambda_3 = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \lambda_4 = \frac{r\,\partial\left(\frac{v}{r}\right)}{\partial r},$$
$$\lambda_5 = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \lambda_6 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}.$$

E et μ sont les coefficients de l'élasticité longitudinale et transversale et θ la dilatation cubique.

Les équations générales d'équilibre du cylindre seront

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{r}(p_1 - p_2) + \frac{\partial p_6}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial p_4}{\partial r} + \frac{2}{r}p_4 + \frac{\partial p_5}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial p_6}{\partial r} + \frac{1}{r}p_6 + \frac{\partial p_3}{\partial z} = 0,$$

ou bien

$$(1) \qquad \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

Les équations d'équilibre sur les surfaces latérales sont

$$(4) \quad (p_1)_{r=R} = T, \quad (p_1)_{r=R_1} = T_1, \quad (p_4)_{r=R} = (p_4)_{r=R_1} = (p_6)_{r=R} = (p_6)_{r=R_1} = 0,$$

où R et R_1 sont les rayons extérieur et intérieur du cylindre, T et T_1 les pressions normales, rapportées à l'unité de surface et appliquées aux surfaces latérales.

Pour intégrer ces équations, nous poserons

$$u = \frac{\partial u_1}{\partial r}, \quad v = \frac{\partial v_1}{\partial r}, \quad w = \frac{\partial w_1}{\partial r};$$

il vient, en substituant,

$$\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}\right) = 0$$

Comme nous n'avons besoin que des expressions $\frac{\partial u_1}{\partial r}$, $\frac{\partial v_1}{\partial r}$ et $\frac{\partial w_1}{\partial z}$, nous pouvons, en intégrant ces équations, annuler les fonctions arbitraires de l'intégration; nous aurons ainsi

$$(1') \qquad \frac{1}{1-2\mu}\theta + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0,$$

$$(2') \qquad \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} = 0,$$

$$(3') \qquad \frac{1}{1-2\mu}\theta + \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = 0$$

et

$$(4') \qquad \theta = \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}.$$

En retranchant l'équation (3') de (1'), il vient

$$\frac{\partial^2 (u_1 - w_1)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial (u_1 - w_1)}{\partial r} + \frac{\partial^2 (u_1 - w_1)}{\partial z^2} = 0.$$

Cette équation donne, après l'intégration,

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_1 - w_1 &= \alpha(r^2 - 2z^2) + \log r(\beta z + \gamma) \\ &\quad + \delta z + \delta_0 + \sum_i \rho_i (e^{m_i z} + q_i e^{-m_i z}), \end{aligned} \right.$$

où α, β, γ, δ, δ_0, m_i, q_i sont des constantes arbitraires et ρ_i une fonction de r, déterminée par l'équation

$$\frac{d^2 \rho_i}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\rho_i}{dr} + m_i^2 \rho_i = 0.$$

Désormais nous n'écrirons pas l'indice i et nous désignerons les dérivées de ρ par ρ', ρ'', ...

L'équation (1') donne

$$\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\theta = -\frac{\partial^2 (u_1 - w_1)}{\partial z^2} = -2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = \frac{1}{2(1-\mu)}\left[-4\alpha + \sum m^2 \rho (e^{mz} + qe^{-mz})\right].$$

En posant

$$u_1 = u_2 - \frac{1}{4(1-\mu)}\sum r\rho'(e^{mz} + qe^{-mz}) - \frac{\alpha z^2}{1-\mu},$$

nous aurons

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = 0,$$

d'où

$$u_2 = \alpha'(r^2 - 2z^2) + \log r(\beta' z + \gamma') + \delta' z + \delta'_0 + \sum \omega(e^{m'z} + q'e^{-m'z}),$$

où

$$\omega'' + \frac{1}{r}\omega' + m'^2\omega = 0;$$

d'où

$$\begin{aligned} u_1 &= ar^2 + bz^2 + \log r(cz + d) + ez + f \\ &\quad + \sum \omega(e^{m'z} + q'e^{-m'z}) - \frac{1}{4(1-\mu)}\sum r\rho'(e^{mz} + qe^{-mz}), \\ w_1 &= a_1 r^2 + b_1 z^2 + \log r(c_1 z + d_1) + e_1 z + f_1 + \sum \omega(e^{m'z} + q'e^{-m'z}) \\ &\quad - \frac{1}{4(1-\mu)}\sum r\rho'(e^{mz} + qe^{-mz}) - \sum \rho(e^{mz} + qe^{-mz}), \end{aligned}$$

ou bien

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} u &= 2ar + \frac{cz + d}{r} \\ &\quad + \sum \omega'(e^{m'z} + q'e^{-m'z}) + \frac{1}{4(1-\mu)}\sum m^2 r\rho(e^{mz} + qe^{-mz}), \\ w &= 2b_1 z + c_1 \log r + e_1 + \sum m'\omega(e^{m'z} - q'e^{-m'z}) \\ &\quad - \sum m\rho(e^{mz} - qe^{-mz}) - \frac{1}{4(1-\mu)}\sum mr\rho'(e^{mz} - qe^{-mz}). \end{aligned} \right.$$

Prenons le milieu de l'axe pour origine des coordonnées et remarquons que w est une fonction impaire de z; nous aurons, en nous reportant aux conditions d'équilibre sur la surface latérale

$$c = c_1 = e_1 = 0, \quad q' = q = 1.$$

Nous devons encore poser $m' = m$, car autrement nous arriverions à une contradiction.

Posons

$$\omega - \frac{r\rho'}{4(1-\mu)} = \frac{\varepsilon + \rho}{2},$$

où ε doit satisfaire à l'équation

$$(7) \qquad \varepsilon'' + \frac{1}{r}\varepsilon' + m^2\varepsilon = \frac{m^2\rho}{1-\mu}.$$

En l'introduisant dans les expressions de u et w, nous aurons

$$(6') \qquad \begin{cases} u = 2ar + \dfrac{d}{r} + \sum \dfrac{\varepsilon' + \rho'}{2}(e^{mz} + e^{-mz}), \\ w = 2b_1 z + \sum m \dfrac{\varepsilon - \rho}{2}(e^{mz} - e^{-mz}). \end{cases}$$

De (2'), en nous reportant aux équations d'équilibre, nous obtiendrons pour v_1 et v les expressions suivantes :

$$v_1 = \frac{r^2}{2}(a_2 z + b_2) - \left(\frac{a_2 z^3}{3} + b_2 z^2 + c_2 z + d_2\right) + \sum \phi(e^{nz} + q'' e^{-nz}),$$

$$v = r(a_2 z + b_2) + \sum \phi'(e^{nz} + q' e^{-nz}),$$

où

$$\phi'' + \frac{1}{r}\phi' + n^2\phi = 0.$$

Les déformations et les tensions auront pour expressions

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 2a - \frac{d}{r^2} + \sum \frac{\varepsilon'' + \rho''}{2}(e^{mz} + e^{-mz}),\\
\lambda_2 &= 2a + \frac{d}{r^2} + \sum \frac{\varepsilon' + \rho'}{2r}(e^{mz} + e^{-mz}),\\
\lambda_3 &= 2b_1 + \sum m^2 \frac{\varepsilon - \rho}{2}(e^{mz} + e^{-mz}),\\
\theta &= 4a + 2b_1 - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \sum m^2 \rho (e^{mz} + e^{-mz}),\\
\lambda_4 &= \sum r\left(\frac{1}{r}\varphi'\right)'(e^{nz} + q'' e^{-nz}),\\
\lambda_5 &= \sum n\varphi'(e^{nz} - q'' e^{-nz}) + a_2 r,\\
p_1 &= \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{2\mu}{1-2\mu}(2a + b_1) + 2a - \frac{d}{r^2} + \sum\left[\frac{\varepsilon'' + \rho''}{2} - \frac{\mu m^2 \rho}{2(1-\mu)}\right](e^{mz} + e^{-mz})\right\},\\
p_2 &= \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{2\mu}{1-2\mu}(2a + b_1) + 2a - \frac{d}{r^2} + \sum\left[\frac{\varepsilon' + \rho'}{2r} - \frac{\mu m^2 \rho}{2(1-\mu)}\right](e^{mz} + e^{-mz})\right\},\\
p_3 &= \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{2\mu}{1-2\mu}(2a + b_1) + 2b_1 + \sum\left[\frac{m^2(\varepsilon - \rho)}{2} - \frac{\mu m^2 \rho}{2(1-\mu)}\right](e^{mz} + e^{-mz})\right\},\\
p_4 &= \frac{E}{2(1+\mu)} \sum r(r\varphi')'(e^{nz} + q'' e^{-nz}),\\
p_5 &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\sum n\varphi'(e^{nz} - q'' e^{-nz}) + a_2 r\right],\\
p_6 &= \frac{E}{2(1+\mu)} \sum m\varepsilon'(e^{mz} - e^{-mz}).
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations d'équilibre sur les surfaces donnent

$$
\left(\varepsilon'' + \rho'' - \frac{\mu m^2 \rho}{1-\mu}\right)_{r=R} = 0, \quad \left(\varepsilon'' + \rho'' - \frac{\mu m^2 \rho}{1-\mu}\right)_{r=R_1} = 0,
$$

$$
(\varepsilon')_{r=R} = 0, \quad (\varepsilon')_{r=R_1} = 0, \quad \left[r\left(\frac{1}{r}\varphi'\right)'\right]_{r=R} = 0, \quad \left[r\left(\frac{1}{r}\varphi'\right)'\right]_{r=R_1} = 0.
$$

En tenant compte des équations

$$(a) \qquad \rho'' + \frac{1}{r}\rho' + m^2\rho = 0,$$

$$(b) \qquad \varepsilon'' + \frac{1}{r}\varepsilon' + m^2\varepsilon = \frac{m^2\rho}{1-\mu},$$

$$(c) \qquad \psi'' + \frac{1}{r}\psi' + n^2\psi = 0,$$

nous aurons

$$(10) \quad \begin{cases} (\varepsilon')_{r=R} = 0, \quad (\varepsilon')_{r=R_1} = 0, \quad (\rho' + m^2 r\varepsilon)_{r=R} = 0, \quad (\rho' + m^2 r\varepsilon)_{r=R_1} = 0, \\ \left(\frac{2}{r}\psi' + n^2\psi\right)_{r=R} = 0, \quad \left(\frac{2}{r}\psi' + n^2\psi\right)_{r=R_1} = 0. \end{cases}$$

Quant aux intégrales des équations (a), (b) et (c), elles peuvent être exprimées sous la forme de séries convergentes, ou bien sous la forme d'intégrales définies. Ainsi les intégrales de l'équation (a) s'exprimeront de la manière suivante :

$$(11) \quad \begin{cases} \rho = C_1\left[1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i m^{2i} r^{2i}}{2^2.4^2\ldots(2i)^2}\right] \\ \quad + C_2\left\{\log r\left[1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i m^{2i} r^{2i}}{2^2.4^2\ldots(2i)^2}\right] - \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i m^{2i} r^{2i}}{2^2\ldots(2i)^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{i}\right)\right\}, \end{cases}$$

ou bien

$$\rho = C_1 \int_0^\pi \cos(mr\cos\alpha)\, d\alpha + C_2 \int_0^\pi \cos(mr\cos\alpha) \log(r\sin^2\alpha)\, d\alpha \quad (^1),$$

ou

$$\rho = C_1 \int_{-m\sqrt{-1}}^{m\sqrt{-1}} \frac{e^{\alpha r}}{\sqrt{\alpha^2 + m^2}}\, d\alpha + C_2 \int_{-m\sqrt{-1}}^{m\sqrt{-1}} \frac{e^{\alpha r}}{\sqrt{\alpha^2 + m^2}} \log[r(\alpha^2 + m^2)]\, d\alpha \quad (^2).$$

---

(1) POISSON, *Journal de l'École Polytechnique*, t. XII, Cah. XIX; 1823.

(2) S. SPITZER, *Vorlesungen über Differential-Gleichungen*, S. 16; 1878.

Dans le cas d'un cylindre plein les termes contenant les logarithmes disparaissent.

Dans les intégrales des équations (a), (b) et (c) il entre six constantes arbitraires : A, B, C, D, G et H. En outre, m et n restent encore indéterminés. Des équations (10) nous ne pouvons déterminer que les rapports des constantes, par exemple $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \frac{H}{G}$ et, après les avoir éliminés de ces équations, nous en obtenons deux qui peuvent servir à déterminer m et n. Nous indiquons ici la manière de former ces équations seulement dans le cas d'un cylindre plein.

Nous nous réservons de donner dans un autre Mémoire la solution complète de notre problème pour le cas d'un vase cylindrique clos, ce dernier cas étant d'une grande importance dans les applications. Du reste, à l'exception des équations servant à déterminer m et n, toutes les autres sont les mêmes dans les deux cas.

Dans le cas d'un cylindre plein, nous avons

$$\rho = \mathrm{AK}; \quad \omega = \mathrm{BK}; \quad \varepsilon = (2\mathrm{B} - \mathrm{A})\mathrm{K} - \frac{\mathrm{A} r \mathrm{K}'}{2(1-\mu)}; \quad \phi = \mathrm{G}'\mathrm{M},$$

où A, B et G sont des constantes arbitraires, K et M des intégrales de (11) ou de (12), qui ne renferment pas de logarithmes. Pour $r = \mathrm{R}$, l'équation (10) devient

$$(d) \qquad (2\mathrm{B} - \mathrm{A})\mathrm{K}' + \frac{\mathrm{A} m^2 \mathrm{RK}}{2(1-\mu)} = 0,$$

$$(e) \qquad \mathrm{A}\left[1 - \frac{m^2 \mathrm{R}^2}{2(1-\mu)}\right]\mathrm{K}' + (2\mathrm{B} - \mathrm{A}) m^2 \mathrm{RK} = 0,$$

$$(f) \qquad 2\mathrm{M}' + n^2 \mathrm{RM} = 0;$$

de (d) et de (e) nous pouvons déterminer m et le rapport $\frac{2\mathrm{B} - \mathrm{A}}{\mathrm{A}}$. En effet, nous en tirons

$$(g) \qquad [2(1-\mu) - m^2 \mathrm{R}^2]\mathrm{K}'^2 - m^4 \mathrm{R}^2 \mathrm{K}^2 = 0,$$

et

$$(h) \qquad \left(\frac{2\mathrm{B} - \mathrm{A}}{\mathrm{A}}\right)^2 = 2(1-\mu) - m^2 \mathrm{B}^2.$$

Pour représenter l'équation (g) sous forme d'une série, nous employons la méthode suivante, que nous empruntons à M. Kirchhoff (¹).

Posons $K^2 = H_1$, $K'^2 = H_2$; alors, en vertu de (a), H_1 et H_2 se déterminent des équations suivantes :

$$(rH_1)''' + 4m^2(rH_1)' + \frac{H'_1}{r} = 0,$$

$$(rH_2)''' + 4m^2(rH_2)' - \frac{3H'_2}{r} = 0,$$

et, en intégrant ces équations,

$$K^2 = H_1 = \left[1 + \sum \frac{(-4)^i 3.5\ldots(2i-1)}{2^3.4^3\ldots(2i)^3} m^{2i} r^{2i}\right],$$

$$K'^2 = H_2 = \frac{m^2 r^2}{4}\left[1 + \sum_i \frac{(-4)^i.3.5\ldots(2i+1)}{2.4^2.6^3\ldots(2i)^3(2i+2)^2(2i+4)} m^{2i} r^{2i}\right].$$

Introduisons dans (g) les expressions obtenues :

$$\begin{aligned}[2(1-\mu) - n^2R^2]\left[1 + \sum_i \frac{(-4)^i.3.5\ldots(2i+1)m^{2i}R^{2i}}{2.4^2.6^3\ldots(2i)^3(2i+2)^2(2i+4)}\right]& \\ - 4\left[1 + \sum_i \frac{(-4)^i.3.5\ldots(2i-1)m^{2i}R^{2i}}{2^3.4^3\ldots(2i)^3}\right] &= 0.\end{aligned}$$

On voit que les valeurs de m^2R^2 ne dépendent ni des forces agissantes, ni des dimensions du cylindre; elles dépendent uniquement du coefficient μ, c'est-à-dire de la nature du cylindre.

Nous allons déterminer les autres constantes arbitraires. Pour cela, démontrons d'abord que

$$\int_{R_1}^{R} r(\rho'_1 \varepsilon'_2 + \rho'_2 \varepsilon'_1)\, dr = 0,$$

où ρ'_1, ρ'_2, ε'_1 et ε'_2 sont les valeurs de ces fonctions pour des valeurs différentes de m, m_1 et m_2.

(¹) C. Kirchhoff, *Gesammelte Abhandlungen*, S. 264; 1882.

En effet, l'équation $\varepsilon'' + \frac{1}{r}\varepsilon' + m^2\varepsilon = \frac{m^2\rho}{1-\mu}$ donne

$$r\left[\frac{1}{r}(r\varepsilon')'\right]' = r\left(\frac{m^2\rho'}{1-\mu} - m^2\varepsilon'\right). \tag{13}$$

Mais

$$\int_{R_1}^{R} r\left[\frac{1}{r}(r\varepsilon_1')'\right]'\varepsilon_2'\,dr = [\varepsilon_2'(r\varepsilon_1')']_{R_1}^{R} - [\varepsilon_1'(r\varepsilon_2')']_{R_1}^{R} + \int_{R_1}^{R}\varepsilon_1' r\left[\frac{1}{r}(r\varepsilon_2')'\right]'dr.$$

En se reportant aux équations (10), on a

$$\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_2'\left[\frac{1}{r}(r\varepsilon_1')'\right]'dr = \int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1'\left[\frac{1}{r}(r\varepsilon_2')'\right]'dr.$$

Grâce à cette égalité, nous déduisons de (13),

$$(m_1^2 - m_2^2)\int_{R_1}^{R}\varepsilon_1'\varepsilon_2' r\,dr = \frac{-1}{1-\mu}\int_{R_1}^{R} r(m_2^2\rho_2'\varepsilon_1' - m_1^2\rho_1'\varepsilon_2')\,dr. \tag{I}$$

D'un autre côté, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1'\varepsilon_2'\,dr &= (\varepsilon_1 r\varepsilon_2')_{R_1}^{R} - \int_{R_1}^{R}\varepsilon_1(r\varepsilon_2')'\,dr\\ &= m_2^2\int_{R_1}^{R}\varepsilon_1\left(r\varepsilon_2 - \frac{r\rho_2}{1-\mu}\right)dr\\ &= m_2^2\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1\varepsilon_2\,dr + \frac{1}{1-\mu}\int_{R_1}^{R}\varepsilon_1(r\rho_2')'\,dr,\end{aligned}$$

ou

$$\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1'\varepsilon_2' = m_2^2\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1\varepsilon_2\,dr + \frac{1}{1-\mu}(r\varepsilon_1\rho_1')_{R_1}^{R} - \frac{1}{1-\mu}\int_{R_1}^{R} r\rho_2'\varepsilon_1'\,dr.$$

De la même manière, nous obtiendrons

$$\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1'\varepsilon_2'\,dr = m_1^2\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1\varepsilon_2\,dr + \frac{1}{1-\mu}(r\varepsilon_2\rho_1')_{R_1}^{R} - \frac{1}{1-\mu}\int_{R_1}^{R} r\rho_1'\varepsilon_2'\,dr.$$

En multipliant la première égalité par m_1^2, la seconde par m_2^2, et en les retranchant l'une de l'autre, nous avons

$$(\mathrm{II})\quad\begin{cases}(m_1^2 - m_2^2)\displaystyle\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1\varepsilon_2'\,dr = \frac{1}{1-\mu}(r\rho_2'\varepsilon_1 m_1^2 - r\rho_1'\varepsilon_2 m_2^2)_{R_1}^{R}\\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{1-\mu}\displaystyle\int_{R_1}^{R} r(m_1^2\rho_2'\varepsilon_1' - m_2^2\rho_1'\varepsilon_2')\,dr.\end{cases}$$

Mais, en tenant compte des équations (10),

$$(\rho' + m^2 r\varepsilon)_{r=R_1} = (\rho' + m^2 r\varepsilon)_{r=R} = 0,$$

nous en concluons que l'expression entre crochets est égale à zéro. On a, en retranchant ensuite (I) de (II),

$$\int_{R_1}^{R}(\rho_1'\varepsilon_2' + \rho_2'\varepsilon_1')r\,dr = 0.$$

De la même manière, on peut démontrer que $\int_{R_1}^{R} r\phi_1'\phi_2'\,dr = 0$, où ϕ_1' et ϕ_2' sont deux valeurs correspondantes de cette fonction pour deux valeurs différentes de n_1 et n_2, qu'on tire des équations

$$(\mathrm{A})\qquad (2\phi' + n^2 r\phi)_{r=R} = 0,\quad (2\phi' + n^2 r\phi)_{r=R_1} = 0.$$

En effet, nous avons

$$(r\phi')' = -n^2 r\phi;$$

alors

$$\int_{R_1}^{R} r\phi_1'\phi_2'\,dr = (r\phi_1'\phi_2)_{R_1}^{R} + n_2^2\int_{R_1}^{R} r\phi_1\phi_2\,dr.$$

De la même manière,

$$\int_{R_1}^{R} r\phi_1'\phi_2'\,dr = (r\phi_1'\phi_2)_{R_1}^{R} + n_1^2\int_{R_1}^{R} r\phi_1\phi_2\,dr.$$

En multipliant la première par n_1, la seconde par n_2^2 et en les retranchant, nous obtiendrons

$$(n_1^2 - n_2^2)\int_{R_1}^{R} r\phi_1'\phi_2'\,dr = [r(n_1^2\phi_1\phi_2' - n_2^2\phi_2\phi_1')]_{R_1}^{R}.$$

Mais, à cause des équations (A), la seconde partie s'annule pour les deux limites, d'où

$$\int_{R_1}^{R} r\psi'_1\psi'_2\,dr = 0.$$

Pour déterminer les constantes arbitraires, remarquons d'abord que, v étant une fonction impaire de z, $q'' = -1$.

Des équations d'équilibre sur les surfaces latérales, nous tirons

$$d = \frac{1+\mu}{E}\,\frac{R^2R_1^2(T-T_1)}{R^2-R_1^2} \quad \text{et} \quad 2a + 2\mu b_1 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)R^2T - R_1^2T_1}{E(R^2-R_1^2)}.$$

Les équations d'équilibre des forces agissant sur les plans des bases nous donnent

$$\text{(K)} \qquad P = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R} p_3 r\,dr\,d\varphi \quad \text{et} \quad M_z = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R} r^2 p_5\,dr\,d\varphi,$$

où P est la pression uniforme appliquée normalement à ces plans, et M_z le moment du couple qui produit la torsion du cylindre autour de l'axe z.

Si l'on introduit dans ces expressions les valeurs de p_3 et p_5 tirées de (3), il est aisé de voir, tenant compte des équations (10), que

$$\int_{R_1}^{R}\sum \frac{m^2}{2}(e^{ml}+e^{-ml})\left(\varepsilon - \frac{\rho}{1-\mu}\right) r\,dr = 0$$

et

$$\int_{R_1}^{R}\sum n(e^{nl}+e^{-nl})r^2\psi'\,dr = 0.$$

Alors les équations (K) nous donnent

$$4\mu a + 2b(1-\mu) = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)P}{E\pi(R^2-R_1^2)}, \quad a_2 = \frac{4(1+\mu)M_z}{E\pi(R^4-R_1^4)}.$$

En remarquant que

$$2a + 2\mu b_1 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\,\frac{R^2T - R_1^2T_1}{R^2-R_1^2},$$

nous obtenons

$$a = \frac{1}{2E\pi(R^2 - R_1^2)}[(1-\mu)\pi(R^2T - R_1^2T_1) - \mu P],$$

$$b_1 = \frac{1}{2E\pi(R^2 - R_1^2)}[P - 2\mu\pi(R^2T - R_1^2T_1)].$$

Pour la détermination complète de toutes les constantes arbitraires, nos équations d'équilibre ne nous donnent plus rien. Et cela se comprend, car nous n'avons soumis à aucune condition les forces tangentielles agissant sur les bases du cylindre, soit dans la direction du rayon, soit perpendiculairement au rayon.

Si nous soumettons les forces p_6, p_5 et la dilatation cubique θ, ou mieux $\int_0^z \frac{\partial\theta}{\partial r}dz$, à la condition de devenir en fonctions données de r pour $z = l$, c'est-à-dire sur les bases du cylindre, $2l$ étant sa hauteur : le problème sera complètement résolu.

En effet, des équations d'équilibre sur les surfaces latérales, nous avons obtenu les rapports $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \frac{H}{G}$ des constantes arbitraires, qui entrent dans les fonctions ε et ψ.

Si nous nous donnons encore

$$\sum m\varepsilon'(e^{ml} - e^{-ml}) = f(r),$$

$$\sum m\rho'(e^{ml} - e^{-ml}) = F(r)$$

et

$$\sum n\psi'(e^{nl} + e^{-nl}) = \varphi(r) \quad (^1).$$

Alors, en nous servant des formules

$$\int_{R_1}^{R} r(\rho_1'\varepsilon_2' + \rho_2'\varepsilon_1')\,dr = 0 \quad \text{et} \quad \int_{R_1}^{R} r\psi_1'\psi_2'\,dr = 0,$$

---

(1) Si l'on admet que $\int_{R_1}^{R} \rho_1'\varepsilon_2' r\,dr = \int_{R_1}^{R} \rho_2'\varepsilon_1' r\,dr = 0$, il suffit de deux conditions pour que le problème soit complètement résolu.

nous obtenons immédiatement

$$A_j = \frac{\displaystyle\int_{R_1}^{R} [\delta'_j f(r) + \Delta'_j F(r)] r\,dr}{2m_j(e^{m_j l} - e^{-m_j l})\displaystyle\int_{R_1}^{R} \delta'_j \Delta'_j r\,dr},$$

$$G_j = \frac{\displaystyle\int_{R_1}^{R} \varphi(r)\gamma'_j r\,dr}{n_j(e^{n_j} + e^{-n_j})\displaystyle\int_{R_1}^{R} \gamma'^2_j r\,dr},$$

où

$$\delta'_j = \frac{\varepsilon'_j}{A_j}, \quad \Delta'_j = \frac{\varepsilon'_j}{A_j}, \quad \gamma'_j = \frac{\Phi_j}{G_j}.$$

En introduisant les expressions obtenues dans nos formules, nous arrivons finalement aux expressions suivantes pour les déplacements :

$$u = \frac{r}{\pi E(R^2 - R_1^2)}[(1-\mu)\pi(R^2T - R_1^2T) - \mu P] + \frac{(1+\mu)R^2R_1^2(T - T_1)}{E(R^2 - R_1^2)r}$$
$$+ \sum \frac{\delta'_j + \Delta'_j}{4m_j}\frac{e^{m_j z} + e^{-m_j z}}{e^{m_j l} - e^{-m_j l}}\frac{\displaystyle\int_{R_1}^{R} r[\delta'_j f(r) + \Delta'_j F(r)]\,dr}{\displaystyle\int_{R_1}^{R} \delta'_j\Delta'_j r\,dr}$$

$$v = \frac{4(1+\mu)M_z}{E\pi(R^4 - R_1^4)} rz + \sum_j \frac{\gamma'_j}{n_j}\frac{e^{n_j z} - e^{-n_j z}}{e^{n_j l} + e^{-n_j l}}\frac{\displaystyle\int_{R_1}^{R} \varphi(r)\gamma'_j r\,dr}{\displaystyle\int_{R_1}^{R} \gamma'^2_j r\,dr}$$

$$w = \frac{z}{E\pi(R^2 - R_1^2)}[P - 2\mu\pi(R^2T - R_1^2T_1)]$$
$$+ \sum_j \frac{\Delta_j - \delta_j}{4}\frac{e^{m_j z} - e^{-m_j z}}{e^{m_j l} - e^{-m_j l}}\frac{\displaystyle\int_{R_1}^{R} r[\delta'_j f(r) + \Delta'_j F(r)]\,dr}{\displaystyle\int_{R_1}^{R} \delta'_j\Delta'_j r\,dr}.$$

Si, dans le cas d'un cylindre plein, on pose

$$T = 0, \quad f(r) = f_1 \frac{P}{\pi R^2}\left(e^{a\frac{l}{R}} - e^{-a\frac{l}{R}}\right), \quad F(r) = f_2 \frac{P}{\pi R^2}\left(e^{a\frac{l}{R}} - e^{-a\frac{l}{R}}\right),$$

et si l'on se donne la plus grande valeur de λ_3, nous obtiendrons la formule suivante pour les dimensions du cylindre comprimé :

$$P = \frac{A\pi R^2}{1 + \sum B\left(\dfrac{e^{k\frac{l}{R}} + e^{-k\frac{l}{R}}}{e^{k\frac{l}{R}} - e^{-k\frac{l}{R}}}\right)\left(e^{n\frac{l}{R}} - e^{-n\frac{l}{R}}\right)}.$$

L. Gordon a donné, pour le même but, la formule empirique suivante :

$$P = \frac{A_1\pi R^2}{1 + B\left(\dfrac{l}{R}\right)^2}.$$

On voit, d'après les expressions de u, v et w, que, dans le cas que nous considérons, il se passe en effet quelque chose qui rappelle les phénomènes que j'ai observés dans mes expériences sur le caoutchouc. En outre, ces expressions des déplacements nous donneront la possibilité d'obtenir des formules plus exactes pour calculer la résistance d'un vase cylindrique clos, soumis à des pressions normales, car dans ce dernier cas toute la question se réduit à la détermination des fonctions inconnues $f(r)$, $F(r)$ et $\varphi(r)$; or on pourra trouver celles-ci en considérant chaque secteur cylindrique élémentaire comme une poutre régulièrement chargée et tendue en même temps par les bases ou couvercles du vase cylindrique.