JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

É. WEST

Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 9 (1883), p. 301-406.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9__301_0>

Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski

(QUATRIÈME NOTE);

PAR M. É. WEST.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES OU AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES.

Soit y une fonction de ν variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$: supposons que ces quantités soient liées par une relation

$$\varphi(y) = 0, \tag{65}$$

qui contient aussi des différences ou des différentielles partielles de la fonction y, jusqu'à l'ordre μ inclusivement, et cherchons à déterminer généralement la valeur d'une fonction F de la quantité y considérée comme inconnue et donnée explicitement.

En suivant la marche que nous avons déjà indiquée, nous déterminerons une fonction w des variables indépendantes, se rapprochant autant que possible de la fonction y dans les limites que l'on considère, et la fonction cherchée sera donnée par l'expression (19), savoir :

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} F(y) = {} & F(w) - \varphi(w)\frac{\left(\dfrac{dF(w)}{dw}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dw}\right)} \\ & + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 \frac{\left[\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dw}\right)\left(\dfrac{d^2F(w)}{dw^2}\right) - \left(\dfrac{d^2\varphi(w)}{dw^2}\right)\left(\dfrac{dF(w)}{dw}\right)\right]}{\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dw}\right)^3} - \ldots \end{aligned}\right.$$

Il ne figure ici que les dérivées des fonctions F et φ par rapport à la quantité w; la question se réduit ainsi au calcul de ces dérivées. On a donc

$$(67)\qquad \left(\frac{d\varphi(w)}{dw}\right) = \sum\left(\frac{d\varphi(w)}{dx_\alpha}\right)\frac{1}{\frac{dw}{dx_\alpha}},$$

$$(67)'\qquad \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2}\right) = \sum\left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx_\alpha dx_\beta}\right)\frac{1}{\frac{dw}{dx_\alpha}\,\frac{dw}{dx_\beta}} - \sum\left(\frac{d\varphi(w)}{dx_\alpha}\right)\left(\frac{d^2 w}{dx_\alpha dx_\beta}\right)\frac{1}{\left(\frac{dw}{dx_\alpha}\right)^2\frac{dw}{dx_\beta}},$$

....

Le développement de $(67)'$ s'obtient évidemment en faisant varier de 1 à ν les indices α et β, indépendamment l'un de l'autre.

Nous donnerons plus tard, d'après Wronski, l'expression générale de ces dérivées; pour l'instant les expressions (67), $(67)'$ suffisent; on saurait facilement déterminer la dérivée troisième, s'il était nécessaire.

En substituant les valeurs précédentes des dérivées de $\varphi(w)$, ainsi que les valeurs analogues de $F(w)$, dans l'expression (66), on a

$$(68)\qquad F(y) = F(w) - \varphi(w)\,\frac{\sum\left(\frac{dF(w)}{dx_\alpha}\right)\frac{1}{\frac{dw}{dx_\alpha}}}{\sum\left(\frac{d\varphi(w)}{dx_\alpha}\right)\frac{1}{\frac{dw}{dx_\alpha}}} + \ldots,$$

et l'on peut obtenir ainsi une fonction déterminée d'une intégrale de l'équation (65) supposée aux différences ou aux différentielles partielles. Nous allons maintenant achever les calculs.

Considérons une différence partielle de y d'un certain ordre ϖ : cette différence s'écrit

$$\Delta^{\varpi}_{x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_\nu^{\sigma_\nu}}y \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\Delta^{\varpi} y}{\Delta x_1^{\sigma_1}\Delta x_2^{\sigma_2}\ldots\Delta x_\nu^{\sigma_\nu}}\right)\Delta x_1^{\sigma_1}\Delta x_2^{\sigma_2}\ldots\Delta x_\nu^{\sigma_\nu},$$

en supposant

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi.$$

Il est préférable de choisir la seconde notation comme étant plus conforme à celle des différentielles, de sorte que, en supposant les différences infiniment petites, on a, suivant la notation ordinaire,

$$\left(\frac{d^m y}{dx_1^{\sigma_1} dx_2^{\sigma_2} \ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}}\right) dx_1^{\sigma_1} dx_2^{\sigma_2} \ldots dx_\nu^{\sigma_\nu};$$

la quantité entre parenthèses est alors le ceofficient différentiel ou la dérivée partielle.

D'après cela, en ordonnant l'équation proposée par rapport aux différences ou aux dérivées partielles de l'inconnue, on aperçoit qu'elle se compose, pour les dérivées par exemple, de termes de la forme

$$\frac{d^m y}{dx_1^{\sigma_1} dx_2^{\sigma_2} \ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}} \mathrm{H}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu),$$

$\mathrm{H}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)$ désignant uné certaine fonction des variables indépendantes, de l'inconnue et de ses dérivées partielles; ce coefficient H peut être déterminé de plusieurs manières différentes : nous devons supposer ici que le choix a été fait de la manière la plus convenable par rapport à la question que l'on traite. Par suite, l'équation (65), qui est la réunion ou l'agrégat de tous ces termes, peut s'écrire

$$(69)\quad \mathrm{Agr}^\mu \left| \frac{d^m y}{dx_1^{\sigma_1} dx_2^{\sigma_2} \ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}} \mathrm{H}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu) \right| = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu),$$

avec la condition

$$(69)' \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi,$$

équation indéterminée qui doit être satisfaite en nombres entiers positifs, ϖ variant de zéro à μ; ψ est une fonction composée uniquement des variables indépendantes.

Exemple. — Supposons $\mu = 2$ et $\nu = 3$, en appliquant la méthode de Hindenbourg à la résolution de l'équation indéterminée (69)', on successivement

$$\varpi = 0, \quad \varpi = 1, \quad \varpi = 2.$$

Pour $\varpi = 0$, on a

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0.$$

Pour $\varpi = 1$, on a

$$\sigma_1 = 1,\quad \sigma_2 = 0,\quad \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_1 = 0,\quad \sigma_2 = 1,\quad \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_1 = 0,\quad \sigma_2 = 0,\quad \sigma_3 = 1.$$

Pour $\varpi = 2$, on a

$$\sigma_1 = 2,\quad \sigma_2 = 0,\quad \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_1 = 1,\quad \sigma_2 = 1,\quad \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_1 = 1,\quad \sigma_2 = 0,\quad \sigma_3 = 1,$$
$$\sigma_1 = 0,\quad \sigma_2 = 2,\quad \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_1 = 0,\quad \sigma_2 = 1,\quad \sigma_3 = 1,$$
$$\sigma_1 = 0,\quad \sigma_2 = 0,\quad \sigma_3 = 2.$$

L'agrégat développé dans cet ordre est

$$\begin{aligned} & y\mathrm{H}(0,0,0) + \frac{dy}{dx_1}\mathrm{H}(1,0,0) + \frac{dy}{dx_2}\mathrm{H}(0,1,0) + \frac{dy}{dx_3}\mathrm{H}(0,0,1) \\ & + \frac{d^2y}{dx_1^2}\mathrm{H}(2,0,0) + \frac{d^2y}{dx_1\,dx_2}\mathrm{H}(1,1,0) + \frac{d^2y}{dx_1\,dx_3}\mathrm{H}(1,0,1) \\ & + \frac{d^2y}{dx_2^2}\mathrm{H}(0,2,0) + \frac{d^2y}{dx_2\,dx_3}\mathrm{H}(0,1,1) + \frac{d^2y}{dx_3^2}\mathrm{H}(0,0,2). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant déterminer l'*équation transformée*, dans le cas général, par l'introduction d'une quantité arbitraire ω, savoir :

$$(70)\qquad \mathrm{Agr}^{\mu}\frac{d^m y}{dx_1^{\sigma_1}\ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}}\left|\frac{\mathrm{H}(\sigma_1\ldots\sigma_\nu)}{\mathrm{A}(\sigma_1\ldots\sigma_\nu)}\right|^{\omega}\mathrm{A}(\sigma_1\ldots\sigma_\nu) = \left|\frac{\psi(x_1\ldots x_\nu)}{\chi}\right|^{\omega}\chi,$$

avec la condition $(69)'$ relative aux indices. Les quantités A sont des quantités constantes que l'on obtient en remplaçant les quantités variables des coefficients H par leurs *valeurs moyennes*, c'est-à-dire par des quantités constantes qui représentent aussi bien que possible les valeurs autour desquelles oscillent les quantités variables dans les limites que l'on considère. De cette façon, les quantités A sont respectivement les valeurs moyennes des coefficients H, ces lettres étant accompagnées de leurs indices, et χ est la valeur moyenne de $\psi(x_1\ldots x_\nu)$.

L'équation (70) est telle que, pour $\omega = 1$, on reproduit l'équation proposée, et pour $\omega = 0$, on obtient l'*équation réduite*

$$(71)\qquad \mathrm{Agr}^{\mu}\left[\frac{d^{\varpi} w}{dx_1^{\sigma_1}\ldots dx_{\nu}^{\sigma_{\nu}}} A(\sigma_1 \ldots \sigma_{\nu})\right] = \chi,$$

avec la condition (69)'. Nous remplaçons ici la variable y par w pour éviter de confondre les deux inconnues provenant d'équations différentes. L'équation (71) est une équation linéaire à coefficients constants, toujours intégrable par des moyens connus : il est donc évident que l'intégration de l'équation proposée (69), qui se déduit de celle de l'équation réduite (71), peut toujours être effectuée quelle que soit la manière dont les dérivées partielles entrent dans les coefficients. L'intégrale ainsi obtenue est l'intégrale générale de l'équation (69), car l'équation réduite (71) introduit μ fonctions arbitraires sans conditions particulières; c'est le caractère d'une intégrale générale, tandis que les intégrales singulières dépendent de certaines conditions spéciales. D'après cela, les intégrales singulières s'obtiendront en formant des équations réduites autres que l'équation (71), et l'on sera guidé dans cette formation par le problème proposé lui-même.

Il reste, pour terminer la question, à donner les formules d'intégration de l'équation linéaire à coefficients constants (71); nous ne pouvons d'autant moins nous en dispenser que ces formules sont peu usitées et qu'elles ne se trouvent guère que dans des Mémoires originaux.

On peut toujours supposer $\chi = 0$, dans l'équation (71), parce que l'inconnue w déterminée dans ce cas ne diffère de l'inconnue provenant de la supposition χ différent de zéro que par un polynôme entier en $x_1, x_2, \ldots$ dont les coefficients sont de simples constantes, ou des constantes périodiques en considérant des différences finies. Si le coefficient de y n'est pas nul, le polynôme se réduit à une constante; si le coefficient de y est nul, le polynôme est du premier degré en $x_1, x_2, \ldots$; si de plus le coefficient de $\frac{dy}{dx_1}$ est nul, le polynôme contient en outre un terme en x_1^2, etc.

Cas des différences. — Soit donc l'équation linéaire à coefficients constants et aux différences partielles d'ordre μ

$$\mathrm{Agr}^{\mu}[\Delta^{\varpi}_{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_\nu^{\sigma_\nu}} w\, \mathrm{A}(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_\nu)] = 0, \tag{72}$$

avec la condition

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_\nu = \varpi, \tag{72'}$$

ϖ variant de zéro à μ.

Formons, au moyen des coefficients de l'équation proposée, l'équation caractéristique

$$\mathrm{B}_\mu n^\mu + \mathrm{B}_{\mu-1} n^{\mu-1} + \dots + \mathrm{B}_0 = 0, \tag{73}$$

où les coefficients B sont composés de la manière suivante : notons par u_1, u_2, ..., u_ν les accroissements des variables indépendantes x_1, x_2, ..., x_ν, accroissements que l'on écrit ordinairement Δx_1, Δx_2, ..., Δx_ν, et désignons par $p_2, p_3, \dots p_\nu$, $\nu - 1$ quantités arbitraires, en faisant, pour simplifier,

$$p_2^{u_2} = q_2, \quad p_3^{u_3} = q_3, \quad \dots, \quad p_\nu^{u_\nu} = q_\nu; \tag{74}$$

le coefficient général de l'équation caractéristique est alors

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{B}_{\mu-\lambda} = \mathrm{Agr}[&(q_2 - 1)^{\sigma_2}(q_3 - 1)^{\sigma_3} \dots (q_\nu - 1)^{\sigma_\nu} \mathrm{A}(\mu - \lambda, \sigma_2 \dots \sigma_\nu)] \\ &- \frac{\mu - \lambda + 1}{1} \mathrm{B}_{\mu-\lambda+1} + \frac{(\mu - \lambda + 1)(\mu - \lambda + 2)}{1.2} \mathrm{B}_{\mu-\lambda+2} - \dots \\ &+ (-1)^\lambda \frac{(\mu - \lambda + 1) \dots (\mu - 1)\mu}{1.2 \dots \lambda} \mathrm{B}_\mu, \end{aligned}\right. \tag{75}$$

avec la condition relative à l'agrégat

$$\sigma_2 + \sigma_3 + \dots + \sigma_\nu = \tau, \tag{75'}$$

τ variant de zéro à λ. L'inconnue w a ensuite pour expression

$$w = \mathrm{S}[p_2^{x_2} p_3^{x_3} \dots p_\nu^{x_\nu}(\mathrm{M}_1 n_1^\zeta + \mathrm{M}_2 n_2^\zeta + \dots + \mathrm{M}_\mu n_\mu^\zeta)], \tag{76}$$

en faisant $\zeta = \frac{x_1}{u_1}$, et M_1, M_2, ..., M_ν étant μ constantes d'intégration;

S indique que la somme d'un nombre quelconque de quantités pareilles à celle qui est entre crochets satisfait à l'équation (72), et les quantités arbitraires $p_2, p_3, \ldots, p_\nu$ peuvent varier à volonté d'un terme à l'autre.

Nous donnerons plus tard le moyen de parvenir directement à l'expression (76); pour l'instant, il suffit de vérifier qu'elle satisfait à l'équation proposée. Voici comment on peut effectuer cette vérification.

Posons $m = n - 1$, et, au lieu de l'équation caractéristique (73), considérons l'équation

$$(77) \qquad C_\mu m^\mu + C_{\mu-1} m^{\mu-1} + \ldots + C_0 = 0;$$

on déduirait facilement de (75) que le coefficient général est

$$(78) \quad C_{\mu-\lambda} = \operatorname{Agr}\left[(q_2 - 1)^{\sigma_2}(q_3 - 1)^{\sigma_3}\ldots(q_\nu - 1)^{\sigma_\nu} A(\mu - \lambda, \sigma_2 \ldots \sigma_\nu)\right],$$

avec la condition (75)'.

Prenons maintenant les différences de w, d'après l'expression (76), en négligeant la somme S, et portons-les dans l'équation (72); nous aurons

$$\begin{aligned}\operatorname{Agr}[&p_2^{x_2}\ldots p_\nu^{x_\nu}(q_2 - 1)^{\sigma_2}\ldots(q_\nu - 1)^{\sigma_\nu}\\ &\times(M_1 n_1^\zeta m_1^{\sigma_1} + \ldots + M_\mu n_\mu^\zeta m_\mu^{\sigma_1}) A(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)] = 0,\end{aligned}$$

avec la condition (72)'; puis, ordonnant par rapport aux quantités qui contiennent les exponentielles n^ζ, et tenant compte de (78), il vient

$$\begin{aligned}&p_2^{x_2}\ldots p_\nu^{x_\nu}(M_1 n_1^\zeta m_1^\mu + \ldots + M_\mu n_\mu^\zeta m_\mu^\mu) C_\mu\\ &\quad + p_2^{x_2}\ldots p_\nu^{x_\nu}(M_1 n_1^\zeta m_1^{\mu-1} + \ldots + M_\mu n_\mu m_\mu^{\mu-1}) C_{\mu-1} + \ldots\\ &\qquad + p_2^{x_2}\ldots p_\nu^{x_\nu}(M_1 n_1^\zeta + \ldots + M_\mu n_\mu^\zeta) C_0 = 0.\end{aligned}$$

En vertu de (77), cette expression est nulle identiquement, ce qu'il fallait montrer. Il est évident que cette vérification, ayant lieu pour un terme de la somme S, a lieu aussi pour un nombre quelconque de termes composant cette somme.

Revenons à l'expression (76) : cette expression fondamentale ne peut être d'aucune utilité, sous la forme où elle se présente, parce qu'elle contient les racines n de l'équation caractéristique (73), laquelle a ses coefficients formés de quantités arbitraires $p_2, p_3, \ldots, p_\nu$; il en résulte que, la nature réelle ou imaginaire des racines n ne pouvant être précisée, ces racines ne peuvent entrer pratiquement dans les calculs (à cause aussi de la difficulté que présenterait la résolution d'une équation algébrique). Il est donc de toute nécessité de transformer l'expression (76); le seul moyen dont on puisse faire usage ici, d'une façon générale, est la transformation par les fonctions symétriques.

Pour cela, opérons comme nous l'avons fait quand il s'agissait de différences totales; posons, comme l'indique Wronski,

$$n^\nu = Z_1 + Z_2 n + \ldots + Z_\mu n^{\mu-1},$$

et donnons à n les μ valeurs qui satisfont à l'équation (73), nous obtenons ainsi μ équations linéaires dont les fonctions Z sont les inconnues.

La résolution de ces équations donne, en supposant qu'il n'y ait pas de racines égales,

$$(79) \qquad Z_\lambda = \frac{\omega(n_1^0 n_2^1 \ldots n_{\lambda-1}^{\lambda-2} n_\lambda^\nu n_{\lambda+1}^\lambda \ldots n_\mu^{\mu-1})}{\omega(n_1^0 n_2^1 \ldots n_\lambda^{\lambda-1} \ldots n_\mu^{\mu-1})}.$$

Ces fonctions Z sont bien des fonctions symétriques des quantités n : elles sont donc exprimables au moyen des coefficients de l'équation (73), comme nous l'avons déjà reconnu précédemment. En ordonnant le numérateur de l'expression (79) par rapport à n_λ^ν, on obtient

$$Z_\lambda = \frac{N_1^{(\lambda)}}{N} n_1^\nu + \frac{N_2^{(\lambda)}}{N} n_2^\nu + \ldots + \frac{N_\mu^{(\lambda)}}{N} n_\mu^\nu;$$

N représente le dénominateur de (79) et les autres quantités $N^{(\lambda)}$ des déterminants mineurs, aux signes près.

D'après cela, si l'on pose

$$M_1 = \frac{N_1^{(\lambda)}}{N} P_\lambda, \quad M_2 = \frac{N_2^{(\lambda)}}{N} P_\lambda, \quad \ldots, \quad M_\mu = \frac{N_\mu^{(\lambda)}}{N} P_\lambda,$$

P_λ étant une nouvelle constante, on a, pour la fonction w,

$$w = S(p_2^{x_2} p_3^{x_3} \ldots p_\nu^{x_\nu} P_\lambda Z_\lambda),$$

et, comme il existe μ fonctions Z, il y a μ sommes semblables, ce qui donne

$$(80)\quad w = S(p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu} P_1 Z_1) + S(p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu} P_2 Z_2) + \ldots + S(p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu} P_\mu Z_\mu);$$

les quantités p varient à volonté d'une somme à l'autre.

De cette expression, qui ne contient que des constantes arbitraires, il est facile de passer à une autre qui contienne des fonctions arbitraires. Développons les fonctions Z par rapport aux puissances de $p_2^{u_2}$, $p_3^{u_3}$, ..., puissances que nous avons représentées par q_2, q_3, ..., d'après (74); nous aurons ainsi relativement à l'une des sommes de (80), par la formule de Maclaurin étendue à plusieurs variables,

$$\operatorname{Agr}\left[\frac{p_2^{\sigma_2 u_2} p_3^{\sigma_3 u_3} \ldots p_\nu^{\sigma_\nu u_\nu}}{1^{\sigma_2|1} 1^{\sigma_3|1} \ldots 1^{\sigma_\nu|1}} \left(\frac{d^\varpi Z_\lambda}{dq_2^{\sigma_2} dq_3^{\sigma_3} \ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 S(p_2^{x_2} p_3^{x_3} \ldots p_\nu^{x_\nu} P_\lambda)\right],$$

avec la condition

$$\sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi.$$

Le chiffre o, placé au bas de l'une des parenthèses, indique que l'on fait $q_2 = q_3 = \ldots = q_\nu = 0$, après la différentiation de Z_ν.

Si nous posons, pour abréger,

$$\frac{1}{1^{\sigma_2|1} 1^{\sigma_3|1} \ldots 1^{\sigma_\nu|1}} = \theta,$$

l'expression précédente pourra s'écrire

$$(80)'\qquad \operatorname{Agr}\left[\theta \left(\frac{d^\varpi Z_\lambda}{dq_2^{\sigma_2} \ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 S(p_2^{x_2 + \sigma_2 u_2} \ldots p_\nu^{x_\nu + \sigma_\nu u_\nu} P_\lambda)\right].$$

Mais, par suite des valeurs arbitraires des quantités p, la somme comprise sous le signe S est une fonction arbitraire, f_λ, des quantités $x_2 + \sigma_2 u_2$, $x_3 + \sigma_3 u_3$, ... D'un autre côté, à cause de l'expression (79) des fonctions Z et de l'expression (75) des coefficients B de l'équation caractéristique, on voit que, quand ζ est un nombre entier plus grand que $\mu - 1$, alors que $\varpi > \zeta - \lambda + 1$, les dérivées de Z_λ sont nulles, puisque les fonctions Z sont fonctions rationnelles des coefficients B; de plus, comme la factorielle $\frac{1}{1^{\sigma|1}}$ (¹) est nulle pour les valeurs négatives de σ, il en résulte que, les quantités $\sigma_2, \sigma_3, \ldots$ variant de $-\infty$ à $+\infty$, les termes du développement (80)′ n'ont de valeurs différentes de zéro que si ϖ est compris entre zéro et $\zeta - \lambda + 1$. L'agrégat (80)′ est donc une intégrale définie, prise entre les limites zéro et $\zeta - \lambda + 1$ de x, et l'on a, pour expression de la fonction cherchée,

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned} w = {} & \sum_{\zeta}\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi} Z_1}{dq_2^{\sigma_2}\ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_1(x_2+\sigma_2 u_2,\ldots,x_\nu+\sigma_\nu u_\nu)\right] \\ & + \sum_{\zeta=1}\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi} Z_2}{dq_2^{\sigma_2}\ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_2(x_2+\sigma_2 u_2,\ldots,x_\nu+\sigma_\nu u_\nu)\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \sum_{\zeta=\mu-1}\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi} Z_\mu}{dq_2^{\sigma_2}\ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_\mu(x_2+\sigma_2 u_2,\ldots,x_\nu+\sigma_\nu u_\nu)\right]. \end{aligned}\right.$$

Telle est la forme donnée par Wronski à la fonction intégrale de l'équation proposée dans sa *Critique des fonctions génératrices*. On doit remarquer que le problème est très simplement résolu, puisque la solution se trouve ramenée au calcul de fonctions symétriques et à

(¹) On a, en effet,

$$x^{\rho+\sigma|\xi} = x^{\rho|\xi}(x+\rho\xi)^{\sigma|\xi},$$

d'où

$$\frac{x^{\rho+\sigma|\xi}}{x^{\rho|\xi}} = (x+\rho\xi)^{\sigma|\xi}.$$

Si l'on fait $\rho = -\sigma$, il vient

$$\frac{1}{x^{-\sigma|\xi}} = (x-\sigma\xi)^{\sigma|\xi} = (x-\sigma)(x-\sigma+\xi)(x-\sigma+2\xi)\ldots(x-\xi);$$

par suite, en donnant à x et à ξ la même valeur, l'unité, par exemple, on voit que la factorielle $\frac{1}{1^{-\sigma|1}}$ est nulle.

celui de leurs dérivées, calculs que l'on peut toujours exécuter comme nous allons le faire.

D'après le théorème donné par les expressions (46) et (46)', nous avons

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} Z_\lambda B_\mu &= \frac{\omega(n_1^0 n_2^1 \dots n_\lambda^{\nu} \dots n_\mu^{\mu-1})}{N} B_\mu \\ &= \aleph(\zeta-\mu+1)B_\lambda + \aleph(\zeta-\mu+2)B_{\lambda+1} + \dots \\ &\qquad + \aleph(\zeta-\lambda+1)B_\mu, \end{aligned}\right.$$

et les fonctions aleph se calculeraient d'aprés les relations (49) et (49)'. Si l'on veut formuler le résultat de ces dernières opérations, on obtient, comme nous le verrons plus tard, en traitant spécialement des fonctions aleph,

$$(83)\quad \aleph(\xi) = (-1)^\xi \operatorname{Agr}\left\{ 1^{\zeta|1}\left(\frac{-1}{B_\mu}\right)^\zeta \frac{(-B_{\mu-1})^{\rho_1}(+B_{\mu-2})^{\rho_2}\dots[(-1)^{\xi}B_{\mu-\xi}]^{\rho_\xi}}{1^{\rho_1|1}\,1^{\rho_2|1}\dots 1^{\rho_\xi|1}} \right\},$$

avec les conditions

$$(83)'\quad \left\{\begin{aligned} &\rho_1 + 2\rho_2 + 3\rho_3 + \dots + \xi\rho_\xi = \xi, \\ &\rho_1 + \rho_2 + \dots\dots\dots + \rho_\xi = \zeta. \end{aligned}\right.$$

Ainsi les fonctions Z sont connues, soit que l'on calcule les fonctions aleph dont elles sont formées, indirectement au moyen des relations (49) et (49)', soit directement au moyen de (83) et (83)'.

Il reste à obtenir les dérivées des fonctions Z par rapport aux quantités $q_2, q_3, \dots, q_\nu$ qui entrent dans les coefficients B de l'équation caractéristique. Pour cela, considérons le produit

$$(q_2-1)^{\sigma_2}(q_3-1)^{\sigma_3}\dots(q_\nu-1)^{\sigma_\nu}$$

qui entre dans l'expression (75), et désignons-le par Π; prenons la $\upsilon^{\text{ième}}$ dérivée de ce produit, nous aurons

$$\frac{d^\upsilon \Pi}{dq_2^{\rho_2}\dots dq_\nu^{\rho_\nu}} = \sigma_2^{\rho_2|-1}(q_2-1)^{\sigma_2-\rho_2}\sigma_3^{\rho_3|-1}(q_3-1)^{\sigma_3-\rho_3}\dots\sigma_\nu^{\rho_\nu|-1}(q_\nu-1)^{\sigma_\nu-\rho_\nu},$$

en ayant égard à

$$\rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_\nu = \upsilon.$$

Or, en faisant $q_2 = q_3 = \ldots = q_\nu = 0$ après la dérivation, on a

$$\left(\frac{d^\upsilon \Pi}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right) = (-1)^{\tau-\upsilon} \sigma_2^{\rho_2 | -1} \ldots \sigma_\nu^{\rho_\nu | -1}$$

et, par suite,

$$(84) \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^\upsilon B_{\mu-\lambda}}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right)_0 = \mathrm{Agr}\Big[(-1)^{\tau-\upsilon} \sigma_2^{\rho_2 | -1} \ldots \sigma_\nu^{\rho_\nu | -1} \, \mathrm{A}(\mu-\lambda, \sigma_2 \ldots \sigma_\nu) & \\ - \frac{\mu-\lambda+1}{1} \left(\frac{d^\upsilon B_{\mu-\lambda+1}}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right)_0 + \ldots & \\ + (-1)^\lambda \frac{(\mu-\lambda+1)^{\lambda | 1}}{1^{\lambda | 1}} \left(\frac{d^\upsilon B_\mu}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right)_0 \Big], & \end{aligned} \right.$$

en ayant toujours égard à

$$(84)' \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_\nu &= \upsilon, \\ \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu &= \tau. \end{aligned} \right.$$

Il faut observer qu'un terme sera nul dans un des agrégats, quand l'une des factorielles qui entrent dans sa composition sera nulle elle-même; cela arrivera toutes les fois que l'exposant ρ de la base σ sera plus grand que cette base.

Maintenant, au moyen de simples substitutions, on parviendra à calculer la dérivée d'une fonction aleph par (84), et ensuite la dérivée d'une fonction Z par (83); on observera à ce sujet que le calcul est poussé aussi loin qu'il est possible de le faire, vu sa complication, car les substitutions ne sont ici qu'une chose secondaire; on sait d'ailleurs que, dans les calculs numériques, il est avantageux de n'effectuer les substitutions que successivement, lorsque les premières formules ont permis d'obtenir les valeurs numériques des quantités qui entrent dans les formules qui viennent ensuite.

Si l'on observe que, dans les formules précédentes, notamment dans celles qui donnent les coefficients B, les quantités q entrent principalement sous la forme $q - 1$, on peut se proposer, comme devant être préférable dans certains cas, de développer les fonctions Z par rapport aux quantités $q - 1$, mais il faudra également développer les produits $(q_2 - 1)^{\sigma_2}$, $(q_3 - 1)^{\sigma_3}$, ..., pour ordonner ensuite par rapport aux puissances de $q_2, q_3, \ldots$, c'est-à-dire de $p_2^{n_2}, p_3^{n_3}, \ldots$, pour faire entrer ces quantités dans la somme $S(p_2^{r_2} p_3^{r_3} \ldots P_\lambda)$. Nous reviendrons plus loin sur cette transformation; il faut seulement remarquer que, dans les dérivées de Z, on fera après les opérations $q = 1$, de sorte que la dérivée $\left(\dfrac{d^\nu H}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right)_1$ est nulle à moins que $\rho_2 = \sigma_2$, $\rho_3 = \sigma_3$, $\ldots$, et, par suite, $\nu = \tau$, ce qui réduit l'agrégat, formant le premier terme de l'expression (75) de $B_{\mu-\lambda}$, au seul terme

$$1^{\sigma_2|1} \ldots 1^{\sigma_\nu|1} A(\mu - \lambda, \sigma_2 \ldots \sigma_\nu).$$

Exemple. — Comme exemple d'application de ce qui précède, reprenons l'équation du second ordre à trois variables que nous avons développée plus haut; calculons les coefficients de l'équation caractéristique, les dérivées de ces coefficients, les fonctions $\aleph$ et les fonctions Z. Puisque nous considérons des coefficients constants, nous remplacerons les lettres H par A.

1° L'équation caractéristique

$$B_2 n^2 + B_1 n + B_0 = 0$$

a pour coefficients, d'après (75), les quantités suivantes :

Pour $\lambda = 0$, $\tau = 0$ (75)' donne

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

d'où

$$B_2 = A(2, 0, 0).$$

Pour $\lambda = 1$, τ a les valeurs 0 et 1.

$\tau = 0$ donne

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

$\tau = 1$ donne

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1.$$

L'agrégat de (75) se compose de trois termes :

$$A(1, 0, 0) + (q_2 - 1) A(1, 1, 0) + (q_3 - 1) A(1, 0, 1),$$

d'où

$$B_1 = A(1,0,0) + (q_2-1)A(1,1,0) + (q_3-1)A(1,0,1) - 2A(2,0,0).$$

Pour $\lambda=2$, τ a les valeurs 0 et 2; $\tau=0$ donne

$$\sigma_2=\sigma_3=0;$$

$\tau=1$ donne

$$\sigma_2=1,\quad \sigma_3=0,$$

$$\sigma_2=0,\quad \sigma_3=1;$$

$\tau=2$ donne

$$\sigma_2=2,\quad \sigma_3=0,$$

$$\sigma_2=1,\quad \sigma_3=1,$$

$$\sigma_2=0,\quad \sigma_3=2.$$

L'agrégat de (75) se compose ici de huit termes

$$\begin{aligned}&A(0,0,0)+(q_2-1)A(0,1,0)+(q_3-1)A(0,0,1)\\&\quad+(q_2-1)^2A(0,2,0)+(q_2-1)(q_3-1)A(0,1,1)+(q_3-1)^2A(0,0,2),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}B_0 = {}&A(0,0,0)+(q_2-1)A(0,1,0)+\ldots+(q_3-1)^2A(0,0,2)\\&-[A(1,0,0)+(q_2-1)A(1,1,0)+(q_3-1)A(1,0,1)-2A(2,0,0)]\\&+A(2,0,0).\end{aligned}$$

2° Ensuite, pour former les dérivées de ces coefficients B_2, B_1, B_0, nous avons, d'après (84) et (84)', pour la première dérivée par rapport à q_2, $\upsilon=1$. Or, pour le coefficient B_2, $\lambda=0$, on a seulement $\tau=0$, ce qui indique que la dérivée est nulle, comme cela est d'ailleurs évident,

$$\left(\frac{dB_2}{dq_2}\right)_0 = 0.$$

Pour le coefficient B_1, $\lambda=1$, puisque υ doit être égal à l'unité,

$\rho_2 = 1$ et $\rho_3 = 0$; on a, par (84),

$$\left(\frac{dB_1}{dq_2}\right)_0 = A(1, 1, 0).$$

Pour le coefficient B_0, $\lambda = 2$, puisque l'on a encore $\upsilon = 1$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 0$, pour la dérivée par rapport à q_2, il vient

$$\left(\frac{dB_0}{dq_2}\right)_0 = \text{Agr}[(-1)^{\tau-1}\sigma_2 A(0, \sigma_2, \sigma_3)] - A(1, 1, 0);$$

pour $\tau = 0$, on a

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \text{Agr} = 0;$$

pour $\tau = 1$, on a

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0, \quad \text{Agr} = 1 . A(0, 1, 0),$$
$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1, \quad \text{Agr} = 0;$$

pour $\tau = 2$, on a

$$\sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 0, \quad \text{Agr} = (-1)2A(0, 2, 0),$$
$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 1, \quad \text{Agr} = (-1)A(0, 1, 1),$$
$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 2, \quad \text{Agr} = 0;$$

Par suite

$$\left(\frac{dB_0}{dq_2}\right)_0 = A(0, 1, 0) - 2A(0, 2, 0) - A(0, 1, 1) - A(1, 1, 0).$$

Pour la seconde dérivée par rapport à q_2, $\upsilon = 2$ avec $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = 0$, on a

$$\left(\frac{d^2B_0}{dq_2^2}\right)_0 = \text{Agr}[(-1)^{\tau-2}\sigma_2^{2|-1} A(0, \sigma_2, \sigma_3)];$$

pour $\tau = 0$,

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \text{Agr} = 0;$$

pour $\tau = 1$,

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0, \quad \text{Agr} = (-1)(1-1)A(0, 1, 0) = 0$$

pour $\tau = 2$,

$$\sigma_2 = 2,\quad \sigma_3 = 0,\quad \mathrm{Agr} = (-1)^0\, 2.1.\mathrm{A}(0, 2, 0),$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_2 = 1, & \sigma_3 = 1, \\ \sigma_2 = 0, & \sigma_3 = 2,\end{matrix}\right\}\ \mathrm{Agr} = 0;$$

par suite

$$\left(\frac{d^2 \mathrm{B}_0}{dq_2^2}\right)_0 = 2\mathrm{A}(0, 2, 0).$$

Dans le cas de $\upsilon = 2$, avec $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 1$, la dérivée sera

$$\left(\frac{d^2 \mathrm{B}_0}{dq_2 dq_3}\right)_0 = \mathrm{Agr}\left[(-1)^{\tau-2}\sigma_2\sigma_3\,\mathrm{A}(0, \sigma_2, \sigma_3)\right];$$

pour $\tau = 0$, ou 1,

$$\mathrm{Agr} = 0;$$

pour $\tau = 2$,

$$\sigma_2 = 2,\quad \sigma_3 = 0,\quad \mathrm{Agr} = 0,$$

$$\sigma_2 = 1,\quad \sigma_3 = 1,\quad \mathrm{Agr} = (-1)^0.1.1\,\mathrm{A}(0, 1, 1),$$

$$\sigma_2 = 0,\quad \sigma_3 = 2,\quad \mathrm{Agr} = 0;$$

par suite

$$\left(\frac{d^2 \mathrm{B}_0}{dq_2 dq_3}\right)_0 = \mathrm{A}(0, 1, 1).$$

Les dérivées supérieures sont évidemment nulles.

3° En ce qui concerne les fonctions aleph, d'après (83) et (83)', on a :

Pour $\xi = 1$,

$$\aleph(1) = -\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{B}_2}.$$

Pour $\xi = 2$,

$$\aleph(2) = \mathrm{Agr}\left[1^{\varsigma|1}\left(\frac{-1}{\mathrm{B}_2}\right)^{\varsigma} \frac{(-\mathrm{B}_1)^{\rho_1}}{1^{\rho_1|1}} \frac{(+\mathrm{B}_0)^{\rho_2}}{1^{\rho_2|1}}\right],$$

avec

$$\rho_1 + 2\rho_2 = 2,$$

$$\rho_1 + \rho_2 = \varsigma;$$

ce qui donne

$$\rho_1 = 2,\quad \rho_2 = 0,\quad \varsigma = 2,$$

$$\rho_1 = 0,\quad \rho_2 = 1,\quad \varsigma = 1,$$

d'où

$$\aleph(2) = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^2 - \frac{B_0}{B_2}.$$

Pour $\xi = 3$,

$$\aleph(3) = (-1)^3 \operatorname{Agr}\left[1^{\varsigma|1}\left(\frac{-1}{B_2}\right)^{\varsigma} \frac{(-B_1)^{\rho_1}}{1^{\rho_1|1}} \frac{(+B_0)^{\rho_2}}{1^{\rho_2|1}}\right],$$

avec

$$\rho_1 + 2\rho_2 + 3\rho_3 = 3,$$
$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \varsigma.$$

Cet agrégat ne contient pas le facteur $\frac{(-B_{-1})^{\rho_3}}{1^{\rho_3|1}}$, parce que, le coefficient B_{-1} n'existant pas, ou étant nul, les termes qui subsisteront dans le développement seront ceux pour lesquels on aura $\rho_3 = 0$. On a donc les systèmes suivants :

$$\rho_1 = 3,\quad \rho_2 = 0,\quad \rho_3 = 0,\quad \varsigma = 3,$$
$$\rho_1 = 1,\quad \rho_2 = 1,\quad \rho_3 = 0,\quad \varsigma = 2,$$
$$\rho_1 = 0,\quad \rho_2 = 0,\quad \rho_3 = 1,\quad \varsigma = 1.$$

D'après ce que nous venons de dire, les deux premiers systèmes seuls conviennent; par suite, il vient

$$\aleph(3) = -\left(\frac{B_1}{B_2}\right)^3 + 2\frac{B_1 B_0}{B_2^2}.$$

Pour $\xi = 4$,

$$\aleph(4) = \operatorname{Agr}\left[1^{\varsigma|1}\left(\frac{-1}{B_2}\right)^{\varsigma} \frac{(-B_1)^{\rho_1}}{1^{\rho_1|1}} \frac{(+B_0)^{\rho_2}}{1^{\rho_2|1}}\right],$$

avec

$$\rho_1 + 2\rho_2 + 3\rho_3 + 4\rho_4 = 4,$$
$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = \varsigma;$$

ce qui donne

$$\rho_1 = 4,\quad \rho_2 = 0,\quad \rho_3 = 0,\quad \rho_4 = 0,\quad \varsigma = 4,$$
$$\rho_1 = 2,\quad \rho_2 = 1,\quad \rho_3 = 0,\quad \rho_4 = 0,\quad \varsigma = 3,$$
$$\rho_1 = 1,\quad \rho_2 = 0,\quad \rho_3 = 1,\quad \rho_4 = 0,\quad \varsigma = 2,$$
$$\rho_1 = 0,\quad \rho_2 = 2,\quad \rho_3 = 0,\quad \rho_4 = 0,\quad \varsigma = 2,$$
$$\rho_1 = 0,\quad \rho_2 = 0,\quad \rho_3 = 0,\quad \rho_4 = 1,\quad \varsigma = 1.$$

Le troisième et le cinquième système de valeurs, donnant des termes nuls, ne conviennent pas; le développement de l'agrégat se compose donc de trois termes

$$\aleph(4)=\left(\frac{B_1}{B_2}\right)^4-3\frac{B_1^2B_0}{B_2^3}+\frac{B_0^2}{B_2^2}.$$

On vérifierait facilement l'exactitude de ces quantités en calculant de proche en proche les fonctions aleph au moyen des relations (49) et (49)'.

4° Enfin le calcul des fonctions Z ne présente aucune difficulté; il n'y a ici que deux fonctions, d'après (82),

$$\begin{aligned} Z_1 &= \aleph(\zeta-1)\frac{B_1}{B_2}+\aleph(\zeta) = -\aleph(\zeta-2)\frac{B_0}{B_2}, \\ Z_2 &= \aleph(\zeta-1). \end{aligned}$$

Ces valeurs se vérifient aisément; en effet, on a

$$\begin{aligned} Z_1 &= n_1 n_2\frac{n_1^{\zeta-1}-n_2^{\zeta-1}}{n_2-n_1} = -n_1n_2(n_2^{\zeta-2}+n_2^{\zeta-3}n_1+\ldots+n_1^{\zeta-2}), \\ Z_2 &= \frac{n_2^{\zeta}-n_1^{\zeta}}{n_2-n_1} = n_2^{\zeta-1}+n_2^{\zeta-2}n_1+\ldots+n_2n_1^{\zeta-2}+n_1^{\zeta-1}, \end{aligned}$$

et l'on reconnaît ainsi le développement des fonctions aleph que nous venons d'obtenir. La suite du calcul n'offre aucun intérêt.

Nous n'avons pas à nous arrêter au cas où il existerait des relations entre les coefficients de l'équation différentielle.

L'intégration complète de l'équation (72) aux différences partielles, linéaire et à coefficients constants, formant l'équation réduite de l'équation proposée (65), est ainsi donnée par l'ensemble des formules (73), (74), (75), (75)', (84), (84)', pour ce qui concerne la formation des coefficients de l'équation caractéristique (73), et (81), (82), (83), (83)', (84), (84)', pour les quantités qui entrent dans l'expression (81), la fonction cherchée w.

Intégrale générale de l'équation proposée. — Pour former les quantités qui entrent dans l'expression (68) de l'intégrale générale de l'équation proposée aux différences partielles (65), il resterait à prendre les différences et les dérivées de la fonction w par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Pour la première variable x_1, il faudrait opérer sur les fonctions $\aleph$ de la forme $\aleph(\zeta + \eta)$, ζ étant $\frac{x_1}{\Delta x_1}$ et η une constante. Nous avons déjà effectué ce calcul à propos des équations aux différences totales [formules (56) à (62)] : il n'y a donc pas lieu d'y revenir; remarquons seulement que, par suite des transformations auxquelles on est conduit, il faut prendre, au lieu de racines m de l'équation caractéristique, les racines $m - 1$ ou n de l'équation (77); cette dernière est ainsi la véritable équation caractéristique, et ce sont les coefficients C de (77) qui doivent être introduits dans les calculs au lieu des coefficients B de (73). Quant aux différences et aux dérivées par rapport aux variables $x_2, \ldots, x_\nu$, elles doivent être prises sur les fonctions arbitraires $f_1, f_2, \ldots$; on les obtiendra sans difficulté une fois la forme de ces fonctions déterminée.

Mais le moyen d'obtenir généralement les dérivées partielles de w qui entrent dans l'expression (68) consiste, comme nous l'avons déjà indiqué, à prendre les différentielles totales des divers ordres de l'équation proposée (équation en y); on aura, de cette manière, autant de relations qu'il est nécessaire d'en avoir pour déterminer les dérivées partielles en question; on changera ensuite y en w.

Ainsi, pour l'équation proposée, que nous écrirons $\varphi = 0$, nous aurons, pour la première différentiation, un résultat de la forme

$$\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)dx_1 + \left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right)dx_2 + \ldots + \left(\frac{d\varphi}{dx_\nu}\right)dx_\nu + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)dy = 0,$$

et, comme y est fonction des variables indépendantes,

$$dy = \frac{dy}{dx_1}dx_1 + \frac{dy}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{dy}{dx_\nu}dx_\nu,$$

il vient alors

$$\left[\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_1}\right]dx_1 + \left[\left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_2}\right]dx_2 + \ldots$$
$$+ \left[\left(\frac{d\varphi}{dx_\nu}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_\nu}\right]dx_\nu = 0.$$

Les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ étant indépendantes les unes des autres, l'égalité précédente donne les relations

$$\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_1}=0,$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right)+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_2}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dx_\nu}\right)+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_\nu}=0,$$

et les dérivées partielles du premier ordre de y se trouvent déterminées par des relations du premier degré. En opérant d'une manière analogue, on obtiendrait les dérivées partielles du second ordre de y, et ainsi de suite, toutes les dérivées se trouvant déterminées par des équations linéaires. Ensuite on remplacera y par w, ce qui permettra de calculer au moyen de l'expression (81) les fonctions de cette quantité qui entrent dans les relations linéaires; on obtient en général, de cette manière, les dérivées partielles de w d'une manière bien plus exacte que si on les déduisait directement de l'expression (81), et l'expression fondamentale (68) est plus convergente.

L'expression (68) donne, au moyen des quantités qui viennent d'être déterminées, l'intégrale générale de l'équation proposée (65), parce que l'on introduit μ fonctions arbitraires. Mais ces fonctions peuvent toutes, ou en partie, se réduire à des constantes périodiques; ces constantes devant donner les valeurs initiales des différences partielles seront au nombre maximum de

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu)}{1.2\ldots\nu}-1.$$

Il faut retrancher l'unité du rapport des factorielles à cause de l'équation proposée qui donne une relation entre les valeurs initiales de l'inconnue et de ses différences partielles des différents ordres.

Cas des différentielles. — Examinons maintenant le cas où les différences deviennent infiniment petites; soit l'équation linéaire à coefficients constants et aux dérivées partielles, d'ordre μ,

$$(85)\qquad \mathrm{Agr}^{\mu}\left[\frac{d^{\mu}w}{dx_1^{\sigma_1}\,dx_2^{\sigma_2}\ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}}\,\mathrm{A}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_\nu)\right]=0,$$

avec la condition

$$(85)' \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi.$$

Les différences Δw, u_1, u_2, ..., que nous avions plus haut, deviennent des différentielles dw, dx_1, dx_2, ..., de sorte que, si nous comparons l'équation (85) à l'équation (72), nous devons considérer la différence $\Delta^\varpi w$ comme remplacée par la différentielle $d^\varpi w$, et les différentielles des variables indépendantes qui sont données comme faisant partie intégrante des coefficients constants. Il en résulte que, dans l'équation caractéristique, les quantités $q - 1$ ou $p^u - 1$, donnent

$$\frac{p^{dx} - 1}{dx} = \mathrm{L}p,$$

et les racines n deviennent $1 - m\,dx$, ce qui donne aussi

$$m = \frac{n - 1}{dx}.$$

Ainsi, en vue de l'équation (73), nous sommes conduit à prendre pour équation caractéristique une équation de la forme de l'équation (77), savoir

$$(86) \qquad C_\mu m^\mu + C_{\mu-1} m^{\mu-1} + \ldots + C_0 = 0,$$

dont les coefficients sont

$$(87) \quad C_{\mu-\lambda} = \mathrm{Agr}^\lambda [(\mathrm{L}p_2)^{\sigma_2} (\mathrm{L}p_3)^{\sigma_3} \ldots (\mathrm{L}p_\nu)^{\sigma_\nu} \mathrm{A}(\mu - \lambda, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\nu)]$$

avec la condition

$$(87)' \qquad \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \tau,$$

τ variant de 0 à λ.

Ensuite, pour ce qui concerne l'expression (76) de l'intégrale, puisque n^ζ, où $\zeta = \frac{x}{u}$, devient $n^{\frac{x}{dx}}$,

$$n^{\frac{x}{dx}} = (1 + m\,dx)^{\frac{x}{dx}} = e^{mx};$$

nous avons donc

$$(88) \qquad \varpi = \mathrm{S}\left[p_2^{r_2} p_3^{r_3} \dots p_\nu^{r_\nu} \left(\mathrm{M}_1 e^{m_1 x_1} + \mathrm{M}_2 e^{m_2 x_1} + \dots + \mathrm{M}_\mu e^{m_\mu x_1}\right)\right].$$

Il faut encore transformer cette expression au moyen de fonctions symétriques des racines m; pour cela, posons

$$(89) \qquad e^{m x_1} = \mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2 m + \mathrm{Z}_3 m^2 + \dots + \mathrm{Z}_\mu m^{\mu-1},$$

en donnant à m les μ valeurs qui satisfont à l'équation caractéristique (86), nous obtenons μ équations linéaires au moyen desquelles nous tirons la valeur de l'une des fonctions z,

$$(90) \qquad \mathrm{Z}_\lambda = \frac{\mathrm{D}\left(m_1^0 m_2^1 \dots m_{\lambda-1}^{\lambda-2} e^{m_\lambda x_1} m_{\lambda+1}^{\lambda} \dots m_\mu^{\mu-1}\right)}{\mathrm{D}\left(m_1^0 \dots m_\lambda^{\lambda-1} \dots m_\mu^{\mu-1}\right)}.$$

D'après ce que nous avons vu à propos des différences, l'expression (88) se transforme également en celle-ci

$$(91) \qquad \varpi = \mathrm{S}(p_2^{r_2} \dots p_\nu^{r_\nu} \mathrm{P}_1 \mathrm{Z}_1) + \mathrm{S}(p_2^{r_2} \dots p_\nu^{r_\nu} \mathrm{P}_2 \mathrm{Z}_2) + \dots + \mathrm{S}(p_2^{r_2} \dots p_\nu^{r_\nu} \mathrm{P}_\mu \mathrm{Z}_\mu)$$

les quantités arbitraires $p_2, p_3, \dots, p_\nu$ pouvant prendre des valeurs différentes dans chacune des sommes indéfinies S, et $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_\mu$ étant de nouvelles constantes d'intégration.

La formule (91) permet d'obtenir une autre expression contenant des fonctions arbitraires. En effet, les quantités Z, qui sont des fonctions de $p_2, p_3, \dots, p_\nu$, peuvent être développées par rapport aux puissances de ces quantités; en faisant usage de la formule de Maclaurin, étendue à plusieurs variables et donnant à $p_2, p_3, \dots, p_\nu$ la valeur 1 après les différentiations, on obtient pour l'une des sommes précédentes

$$(91)' \qquad \mathrm{Agr}\left[\frac{p_2^{\sigma_2} \dots p_\nu^{\sigma_\nu}}{1^{\sigma_2|1} \dots 1^{\sigma_\nu|1}} \left(\frac{d^\varpi \mathrm{Z}_\lambda}{dp_2^{\sigma_2} \dots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 \mathrm{S}(p_2^{x_2} \dots p_\nu^{x_\nu} \mathrm{P}_\lambda)\right],$$

avec la condition

$$\sigma_2 + \sigma_3 + \dots + \sigma_\nu = \varpi$$

ou, en faisant θ égal à l'inverse du produit des factorielles, cette expression s'écrit

$$(91)'' \qquad \mathrm{Agr}\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi} Z}{dp_2^{\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 S\left(p_2^{x_2+\sigma_2}\ldots p_\nu^{x_\nu+\sigma_\nu} P_\lambda\right)\right].$$

Or la somme S représente, à cause des quantités arbitraires p_2, p_3, ..., p_ν, une fonction arbitraire des quantités $x_2+\sigma_2$, $x_3+\sigma_3$, ..., $x_\nu+\sigma_\nu$, et l'agrégat est une intégrale; on a donc, pour l'expression définitive de la fonction w,

$$(92) \quad \left\{\begin{aligned} w = {} & \sum\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi} Z_1}{dp_2^{\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_1(x_2+\sigma_2,\ldots,x_\nu+\sigma_\nu)\right] \\ & +\sum\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi} Z_2}{dp_2^{\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_2(x_2+\sigma_2,\ldots,x_\nu+\sigma_\nu)\right] \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +\sum\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi} Z_\mu}{dp_2^{\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_\mu(x_2+\sigma_2,\ldots,x_\nu+\sigma_\nu)\right]. \end{aligned}\right.$$

Σ est la somme de tous les termes que l'on obtient en faisant varier ϖ de zéro à $+\infty$; les intégrales indéfinies Σ peuvent même être considérées comme prises entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, à cause de la valeur nulle de θ pour les valeurs négatives de σ.

Ici se présente un inconvénient, quand on fait $p=0$, le logarithme devient infini de sorte que le calcul des fonctions Z conduit généralement à des quantités de forme infinie, quoique le résultat final représente des quantités finies; il y a analogie entre ces quantités infinies et les sommes d'imaginaires qui, cependant, peuvent représenter des quantités réelles. Il faut donc recourir à des transformations qui fassent disparaître toutes difficultés; on voit de suite qu'en développant les fonctions Z par rapport aux puissances des quantités p_2-1, p_3-1, ... et faisant ensuite p_2, p_3, ... égaux à l'unité, les logarithmes seront nuls. Effectuons ce calcul; au lieu de $(91)'$, on aura

$$(91)_1 \qquad \mathrm{Agr}\left[\frac{(p_2-1)^{\varsigma_1}\ldots(p_\nu-1)^{\varsigma_\nu}}{1^{\varsigma_1|1}\ldots 1^{\varsigma_\nu|1}}\left(\frac{d^{\zeta} Z_\lambda}{dp_2^{\varsigma_1}\ldots dp_\nu^{\varsigma_\nu}}\right)_1 S\left(p_2^{x_2}\ldots p_\nu^{x_\nu} P_\lambda\right)\right]$$

avec

$$\varsigma_1+\varsigma_2+\ldots+\varsigma_\nu=\zeta,$$

et pour faire entrer les puissances de $p_2, p_3, \ldots$ dans la somme S, il faudra développer les produits $(p_2 - 1)^{\varsigma_2} \ldots (p_\nu - 1)^{\varsigma_\nu}$ et ordonner de nouveau par rapport aux puissances de $p_2, p_3, \ldots$. Or, d'après la formule du binôme,

$$(p-1)^\varsigma = \text{Agr}\left[(-1)^\rho \frac{\varsigma^{\rho|-1}}{1^{\rho|1}} p^{\varsigma-\rho}\right],$$

par suite

$$(p_2 - 1)^{\varsigma_2} \ldots (p_\nu - 1)^{\varsigma_\nu} = \text{Agr}\left[(-1)^\tau \frac{\varsigma_2^{\rho_2|-1} \ldots \varsigma_\nu^{\rho_\nu|-1}}{1^{\rho_2|1} \ldots 1^{\rho_\nu|1}} p_2^{\varsigma_2-\rho_2} \ldots p_\nu^{\varsigma_\nu-\rho_\nu}\right],$$

en faisant

$$\rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_\nu = \tau,$$

ρ_2 varie de zéro à ς_2, ρ_3 de zéro à ς_3, etc.; mais, à cause des factorielles, on peut supposer que les quantités ρ varient de zéro à $+\infty$. Posons

$$\sigma = \varsigma - \rho$$

ou

$$\varsigma = \rho + \sigma,$$

le terme général de l'agrégat devient

$$(-1)^\tau \frac{(\rho_2 + \sigma_2)^{\rho_2|-1} \ldots (\rho_\nu + \sigma_\nu)^{\rho_\nu|-1}}{1^{\rho_2|1} \ldots 1^{\rho_\nu|1}},$$

et ρ peut varier de zéro à $+\infty$; par suite, l'agrégat $(91)_1$ peut s'écrire

$$\text{Agr}\left\{\frac{p^{\sigma_2} \ldots p^{\sigma_\nu}}{1^{\rho_2+\sigma_2|1} \ldots 1^{\rho_\nu+\sigma_\nu|1}} \text{Agr}\left[(-1)^\tau \frac{(\rho_2 + \sigma_2)^{\rho_2|-1} \ldots (\rho_\nu + \sigma_\nu)^{\rho_\nu|-1}}{1^{\rho_2|1} \ldots 1^{\rho_\nu|1}} \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(\frac{d^{\tau+\varpi} Z_\lambda}{dp_2^{\rho_2+\sigma_2} \ldots dp_\nu^{\rho_\nu+\sigma_\nu}}\right)_1\right] S(p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu} P_\lambda)\right\};$$

ou, comme les agrégats ne sont ici que des intégrales, on a à la place de $(91)''$

$$(91)_2 \quad \sum_\varpi \left\{ \sum_\tau (-1)^\tau \left[\frac{(\rho_2 + \sigma_2)^{\rho_2|-1} \ldots (\rho_\nu + \sigma_\nu)^{\rho_\nu|-1}}{1^{\rho_2|1} \ldots 1^{\rho_\nu|1} \cdot 1^{\rho_2+\sigma_2|1} \ldots 1^{\rho_\nu+\sigma_\nu|1}} \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(\frac{d^{\tau+\varpi} Z_\lambda}{dp_2^{\rho_2+\sigma_2} \ldots dp_\nu^{\rho_\nu+\sigma_\nu}}\right)_1\right] S(p_2^{x_2+\sigma_2} \ldots p_\nu^{x_\nu+\sigma_\nu} P_\lambda)\right\},$$

avec

$$(91)_3 \quad \begin{cases} \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_\nu = \tau, \\ \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi, \end{cases}$$

τ et ϖ variant de zéro à $+\infty$; la première somme est prise par rapport à l'indice variable ϖ, et la seconde par rapport à l'indice variable τ.

Comme vérification, si les $\nu - 1$ quantités arbitraires p se réduisent à une seule, on a, comme coefficient de la dérivée de Z_λ sous le signe Σ,

$$(-1)^\rho \frac{(\rho+\sigma)^{\rho|-1}}{1^{\rho|1} \cdot 1^{\rho+\sigma|1}};$$

d'un autre côté, on trouverait directement, pour ce même coefficient,

$$(-1)^\rho \frac{(\rho+\sigma)^{\sigma|-1}}{1^{\sigma|1} \cdot 1^{\rho+\sigma|1}};$$

supposons que σ soit égal à $\rho + \eta$, on aura

$$\frac{(\rho+\sigma)^{\sigma|-1}}{1^{\sigma|1}} = \frac{(\rho+\sigma)^{\rho+\eta|1}}{1^{\rho+\eta|1}},$$

ou

$$\frac{(\rho+\sigma)^{\rho|-1}\sigma^{\eta|-1}}{1^{\rho|1}(\rho+1)^{\eta|1}},$$

ou

$$\frac{(\rho+\sigma)^{\rho|-1}(\rho+1)^{\eta|1}}{1^{\rho|1}(\rho+1)^{\eta|1}},$$

ce qui conduit à l'identité des deux expressions précédentes.

Les fonctions Z sont des fonctions symétriques des racines de l'équation caractéristique : il est donc possible de les calculer sans résoudre cette équation. A cet effet, développons l'exponentielle e^{mx}; nous avons

$$e^{mx} = 1 + \frac{mx}{1} + \frac{m^2x^2}{1^{2|1}} + \frac{m^3x^3}{1^{3|1}} + \cdots,$$

et remplaçant cette exponentielle, dans le déterminant (90), par cette expression, il vient

$$Z_\lambda = \frac{x^{\lambda-1}}{1^{\lambda-1|1}} + \frac{D(m_1^0 \ldots m_\lambda^\mu \ldots m_\mu^{\mu-1})}{N} \frac{x^\mu}{1^{\mu|1}} + \frac{D(m_1^0 \ldots m_\lambda^{\mu+1} \ldots m_\mu^{\mu-1})}{N} \frac{x^{\mu+1}}{1^{\mu+1|1}} + \cdots$$

Représentons les coefficients de ce développement par $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, nous aurons alors

$$(93) \qquad Z_\lambda = \frac{x^{\lambda-1}}{1^{\lambda-1|1}} + Q_1 \frac{x^\mu}{1^{\mu|1}} + Q_2 \frac{x^{\mu+1}}{1^{\mu+1|1}} + Q_3 \frac{x^{\mu+2}}{1^{\mu+2|1}} + \cdots,$$

et, d'après un théorème sur les fonctions aleph que nous avons déjà énoncé précédemment, (38)′ et (46)′, on a

$$(94)\qquad C_\mu Q_\xi = \aleph(\xi)C_\lambda + \aleph(\xi+1)C_{\lambda+1} + \ldots + \aleph(\xi+\mu-\lambda)C_\mu.$$

En particulier,

$$(94)'\qquad \begin{cases} C_\mu Q_1 = \aleph(1)C_\lambda + \aleph(2)C_{\lambda+1} + \ldots + \aleph(1+\mu-\lambda)C_\mu, \\ C_\mu Q_2 = \aleph(2)C_\lambda + \aleph(3)C_{\lambda+1} + \ldots + \aleph(2+\mu-\lambda)C_\mu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Telles sont, (93) et (94), les formules qui permettent d'obtenir les fonctions Z.

Pour terminer, il nous reste à indiquer comment on peut obtenir les dérivées des fonctions Z par rapport aux quantités p; cette opération se réduit, en dernier lieu, à prendre les dérivées des coefficients de l'équation caractéristique, puisque les fonctions aleph, dont sont composées les quantités Z, sont elles-mêmes formées au moyen des coefficients de l'équation, comme l'indique la formule (83).

Prenons d'abord la dérivée d'ordre ρ de Lp, on a

$$(95)\qquad \frac{d^\rho Lp}{dp^\rho} = (-1)^{\rho-1}\frac{1^{\rho-1|1}}{p^\rho}.$$

Cherchons ensuite la dérivée de la puissance η de Lp. Pour cela, remarquons qu'il s'agit de trouver la dérivée d'une fonction de fonction; soit y une fonction de x et $f(y)$ la fonction dont nous cherchons la dérivée d'ordre ρ; nous avons, d'après Wronski (*Technie*, seconde section) [1],

$$(96)\qquad \frac{d^\rho F(y)}{dx^\rho} = 1^{\rho|1}\sum\nolimits_\rho \left[\frac{d^\alpha F(y)}{dy^\alpha}\,\frac{A(\rho-\alpha,\alpha)}{1^{\alpha|1}}\right],$$

la somme Σ s'étendant de 1 à ρ, pour les valeurs entières que l'on peut

(1) Nous ne pouvons reproduire ici la démonstration de cette formule importante. Nous nous proposons de la donner prochainement avec celles que nous avons dû omettre.

donner à l'indice α; on a de plus

$$(96)' \qquad \mathrm{A}(\rho-\alpha,\alpha)=\mathrm{Agr}\left(\frac{\frac{d^{r_1}y}{dx^{r_1}}\,\frac{d^{r_2}y}{dx^{r_2}}\cdots\frac{d^{r_\alpha}y}{dx^{r_\alpha}}}{1^{r_1|1}\,1^{r_2|1}\cdots 1^{r_\alpha|1}}\right),$$

avec

$$(96)'' \qquad r_1+r_2+\ldots+r_\alpha=\rho,$$

les indices r_1, r_2, ... étant au moins égaux à l'unité.

Faisons $\mathrm{F}(y)=y^{\eta}$, $y=\mathrm{L}p$ et $x=p$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{d^\rho(\mathrm{L}p)^\eta}{dp^\rho}=\;&\eta^{\rho|-1}(\mathrm{L}p)^{\eta-\rho}\mathrm{A}(0,\rho)\\&+\frac{1^{\rho|1}}{1^{\rho-1|1}}\eta^{\rho-1|-1}(\mathrm{L}p)^{\eta-\rho+1}\mathrm{A}(1,\rho-1)+\ldots\\&+\frac{1^{\rho|1}}{1^{1|1}}\eta^{1|-1}(\mathrm{L}p)^{\eta-1}\mathrm{A}(\rho-1,1),\end{aligned}$$

ou, en conservant la forme (96),

$$(96)_1 \qquad \frac{d^\rho(\mathrm{L}p)^\eta}{dp^\rho}=1^{\rho|1}\sum_\rho\left[\frac{\eta^{\rho-\alpha|-1}}{1^{\rho-\alpha|1}}(\mathrm{L}p)^{\eta-\rho+\alpha}\mathrm{A}(\alpha,\rho-\alpha)\right].$$

Si l'on a maintenant à différentier le produit des logarithmes qui entre dans l'expression (87) du coefficient $\mathrm{C}_{\mu-\lambda}$, il vient

$$(96)_2 \qquad \frac{d^\tau(\mathrm{L}p_2)^{\sigma_2}\ldots(\mathrm{L}p_\nu)^{\sigma_\nu}}{dp_2^{\rho_2}\ldots dp_\nu^{\rho_\nu}}=1^{\rho_2|1}\ldots1^{\rho_\nu|1}\sum_{\rho_2}\cdots\sum_{\rho_\nu},$$

en mettant, pour simplifier, les caractéristiques $\sum_\rho$ des sommes précédentes à la place de ces sommes elles-mêmes.

Dans le cas où l'on fait $p=1$ après la différentiation, le résultat se simplifie; la dérivée $(96)_1$ est nulle, si $\rho<\eta$, puisque le logarithme est nul pour $p=1$. Si $\rho=\eta$, nous avons

$$\left[\frac{d^\eta(\mathrm{L}p)^\eta}{dp^\eta}\right]_1=\eta^{\eta|-1}\mathrm{A}(0,\eta);$$

et nous pouvons remplacer la factorielle $\eta^{\eta|-1}$ par $1^{\eta|1}$, qui est identique.

En dernier lieu, supposons $\rho = \eta + \alpha$; le développement se réduit encore à un seul terme pour $p = 1$,

$$\left[\frac{d^{\eta+\alpha}(\mathrm{L}p)^{\eta}}{dp^{\eta+\alpha}}\right]_1 = 1^{\eta+\alpha|1}\,\mathrm{A}(\alpha, \eta);$$

quant à l'agrégat, d'après $(96)'$, il est

$$\mathrm{A}(\alpha, \eta) = \mathrm{Agr}\left[\frac{(-1)^{r_1-1}1^{r_1-1|1}(-1)^{r_2-1}1^{r_2-1|1}\ldots(-1)^{r_\eta-1}1^{r_\eta-1|1}}{1^{r_1|1}1^{r_2|1}\ldots1^{r_\eta|1}}\right],$$

et réduisant, en tenant compte de $(96)''$, il vient

$$\mathrm{A}(\alpha, \eta) = \mathrm{Agr}\left[\frac{(-1)^{\alpha}}{r_1 r_2 \ldots r_\eta}\right].$$

Nous avons donc

$$(97) \qquad \left[\frac{d^{\eta+\alpha}(\mathrm{L}p)^{\eta}}{dp^{\eta+\alpha}}\right]_1 = 1^{\eta+\alpha|1}(-1)^{\alpha}\,\mathrm{Agr}\left(\frac{1}{r_1 r_2 \ldots r_\eta}\right),$$

avec

$$(97)' \qquad r_1 + r_2 + \ldots + r_\eta = \alpha + \eta,$$

les quantités $r_1, r_2, \ldots$ étant des nombres entiers positifs, et ne pouvant être nulles.

Considérons maintenant le produit

$$(\mathrm{L}p_2)^{\sigma_2}(\mathrm{L}p_3)^{\sigma_3}\ldots(\mathrm{L}p_\nu)^{\sigma_\nu}$$

qui entre dans l'expression (87) des coefficients de l'équation caractéristique. D'après ce qui précède, les dérivées de ce produit seront nulles, si l'ordre de chacune des dérivées partielles n'est pas au moins égal respectivement à $\sigma_2, \sigma_3, \ldots$, quantités qui composent $(87)'$, et si l'on fait, après les différentiations, $p_2 = p_3 = \ldots = 1$; nous devons donc supposer que les ordres de dérivations partielles sont respectivement $\sigma_2 + \rho_2, \sigma_3 + \rho_3, \ldots$, et comme on a, d'après $(87)'$,

$$(98) \qquad \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \tau;$$

nous représenterons la somme des indices ρ par ϖ

$$(98)' \qquad \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_\nu = \varpi;$$

nous aurons ainsi

$$\left|\frac{d^{\tau+\varpi}(\mathrm{L}p_2)^{\sigma_2}\ldots(\mathrm{L}p_\nu)^{\sigma_\nu}}{dp_2^{\sigma_2+\rho_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu+\rho_\nu}}\right|_1 = (-1)^\varpi\, 1^{\sigma_2+\rho_2|1}\ldots 1^{\sigma_\nu+\rho_\nu|1}$$
$$\times \operatorname{Agr}\left(\frac{1}{r_{2,1}r_{2,2}\ldots r_{2,\sigma_2}}\right)\cdots \operatorname{Agr}\left(\frac{1}{r_{\nu,1}r_{\nu,2}\ldots r_{\nu,\sigma_\nu}}\right),$$

avec

$$(98)'' \qquad \left\{\begin{array}{l} r_{2,1}+r_{2,2}+\ldots+r_{2,\sigma_2} = \sigma_2+\rho_2, \\ r_{3,1}+r_{3,2}+\ldots+r_{3,\sigma_3} = \sigma_3+\rho_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{\nu,1}+r_{\nu,2}+\ldots+r_{\nu,\sigma_\nu} = \sigma_\nu+\rho_\nu. \end{array}\right.$$

Représentons le produit des factorielles par $\Pi(1^{\sigma+\rho|1})$, celui des agrégats par $\Pi[\mathrm{Agr}]$; nous aurons définitivement pour la dérivée d'un coefficient $C_{\mu-\lambda}$ de l'équation caractéristique (86)

$$(99) \qquad \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{d^{\tau+\varpi}C_{\mu-\lambda}}{dp_2^{\sigma_2+\rho_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu+\rho_\nu}}\right)_1 \\ \quad = \operatorname{Agr}^\lambda\left\{(-1)^\varpi\,\Pi(1^{\sigma+\rho|1})\,\Pi\left[\operatorname{Agr}\left(\dfrac{1}{r_1\ldots r_\sigma}\right)\right]\mathrm{A}(\mu-\lambda, \sigma_2\ldots\sigma_\nu)\right\}, \end{array}\right.$$

avec les conditions (98), (98)', (98)''. τ est compris entre zéro et λ pour le premier agrégat, et si $\tau+\varpi$ est plus petit que λ, les termes de cet agrégat qui correspondent aux valeurs de $\tau+\varpi$ supérieures à celle qui est donnée sont nuls.

Il faut remarquer que l'on n'a pas à tenir compte du premier agrégat de (99), Agr^λ, si l'on a calculé les dérivées des coefficients de l'équation caractéristique dont les indices sont supérieurs à $\mu-\lambda$, parce que les termes calculés ainsi se reproduisent dans $C_{\mu-\lambda}$, en ayant soin toutefois de mettre dans les coefficients de l'équation différentielle l'indice $\mu-\lambda$ au lieu des indices supérieurs, c'est-à-dire que, si l'on a calculé $C_{\mu-\lambda+1}$, le coefficient $C_{\mu-\lambda}$ contiendra, outre les nouveaux termes, tous les termes qui entrent dans $C_{\mu-\lambda+1}$, pourvu que l'on change, dans

$$A(\mu-\lambda+1, \sigma_2 \ldots \sigma_\nu),$$

l'indice $\mu-\lambda+1$ en $\mu-\lambda$.

Exemple. — Par exemple, considérons l'équation

$$C_2 m^2 + C_1 m + C_0 = 0;$$

sans répéter un calcul que nous avons fait plus haut, nous trouvons

$$\begin{aligned}
C_2 &= A(2,0,0),\\
C_1 &= A(1,0,0) + Lp_2 A(1,1,0) + Lp_3 A(1,0,1),\\
C_0 &= A(0,0,0) + Lp_2 A(0,1,0) + Lp_3 A(0,0,1)\\
&\quad + (Lp_2)^2 A(0,2,0) + Lp_2 Lp_3 A(0,1,1) + (Lp_3)^2 A(0,0,2).
\end{aligned}$$

Les dérivées de C_2 sont nulles; pour celles de C_1, la formule (99) se réduit à (95) en y joignant le coefficient $A(1,1,0)$, ou $A(1,0,1)$; on trouve

$$\left(\frac{dC_1}{dp_2}\right)_1 = A(1,1,0), \quad \left(\frac{d^2C_1}{dp_2^2}\right)_1 = -A(1,1,0),$$
$$\left(\frac{d^3C_1}{dp_2^3}\right)_1 = 2A(1,1,0), \quad \left(\frac{d^4C_1}{dp_2^4}\right)_1 = -6A(1,1,0),$$

et ainsi de suite. Pour les dérivées de C_0 par rapport à p_2 ou à p_3 seulement, la formule (99) se réduit à (97) avec un coefficient convenable, en ajoutant les termes que nous venons de calculer. Examinons ce que donne la formule (99), pour la première dérivée par rapport à p_2, on a

$$\sigma_2 = \tau = 1, \quad \rho_2 = \varpi = 0 \quad \text{et} \quad r_{2,1} = 1;$$

comme $\lambda = 2$, Agr^λ se réduit à un seul terme

$$\left(\frac{dC_0}{dp_2}\right)_1 = (-1)^0 1^{1|1} \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1}\right) A(0,1,0) = A(0,1,0).$$

Comme nous l'avons dit, ce terme se déduirait de la dérivée de C_1 en changeant $A(1,1,0)$ en $A(0,1,0)$.

Pour la seconde dérivée de C_0 par rapport à p_2, on a $\tau + \varpi = 2$; or dans Agr^λ, $\lambda = 2$, τ peut prendre les valeurs 1 ou 2, avec $\varpi = 1$ ou 0, et, puisque nous avons calculé la première dérivée de C_0, il suffit de supposer $\tau = 2$, $\varpi = 0$ et de négliger Agr^λ, ce qui nous donne pour l'ensemble des termes

$$\left(\frac{d^2 C_0}{dp_2^2}\right)_1 = (-1)^0 1^{2|1} \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1.1}\right) A(0, 2, 0) - A(0, 1, 0)$$
$$= 2A(0, 2, 0) - A(0, 1, 0).$$

En opérant de même pour la dérivée troisième, on a $\tau + \varpi = 3$ et

$$\sigma_2 = \tau = 2, \quad \rho_2 = \varpi = 1, \quad r_{2,1} + r_{2,2} = \sigma_2 + \rho_2,$$

ce qui conduit à

$$r_{2,1} = 2, \quad r_{2,2} = 1,$$
$$r_{2,1} = 1, \quad r_{2,2} = 2,$$

d'où

$$\left(\frac{d^3 C_0}{dp_2^3}\right)_1 = (-1)^1 1^{3|1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) A(0, 2, 0) + 2A(0, 1, 0)$$
$$= -6A(0, 2, 0) + 2A(0, 1, 0).$$

Pour la double dérivée par rapport à p_2 et à p_3, on a

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 1, \quad \tau = 2, \quad \varpi = 0, \quad r_{2,1} = 1, \quad r_{3,1} = 1,$$

$$\left(\frac{d^2 C_0}{dp_2\, dp_3}\right)_1 = (-1)^0 1^{1|1} . 1^{1|1} \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1}\right) \cdot \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1}\right) A(0, 1, 1) = A(0, 1, 1).$$

Pour la dérivée troisième par rapport à p_2 et p_3, on a

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 1, \quad \tau = 2, \quad \rho_2 = 1, \quad \rho_3 = 0, \quad \varpi = 1,$$
$$r_{2,1} = 1, \quad r_{2,2} = 1, \quad r_{3,1} = 1,$$

$$\left(\frac{d^3 C_0}{dp_2^2\, dp_3}\right)_1 = (-1)^1 1^{1|1} . 1^{1|1} \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1.1}\right) \cdot \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1}\right) A(0, 1, 1) = -A(0, 1, 1).$$

On voit ainsi comment on doit appliquer la formule (99).

En résumé, l'intégration de l'équation (85), aux dérivées partielles, linéaires et à coefficients constants, est donnée par les formules (87), (87)' pour ce qui concerne la formation des coefficients de l'équation caractéristique (86); (98), (98)', (98)'', (99) pour les dérivées des coefficients de cette équation; enfin les formules (93), (94) donnent les fonctions Z qui entrent dans l'expression (92) de la fonction cherchée w, expression dans laquelle nous avons ensuite substitué des sommes de la forme $(91)_2$.

Intégrale générale de l'équation proposée. — Il est possible d'effectuer maintenant, sans difficulté, tous les calculs relatifs à l'intégration des équations linéaires à coefficients constants et aux dérivées partielles, et cette intégration conduit à celle des équations à coefficients quelconques en donnant les quantités qui entrent dans l'expression (68). Pour cela, il ne reste plus qu'à former les dérivées partielles de w par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, ... pour former ensuite les fonctions $\varphi(w)$ et $F(w)$, ainsi que leurs propres dérivées par rapport aux mêmes variables; ces dérivées seront données, pour la variable principale x_1, par les dérivées des développements (93), et pour les autres variables x_2, x_3, ... par les dérivées des fonctions arbitraires f_1, f_2, ... Ces calculs n'offrent donc aucune particularité.

Cependant il convient de ne calculer ainsi que les dérivées partielles jusqu'à l'ordre μ inclusivement; pour les dérivées d'ordres supérieurs, on prendra les différentielles totales de l'équation proposée et, à partir des ordres $\mu + 1$, $\mu + 2$, ..., les relations que l'on en déduira permettront de déterminer les dérivées partielles au moyen de relations du premier degré, comme nous l'avons indiqué à l'occasion des équations aux différences partielles. L'expression (68) donne, d'après cela, l'intégrale générale de l'équation proposée; elle contient μ fonctions arbitraires, lesquelles peuvent se réduire à

$$\frac{(\mu+1)^{\nu|1}}{1^{\nu|1}} - 1$$

constantes arbitraires au plus, valeurs initiales de la fonction inconnue et de ses dérivées partielles.

Il est inutile d'ajouter que, pour avoir les différences ou les dérivées de l'inconnue, on pourra disposer de la fonction arbitraire $F(y)$ en l'égalant à ces différences ou à ces dérivées, ainsi que nous l'avons déjà montré.

Ainsi, d'après ce qui précède, non seulement on conçoit la possibilité d'intégrer toutes sortes d'équations aux différences ou aux dérivées partielles, mais encore on peut toujours effectuer les calculs nécessaires. Le seul inconvénient qui pourra se présenter sera dû à la longueur des calculs, et l'on se rend compte que, dans bien des cas, il sera impossible d'en éviter la complication; il existe évidemment un nombre de simplifications au delà duquel on ne peut en introduire de nouvelles. Au grand nombre d'opérations qu'il faut effectuer successivement pour obtenir une intégration d'un ordre élevé viendront s'ajouter les transformations auxquelles il faudra recourir quand les développements ne présenteront pas une convergence suffisante. Les moyens à employer dans ce cas sont ceux que nous avons déjà indiqués.

Détermination des fonctions arbitraires. — Il reste encore à déterminer les fonctions arbitraires. Si l'on a bien saisi ce que nous avons dit plus haut de la détermination des constantes arbitraires, on voit qu'il convient de prendre encore pour point de départ le système des valeurs initiales des diverses quantités variables qui entrent dans la question; la valeur de l'inconnue y se réduit alors à sa valeur fondamentale w, ce qui produit une notable simplification.

Cependant on pourrait être conduit à opérer autrement; nous avons déjà traité la question. Dans l'exemple que nous allons donner, nous indiquerons en détail la marche à suivre, le cas étant assez compliqué.

En donnant donc à la variable principale x_1 sa valeur initiale, on a, d'une part, l'expression de la fonction inconnue au moyen des fonctions arbitraires, et de l'autre, on a, d'après le problème lui-même, une fonction des variables secondaires x_2, x_3, ... qui est donnée par l'état initial, d'où une première relation entre cette fonction et l'expression initiale de la fonction inconnue. On obtiendra ensuite d'autres relations analogues, en nombre suffisant, au moyen des différences ou des dérivées de la fonction inconnue et de nouvelles fonctions qui seront aussi données par l'état initial de ces différences ou de ces dérivées. De cette manière toutes les fonctions arbitraires seront susceptibles d'être déterminées au moyen d'équations primitives, c'est-à-dire par des équations qui ne nécessitent aucune intégration, ce qui est visible si l'on se reporte à la forme des intégrales des équations linéaires à coefficients constants qui forment généralement les équations réduites.

Les fonctions arbitraires une fois déterminées, on peut effectuer le calcul des valeurs de la fonction inconnue : l'état initial est choisi pour fixer les valeurs moyennes des variables; mais, si, pour calculer des valeurs un peu éloignées des valeurs moyennes primitivement considérées, on trouve avantageux de changer ces valeurs moyennes, on prendra, parmi les valeurs pour lesquelles la fonction inconnue est déjà calculée, l'une d'elles choisie convenablement, laquelle sera prise pour nouvelle valeur initiale et servira alors comme nouvelle valeur moyenne après avoir déterminé les nouvelles fonctions arbitraires. Il est bien clair qu'en opérant ainsi de proche en proche il sera possible de calculer toutes les valeurs de la fonction inconnue que l'on voudra déterminer.

Pour préciser ce que nous venons de dire, nous allons intégrer l'équation principale d'un problème bien connu, celle qui représente le mouvement vibratoire des ondes sonores, en prenant pour valeur fondamentale la solution généralement donnée dans les Traités de Mécanique. Nous croyons cet exemple très propre à lever les difficultés qui pourraient se présenter dans les applications des nouveaux calculs.

Sixième exemple. — *Du mouvement vibratoire des fluides élastiques.*

Équations du problème. — Nous allons établir l'équation des mouvements vibratoires des fluides élastiques, en suivant la marche indiquée par M. Resal dans son *Traité de Mécanique.*

Soient p, p_0 les pressions et ρ, ρ_0 les densités correspondantes d'une même masse de gaz, sous des volumes différents; soient x, y, z les coordonnées d'un point du fluide à l'époque t; f la fonction des vitesses définie par la relation

$$df = u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

où u, v, w sont les composantes de la vitesse du point considéré, c'est-à-dire

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Soit enfin U le potentiel, dont nous n'aurons pas à tenir compte, puisque nous supposerons nulle l'action des forces extérieures; on a, pour équation du mouvement des fluides,

$$(\alpha) \qquad \frac{dp}{\rho} = d\mathrm{U} - d\frac{df}{dt} - \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right].$$

D'un autre côté, en supposant que le fluide ne reçoive aucune chaleur des corps environnants, ou ne leur en communique pas; on a entre la pression et la densité la relation

$$(\alpha)' \qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{c}{c'}}.$$

c et c' sont les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants, dont le rapport est supposé constant pour un même gaz.

Posons

$$\rho = \rho_0(1 + \gamma),$$

γ étant la condensation positive ou négative; en introduisant cette nouvelle variable dans la relation précédente, on a

$$\frac{p}{p_0} = (1 + \gamma)^{\frac{c}{c'}};$$

puis différentiant, divisant par ρ et faisant

$$a^2 = \frac{c}{c'}\frac{p_0}{\rho_0},$$

il vient

$$(\beta) \qquad \frac{dp}{\rho} = a^2(1 + \gamma)^{\frac{c}{c'} - 1}\frac{d\gamma}{1 + \gamma}.$$

En éliminant le rapport $\frac{dp}{\rho}$ entre les équations (α) et (β), sans tenir compte de U, comme nous l'avons dit, on obtient

$$(1 + \gamma)^{\frac{c}{c'} - 1}\frac{a^2}{1 + \gamma}d\gamma = -d\frac{df}{dt} - \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right].$$

Si l'on désigne par ξ une variable auxiliaire, cette relation donne, en prenant les dérivées par rapport à cette variable,

$$(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}\frac{a^2}{1+\gamma}\frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{d^2f}{dt\,d\xi} - \frac{d^2f}{dx\,d\xi}\frac{df}{dx} - \frac{d^2f}{dy\,d\xi}\frac{df}{dy} - \frac{d^2f}{dz\,d\xi}\frac{df}{dz}.$$

Pour simplifier, représentons le second membre de cette équation par $F(\xi)$, nous aurons

$$(\gamma)\qquad \frac{d\gamma}{d\xi} = \frac{1+\gamma}{a^2}(1+\gamma)^{1-\frac{c}{c'}}F(\xi).$$

Nous avons encore à tenir compte d'une relation, celle qui exprime la condition de continuité du fluide,

$$(\delta)\qquad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz} = 0;$$

cette relation donne, en remplaçant ρ et u, v, w par leurs valeurs, savoir, pour ces dernières :

$$u = \frac{df}{dx},\quad v = \frac{df}{dy},\quad w = \frac{df}{dz},$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\gamma}{dx}\frac{df}{dx} + \frac{d\gamma}{dy}\frac{df}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\frac{df}{dz} + (1+\gamma)\left(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2}\right) = 0.$$

Nous pouvons, au moyen de la relation (γ), éliminer les dérivées $\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dx}, \frac{d\gamma}{dy}, \frac{d\gamma}{dz}$, en donnant à la variable auxiliaire ξ les valeurs successives t, x, y, z; on obtiendra ainsi

$$F(t) + F(x)\frac{df}{dx} + F(y)\frac{df}{dy} + F(z)\frac{df}{dz}$$
$$+ a^2(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}\left(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2}\right) = 0.$$

Enfin, nous pouvons encore éliminer la fonction $1+\gamma$. Pour cela, en intégrant l'équation (γ), après avoir fait passer la variable γ dans le premier membre, si l'on fait $\xi = t$, on obtient

$$(\varepsilon)\qquad \frac{a^2}{\frac{c}{c'}-1}(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1} = -\frac{df}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right];$$

la constante d'intégration peut être supposée contenue dans f, c'est pourquoi nous n'en tiendrons pas compte.

L'équation (ε) combinée avec la précédente donne définitivement

$$(\zeta)\quad \begin{cases} \mathrm{F}(t)+\mathrm{F}(x)\dfrac{df}{dx}+\mathrm{F}(y)\dfrac{df}{dy}+\mathrm{F}(z)\dfrac{df}{dz} \\ \quad -\left(\dfrac{c}{c'}-1\right)\left\{\dfrac{df}{dt}+\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{df}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{df}{dz}\right)^2\right]\right\} \\ \qquad\qquad \times\left(\dfrac{d^2f}{dx^2}+\dfrac{d^2f}{dy^2}+\dfrac{d^2f}{dz^2}\right)=0, \end{cases}$$

en n'oubliant pas que la fonction $\mathrm{F}(\xi)$ est

$$(\zeta)'\qquad \mathrm{F}(\xi)=-\frac{d^2f}{dt\,d\xi}-\frac{d^2f}{dx\,d\xi}\frac{df}{dx}-\frac{d^2f}{dy\,d\xi}\frac{df}{dy}-\frac{d^2f}{dz\,d\xi}\frac{df}{dz},$$

ξ représentant à volonté l'une des variables t, x, y, z.

Les deux équations du problème sont (ε) et (ζ) avec (ζ)'; f et γ sont les deux fonctions inconnues, et t, x, y et z sont les quatre variables indépendantes.

Remarquons cependant que f n'est pas la véritable inconnue. Cette inconnue est la vitesse V d'une molécule gazeuse; elle a avec la fonction f une relation que nous allons rappeler. Le système des équations simultanées (ε) et (ζ) est tel que l'on peut intégrer séparément, d'abord, l'équation (ζ) par rapport à f ou V, et ensuite résoudre l'équation (ε) par rapport à γ.

Autre forme des équations du problème. — L'équation (ζ) est du second ordre aux dérivées partielles : elle doit nous occuper particulièrement; néanmoins, comme elle est susceptible de réductions importantes, nous n'entreprendrons pas son intégration sous la forme où elle se présente ici.

Les variables x, y et z entrant symétriquement dans l'équation (ζ), on peut les remplacer par leur expression en fonction du rayon vecteur r du point (x, y, z); on a, en effet,

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \quad \text{et} \quad u^2+v^2+w^2=\mathrm{V}^2;$$

d'où, en différentiant,

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr;$$

$$u = V\frac{x}{r},\quad v = V\frac{y}{r},\quad w = V\frac{z}{r},$$

et, comme

$$df = u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

on en déduit

$$(\eta)\qquad \frac{df}{dr} = V.$$

On peut maintenant calculer les dérivées partielles de l'équation (ζ); en faisant usage des variables auxiliaires ξ et ξ', pour x, y et z, il vient

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{df}{dr}\frac{\xi}{r},$$

$$\frac{d^2f}{dt\,d\xi} = \frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{\xi}{r},$$

$$\frac{d^2f}{d\xi^2} = \frac{d^2f}{dr^2}\frac{\xi^2}{r^2} + \frac{df}{dr}\frac{r^2-\xi^2}{r^3},$$

$$\frac{d^2f}{d\xi\,d\xi'} = \frac{d^2f}{dr^2}\frac{\xi\xi'}{r^2} - \frac{df}{dr}\frac{\xi\xi'}{r^3},$$

d'où les relations

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 = \left(\frac{df}{dr}\right)^2,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2} = \frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr};$$

et ensuite

$$F(t) = -\frac{d^2f}{dt^2} - \frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{df}{dr}.$$

Quant aux fonctions $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$, on a, pour l'une d'elles,

$$\begin{aligned} F(x) = -\frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{x}{r} &- \left(\frac{d^2f}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{df}{dr}\frac{r^2-x^2}{r^3}\right)\frac{df}{dr}\frac{x}{r} \\ &- \left(\frac{d^2f}{dr^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{df}{dr}\frac{r^2-y^2}{r^3}\right)\frac{df}{dr}\frac{y}{r} \\ &- \left(\frac{d^2f}{dr^2}\frac{z^2}{r^2} + \frac{df}{dr}\frac{r^2-z^2}{r^3}\right)\frac{df}{dr}\frac{z}{r}, \end{aligned}$$

et pour les autres il suffirait de changer d'abord x en y, puis x en z, dans le premier terme seulement ; par suite,

$$\mathrm{F}(t)+\mathrm{F}(x)\frac{df}{dx}+\mathrm{F}(y)\frac{df}{dy}+\mathrm{F}(z)\frac{df}{dz}=-\frac{d^2f}{dt^2}-2\frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{df}{dr}-\frac{d^2f}{dr^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2,$$

$$\frac{df}{dt}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2\right]=\frac{df}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2.$$

En réunissant les quantités calculées pour l'équation (ζ), celle-ci devient

$$(\theta)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{d^2f}{dt^2}+2\frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{df}{dr}+\frac{d^2f}{dr^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\\&\quad+\left(\frac{c}{c'}-1\right)\left[\frac{df}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right]\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{df}{dr}\right)=0;\end{aligned}\right.$$

quant à l'équation (ε), elle devient

$$(\theta)'\qquad \frac{a^2}{\frac{c}{c'}-1}(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}+\frac{df}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2=0.$$

Telles sont, sous une seconde forme, les deux équations du problème.

Intégration des équations du problème. — 1° *Détermination des valeurs fondamentales.* — L'équation (θ) que nous allons maintenant intégrer ne contient que deux variables indépendantes t et r, et l'inconnue est f ; c'est l'équation que nous avons généralement représentée par

$$\varphi(r)=0,$$

en mettant f à la place de y et de même ψ au lieu de ϖ pour valeur fondamentale, puisque ϖ représente une autre quantité dans le problème qui nous occupe, et aussi Φ au lieu de F, nous aurons pour expression fondamentale, au lieu de (66) ou (68),

$$(\text{s})\qquad \Phi(f) = \Phi(\psi) - \varphi(\psi)\frac{\left(\dfrac{d\Phi(\psi)}{d\psi}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi(\psi)}{d\psi}\right)} + \ldots;$$

dans le cas présent, nous passerions de l'inconnue f à la vitesse V en faisant $\Phi(f)$ égal à $\frac{df}{dr}$.

Pour déterminer la valeur fondamentale ψ, formons l'équation transformée de la manière suivante, ainsi que nous l'avons déjà expliqué :

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \omega\left[2\frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right]$$
$$- \left\{\frac{1-\frac{c}{c'}}{a^2}\left[\frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right]\right\}^{\omega} a^2\left(\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr}\right) = 0,$$

nous aurons pour équation réduite, en faisant $\omega = 0$,

$$(\iota)\qquad \frac{d^2\psi}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\right) = 0;$$

la quantité a^2 est celle que nous avons écrite plus haut pour $\frac{c}{c'}\frac{p_0}{\rho_0}$.

L'équation (ι) est du second ordre, linéaire et aux dérivées partielles; c'est à cette dernière équation approchée que parvient Poisson dans son *Traité de Mécanique*, t. II; aussi l'avons-nous choisie pour équation réduite; de son intégration nous déduirons la solution générale du problème.

Pour justifier la réduction que nous venons d'opérer sur l'équation (θ) en vue de parvenir à l'équation (ι), il suffit de rappeler la manière dont on établit directement cette dernière. On admet que, dans les mouvements vibratoires des gaz, la vitesse des molécules est très faible, par suite les carrés des composantes de la vitesse qui figurent dans l'équation (α) sont nuls, c'est-à-dire que l'on a très sensiblement

$$2\frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = 0.$$

On remplace aussi $(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}$ par l'unité; cette quantité en diffère ordinairement peu, parce que γ est une très petite quantité et que l'exposant $\frac{c}{c'}-1$ est inférieur à $\frac{1}{2}$ (pour l'air, il est 0,419); on a donc très sensiblement, d'après $(\theta)'$,

$$-\frac{\frac{c}{c'}}{a^2}\left[\frac{df}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right]=1.$$

Il résulte de ceci que la valeur fondamentale ψ diffère très peu de la fonction f, inconnue du problème, du moins dans les conditions où l'on étudie habituellement les vibrations de l'air, par conséquent le développement de la fonction f doit être très rapidement convergent; il suffira donc de calculer le second terme de l'expression (ϑ).

L'équation (ι) peut s'écrire

$$r\frac{d^2\psi}{dt^2}=a^2\left(r\frac{d^2\psi}{dr^2}+2\frac{d\psi}{dr}\right);$$

sous cette forme on voit que le second membre est la dérivée, par rapport à r, de $\frac{d(r\psi)}{dr}$, et il vient

$$(\varkappa)\qquad \frac{d^2(r\psi)}{dt^2}=a^2\frac{d^2(r\psi)}{dr^2};$$

par suite, en désignant par F_1 et F_2 deux fonctions arbitraires, on a, comme cela est connu,

$$(\varkappa)'\qquad r\psi=F_1(r+at)+F_2(r-at);$$

mais il importe ici de déduire cette solution des formules que nous avons données. Prenons t pour variable principale : on verrait facilement, d'après (86), que l'équation caractéristique correspondant à l'équation $(\varkappa)$,

$$C_2m^2+C_1m+C_0=0,$$

a pour coefficients

$$C_2 = 1, \quad C_1 = 0, \quad C_0 = -a^2(\mathrm{L}p)^2;$$

par suite, ses racines sont égales et de signes contraires,

$$m_1 = a\mathrm{L}p, \quad m_2 = -a\mathrm{L}p.$$

Au lieu de former les fonctions Z_1, Z_2 et de les développer ensuite, il est plus simple ici de développer directement les exponentielles comme on le ferait pour les fonctions Z; on a ainsi

$$e^{\pm mt} = e^{\pm at.\mathrm{L}p} = p^{\pm at},$$

et, par suite,

$$r\psi = \sum\left[\frac{1}{1^{\sigma|1}}\left(\frac{d^\sigma p^{at}}{dp^\sigma}\right)_0 F_1(r+\sigma) + \frac{1}{1^{\sigma|1}}\left(\frac{d^\sigma p^{-at}}{dp^\sigma}\right)_0 F_2(r-\sigma)\right].$$

La quantité à différentier pour le premier terme entre crochets donne

$$\frac{d^\sigma p^{at}}{dp^\sigma} = at^{\sigma|-1} p^{at-\sigma};$$

pour le second, il suffirait de changer a en $-a$. Comme il faut faire ensuite $p = 0$, il est nécessaire que at soit égal à σ, afin que l'expression ne soit ni nulle ni infinie : le rapport

$$\frac{at^{\sigma|-1}}{1^{\sigma|1}}$$

est alors égal à l'unité, et l'on a pour $r\psi$ la valeur précédente donnée par $(\varkappa)'$. Dans la théorie des factorielles, les règles applicables aux exposants entiers sont généralement applicables aux exposants non entiers, comme dans le cas des exponentielles.

La formation des fonctions Z est aussi très simple, bien que le calcul de la fonction $r\psi$ par ce moyen soit un peu plus long que le précédent. On a

$$Z_1 = \frac{m_2 e^{m_1 t} - m_1 e^{m_2 t}}{m_2 - m_1}, \quad Z_2 = \frac{e^{m_2 t} - e^{m_1 t}}{m_2 - m_1},$$

ou bien, en mettant $+m$ et $-m$ au lieu de m_1 et m_2,

$$Z_1 = \frac{1}{2}(e^{mt} + e^{-mt}), \quad Z_2 = \frac{1}{2m}(e^{mt} - e^{-mt}),$$

autrement

$$(\lambda) \qquad Z_1 = \cos(at\mathrm{L}p), \quad Z_2 = \frac{\sin(at\mathrm{L}p)}{a\mathrm{L}p}.$$

On pourrait encore obtenir ce résultat d'une autre façon en exprimant les fonctions Z au moyen des fonctions aleph; en effet, d'après les formules (93), (94), on aurait

$$Z_1 = 1 + \aleph(2)\frac{t^2}{1^{2|1}} + \aleph(4)\frac{t^4}{1^{4|1}} + \cdots,$$
$$Z_2 = \frac{t}{1} + \aleph(2)\frac{t^3}{1^{3|1}} + \aleph(4)\frac{t^5}{1^{5|1}} + \cdots;$$

d'après les formules (49) et (49)', ou (83) et (83)', on aurait encore

$$\aleph(1) = 0, \quad \aleph(2) = a^2(\mathrm{L}p)^2, \quad \aleph(3) = 0, \quad \aleph(4) = a^4(\mathrm{L}p)^4, \quad \ldots,$$

ce qui donne

$$Z_1 = 1 + a^2(\mathrm{L}p)^2\frac{t^2}{1^{2|1}} + a^4(\mathrm{L}p)^4\frac{t^4}{1^{4|1}} + \cdots,$$
$$Z_2 = \frac{t}{1} + a^2(\mathrm{L}p)^2\frac{t^3}{1^{3|1}} + a^4(\mathrm{L}p)^4\frac{t^5}{1^{5|1}} + \cdots.$$

On voit que ces deux séries représentent le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique divisé par $a\mathrm{L}p$, trouvés plus haut, (λ). D'après cela, nous obtenons pour la fonction $r\psi$ l'expression

$$r\psi = \sum\left[\frac{1}{1^{\sigma|1}}\left(\frac{d^\sigma \cos at\mathrm{L}p}{dp^\sigma}\right)_0 \mathrm{F}_1(r+\sigma) + \frac{1}{1^{\sigma|1}}\left(\frac{d^\sigma \dfrac{\sin at\mathrm{L}p}{a\mathrm{L}p}}{dp^\sigma}\right)_0 \mathrm{F}_2(r-\sigma)\right].$$

Il reste à calculer les dérivées des cosinus et sinus hyperboliques; par exemple, pour le cosinus, on a une expression de la forme

$$\frac{d^\sigma \cos at\,\mathrm{L}p}{dp^\sigma} = [(at)^\sigma + k_2(at)^{\sigma-2} + k_4(at)^{\sigma-4} + \ldots]\frac{{}^{\sin}_{\cos}(at\,\mathrm{L}p)}{p^\sigma}$$

$$- [k_1(at)^{\sigma-1} + k_3(at)^{\sigma-3} + k_5(at)^{\sigma-5} + \ldots]\frac{{}^{\cos}_{\sin}(at\,\mathrm{L}p)}{p^\sigma},$$

k_1, k_2, k_3, ... sont des coefficients numériques que l'on déterminerait au moyen des formules (96), (96)′, (96)″, à moins que l'on n'en aperçoive directement la formation, ce qui est facile. Nous indiquons par sin et cos superposés que la fonction est un sinus ou un cosinus, ou inversement. Or, si $p = 0$, il vient $\mathrm{L}p = -\infty$, ${}^{\sin}_{\cos}(at\,\mathrm{L}p)$ tend vers $\pm\frac{1}{2}e^{at\,\mathrm{L}p}$ ou $\pm\frac{1}{2}p^{at}$, et ${}^{\cos}_{\sin}(at\,\mathrm{L}p)$ tend vers $\mp\frac{1}{2}e^{-at\,\mathrm{L}p}$ ou $\mp\frac{1}{2}p^{at}$, ce qui donne, pour l'expression précédente,

$$\pm\frac{1}{2}[(at)^\sigma + k_1(at)^{\sigma-1} + k_2(at)^{\sigma-2} + \ldots]\frac{p^{at}}{p^\sigma}.$$

D'après la formation des coefficients k, le développement entre crochets n'est autre que la factorielle

$$(at + \sigma - 1)(at + \sigma - 2)\ldots at = at^{\sigma|-1};$$

ainsi, quand p tend vers zéro,

$$\frac{1}{1^{\sigma|1}}\frac{d^\sigma \cos at\,\mathrm{L}p}{dp^\sigma}$$

tend vers

$$\pm\frac{1}{2}\frac{at^{\sigma|-1}}{1^{\sigma|1}}\frac{p^{at}}{p^\sigma},$$

et, comme cette expression a lieu quel que soit σ, elle ne sera ni nulle ni infinie si $\sigma = at$. On a donc $\pm\frac{1}{2}\mathrm{F}_1(r + at)$ pour la première partie de la somme composant la fonction $r\psi$; on peut regarder le coefficient $\pm\frac{1}{2}$ comme appartenant à la fonction arbitraire F_1. En opérant d'une manière analogue pour la seconde partie de la même somme, on aboutirait définitivement à l'expression (x)′ déjà trouvée.

2° *Détermination des quantités qui entrent dans l'intégrale générale.* — La fonction ψ étant déterminée, il reste à calculer la fonction f, ou plutôt la dérivée $\frac{df}{dr} = V$. Partant de

$$(\mu) \qquad \psi = \frac{1}{r}[F_1(r+at) + F_2(r-at)]$$

et faisant

$$(\mu)' \qquad \frac{d\psi}{dr} = \zeta, \quad \frac{d\psi}{dt} = \eta,$$

on a

$$(\nu) \quad \zeta = \frac{1}{r}\left[\frac{dF_1(r+at)}{dr} + \frac{dF_2(r-at)}{dr}\right] - \frac{1}{r^2}[F_1(r+at) + F_2(r-at)],$$

$$(\nu)' \qquad \eta = \frac{a}{r}\left[\frac{dF_1(r+at)}{dt} - \frac{dF_2(r-at)}{dt}\right];$$

les dérivées $\frac{d\zeta}{dr}$, $\frac{d^2\zeta}{dr^2}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\eta}{dr}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt\,dr}$, $\frac{d^2\eta}{dr^2} = \frac{d^2\zeta}{dt\,dr}$ s'obtiendraient aisément. Ensuite, la fonction que nous avons généralement notée par $\varphi(w)$, et qui est ici $\varphi(\psi)$, deviendra, en écrivant l'équation réduite sous la forme

$$\frac{d\eta}{dt} - a^2\left(\frac{d\zeta}{dr} + \frac{2}{r}\zeta\right) = 0,$$

$$\varphi(\psi) = \frac{d\eta}{dt} + 2\frac{d\eta}{dr}\zeta + \frac{d\zeta}{dr}\zeta^2 + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)\left(\eta + \frac{1}{2}\zeta^2\right)\frac{d\eta}{dt};$$

Posons, pour abréger,

$$U = \eta + \frac{1}{2}\zeta^2;$$

la fonction précédente devient, en vertu de (ν) et $(\nu)'$,

$$(\xi) \qquad \varphi(\psi) = \frac{dU}{dt} + \zeta\frac{dU}{dr} + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)U\frac{d\eta}{dt}$$

et, par suite,

$$(\sigma)\quad \frac{d\varphi(\psi)}{dt} = \frac{d^2U}{dt^2} + \zeta\frac{d^2U}{dt\,dr} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dU}{dr} + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)\left[U\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{dU}{dt}\frac{d\eta}{dt}\right],$$

$$(\sigma')\quad \frac{d\varphi(\psi)}{dr} = \frac{d^2U}{dt\,dr} + \zeta\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{d\zeta}{dr}\frac{dU}{dr} + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)\left[U\frac{d^2\eta}{dt\,dr} + \frac{dU}{dr}\frac{d\eta}{dt}\right].$$

Au moyen de ces quantités on peut calculer la fonction $\Phi(f)$ de (ξ), en réduisant le développement aux deux premiers termes, savoir :

$$\Phi(f) = \Phi(\psi) - \varphi(\psi)\frac{\left(\frac{d\Phi(\psi)}{d\psi}\right)}{\left(\frac{d\varphi(\psi)}{d\psi}\right)},$$

et l'on a

$$\left(\frac{d\varphi(\psi)}{d\psi}\right) = \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\frac{1}{\frac{d\psi}{dt}} + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\frac{1}{\frac{d\psi}{dr}} = \frac{1}{\eta\zeta}\left[\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta\right],$$

d'où, pour $\Phi(f) = f$,

$$(\varpi)\qquad f = \psi - \varphi(\psi)\frac{\eta\zeta}{\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta}.$$

Si l'on fait encore

$$\Phi(f) = \frac{df}{dr} = V,$$

on a

$$\left(\frac{d\Phi(\psi)}{d\psi}\right) = \frac{1}{\eta\zeta}\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)\eta\right];$$

il vient donc, pour la fonction cherchée V,

$$(\rho)\qquad V = \zeta - \varphi(\psi)\frac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)\eta}{\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta}.$$

Quant à la condensation γ, en mettant les dérivées de ψ à la place de celles de f dans l'équation $(\theta)'$, et appelant s la quantité que l'on obtient alors au lieu de γ, et qui sera la valeur fondamentale de cette dernière quantité, on obtient

$$(\sigma) \qquad s = \left(\frac{-\mathrm{U}}{b^2}\right)^{\frac{1}{\frac{c}{c'}-1}} - 1,$$

en faisant, pour simplifier,

$$(\sigma)_1 \qquad b^2 = \frac{a^2}{\frac{c}{c'}-1}.$$

D'après un calcul connu, on trouverait l'expression plus simple

$$(\sigma)' \qquad s = -\frac{\eta_1}{a^2},$$

que l'on pourrait prendre également pour valeur fondamentale.

On a enfin, comme il est facile de le voir, par (σ) ou $(\sigma)'$,

$$(\rho)' \qquad \gamma = s - \frac{b^2(1+s)^{\frac{c}{c'}-1} + \eta_1 + \frac{1}{2}\eta_1^2}{a^2(1+s)^{\frac{c}{c'}-2}}.$$

Les deux quantités V et γ qu'il s'agissait de calculer sont ainsi données par (ρ) et $(\rho)'$.

3° *Détermination des fonctions arbitraires.* — En dernier lieu, nous avons à déterminer les fonctions arbitraires. Si tout est symétrique par rapport à l'origine, c'est-à-dire par rapport au centre d'ébranlement, celui-ci devant rester immobile, il faut que les quantités f et V soient nulles pour $r = 0$, ce qui donne, d'après (ϖ) et (ρ),

$$(\varsigma) \qquad \left.\begin{aligned} &\zeta\left[\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta\right] - \varphi(\psi)\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)\eta\right] = 0, \\ &\psi\left[\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta\right] - \varphi(\psi)\eta\zeta = 0, \end{aligned}\right\} \text{pour } r = 0.$$

On a ainsi deux relations auxquelles doivent satisfaire les fonctions arbitraires F_1 et F_2 qui sont impliquées dans la fonction ψ et, par suite, dans η et ζ. En outre, les valeurs initiales sont données pour $t = 0$; on a donc

$$(\tau) \qquad V_0 = \Psi_1(r), \quad \gamma_0 = \Psi_2(r).$$

Puisque les fonctions $\Psi_1(r)$ et $\Psi_2(r)$ sont données, ces deux conditions déterminent complètement les fonctions arbitraires F_1 et F_2. Mais ici nous ne trouvons pas le cas ordinaire dont nous avons parlé : les valeurs initiales ne correspondent pas aux valeurs moyennes adoptées, parce que nous avons voulu utiliser, comme équation réduite, une équation déterminée (ι). Les valeurs moyennes dont nous avons fait usage se présentaient d'ailleurs naturellement. De là résulte que la fonction inconnue ne se réduit pas à la valeur fondamentale lorsque l'on donne aux variables les valeurs qui correspondent à l'état initial.

La détermination des fonctions arbitraires exige alors la résolution d'un système d'équations simultanées qui est, d'après (ρ) et (ρ') et (ς),

$$(\tau') \quad \begin{cases} \Psi_1(r) = \zeta_0 - \varphi(\psi_0)\dfrac{\left(\dfrac{d\zeta_0}{dt}\right)\zeta_0 + \left(\dfrac{d\zeta_0}{dr}\right)\eta_0}{\left(\dfrac{d\varphi(\psi_0)}{dt}\right)\zeta_0 + \left(\dfrac{d\varphi(\psi_0)}{dr}\right)\eta_0}, \\[2ex] \Psi_2(r) = s_0 - \dfrac{b^2(1+s_0)^{\frac{c}{c-1}} + \eta_0 + \frac{1}{2}\zeta_0^2}{a^2(1+s_0)^{\frac{c}{c-2}}}. \end{cases}$$

Les inconnues F_1, F_2 sont comprises dans les fonctions ψ_0, η_0, ζ_0 et s_0. La résolution de ce système, quoique compliquée, est possible, comme nous le montrerons plus loin; il suffit pour l'instant d'observer que, par l'application de la méthode secondaire, les fonctions F_1 et F_2, exprimées au moyen des fonctions Ψ_1 et Ψ_2, exigeront la connaissance de premières valeurs approchées qui seront leurs valeurs fondamentales.

Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les valeurs fondamentales de F_1 et de F_2 que nous déterminerons en substituant ζ_0 et s_0 à V_0 et γ_0 dans (ς); on a, d'après un calcul de Poisson, en tenant compte de (ν), $(\nu)'$ et $(\sigma)'$, puis en remplaçant F par $\mathfrak{F}$ et faisant $t = 0$ après les dérivations,

$$(\tau)'' \quad \begin{cases} \Psi_1(r) = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{d\mathfrak{F}_1(r)}{dr} + \dfrac{d\mathfrak{F}_2(r)}{dr}\right] - \dfrac{1}{r^2}[\mathfrak{F}_1(r) + \mathfrak{F}_2(r)], \\ \Psi_2(r) = \dfrac{-1}{ar}\left[\dfrac{d\mathfrak{F}_1(r)}{dt} - \dfrac{d\mathfrak{F}_2(r)}{dt}\right]. \end{cases}$$

La seconde relation peut s'écrire

$$(\varphi) \qquad r\Psi_2(r) = -\frac{d\mathfrak{F}_1(r)}{dr} + \frac{d\mathfrak{F}_2(r)}{dr},$$

et, intégrant, il vient

$$(\varphi)_1 \qquad \int r\Psi_2(r) = -\mathfrak{F}_1(r) + \mathfrak{F}_2(r);$$

quant à la première, elle donne par intégration

$$(\varphi)' \qquad r\int \Psi_1(r)dr = \mathfrak{F}_1(r) + \mathfrak{F}_2(r),$$

d'où

$$(\varphi)'_1 \qquad \int \Psi_1(r)dr + r\Psi_1(r) = \frac{d\mathfrak{F}_1(r)}{dr} + \frac{d\mathfrak{F}_2(r)}{dr}.$$

Il n'est pas nécessaire de tenir compte ici des constantes d'intégration. (φ), $(\varphi)_1$, $(\varphi)'$ et $(\varphi)'_1$ donnent alors

$$(\chi) \quad \begin{cases} 2\mathfrak{F}_1(r) = r\int \Psi_1(r)\,dr - \int r\,\Psi_2 r(dr), \\ 2\mathfrak{F}_2(r) = r\int \Psi_1(r)\,dr + \int r\Psi_2 r\,dr, \\ 2\dfrac{d\mathfrak{F}_1 r}{dr} = \int \Psi_1(r)dr + r[\Psi_1(r) - \Psi_2(r)], \\ 2\dfrac{d\mathfrak{F}_2 r}{dr} = \int \Psi_2(r)dr + r[\Psi_1(r) + \Psi_2(r)]. \end{cases}$$

Nous avons de cette manière les valeurs fondamentales $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ des deux fonctions arbitraires F_1, F_2, ainsi que leurs dérivées.

On peut maintenant résoudre par rapport à F_1 et F_2 le système des deux équations simultanées (τ) et déterminer les fonctions arbitraires, comme nous l'indiquerons plus loin.

Nous pouvons donc considérer comme achevée dès à présent l'intégration complète des équations (θ) et (θ'), la première étant une équation aux dérivées partielles du second ordre à coefficients variables qui jusqu'à présent avait résisté aux méthodes ordinaires. En effet, nous devions appliquer l'expression fondamentale (68) ou ($\mathfrak{S}$); pour cela, choisissant une fonction qui donnait déjà pour la vitesse V la solution d'une manière très approchée, nous avons calculé les éléments constituant le second terme de l'expression ($\mathfrak{S}$), de sorte que nous pourrions encore, sans rencontrer d'autres difficultés que la longueur des calculs, obtenir successivement les autres termes de cette expression. Nous aurions ainsi, avec une approximation aussi grande qu'on pourrait le désirer, les valeurs de la fonction inconnue sans omettre ou restreindre aucune des conditions du problème. C'est là un *desideratum* que l'on devait s'efforcer d'obtenir, car les fonctions cherchées étant, par la nature de la question, des fonctions transcendantes, nous ne pouvons espérer les connaître que par une suite successive et indéfinie d'approximations.

La forme technique de la solution que nous avons obtenue ne se prête pas aussi facilement à une discussion qu'une forme purement théorique; cependant il est possible de reconnaître la propagation uniforme du mouvement ondulatoire.

Néanmoins, si l'on rencontrait des résultats qui paraissent être en contradiction avec des faits reconnus, on ne devrait pas conclure que le système d'intégration soit en défaut. Par exemple, on a observé dernièrement que les ondes sonores, produites dans certaines conditions au moyen d'étincelles électriques, se propagent avec une vitesse plus grande, près du centre d'ébranlement, qu'un peu au delà. Il est visible que la solution, telle que nous l'avons obtenue, ne peut rendre compte d'un pareil fait, car les équations (θ), (θ') supposent qu'il n'y a pas propagation de chaleur, tandis que la chaleur produite par l'étincelle au centre d'ébranlement doit forcément se propager dans les couches voisines.

D'ailleurs la supposition d'un rapport sensiblement constant pour les chaleurs spécifiques, bien que vérifiée dans les limites étendues de température, ne serait plus admissible dans ce cas, à cause de la température extrême qui est développée par l'étincelle; on se trouve bien au delà des limites pour lesquelles la constance du rapport $\frac{c}{c'}$ a été reconnue. De plus, si l'on se reportait à la critique très juste de Wronski, critique que l'on trouve à la fin de son Ouvrage des *Nouveaux systèmes de machines à vapeur*, on verrait que les deux chaleurs spécifiques c et c' dépendent de quantités de chaleur essentiellement différentes que l'on confond encore communément; d'où il résulte que la relation (α') est non seulement empirique, mais encore fausse en principe; cette erreur se transmet nécessairement dans le résultat de l'intégration, mais il est clair qu'elle ne fausse pas l'intégration même, question de calcul qui seule doit nous occuper ici.

L'exemple traité nous a paru très propre à faire saisir l'esprit de la méthode de Wronski; il montre de quelle manière, à l'avenir, on pourra utiliser les solutions approchées dont on a dû se contenter dans la plupart des cas, pour en déduire les solutions complètes de problèmes que l'on pouvait croire presque insolubles.

RÉSOLUTION ET INTÉGRATION DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES.

Nous venons de donner l'intégration des équations aux différences ou aux différentielles partielles à coefficients quelconques; il nous reste, pour compléter l'exposition de la méthode, à considérer le cas plus général où les équations à résoudre ou à intégrer forment des systèmes d'équations simultanées.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_m$, m fonctions de n quantités $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_\lambda$ considérées comme inconnues, de ν quantités données $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$, pouvant varier à volonté, et d'un nombre quelconque de quantités constantes que nous ne désignons pas.

Soient de plus m relations qui forment les équations du problème et que nous écrirons

$$\begin{gathered}
\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0, \\
\varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\varphi_m(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0.
\end{gathered}$$

D'après ces relations, les inconnues étant fonctions des variables indépendantes et des quantités constantes sont aussi fonctions les unes des autres; cette remarque est essentielle pour ce qui va suivre.

Nous avons admis que le nombre des relations pouvait différer de celui des inconnues : si $\lambda > m$, $\lambda - m$ inconnues ne peuvent être déterminées, et si $\lambda < m$, il faut, pour que le problème soit possible, que $m - \lambda$ relations rentrent dans les λ autres. Ainsi, pour satisfaire généralement au problème, il faut dans le premier cas, $\lambda > m$, que $\lambda - m$ quantités inconnues y soient assimilées aux quantités variables indépendantes x, et dans le deuxième cas, $\lambda < m$, que $m - \lambda$ équations soient considérées comme superflues, à moins que $m - \lambda$ quantités x supposées indépendantes puissent recevoir des déterminations de la même manière que les inconnues. Nous pouvons donc supposer le nombre des inconnues égal au nombre des équations et celles-ci entièrement distinctes; nous aurons alors, au lieu du système d'équations précédent, le système

$$(100)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0, \\ \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0. \end{array}\right.$$

On peut admettre que certaines inconnues n'entrent pas dans toutes les équations.

Il faut remarquer que nous ne considérons ici que les équations prises en elles-mêmes, c'est-à-dire, abstraction faite des problèmes possibles dont elles ne sont que la traduction; aussi, en vue du cas ordinaire de la pratique, où les inconnues sont généralement susceptibles d'être déterminées, devions-nous prendre un nombre d'équations égal à celui des inconnues.

Cela posé, dans le cas d'équations qui contiennent des différences ou des différentielles des inconnues, il y a toujours au moins une quantité x variable indépendante qui se trouve être ainsi variable commune; mais, dans le cas d'équations primitives, c'est-à-dire, d'équations dans lesquelles les différences ou les différentielles des inconnues n'entrent pas, il n'existe pas de variable commune, ou plutôt on ne considère pas, dans la résolution, les variations des quantités indépendantes qui peuvent exister; ces quantités sont ordinairement traitées comme des constantes. Dans la méthode présente, il convient de tenir compte d'une variable commune pour exprimer les dérivées des inconnues qui entrent dans l'expression fondamentale. Si les équations ne contiennent pas une quantité qui soit naturellement désignée pour cet objet, on pourra prendre, pour en tenir lieu, une quantité qui entre à la fois dans toutes les équations, l'une des inconnues par exemple; ou bien, on introduira convenablement dans toutes les équations une quantité arbitraire en facteur ou en exposant, comme nous l'avons fait pour la quantité ω dans la formation des équations réduites. Il est clair, à cause de la dépendance de toutes les quantités, que cette manière d'opérer ne doit rien changer au résultat définitif, pourvu que l'on donne à la variable commune, après les opérations effectuées, la valeur qu'elle a dans les équations proposées.

Maintenant, dans le cas d'équations primitives à résoudre, pour déterminer l'une des inconnues y_α, ou mieux une fonction donnée $F(y_\alpha)$ de cette inconnue, laquelle représentera, pour abréger, la fonction

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_\alpha, \ldots, y_\lambda),$$

puisque nous supposons par les relations (100) que $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$ sont des fonctions de y_α, nous choisirons l'une des équations du système

$$(101) \qquad \varphi_\beta(y_1, y_2, \ldots, y_\alpha, \ldots, y_\lambda) = 0,$$

qui paraîtra la plus favorable pour cet objet; autrement l'une quelconque des équations pourrait convenir. En considérant les inconnues autres que y_α comme fonctions de cette inconnue particulière, nous pouvons écrire ainsi l'équation (101)

$$(102) \qquad \varphi_\beta(y_\alpha) = 0,$$

pour nous conformer aux notations précédentes, et l'expression fondamentale donne

$$(103) \quad \left\{ \begin{aligned} F(y_\alpha) = {} & F(w_\alpha) - \varphi_\beta(w_\alpha) \frac{d\,F(w_\alpha)}{d\,\varphi_\beta(w_\alpha)} \\ & + \frac{1}{2} [\varphi_\beta(w_\alpha)]^2 \frac{d\,\varphi(w_\alpha)\, d^2 F(w_\alpha) - d^2\varphi_\beta(w_\alpha)\, d\,F(w_\alpha)}{[d\,\varphi_\beta(w_\alpha)]^3} - \ldots \end{aligned} \right.$$

D'après ce qui a été dit, w_α est une fonction généralement *quelconque* de la variable indépendante, mais pratiquement cette fonction doit être aussi rapprochée que possible de l'inconnue y_α pour que l'expression précédente soit suffisamment convergente. Nous avons fait voir que cette fonction w_α se déduisait ordinairement d'équations réduites; nous y reviendrons tout à l'heure.

Les différentielles des fonctions F et φ_β sont prises par rapport à l'inconnue y_α, à laquelle on substitue ensuite sa valeur fondamentale w_α. Il faut tenir compte, dans le calcul de ces différentielles, de ce que les autres inconnues sont fonctions de l'inconnue particulière y_α par l'intermédiaire de la variable commune x; on voit ainsi l'utilité de cette variable commune.

Prenant donc les dérivées des fonctions F et φ_β par rapport à x, l'expression précédente devient

$$(103)\quad \begin{cases} F(y_\alpha) = F(w_\alpha) - \varphi_\beta(w_\alpha)\dfrac{\left(\dfrac{dF(w_\alpha)}{dx}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx}\right)} \\[2ex] \quad + \dfrac{1}{2}[\varphi_\beta(w_\alpha)]^2 \dfrac{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx}\right)\left(\dfrac{d^2F(w_\alpha)}{dx^2}\right) - \left(\dfrac{d^2\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx^2}\right)\left(\dfrac{dF(w_\alpha)}{dx}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx}\right)^3} - \dots \end{cases}$$

Nous indiquons par des parenthèses que les dérivées des fonctions F et φ_β sont prises seulement par rapport à l'inconnue y_α et par rapport à $y_1, y_2, \dots, y_\lambda$, fonctions de cette dernière quantité.

L'expression (103) est aussi applicable aux équations qui contiennent des différences ou des différentielles des inconnues; mais, s'il y avait des différences ou des différentielles partielles, il conviendrait de transformer l'expression (103) et de la mettre sous la même forme que l'expression (68).

Calcul des dérivées. — Le calcul des dérivées qui entrent dans (103) exige, comme nous venons de le dire, la connaissance des dérivées suivantes :

$$\frac{dy_1}{dy_\alpha},\quad \frac{dy_2}{dy_\alpha},\quad \dots,\quad \frac{dy_\alpha}{dy_\alpha},\quad \frac{d^2y_1}{dy_\alpha^2},\quad \frac{d^2y_2}{dy_\alpha^2},\quad \dots,\quad \frac{d^2y_\lambda}{dy_\alpha^2},\quad \dots,\quad \text{etc.}$$

et se ramène à la détermination des dérivées de toutes les inconnues par rapport à la variable commune x.

Ces dérivées s'obtiendront généralement au moyen des dérivées totales des équations proposées, lesquelles présenteront un système d'équations du premier degré par rapport aux quantités cherchées, d'où l'on déduira facilement les dérivées en question.

Ainsi, en reprenant l'équation (101) ou (102), supposée primitive, que nous écrirons pour simplifier $\varphi = 0$, et en indiquant par des indices correspondant aux variables le résultat de la différentiation effectuée sur la fonction φ, une première différentiation donne

$$\varphi_0 dx + \varphi_1 dy_1 + \varphi_2 dy_2 + \ldots + \varphi_\lambda dy_\lambda = 0,$$

ou, en prenant les dérivées par rapport à x,

$$\varphi_0 + \varphi_1 \frac{dy_1}{dx} + \varphi_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \varphi_\lambda \frac{dy_\lambda}{dx} = 0. \tag{105}$$

En opérant de même sur les autres équations proposées, nous aurions $\lambda - 1$ autres équations de même forme que (105), c'est-à-dire du premier degré par rapport aux dérivées cherchées, lesquelles avec (105) permettraient de déterminer les dérivées du premier ordre des inconnues. Le véritable motif d'introduction de la variable auxiliaire x se voit ici clairement.

Une seconde dérivation donne un second système de λ équations de la forme

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0} + \varphi_{1,0}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \varphi_{\lambda,0}\frac{dy_\lambda}{dx} + \left(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \varphi_{\lambda,1}\frac{dy_\lambda}{dx}\right)\frac{dy_1}{dx} \\ + \ldots + \left(\varphi_{0,\lambda} + \varphi_{1,\lambda}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \varphi_{\lambda,\lambda}\frac{dy_\lambda}{dx}\right)\frac{dy_\lambda}{dx} \\ + \varphi_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + \varphi_2\frac{d^2y_2}{dx^2} + \ldots + \varphi_\lambda\frac{d^2y_\lambda}{dx^2} = 0.\end{aligned}$$

Les dérivées premières étant supposées déjà déterminées, l'ensemble des termes où elles entrent peut être représenté par Φ, ce qui réduit l'équation précédente à

$$\Phi + \varphi_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + \varphi_2\frac{d^2y_2}{dx^2} + \ldots + \varphi_\lambda\frac{d^2y_\lambda}{dx^2} = 0. \tag{105$'$}$$

Cette équation avec $\lambda - 1$ autres que l'on obtiendrait de la même manière forment un système d'équations du premier degré par rapport aux dérivées secondes des inconnues d'où il est facile de déduire ces quantités.

Les dérivées des ordres supérieurs s'obtiendraient en suivant le même procédé. Après ces opérations effectuées, on change $y_1, y_2, \ldots$ en $w_1, w_2, \ldots$ pour composer l'expression $(103)_1$.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que le système des équations conjointes (100) était formé d'équations primitives; mais, si ces équations contenaient des différences ou des différentielles des inconnues, il suffirait de considérer ces différences ou ces différentielles comme des fonctions des valeurs fondamentales $w_1, w_2, \ldots, w_\lambda$, et d'appliquer le procédé indiqué pour les équations primitives; on considérerait aussi les inconnues comme fonctions de l'une d'entre elles dans chacune des équations du système.

Si l'on a deux équations différentielles, réduites au premier ordre pour plus de simplicité, de la forme suivante :

$$\frac{dy_1}{dx}A + \frac{dy_2}{dx}B + C = 0,$$

où A, B, C peuvent être des fonctions de y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$ et x, on aura, en différentiant,

$$\begin{aligned}\left(\frac{dC}{dx}\right) + \left[\left(\frac{dA}{dx}\right) + \left(\frac{dC}{dy_1}\right)\right]\frac{dy_1}{dx} + \left[\left(\frac{dB}{dx}\right) + \left(\frac{dC}{dy_2}\right)\right]\frac{dy_2}{dx} + \left(\frac{dA}{dy_1}\right)\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 \\ + \left[\left(\frac{dA}{dy_2}\right) + \left(\frac{dB}{dy_1}\right)\right]\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx} + \left(\frac{dB}{dy_2}\right)\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2 + A\frac{d^2y_1}{dx^2} + B\frac{d^2y_2}{dx^2} = 0.\end{aligned}$$

En remplaçant les inconnues y_1, y_2, ainsi que $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, par leurs valeurs fondamentales, les quantités w_1, w_2, $\frac{dw_1}{dx}$, $\frac{dw_2}{dx}$ seront connues : il ne restera dans cette équation que les deux dérivées inconnues $\frac{d^2w_1}{dx^2}$, $\frac{d^2w_2}{dx^2}$, au premier degré seulement. Une seconde équation semblable, provenant de la seconde équation proposée, que nous n'avons pas écrite, permettrait d'obtenir ces deux dérivées secondes par la résolution d'équations du premier degré.

Les dérivées d'ordres supérieurs s'obtiendraient par le même moyen en différentiant encore les mêmes équations.

Si l'on a deux équations aux différences finies de la forme

$$\Delta y_1 A + \Delta y_2 B + C = 0,$$

où A, B, C peuvent être des fonctions de y_1, y_2, Δy_1, Δy_2 et x (nous ne considérons encore que le premier ordre pour plus de simplicité), on obtient, en différentiant,

$$\begin{aligned}\Delta y_1\left(\frac{dA}{dx}\right) + \frac{d\Delta y_1}{dx}A + \Delta y_2\left(\frac{dB}{dx}\right) + \frac{d\Delta y_2}{dx}B + \left(\frac{dC}{dx}\right)\\ + \left[\Delta y_1\left(\frac{dA}{dy_1}\right) + \Delta y_2\left(\frac{dB}{dy_1}\right) + \left(\frac{dC}{dy_1}\right)\right]\frac{dy_1}{dx}\\ + \left[\Delta y_1\left(\frac{dA}{dy_2}\right) + \Delta y_2\left(\frac{dB}{dy_2}\right) + \left(\frac{dC}{dy_2}\right)\right]\frac{dy_2}{dx} = 0.\end{aligned}$$

En remplaçant les inconnues y_1, y_2, ainsi que Δy_1, Δy_2, par leurs valeurs fondamentales, les quantités w_1, w_2, Δw_1, Δw_2 seront connues : il ne restera dans cette équation que les deux dérivées $\frac{dw_1}{dx}$, $\frac{dw_2}{dx}$ au premier degré seulement (¹). Une équation semblable, déduite de la seconde équation proposée que nous n'avons pas écrite, permettrait de déterminer les dérivées cherchées par un système d'équations linéaires. Les dérivées d'ordres supérieurs s'obtiendraient encore facilement.

S'il s'agissait d'équations aux différences ou aux différentielles partielles, on calculerait par le même moyen les dérivées partielles qui entrent dans l'expression fondamentale, celle-ci prenant la forme (68).

Ainsi, pour deux équations différentielles de la forme

$$\frac{dy_1}{dx_1}A + \frac{dy_1}{dx_2}B + \frac{dy_2}{dx_1}C + \frac{dy_2}{dx_2}D + E = 0,$$

où A, B, C, D, E peuvent être des fonctions de $y_1, y_2, \frac{dy_1}{dx_1}, \frac{dy_1}{dx_2}, \frac{dy_2}{dx_1},$

(¹) Les dérivées des différences Δw étant substituées aux dérivées de Δy, et Δw étant une fonction de x, d'après la valeur fondamentale w, nous avons considéré Δy comme une fonction immédiate de x dans la relation précédente.

$\frac{dy_2}{dx_2}$, x_1 et x_2, on prendrait la différentielle totale du premier membre de l'équation; puis, remplaçant les différentielles de y_1 et y_2 par leurs expressions considérées comme fonctions de x_1 et x_2, savoir

$$dy_1 = \frac{dy_1}{dx_1}dx_1 + \frac{dy_1}{dx_2}dx_2,$$

$$dy_2 = \frac{dy_2}{dx_1}dx_1 + \frac{dy_2}{dx_2}dx_2,$$

$$d^2y_1 = \frac{d^2y_1}{dx_1^2}dx_1^2 + 2\frac{d^2y_1}{dx_1dx_2}dx_1dx_2 + \frac{d^2y_1}{dx_2^2}dx_2^2,$$

$$d^2y_2 = \frac{d^2y_2}{dx_1^2}dx_1^2 + 2\frac{d^2y_2}{dx_1dx_2}dx_1dx_2 + \frac{d^2y_2}{dx_2^2}dx_2^2,$$

et ainsi de suite, la différentielle totale égalée à zéro se partagerait, à cause de l'indépendance des variables x_1 et x_2, en autant d'équations qu'il est nécessaire d'en avoir pour déterminer les dérivées partielles du second ordre des mêmes inconnues, en tenant compte toutefois de la seconde équation simultanée non écrite. Remplaçant ensuite les inconnues y_1, y_2 et leurs premières dérivées par leurs valeurs fondamentales, il ne resterait plus, dans les équations dont il s'agit, que les dérivées partielles du second ordre $\frac{d^2w_1}{dx_1^2}$, $\frac{d^2w_1}{dx_1^2}$, $\cdots$ entrant au premier degré; ces dernières dérivées s'en déduiraient facilement.

Enfin, si l'on avait des équations simultanées aux différences partielles, on opérerait d'une manière tout à fait semblable pour obtenir les dérivées partielles du premier ordre ou des ordres supérieurs qui entrent dans l'expression fondamentale (68).

En résumé, les dérivées des inconnues, dont on a besoin pour former l'expression fondamentale de la fonction cherchée, peuvent dans tous les cas être obtenues par la résolution de systèmes d'équations linéaires. Il faudra généralement recourir à cette résolution; car, bien que les dérivées dont il s'agit puissent être déduites des valeurs fondamentales, celles-ci pourraient conduire à des résultats s'écartant beaucoup des valeurs véritables, et la convergence de l'expression fondamentale serait difficile à obtenir.

Détermination des valeurs fondamentales et des quantités arbitraires. — Pour achever la résolution ou l'intégration d'un système d'équations simultanées, il reste à montrer comment on peut obtenir les valeurs fondamentales w_1, w_2, ... des inconnues, puis comment on peut déterminer les fonctions ou constantes arbitraires d'intégration. La question ne présente plus de difficultés d'après ce qui a été dit dans le cas d'équations non simultanées, la marche à suivre étant la même.

Ainsi, on formera un système d'équations réduites pour déterminer les valeurs fondamentales et leurs dérivées, à moins que celles-ci ne soient connues d'avance, ce qui arrivera quelquefois, en faisant usage de considérations particulières aux problèmes que l'on aura à traiter.

Pour former les équations réduites, on introduit dans chacune des équations du système (100) une quantité arbitraire ω, soit en facteur, soit en exposant, de manière qu'en faisant ces diverses quantités ω égales à zéro, on obtienne des équations résolubles ou intégrables par les procédés ordinaires (c'est le système des équations réduites), et qu'en faisant ces quantités égales à l'unité on retombe sur les équations proposées.

Les équations réduites peuvent former des équations contenant séparément les inconnues ou des systèmes d'équations simultanées. Ces équations doivent nécessairement présenter des solutions de même nature que les équations proposées. Par exemple, dans le cas d'intégrations, les équations réduites devront être de même ordre que les équations proposées, pour qu'il puisse être introduit autant de constantes ou de fonctions arbitraires que les équations proposées en comportent. Il est toujours possible de former un système d'équations réduites faciles à résoudre, les quantités auxiliaires ω permettant de remplacer, dans les termes des équations proposées, certaines fonctions par des constantes égales aux valeurs moyennes de ces fonctions, quand on considère leurs variations entre des limites déterminées. Le moyen général consistera à composer, comme on l'a fait dans le cas d'intégrations, des équations linéaires à coefficients constants toujours intégrables par des moyens connus; les intégrales de ces équations, qui sont les valeurs fondamentales w_1, w_2, ..., introduisent le nombre de constantes ou de fonctions arbitraires que la question exige, de sorte que, en portant les fonctions w_1, w_2, ... dans l'expression (103), ou (68), les fonctions inconnues y_1, y_2, ... ou

$F(y_1)$, $F(y_2)$, ... contiendront le nombre voulu de constantes ou de fonctions arbitraires.

Ensuite, pour déterminer ces quantités arbitraires, il faut considérer que l'on a remplacé certaines fonctions par des constantes (ou quelquefois par des fonctions plus simples que celles qui composent les coefficients des équations), telles que, pour des valeurs déterminées des variables, les équations réduites coïncident exactement avec les équations proposées. Si donc on se reporte à ces valeurs particulières que Wronski appelle *valeurs moyennes*, les valeurs fondamentales $w_1, w_2, \ldots$, ou $F(w_1)$, ... représenteront exactement les fonctions inconnues y_1, y_2, ... ou $F(y_1)$, ...; on peut alors, pour ces systèmes spéciaux de valeurs, appliquer aux équations réduites les conditions du problème qui se rapportent aux équations proposées, et, par suite, on peut déterminer les constantes ou fonctions arbitraires, comme on le ferait si l'on savait traiter directement les équations proposées.

Nous dirons donc, comme nous l'avons déjà dit, que si les valeurs moyennes adoptées coïncident avec les valeurs initiales, lesquelles servent spécialement à déterminer les quantités arbitraires, on substituera les équations réduites aux équations proposées quand les variables prendront leurs valeurs initiales; les quantités arbitraires ainsi déterminées sont celles qui entrent immédiatement dans la composition des fonctions inconnues.

Si les valeurs moyennes choisies ne coïncident pas avec les valeurs initiales, les valeurs des variables indépendantes sont seules connues dans le système des valeurs moyennes; pour déterminer les valeurs correspondantes des inconnues, on peut provisoirement prendre les valeurs initiales comme valeurs moyennes et, en opérant comme il vient d'être indiqué, on calculera les fonctions inconnues correspondantes aux valeurs moyennes choisies comme on le ferait pour des valeurs quelconques déterminées. C'est ensuite que l'on pourra prendre à leur tour ces nouvelles valeurs comme valeurs initiales et déterminer les quantités arbitraires nouvelles pour ce nouveau système de valeurs initiales. On a de cette manière les quantités arbitraires qui entrent dans la composition des fonctions inconnues.

Enfin, dans le cas où l'on ne voudrait pas procéder de cette manière, étant admis que les valeurs moyennes choisies ne coïncident pas avec les valeurs initiales, les quantités arbitraires seraient données par la résolution de systèmes d'équations primitives simultanées, ainsi que nous l'avons déjà vu. Nous n'insistons pas sur ce dernier moyen, parce que dans les applications il offre une très grande complication de calcul, seulement il faut observer que ce moyen est possible tout au moins, car l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées exige la résolution de plusieurs systèmes d'équations primitives simultanées, lesquels, ne comportant pas la détermination de quantités arbitraires (sauf celle des valeurs moyennes), peuvent être résolus directement.

Transformations relatives à la convergence ; remarques. — Il reste encore à considérer la convergence de l'expression fondamentale $(103)_1$ ou (68). Pour ne pas trop nous répéter, nous dirons seulement que les fonctions $w_1, w_2, \ldots$ sont totalement arbitraires en principe, mais la convergence de $(103)_1$ dépend essentiellement de l'approximation de ces valeurs fondamentales par rapport aux inconnues $y_1, y_2, \ldots$.

En premier lieu, les réduites successives (11), ou *progrès de la génération neutre*, sont plus convergentes que l'expression (3), dans laquelle on prendrait un même nombre de termes; on aura donc avantage à employer ordinairement ces réduites, en substituant $(103)_1$ à (3). On a pour les deux premières, qui sont les plus usuelles [1],

$$(106)\quad \left\{ \begin{aligned} F(y_\alpha) &= F w_\alpha - \varphi_\beta(w_\alpha)\frac{\left(\dfrac{dF(w_\alpha)}{dx}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx}\right)},\\ F(y_\alpha) &= F(w_\alpha) - \frac{\left(\dfrac{dF(y_\alpha)}{dx}\right)}{\dfrac{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx}\right)}{\varphi_\beta(w_\alpha)} + \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\left(\dfrac{d^2F(y_\alpha)}{dx^2}\right)}{\left(\dfrac{dF(y_\alpha)}{dx}\right)} - \dfrac{\left(\dfrac{d^2\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx^2}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx}\right)}\right\}}. \end{aligned}\right.$$

Si les équations proposées contenaient des différences ou des diffé-

[1] La troisième réduite est donnée plus loin, (107).

rentielles partielles, la transformation se ferait non sur $(103)_1$, mais sur une expression analogue à (68).

En second lieu, l'expression fondamentale est généralement très convergente pour les valeurs des fonctions inconnues qui sont peu éloignées des valeurs moyennes; on pourra donc changer de valeurs moyennes autant de fois qu'on le jugera nécessaire et calculer de cette manière toutes les valeurs des fonctions inconnues pour des variations des variables indépendantes aussi étendues qu'on le voudra.

En troisième lieu, on peut introduire des fonctions arbitraires, principalement celles de la forme se^{rx}, qui permettent d'obtenir une convergence rapide quand elles sont choisies convenablement.

En dernier lieu, on peut avoir recours à la méthode d'exhaustion, comme nous l'avons montré dans un exemple précédent.

Nous croyons utile de dire, à propos de cette méthode d'exhaustion, que Wronski distingue les méthodes suivantes (¹): les méthodes théoriques, les méthodes techniques et les méthodes d'approximation.

Dans les premières, les quantités cherchées sont données d'une manière absolue au moyen des seules données de la question, sans introduire de quantités arbitraires; la méthode suprême est dans ce cas. La propriété principale des expressions théoriques est de posséder le maximum de convergence; ces expressions sont finies quand la fonction cherchée le comporte, mais c'est un cas relativement très rare.

Nous ne pouvons indiquer ici que le caractère des méthodes théoriques, telles que les conçoit Wronski; des développements concernant la méthode suprême seraient nécessaires pour donner une idée complète de ces méthodes.

Dans les méthodes techniques, les quantités cherchées sont exprimées au moyen d'une ou plusieurs quantités arbitraires, comme cela a lieu, par exemple, dans la méthode secondaire que nous exposons.

Les expressions techniques se présentent généralement sous forme d'une suite indéfinie de termes; elles sont d'autant plus convergentes

(¹) Nous nous plaçons ici à un point de vue particulier, autrement il faudrait citer encore (en dehors de la méthode relative à la théorie des nombres) la méthode d'interpolation qui permet de résoudre ou d'intégrer toutes sortes d'équations, étant donné un nombre suffisant de valeurs des fonctions inconnues.

que les quantités arbitraires sont mieux choisies. Les séries, suivant la définition de Wronski, sont des expressions techniques.

Le caractère distinctif des méthodes d'approximation, d'après Wronski, consiste « en ce que les accroissements successifs des différents termes qu'on calcule pour s'approcher continuellement ou indéfiniment de la quantité qu'on désire connaître, *ne sont liés par aucune loi*. C'est par là que cette méthode diffère des procédés techniques; mais comme, dans cette méthode, les divers termes que nous venons de nommer doivent être calculés directement ou *a priori*, et non déduits par des essais ou *a posteriori*, cette méthode diffère également des simples méthodes de tâtonnement ». Ainsi une méthode d'approximation « se borne à nous conduire à des termes distincts ou séparés, de plus en plus approchants de la quantité qu'elle sert à nous faire connaître; mais, les accroissements successifs de tous ces termes séparés n'étant liés par aucune loi, cette méthode ne saurait, par elle-même, embrasser l'ensemble de la génération des quantités ».

Sur la formation des équations différentielles. — Pour compléter la méthode secondaire, il serait utile d'ajouter quelques développements sur l'introduction des quantités arbitraires, constantes ou variables, dans les équations différentielles; mais une question aussi importante et aussi délicate demande, pour être traitée convenablement, un espace plus considérable que celui dont nous disposons ici. Nous proposant d'y revenir plus loin, nous nous en tiendrons au résumé qui suit [1].

Nous prévenons d'abord que les équations différentielles dont nous nous occupons ne sont que les expressions de problèmes possibles; nous ne considérerons jamais les équations qui seraient formées au hasard ou qui seraient supposées n'avoir d'autre origine.

Examinons, pour commencer, les équations qui contiennent les différentielles d'une quantité inconnue.

Ces équations sont composées essentiellement de deux choses distinctes en principe : les dérivées différentielles et les relations qui les

---

[1] Le passage suivant complète ce que nous avons dit de la formation des équations différentielles, dans la note qui sert d'introduction à l'intégration de ces équations, et rectifie en même temps ce qui a rapport au système d'équations désignées par (i).

unissent. Il faut donc considérer les dérivées différentielles en elles-mêmes, puis dans leurs relations possibles; telles sont les deux conditions premières de la question, les seules dont il faille nécessairement tenir compte.

Les dérivées seront considérées en elles-mêmes, si l'on tient compte d'une propriété qui les caractérise. Cette propriété est ici la disparition de certaines quantités par différentiation, quand ces quantités sont indépendantes des variables par rapport auxquelles on les différentie. Donc, en remontant des équations différentielles aux équations primitives, il faut rétablir les quantités qui ont disparu.

Les dérivées seront considérées dans leurs relations si l'on tient compte du mode de formation de ces relations. Or celles-ci ne proviennent que de la comparaison de quantités composées de dérivées, et toute comparaison entraîne l'élimination de certaines quantités; donc, pour passer d'une relation de dérivées différentielles à la relation équivalente de fonctions primitives, il faut rétablir les quantités qui ont disparu.

Ainsi, pour deux causes différentes, il faut introduire dans les intégrations d'équations différentielles certaines quantités qui n'existent pas dans ces équations; ces causes concourent toutes deux au même but sans que pour cela l'une puisse être substituée à l'autre. La première, qui provient de la nature des dérivées différentielles, présente une *nécessité générale*, et l'autre, qui provient du mode de formation des équations, présente une *possibilité* dépendant du *mode particulier* de formation des équations que l'on considère.

Il en résulte, d'un côté pour chaque ordre d'intégration, que l'on doit introduire généralement une fonction arbitraire (les constantes étant ici considérées comme formant un cas particulier des fonctions), et de l'autre on conçoit la possibilité d'en introduire plusieurs; le nombre de ces fonctions sera forcément indiqué dans chaque cas et ne dépendra que des conditions particulières des problèmes traités. On peut évaluer le nombre maximum des fonctions arbitraires qu'il est possible d'introduire, nombre considérable pour les équations d'ordres élevés; il suffit pour cela d'énumérer les conditions générales de formation des équations différentielles, et c'est ce que nous ferons en y joignant divers exemples.

Maintenant, si l'on distingue les conditions relatives à la formation des équations différentielles de celles qui sont relatives aux problèmes que ces équations représentent, ces deux espèces de conditions étant complètement hétérogènes, il est évident que les dernières doivent correspondre à un nombre de fonctions arbitraires compris entre le minimum et le maximum que l'on aura trouvé, pour que les problèmes soient possibles ou déterminés; mais, comme les conditions relatives aux problèmes ne peuvent être fixées *a priori*, c'est-à-dire ne peuvent l'être que dans chaque cas particulier, le nombre des fonctions arbitraires ne pourra être également fixé *a priori;* il n'y aura de déterminé que le nombre minimum de ces fonctions, lequel est nécessaire pour la possibilité des problèmes, puisque celui-ci doit être indépendant des conditions particulières, ou spéciales. Les intégrales générales seront donc celles qui contiendront le nombre minimum de fonctions arbitraires, c'est-à-dire celles qui contiendront μ fonctions arbitraires, pour l'ordre μ, car les conditions spéciales n'existent pas en général.

Le nom d'*intégrale complète* est donné aux intégrales qui ne contiennent que les valeurs initiales de la fonction inconnue et de toutes ses différentielles jusqu'à l'ordre μ, sauf l'une d'elles, qui est déterminée par l'équation même, dans le cas où l'inconnue est fonction de plusieurs variables indépendantes.

Les intégrales qui contiennent plus de μ fonctions arbitraires ne sont pas, à proprement parler, des intégrales générales, puisque, d'après ce qui précède, elles correspondent à des cas spéciaux.

Enfin, il existe d'autres sortes d'intégrales contenant des fonctions qui ne se trouvent pas dans les équations différentielles; ces fonctions ne sont plus arbitraires comme celles que nous venons de considérer, elles sont déterminées, ou partiellement déterminées, par certaines conditions qui se trouvent être remplies en dehors des conditions générales de formation des équations différentielles; c'est là leur caractère distinctif. Les intégrales désignées ordinairement sous le nom d'*intégrales singulières* sont comprises dans la précédente définition, mais celle-ci comprend une classe d'intégrales bien plus étendue. D'après cela, les intégrales semi-singulières devraient être celles qui contiennent des fonctions partiellement déterminées par des conditions singulières.

Dans le cas plus complexe d'un système d'équations simultanées, ce que nous venons de dire s'applique également. Les intégrales générales sont les plus importantes à examiner : pour un système d'équations où les inconnues entrent respectivement aux ordres $\mu_{1,1}, \mu_{1,2}, \ldots, \mu_{1,\lambda}$ dans la première, aux ordres $\mu_{2,1}, \mu_{2,2}, \ldots, \mu_{2,\lambda}$ dans la seconde, et ainsi de suite, on pourra déterminer l'une des inconnues y_α au moyen de la $\beta^{\text{ième}}$ relation ; son ordre de différentielles le plus élevé étant $\mu_{\beta\alpha}$ d'après cette notation, il faudra introduire généralement $\mu_{\beta\alpha}$ fonctions arbitraires dans l'intégration ; mais l'intégrale obtenue comprendra d'autres inconnues $y_\gamma, y_\varepsilon \ldots$ supposées déterminées respectivement par les relations $\varphi_\delta, \varphi_\zeta, \ldots$ où elles entrent aux ordres $\mu_{\delta\gamma}, \mu_{\zeta\varepsilon}, \ldots$, de sorte que l'intégrale qui donne y_α contiendra en tout $\mu_{\beta\alpha} + \mu_{\delta\gamma} + \mu_{\zeta\varepsilon} + \ldots$ fonctions arbitraires, et avec cette intégrale on déterminera spécialement $\mu_{\beta\alpha}$ de ces fonctions (¹).

On sera ordinairement guidé dans le choix de l'équation qui devra servir à la détermination de l'une des inconnues, car il faut ne pas oublier que les ordres de différentielles des inconnues qui entrent dans les équations n'y sont pas répartis arbitrairement : ils sont au contraire disposés en vue de satisfaire aux conditions du problème que l'on traite ; mais, en supposant que ce choix ne soit pas indiqué, on pourra prendre n'importe quelle équation du système et l'on obtiendra généralement la solution voulue. Il peut arriver que le problème comporte une certaine indétermination provenant de la combinaison des équations du système proposé, ou qu'il exige des intégrales qui contiennent plus de fonctions arbitraires qu'il n'y en aurait dans l'intégrale générale ; en tout cas, il ne sera possible de trancher la question que dans chaque cas particulier.

Il y a, d'ailleurs, pour les équations différentielles simultanées une difficulté qui tient aux combinaisons possibles des équations du problème, lesquelles correspondent à des combinaisons des équations primitives ; il y a donc un nombre indéfini de systèmes équivalents d'équations primitives qui correspondent à un système donné d'équations différentielles simultanées ; le plus souvent les intégrales seront mises sous la forme $y = f(x)$, mais ce n'est là qu'une forme particu-

(¹) Nous entendons parler de l'ordre réel des équations différentielles, et non de l'ordre fictif dû à la manière dont elles sont disposées ; le calcul des constantes des équations (37), formules (42 à 46)', dans le septième exemple que nous allons donner, précisera ce que nous disons.

lière : la forme générale est évidemment $F(x, y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0$, ou plus simplement $F(y_\alpha) = 0$, d'après la notation que nous avons adoptée; l'expression fondamentale (103) tient compte de cette indétermination, qui ne peut cesser qu'à la suite de l'examen particulier du problème proposé.

Si nous examinons maintenant les équations qui contiennent des différences finies, on verrait, comme le dit Wronski, que ce que nous venons de dire des équations différentielles peut être étendu immédiatement, par une simple induction, aux équations de différences, sans autre considération que celle qui est relative à la nature des constantes arbitraires.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que les équations qui contiennent des différences ou des différentielles des inconnues, mais il est visible que la méthode de Wronski peut s'appliquer aux équations qui contiennent en même temps que les inconnues des fonctions composées avec ces inconnues suivant une loi déterminée. On indique souvent les opérations successives que l'on effectue d'après la même loi sur une fonction, par un indice joint à la caractéristique de cette fonction : ce sont les équations qui contiennent des fonctions à indices que l'on pourrait résoudre sans difficulté par la méthode de Wronski. Cependant ce genre d'équations se ramène au fond à un système d'équations simultanées, et il pourra quelquefois être plus avantageux de traiter ces équations simultanées comme telles.

Ici nous terminons ce que nous avions à dire de l'ensemble de la méthode de Wronski. On trouvera peut-être un peu concises les explications qui précèdent, mais on pourra les juger suffisantes en considérant qu'elles se rapportent à l'application de principes dont nous avons constamment fait usage; d'ailleurs, les exemples et le résumé que nous allons donner encore nous permettront de revenir sur les points importants.

SUITE ET FIN DU SIXIÈME EXEMPLE.

Détermination des fonctions arbitraires. — Pour achever l'intégration de l'équation du mouvement vibratoire des gaz, il reste à déterminer les fonctions arbitraires $F_1(r + at)$ et $F_2(r - at)$.

Les deux variables, quantités essentiellement positives, sont : r, distance d'un point de la masse gazeuse au centre de vibration, et t, temps. $r + at$ est toujours positif, et $r - at$ peut être positif ou négatif. Dans le premier cas, en faisant $t = 0$, les fonctions arbitraires sont déterminées par le système des équations simultanées (τ) ou $(\tau)'$. Mais, dans le deuxième cas, $r - at$ étant négatif, on peut supposer $r = 0$, et faire $at = z$, quantité positive; on remarquera alors, d'après Poisson, que les conditions précédentes (τ) ne peuvent servir à déterminer la fonction $F_2(-z)$: il faut recourir au système d'équations (ς), et celui-ci fera connaître $F_2(-z)$ au moyen de $F_1(z)$, fonction donnée par les relations (τ), la variable z pouvant être substituée à r.

En conséquence, si l'on prend, dans l'expression fondamentale (68) ou (ϑ), un nombre de termes tel qu'il faille calculer n dérivées des fonctions F_1 et F_2, il faudra, en plus des deux relations (ς), $f = 0$ et $V = 0$, pour $r = 0$, écrire $n - 1$ relations qui proviendront des $n - 1$ premières dérivées de V prises par rapport à r et égalées à zéro, en faisant ensuite $r = 0$, puisque le centre d'ébranlement est supposé immobile. On aura de cette manière un système de $n + 1$ équations simultanées d'où l'on tirera la fonction $F_2(-z)$ et ses n dérivées en fonction de $F_1(z)$ et de ses dérivées [1].

Pour résoudre ce système, on pourra prendre comme valeurs fondamentales celles qui sont données par les relations

$$F_1(z) + F_2(-z) = 0,$$
$$\frac{dF_1(z)}{dz} - \frac{dF_2(-z)}{dz} = 0,$$

que Poisson indique, et par les $n - 1$ dérivées suivantes égalées à zéro.

Mais revenons au système (τ) ou $(\tau)'$, dans lequel $F_1(r)$ et $F_2(r)$ sont déterminés au moyen des fonctions données $\Psi_1(r)$ et $\Psi_2(r)$. Si l'on compare ce système, savoir :

$$\left.\begin{array}{l}\Psi_1(r) - V = 0\\ \Psi_2(r) - \gamma = 0\end{array}\right\}\quad \text{pour}\quad t = 0,$$

au système (100), la solution sera fournie par l'expression (103), dans

(1) La fonction $F_2(-z)$ et ses dérivées se présentent ici sous une forme technique; il en est d'ailleurs de même de $F_1(z)$ et $F_2(z)$.

laquelle on fera

$$F(y_\alpha) = F_1(r) \quad \text{ou} \quad F_2(r),$$
$$F(\psi_\alpha) = \mathfrak{F}_1(r) \quad \text{ou} \quad \mathfrak{F}_2(r);$$

on aura donc, en prenant la première équation pour déterminer $F_1(r)$ et la seconde pour $F_2(r)$,

$$(a) \quad \begin{cases} F_1(r) = \mathfrak{F}_1(r) - \dfrac{\Psi_1(r) - V'}{\left(\dfrac{d[\Psi_1(r) - V']}{d\mathfrak{F}_1(r)}\right)} + \cdots, \\[2ex] F_2(r) = \mathfrak{F}_2(r) - \dfrac{\Psi_2(r) - \gamma'}{\left(\dfrac{d[\Psi_2(r) - \gamma']}{d\mathfrak{F}_2(r)}\right)} + \cdots; \end{cases}$$

nous mettons V' et γ' au lieu de V et γ pour marquer que l'on substitue $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ à F_1 et F_2, toujours avec la condition $t = 0$; les dérivées sont prises par rapport à $\mathfrak{F}_1(r)$ et $\mathfrak{F}_2(r)$ seulement, en considérant $\mathfrak{F}_2(r)$ comme fonction de $\mathfrak{F}_1(r)$ dans la première expression, et $\mathfrak{F}_1(r)$ comme fonction de $\mathfrak{F}_2(r)$ dans la seconde.

Les quantités V' et γ' doivent être remplacées par leurs valeurs, comme dans $(\tau)'$; et, puisque F_1 et F_2 sont remplacés par $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$, en vertu de $(\tau)''$, on a

$$(b) \quad \begin{cases} \Psi_1(r) - \zeta' = 0, \\ \Psi_2(r) - s' = 0, \end{cases}$$

pour $t = 0$, ce qui simplifie les expressions $(\tau)'$ ou les seconds termes de (a).

Pour les dérivées de V' et de γ' par rapport à $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$, il faudra prendre celles des quantités ψ, ζ et η, d'après (μ), (ν) et $(\nu)'$, par rapport à F_1 et F_2, et en faisant usage de $(\sigma)'$, savoir :

$$(b)' \qquad s = -\frac{\eta}{a^2};$$

on fera ensuite la substitution de $\mathfrak{F}$ à F.

On aura donc, comme pour (ρ),

$$(c) \qquad \left(\frac{dV'}{d\mathfrak{F}_1}\right) = \left(\frac{d\zeta'}{d\mathfrak{F}_1}\right) - \varphi(\psi') \frac{\left(\dfrac{d^2\zeta'}{dt\,d\mathfrak{F}_1}\right)\zeta' + \left(\dfrac{d^2\zeta'}{dr\,d\mathfrak{F}_1}\right)\eta'}{\left(\dfrac{d\varphi(\psi')}{dt}\right)\zeta' + \left(\dfrac{d\varphi(\psi')}{dr}\right)\eta'} + \cdots,$$

nous écrivons $\mathfrak{F}$ pour $\mathfrak{F}(r)$, pour simplifier; par suite, en substituant, dans la première expression (a), les valeurs données par $(\tau)'$ et (c), il vient, en ne prenant que la partie écrite de ces expressions et en ayant égard à (b),

$$F_1(r) = \mathfrak{F}_1(r) - \frac{\left(\frac{d\zeta'}{dt}\right)\zeta' + \left(\frac{d\zeta'}{dr}\right)\eta'}{\left(\frac{d^2\zeta'}{dt\,d\mathfrak{F}_1}\right)\zeta' + \left(\frac{d^2\zeta'}{dr\,d\mathfrak{F}_1}\right)\eta'} + \cdots$$

ou, d'après (b) et $(b)'$,

$$(d) \qquad F_1(r) = \mathfrak{F}_1(r) - \frac{\left(\frac{d\Psi_1}{dt}\right)\Psi_1 - a^2\left(\frac{d\Psi_1}{dr}\right)\Psi_2}{\left(\frac{d^2\Psi_1}{dt\,d\mathfrak{F}_1}\right)\Psi_1 - a^2\left(\frac{d^2\Psi_1}{dr\,d\mathfrak{F}_1}\right)\Psi_2} + \cdots;$$

nous écrivons encore, pour simplifier, Ψ pour $\Psi(r)$.

Pour la seconde expression (a), faisons, d'après $(\theta)'$,

$$\chi(s) = b^2(1+s)^{\frac{c}{c'}-1} + \eta + \tfrac{1}{2}\zeta^2,$$

nous aurons, comme pour $(\rho)'$,

$$(e) \qquad \left(\frac{d\zeta'}{d\mathfrak{F}_2}\right) = \left(\frac{ds'}{d\mathfrak{F}_2}\right) - \chi(s')\frac{\left(\frac{d^2s'}{d\mathfrak{F}_2^2}\right)}{\left(\frac{d\chi(s')}{d\mathfrak{F}_2}\right)} + \cdots;$$

le second terme peut s'écrire

$$\chi(s')\frac{\left(\frac{d^2s'}{d\mathfrak{F}_2^2}\right)}{\left[a^2(1+s)^{\frac{c}{c'}-2}\right]\left(\frac{ds'}{d\mathfrak{F}_2}\right)};$$

par suite, substituant les premiers termes de (e) dans la seconde expression (a) et tenant compte de $(\tau)'$ et (b), il vient

$$(f) \qquad F_2(r) = \mathfrak{F}_2(r) - \frac{\left(\frac{d\Psi_2}{d\mathfrak{F}_2}\right)}{\left(\frac{d^2\Psi_2}{d\mathfrak{F}_2^2}\right)} + \cdots.$$

Il reste encore à calculer les dérivées qui entrent dans les expressions (d) et (f); pour cela, on a généralement, pour le premier ordre de dérivation,

$$\frac{d\Psi}{d\mathfrak{f}} = \frac{d\Psi}{dr}\frac{1}{\frac{d\mathfrak{f}}{dr}};$$

par suite, la dérivée de $\Psi_2(r)$, par exemple, $\Psi_2(r)$ étant donné par (φ), sera

$$\left(\frac{d\Psi_2(r)}{d\mathfrak{f}_2(r)}\right) = -\frac{1}{r}\left(\frac{d^2\mathfrak{f}_1}{dr^2}\frac{1}{\frac{d\mathfrak{f}_2}{dr}} - \frac{d^2\mathfrak{f}_2}{dr^2}\frac{1}{\frac{d\mathfrak{f}_2}{dr}}\right);$$

$\mathfrak{f}_1(r)$ est ici considéré comme fonction de $\mathfrak{f}_2(r)$.

On opérerait d'une façon analogue pour la dérivée de Ψ_1 et les dérivées supérieures. Quant aux dérivées de Ψ_1 par rapport à t qui entrent dans (d), pour les obtenir, il suffira de supposer que dans la première expression $(\tau)''$ on ait mis $\mathfrak{f}_1(r+at)$ au lieu de $\mathfrak{f}_1(r)$ et $\mathfrak{f}_2(r-at)$ au lieu de $\mathfrak{f}_2(r)$, et de substituer ensuite les différentielles de r à celles de at, ainsi qu'on l'a fait pour passer de la seconde relation $(\tau)''$ à la relation (φ).

On calculera de cette manière toutes les dérivées qui entrent dans les expressions (d) et (f) donnant les fonctions arbitraires cherchées. On remarquera que ces fonctions se présentent sous forme de développements indéfinis, ce qui est dû à leur forme technique et aussi à ce qu'elles sont des fonctions essentiellement transcendantes.

On suivrait une marche tout à fait semblable à celle qui précède pour avoir la fonction $F_2(-z)$ et ses dérivées au moyen de $F_1(z)$ et des dérivées de cette dernière fonction.

Nous avons ainsi achevé la résolution des équations simultanées qui devait compléter l'intégration de l'équation proposée (θ), et les inconnues du problème V et γ sont maintenant déterminées avec toute l'exactitude qu'on peut désirer.

SEPTIÈME EXEMPLE. — *Calcul du profil d'égale résistance d'un mur de barrage.*

Conditions du problème. — Nous nous proposons de calculer le profil d'un mur de réservoir construit dans des conditions telles que les pressions exercées sur les matériaux, dans les parties les plus fatiguées, soient égales ou inférieures à une pression donnée.

Nous n'envisagerons la question qu'au point de vue du calcul : elle a d'ailleurs été l'objet de Mémoires spéciaux. Nous nous bornerons donc à établir les équations du problème afin de les résoudre et de montrer par là que la méthode de Wronski, loin d'être illusoire, permet de surmonter de véritables difficultés.

La marche que nous allons suivre pour arriver aux équations à résoudre est analogue à celle qui est indiquée par M. Delocre dans son Mémoire *Sur la forme du profil à adopter pour les grands barrages en maçonnerie des réservoirs* (¹). Ce travail, justement apprécié, a été composé lors de l'étude du barrage du Furens au Gouffre d'Enfer, près de Saint-Étienne (barrage de Rochetaillée). Plus tard, en examinant les procédés d'exécution du second barrage du Furens, au Pas-du-Rio, nous avons eu l'idée d'appliquer les méthodes de Wronski au calcul du profil théorique des murs de cette espèce.

Pour l'objet que nous avons en vue, il suffira de considérer le cas d'un barrage droit, dans une large vallée, résistant par son seul poids à la poussée de l'eau; l'ouvrage se composera alors de trois parties.

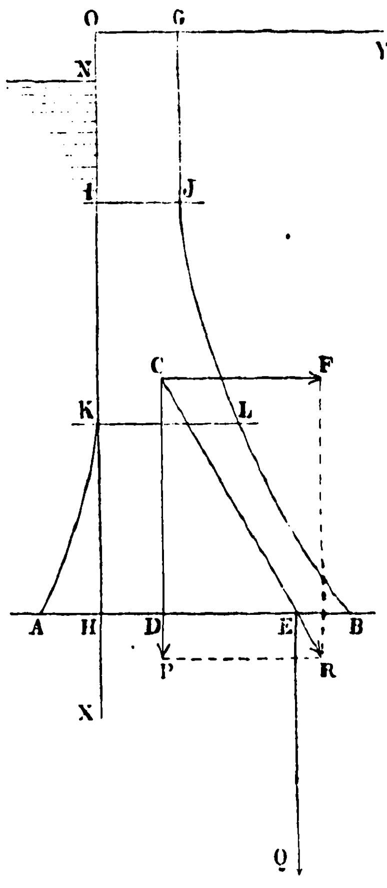
Dans la partie supérieure OGIJ (*fig.* 1), le mur devant avoir une certaine épaisseur, il ne peut exister de profil théorique; le mur sera un mur ordinaire à parements verticaux. Le profil théorique ne commencera que lorsque, par suite de la poussée de l'eau, la partie la plus fatiguée de la maçonnerie subira la pression que l'on s'est assignée d'avance. La seconde partie du mur, IJKL, présente un parement vertical en amont et de l'autre côté un parement courbe jouissant de la propriété d'égale résistance; la pression la plus forte est en L lorsque le réservoir est plein, et, lorsqu'il est vide, cette pression se reportant en K ne doit pas excéder la pression maxima admise. Cette pression atteinte, les deux parements du mur s'infléchissent, et les deux profils sont déterminés par la condition que les pressions le long de la ligne LB soient constantes lorsque le réservoir est plein, et que les pressions le long de al ligne KA soient aussi constantes lorsque le réservoir est vide.

(¹) *Annales des Ponts et Chaussées*, 4ᵉ série, t. XII (1866), nº 135, p. 212.

La délimitation de ces trois parties du mur offre un certain intérêt au point de vue du calcul.

Dans le calcul du profil, il faut tenir compte de la stabilité du mur et de la résistance des matériaux; la stabilité est définie par l'égalité des moments des forces pris par rapport à un axe, et la résistance comprend le glissement suivant une section déterminée et l'écrasement

Fig. 1.



dans cette section. Nous ne tiendrons pas compte du glissement, et même nous ne considérerons l'écrasement que dans les sections horizontales ou assises fictives, comme cela se pratique ordinairement.

Considérons une section du mur OGAB (*fig.* 1) dont la largeur soit de 1^m, N étant le niveau normal de l'eau du réservoir et AB le joint fictif considéré; nous prendrons pour axes de coordonnées l'horizontale OY à la partie supérieure du mur, et la verticale OX formant une partie du profil d'amont.

Soit C le point d'application de la résultante CR des forces; CF est la résultante des actions horizontales, la poussée de l'eau, et CP la résultante des actions verticales, le poids de la maçonnerie et la pression de l'eau sur la partie KA; nous désignerons par x la hauteur du mur jusqu'au joint considéré, par y_1 l'ordonnée du profil d'aval et y_2 celle du profil d'amont, et par δ le poids du mètre cube de maçonnerie.

Stabilité. — La relation des moments pris par rapport à l'axe H, perpendiculaire au plan de la figure et situé sur OX dans le plan du joint AB, est

$$\mathrm{CP}.\mathrm{HD} + \mathrm{CF}.\mathrm{CD} = \mathrm{EQ}.\mathrm{HE}.$$

E est le point de rencontre de la résultante CR et du joint AB, et EQ est égal et parallèle à CP.

Le premier terme, CP.HD est dû au poids P_m de la maçonnerie et à la pression verticale de l'eau P_e en KA; on a donc, en désignant par k et h leurs bras de levier,

$$\mathrm{CP}.\mathrm{HD} = P_m.k - P_e.h,$$

et ensuite

$$P_m = \delta\int_0^x y_1\,dx - \delta\int_0^x y_2\,dx,$$

ce qui donne

$$P_m.k = \delta\int_0^x (y_1 - y_2)\,dx\,\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{\delta}{2}\int_0^x (y_1^2 - y_2^2)\,dx.$$

Pour la quantité P_e, δ' étant la densité de l'eau et a désignant ON, on a

$$P_e = -\,\delta'\int_a^x (x-a)\,dy_2;$$

les limites de l'intégrale pourraient être o et x, ce qui revient au même; la somme des moments est ainsi

$$P_e.h = \delta'\int_a^x (x-a)\,dy_2.y_2 = \delta'\int_a^x (x-a)\,y_2\,dy_2.$$

Pour ce qui concerne le second terme, l'action horizontale est due seulement à l'eau; X étant l'abscisse courante, on a

$$\mathrm{CD} = \delta' \int_a^x (\mathrm{X} - a)\, d\mathrm{X},$$

et, pour le moment,

$$\mathrm{CF}.\mathrm{CD} = \delta' \int_a^x (\mathrm{X} - a)\, d\mathrm{X}(x - \mathrm{X}) = \frac{\delta'}{6}(x - a)^3.$$

Enfin, pour le terme du second membre, la somme des actions verticales est $\mathrm{P}_m + \mathrm{P}_e$, et, en désignant EB par u_1, EH est $y_1 - u_1$; donc, en faisant

$$\theta = \frac{\delta'}{\delta},$$

on a

$$\frac{1}{2}\int_0^x y_1^2\, dx - \frac{1}{2}\int y_2^2\, dx - \theta \int_a^x (x-a) y_2\, dy_2 + \frac{\theta}{6}(x-a)^3$$
$$= \left[\int_0^x y_1\, dx - \int_0^x y_2\, dx - \theta \int_a^x (x-a)\, dy_2\right](y_1 - u_1),$$

d'où

$$(1) \qquad u_1 = y_1 - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x y_1^2\, dx - \int_0^x y_2^2\, dx - 2\theta \int_a^x (x-a) y_2\, dy_2 + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\displaystyle\int_0^x y_1\, dx - \int_0^x y_2\, dx - \theta \int_a^x (x-a)\, dy_2}.$$

Cette valeur du u_1 se rapporte au réservoir plein; dans le cas du réservoir vide, il faut supprimer les termes qui tiennent compte de la pression de l'eau; ce sont ceux qui contiennent la quantité θ en facteur : le point C est alors le centre de gravité du mur; en désignant par u_2 la valeur de AD, il vient

$$\frac{1}{2}\int_0^x y_1^2\, dx - \frac{1}{2}\int_0^x y^2\, dx = \left(\int_0^x y_1\, dx - \int_0^x y_2\, dx\right)(y_2 + u_2),$$

d'où

$$(2) \qquad u_2 = -y_2 + \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x y_1^2\, dx - \int_0^x y_2^2\, dx}{\displaystyle\int_0^x y\, dx - \int_0^x y_2\, dx}.$$

Les expressions (1) et (2) donnent les deux conditions de stabilité, pourvu que le point E se trouve dans l'intérieur du joint.

Résistance. — Aux conditions précédentes il faut joindre celles qui se rapportent à la conservation des matériaux employés en limitant la pression qu'ils ont à subir. A cet effet, il faut chercher le mode de répartition des pressions sur l'étendue du joint considéré; le principe fondamental dont on fait usage est connu sous le nom de *loi du trapèze.* On admet que les composantes des pressions normales au joint varient suivant une fonction linéaire, de telle sorte que, si ces composantes sont représentées en grandeur et en direction par des lignes droites partant du joint, elles formeront un trapèze par leur ensemble. Il s'ensuit que la résultante des pressions normales au joint passe par le centre de gravité du trapèze.

Dans les constructions en maçonnerie, on néglige les pressions négatives ou tractions; quand elles existent, les deux côtés non parallèles du trapèze se coupent dans l'intérieur du joint, et le trapèze se compose, en réalité, de deux triangles. D'après ce qui vient d'être dit, on néglige le triangle qui correspond aux efforts de traction, et la loi du trapèze dégénère en *loi du triangle.*

Les forces étant réparties sur le joint suivant ces conditions, la plus grande pression a lieu à l'extrémité du joint le plus rapproché du centre de gravité du *trapèze* ou du *triangle*. Si u est la distance de la pression résultante à l'extrémité la plus fatiguée du joint et l la longueur du joint, la loi du trapèze sera applicable quand on aura $u > \frac{l}{3}$; la loi du triangle le sera dans le cas contraire où $u < \frac{l}{3}$.

Cela posé, si l'on désigne par p la pression par mètre superficiel au point le plus fatigué, et P la résultante des forces normales au joint, on trouve les formules suivantes, qui sont bien connues : dans le cas du trapèze,

$$u > \frac{l}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad p = 2\left(2 - \frac{3u}{l}\right)\frac{P}{l};$$

et dans le cas du triangle,

$$u < \frac{l}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad p = \frac{2}{3}\frac{P}{u}.$$

On peut, à la place de p, introduire la hauteur λ d'un mur à faces verticales dont la pression sur sa base serait p pour 1^{m} superficiel; cette pression est alors exprimée par $\delta\lambda$. D'après cela, on a, dans le premier cas,

$$u = \frac{2}{3}l - \frac{\delta\lambda}{6}\frac{l^2}{P},$$

et, dans le second cas,

$$u = \frac{2}{3}\frac{P}{\delta\lambda}.$$

Remplaçant maintenant l par sa valeur $y_1 - y_2$ et P par $P_m + P_e$, ou P_m, on aura, dans le cas du réservoir plein,

$$(3)\qquad u_1 = \frac{2}{3}(y_1 - y_2) - \frac{\lambda}{6}\frac{(y_1 - y_2)^2}{\int_0^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx - \theta\int_a^x (x-a)\,dy_2},$$

ou

$$(4)\qquad u_1 = \frac{2}{3}\,\frac{\int_0^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx - \theta\int_a^x (x-a)\,dy_2}{\lambda},$$

et, dans le cas du réservoir vide,

$$(5)\qquad u_2 = \frac{2}{3}(y_1 - y_2) - \frac{\lambda}{6}\frac{(y_1 - y_2)^2}{\int_0^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx},$$

ou

$$(6)\qquad u_2 = \frac{2}{3}\,\frac{\int_0^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx}{\lambda};$$

telles sont les deux doubles conditions de résistance.

Équations du problème. — Les équations du problème s'obtiendraient immédiatement en éliminant u_1 et u_2 entre les équations (1) et (3) ou (4), et entre les équations (2) et (5) ou (6); mais il est inutile de les écrire de suite. Nous allons changer de notations; pour simplifier l'écriture, nous ferons

$$z_1 = \int_0^x y_1\,dx, \quad z_2 = \int_0^x y_2\,dx,$$

puis

$$y_1 = z'_1, \quad y_2 = z'_2, \quad dy_1 = z''_1\,dx, \quad dy_2 = z''_2\,dx, \quad \ldots,$$

et les expressions précédentes deviennent respectivement

$$(7)\quad u_1 = z'_1 - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)\,z'_2\,z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)\,z''_2\,dx},$$

$$(8)\quad u_2 = -z'_2 + \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2},$$

$$(9)\quad u_1 = \frac{2}{3}(z'_1 - z'_2) - \frac{\lambda}{6}\,\frac{(z'_1 - z'_2)^2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)\,z''_2\,dx},$$

$$(10)\quad u_1 = \frac{2}{3\lambda}\left[z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)\,z''_2\,dx\right],$$

$$(11)\quad u_2 = \frac{2}{3}(z'_1 - z'_2) - \frac{\lambda}{6}\,\frac{(z'_1 - z'_2)^2}{z_1 - z_2},$$

$$(12)\quad u_2 = \frac{2}{3\lambda}(z_1 - z_2).$$

Nous ferons usage de ces expressions avec les intégrales définies qu'elles contiennent. Dans l'application numérique, nous supposerons que la largeur b du mur au sommet est de 5^{m}, que le niveau de l'eau se maintient à une distance a de 5^{m} en dessous du sommet du mur, et que la pression que doivent supporter les matériaux ne dépasse pas 6^{kg} par centimètre carré, de sorte que, si la densité δ de la maçonnerie est 2, la hauteur λ est 30^{m}.

Avec ces données, nous allons effectuer le calcul du mur successivement pour ses trois parties principales.

Première partie. — Nous avons vu que, dans la partie supérieure du mur, il ne pouvait y avoir de profil d'égale résistance : ce que l'on doit se proposer de connaître est la hauteur à partir de laquelle commence le profil théorique, c'est-à-dire la position du point J pour lequel la pression est $\delta\lambda$.

Dans cette partie du mur, on a

$$z'_1 = b \quad \text{et} \quad z'_2 = 0;$$

de plus, les expressions qu'il faut employer sont (7) et (9) ou (7) et (10), suivant qu'il faut faire usage de la loi du trapèze ou de la loi du triangle. Dans la partie supérieure du mur, on doit évidemment appliquer la première loi, et la seconde n'est utile que pour des hauteurs un peu considérables. Le choix entre (9) et (10) peut être fait de la manière suivante : donnant à u_1 la valeur $\frac{b}{3}$ dans (7), cette expression se réduit à

$$\theta(x-a)^3 - b^2 x = 0,$$

ou, si l'on fait $x - a = X$, il vient

$$\theta X^3 - b^2 X - b^2 a = 0.$$

En mettant pour a, b, θ leurs valeurs, on obtient l'équation du troisième degré

$$X^3 - 50X - 250 = 0,$$

dont il suffit d'évaluer l'unique racine positive.

L'expression fondamentale donne, pour cela,

$$X = w - \frac{\varphi(w)}{\frac{d\varphi(w)}{dw}} + \cdots$$

Ces deux premiers termes suffisent; on a donc

$$\varphi(X) = X^3 - 50X - 250,$$
$$\frac{d\varphi(X)}{dX} = 3X^2 - 50.$$

Or la racine cherchée est comprise entre 8 et 9, et est plus rapprochée de 9; faisant ainsi

$$w = 9,$$

on a

$$\varphi(w) = + \ 29,$$

$$\frac{d\varphi(w)}{dw} = + 193,$$

dont le rapport est 0,150, par suite

$$X = 9 - 0,15 = 8,85$$

et

$$x = 5 + 8,85 = 13,85.$$

Portant cette valeur dans (10), cette expression devient

$$\frac{1}{3} b = \frac{2}{3\lambda} b x;$$

on en déduit

$$\lambda = 2x = 27,70.$$

Ainsi, pour la valeur de u_1 égale à $\frac{1}{3} b$, la pression, au point le plus fatigué du joint qui est à $13^m,85$ du sommet, est égale à la pression qui se produit sur la base d'un mur droit de $27^m,70$ de hauteur; cette pression étant inférieure à la limite que l'on s'est fixée, 30^m, il en résulte que la hauteur de la première partie du mur est donnée par les expressions (7) et (10). Ces expressions deviennent, en mettant pour z et z'_1 leurs valeurs bx et b,

$$u_1 = b - \frac{1}{2} \frac{b^2 x + \frac{\theta}{3}(x - a)^3}{b x},$$

$$u_1 = \frac{2}{3\lambda} b x.$$

En éliminant u_1, il vient

$$(13) \qquad \frac{1}{2} b - \frac{2}{3\lambda} b x - \frac{\theta}{6 b x}(x - a)^3 = 0$$

ou, en faisant $X = x - a$,

$$(13)' \quad \theta X^3 + \frac{4b^2}{\lambda} X^2 - 3b^2\left(1 - \frac{8a}{3\lambda}\right) X - 3b^2 a\left(1 - \frac{4a}{3\lambda}\right) = 0.$$

Si l'on remplace les coefficients par leurs valeurs, l'équation à résoudre est alors

$$(13)'' \qquad X^3 + X^2\frac{2}{3}10 - X\frac{2}{3}125 - \frac{2}{3}875 = 0;$$

de même que l'équation précédente, celle-ci a une racine positive et deux racines imaginaires.

Pour simplifier l'écriture, nous ferons usage de la notation des dérivées, ce qui n'aura aucun inconvénient maintenant que l'on connaît la signification des formules précédentes. Le second ***progrès de la génération neutre*** donne pour l'expression fondamentale

$$X = w - \frac{1}{\dfrac{\varphi'(w)}{\varphi(w)} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}};$$

et l'on a

$$\varphi(X) = X^3 + X^2\frac{20}{3} - X\frac{250}{3} - \frac{1750}{3},$$

$$\varphi'(X) = 3X^2 + X\frac{40}{3} - \frac{250}{3},$$

$$\varphi''(X) = 6X + \frac{40}{3}.$$

La racine positive est comprise entre 9 et 10; faisant donc $w = 9$, on a

$$\varphi(w) = -\ 64,333,$$
$$\varphi'(w) = +\ 279,666,$$
$$\varphi''(w) = +\ 67,333;$$

d'où

$$\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)} = -\ 4,3471, \quad \frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = +\ 0,2413;$$

la racine est ainsi

$$X = 9 + \frac{1}{4,4677} = 9,2238.$$

Cette valeur est exacte à moins d'un millimètre; on en déduit la hauteur cherchée en ajoutant 5^m,

$$(14) \qquad x = 14^m,2238;$$

puis le cube de maçonnerie est

$$(14)' \qquad z = 71^{mc},1191,$$

enfin la valeur de u_1, d'après (7), est

$$u_1 = 1^m,5804,$$

valeur inférieure au tiers de la longueur du joint $1^m,666$; comme vérification, on trouve, pour λ, d'après (10), $\lambda = 30,000$.

Seconde partie. — Le calcul de la seconde partie du mur consiste à calculer le profil théorique de la partie JL et à en déterminer la limite L.

Nous avons encore pour toute cette portion du mur

$$z_2 = 0, \quad z'_2 = 0, \quad z''_2 = 0, \quad \ldots;$$

en supprimant l'indice des fonctions z_1; et faisant

$$(15)_1 \qquad h = \frac{2}{3\lambda} = \frac{1}{45} \quad \text{ou} \quad 0,02222,$$

les expressions (7) et (10) donneront

$$(15) \qquad \begin{cases} u_1 = z' - \dfrac{1}{2}\dfrac{\displaystyle\int_0^x z'^2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z}, \\ u_1 = hz; \end{cases}$$

le choix de ces expressions est indiqué d'après ce qui précède. En éliminant u_1, il vient

$$(16) \qquad z' - hz - \frac{1}{2}\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-}{z} = 0,$$

équation différentielle qu'il s'agit d'intégrer.

Cette équation ne diffère pas de l'équation (12) du Mémoire de M. Delocre; cet ingénieur ajoute (p. 225) :

Nous avons cherché à intégrer les formules (11) [1] et (12), mais nous n'avons pu y parvenir par une méthode exacte : il nous a seulement été possible d'obtenir y développé en série en fonction de x; la série qui convient à l'équation (11) est de la forme

$$y = ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{5}{2}} + cx^{\frac{7}{2}} + \ldots;$$

celle qui convient à l'équation (12) est de la forme

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots.$$

Nous avions calculé les coefficients des premiers termes en admettant pour θ et λ les valeurs

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad \lambda = 30.$$

Mais il nous a paru inutile de reproduire ici ces calculs; les formules ci-dessus ne peuvent, en effet, être d'aucune utilité pour arriver à déterminer un profil pratique; elles ne conviennent qu'à la portion CN (*lisez* JL) de la courbe intérieure de la *fig.* 8 (*lisez fig.* 1) et les calculs auxquels on serait conduit pour déterminer les deux courbes NPB, MLS (*lisez* KA, LB) de la partie inférieure du profil sont tout à fait impraticables, même en ayant recours aux méthodes approchées.

Nous citons ce passage pour bien préciser l'insuffisance des méthodes dont on dispose, en dehors de celles que nous faisons connaître; après l'examen des calculs que nous présentons, on pourra constater un progrès réel dû aux travaux de Wronski, travaux trop longtemps méconnus.

La forme sous laquelle se présente l'équation (16) indique que, si l'on connaissait une valeur approchée de la fonction z, le troisième terme pourrait être considéré comme une fonction de x, et l'équation formée ainsi serait une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants; intégrée, elle donnerait une valeur très approchée de la fonction inconnue. Prenant donc pour *équation réduite* une équation différentielle formée de cette manière, la méthode de Wronski ferait

---

[1] L'équation (11) est celle qui résulte de l'élimination des relations (1) et (5) ou (7) et (9).

connaître la fonction cherchée avec une approximation bien supérieure à celle que l'on désire.

Cette formation de l'équation réduite est possible de bien des manières; mais, pour que les calculs soient praticables, il faut que les intégrales définies que l'on rencontre puissent s'obtenir par des calculs directs ou par quadratures. Nous avons procédé ainsi et nous sommes parvenu à calculer directement l'ordonnée du profil correspondant à $x = 24$. Quoi que l'on fasse, ces calculs sont longs; il est préférable d'opérer comme l'indique Wronski et d'obtenir l'équation réduite de la manière suivante.

Si, dans le troisième terme de l'équation (16), nous remplaçons z et z' par leurs valeurs moyennes que nous prendrons ici égales aux valeurs initiales 71,119 et 14,224, nous aurons pour ce terme une quantité de la forme

$$A x + B(x - a)^3;$$

il sera facile alors de calculer l'intégrale définie

$$\int_0^x [A x + B(x - a)^3] e^{-hx} dx.$$

Mais l'expression de cette intégrale présente une partie des inconvénients que nous venons de signaler; on peut les éviter par l'introduction de la fonction arbitraire se^{rx}. Si l'on se rend compte de la variation du troisième terme de (16) pour des valeurs croissantes de x, ce qu'il est facile de faire *a priori*, on verra que cette fonction est ici très avantageuse.

Nous pourrons donc écrire l'équation transformée sous la forme

$$(17) \qquad z' - hz - \left[\frac{1}{2} \, \frac{\int_0^x z'^2 dx + \frac{\theta}{3}(x - a)^3}{z s e^{rx}} \right]^{\omega} s e^{rx} = 0;$$

pour $\omega = 1$ on a l'équation proposée (16), et pour $\omega = 0$ on a l'équation réduite

$$(18) \qquad w' - hw - se^{rx} = 0,$$

en mettant w à la place de z.

Les valeurs fondamentales de la fonction cherchée, c'est-à-dire la fonction ω et ses dérivées, sont

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega &= \mathrm{M}\, e^{hx} + \mathrm{N}\, e^{rx}, \\ \omega' &= \mathrm{M}h\, e^{hx} + \mathrm{N}r\, e^{rx}, \\ \omega'' &= \mathrm{M}h^2 e^{hx} + \mathrm{N}r^2 e^{rx}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

M, N et r étant des constantes arbitraires qu'il faut déterminer d'après les valeurs initiales de l'équation (16); ces dernières sont aussi les valeurs moyennes. Nous avons, pour valeurs initiales,

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} & x = 14,224, \quad z = 71,119, \quad z' = 5, \\ & \int_0^x z'^2\,dx = b^2 x = 142,238, \end{aligned}\right.$$

et l'équation (16) donne par dérivation

$$(20)'\qquad z'' = 0,34554;$$

c'est la tangente au point de départ du nouveau profil.

Il faut remarquer que l'équation (16), pour $x = 14,224$, est identique à l'équation (13).

Les constantes sont ainsi données par la résolution des équations

$$\begin{aligned} 71,119 &= \mathrm{M}\, e^{h\,14,224} + \mathrm{N} e^{r\,14,224}, \\ 5 &= \mathrm{M}h\, e^{h\,14,224} + r\,\mathrm{N} e^{r\,14,224}, \\ 0,3455 &= \mathrm{M}h^2 e^{h\,14,224} + r^2 \mathrm{N} e^{r\,14,224}; \end{aligned}$$

on en déduit

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} r &= \frac{5h - 0,3455}{71,119h - 5} = 0,0685548, \\ \mathrm{M} &= \frac{r.71,119 - 5}{r - h} e^{-h\,14,224} = -1,9581, \\ \mathrm{N} &= \frac{0,3455 - h.5}{r(r-h)} e^{-r\,14,224} = +27,8358. \end{aligned}\right.$$

On a ainsi, pour l'intégrale définie qu'il faut calculer,

$$\int_0^x w'^2\,dx = \int_0^x \left(M^2h^2e^{2hx} + 2MNhre^{(h+r)x} + N^2r^2e^{2rx}\right)dx,$$

et, déterminant la constante comme plus haut,

$$(22)\qquad \int_0^x w'^2\,dx = \frac{1}{2}M^2he^{2hx} + \frac{2MNhr}{h+r}e^{(h+r)x} + \frac{1}{2}N^2re^{2rx} + 175,710.$$

Il est maintenant facile d'obtenir l'expression des fonctions inconnues. En effet, le deuxième progrès de la génération neutre donne, pour l'expression fondamentale,

$$(23)\qquad F(z) = F(w) - \frac{(F'(w))}{\dfrac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} + \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{(F''(w))}{(F'(w))} - \dfrac{(\varphi''(w))}{(\varphi'(w))}\right\}}.$$

$F(z)$ est une fonction quelconque de z; quant aux fonctions φ, elles sont

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(z) &= z' - hz - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2\,dx - \frac{6}{3}(x-a)^3}{z},\\
\varphi'(z) &= z'' - hz' - \frac{z'}{z}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2\,dx - \frac{6}{3}(x-a)^3}{z} - \frac{1}{2}z'\right],\\
\varphi''(z) &= z''' - hz'' - \frac{z'}{z}\left[z'' - \frac{z'^2}{z} + \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2\,dx - \frac{6}{3}(x-a)^3}{z}\left(2\frac{z'}{z} - \frac{z''}{z'}\right)\right];
\end{aligned}\right.$$

à la place de z, substituant w calculé au moyen de (19), ainsi que ses dérivées, on obtiendra la fonction $F(z)$. Mais, si l'on observe que les dérivées w'', w''' calculées par (19) peuvent différer notablement des valeurs véritables z'', z''', celles de w, w' étant au contraire suffisamment approchées, il sera avantageux d'opérer de la manière suivante, que nous avons déjà indiquée.

En prenant les dérivées totales, on a les relations,

$$(25)\quad \begin{cases} \varphi(z) = 0, \\ \varphi'(z) = (\varphi'(z)) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\theta(x-a)^2}{z} = 0, \\ \varphi''(z) = (\varphi''(z)) - \dfrac{\theta(x-a)}{z}\left[1 - \dfrac{w'(x-a)}{w}\right] = 0; \end{cases}$$

on peut donc substituer aux dérivées partielles $(\varphi'(z))$, $(\varphi''(z))$ le complément des dérivées totales, pourvu toutefois que w et w' soient assez rapprochés de z et z'; les autres dérivées w'', w''' seront alors calculées au moyen des dérivées totales de l'équation proposée.

En opérant ainsi, on a, pour $x = 17$,

$$(26)\quad \begin{cases} w = 86,421, \quad w' = 6,057, \quad w'^2 = 36,686, \\ w'' = 0,4675, \quad w''' = 0,1452, \quad \displaystyle\int_0^x w'^2 dx = 141,932, \end{cases}$$

et l'équation réduite donnerait

$$w'' = 0,41817, \quad w''' = 0,02887.$$

On a encore

$$(27)\quad \begin{cases} \varphi(w) = -0,086, \quad (\varphi'(w)) = +0,4166, \quad (\varphi''(w)) = +0,1132, \\ \dfrac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} = -4,844, \quad \dfrac{(\varphi''(w))}{(\varphi'(w))} = +0,308. \end{cases}$$

L'expression qui donne z est, d'après (23), en faisant $F(z) = z$

$$(28)\qquad z = w - \frac{w'}{\dfrac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} + \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{w''}{w'} - \dfrac{(\varphi''(w))}{(\varphi'(w))}\right\}};$$

les autres dérivées s'obtiendraient en faisant successivement $F(z) = z'$, z'', ... Si l'on fait $F(z) = \int z'^2 dx$, on a

$$(28)'\quad \int_0^x z'^2 dx = \int_0^x w'^2 dx - \frac{w'^2}{\dfrac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} + \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{2w''}{w'} - \dfrac{(\varphi''(w))}{(\varphi'(w))}\right\}}.$$

Substituant les nombres aux quantités qui entrent dans ces formules, on obtient définitivement, pour $x = 17$,

$$(29)\quad \begin{cases} z = 86,421 + 1,221 = 87,642, \\ z' = 6,057 + 0,096 = 6,153, \\ z'' = 0,4682, \\ \int_0^x z'^2 dx = 441,93 + 7,45 = 449,38. \end{cases}$$

La dérivée z'' a été calculée au moyen de la dérivée totale de l'équation proposée et des quantités z et z'; calculée comme z', elle serait $z'' = 0,4975$, et au moyen des valeurs tirées de l'équation réduite, elle serait $z'' = 0,4212$, ce qui fait voir que le deuxième progrès (23) est insuffisant, ou que la convergence de l'expression fondamentale pour z'' est moins grande que pour z et z'.

Comme vérification, on a

$$\varphi(z) = +0,003;$$

les valeurs (29) sont donc suffisamment exactes, mais, pour des valeurs de x supérieures à 17, il ne serait pas prudent d'effectuer les calculs avec les constantes données par (21) et (22) : il faut prendre les quantités (29) comme valeurs initiales et calculer de nouvelles constantes par le même procédé que plus haut.

Il est nécessaire de vérifier si l'équation proposée (16), provenant de l'élimination de u_1 entre les relations (15) ou (7) et (10), convient encore; pour cela, la première équation (15) donne

$$(30)\qquad u_1 = 1,931,$$

quantité plus petite que $\frac{1}{3}z' = 2,045$, ce qui correspond à la supposition faite. Il convient aussi de calculer u_2 et la valeur correspondante de λ; la relation (8) donne

$$(30)'\qquad u_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z'^2 dx}{z} = 2,547,$$

et l'on tire de (11)

$$(30)''\qquad \lambda = \left(\frac{2}{3}z' - u_2\right)\frac{6z}{z'^2} = 21,37.$$

On voit qu'il faut poursuivre le calcul : on prendra donc les valeurs (29) correspondant à $x = 17$ comme valeurs initiales et, changeant les constantes arbitraires au moyen des formules données plus haut, on calculera les valeurs des inconnues correspondant à $x = 20$; changeant encore une fois de constantes en prenant pour valeurs initiales les dernières valeurs calculées, on obtient les valeurs suivantes correspondant à $x = 24$:

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} z &= 141,93,\\ z' &= 10,356,\\ z'' &= 0,7183,\\ \int_0^x z'^2\,dx &= 901,20. \end{aligned}\right.$$

On a aussi

$$(31)'\qquad u_1 = 3,154,\quad u_2 = 3,174,$$

et la valeur de λ correspondant à u_2 est

$$(31)''\qquad \lambda = 29,807.$$

Ce nombre est assez rapproché de la limite $\lambda = 30$; le problème qui se présente maintenant consiste à déterminer la valeur de x correspondant à cette limite.

u_2 étant plus petit que $\frac{z'}{3}$, il faudra satisfaire en même temps aux relations (8) et (12) au moyen des fonctions z_1, z'_1, les fonctions z_2, z'_2 étant toujours nulles; en éliminant u_2 entre les relations (8) et (12), supprimant l'indice de z et faisant $\frac{2}{3\lambda} = \frac{2}{90}$, on a

$$(32)\qquad hz - \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z'^2}{z} = 0,$$

équation transcendante en x, qu'il faut résoudre par rapport à cette quantité, puisque z est une fonction de x.

Faisons usage de l'expression fondamentale (23); elle se réduit à

$$(33)\qquad x = w - \frac{1}{\dfrac{\varphi'(w)}{\varphi(w)} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}},$$

en posant $F(z) = x$, et nous aurons, d'après (32), après avoir chassé le dénominateur,

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^x z'^2 dx - 2hz^2,\\ \varphi'(x) &= z'^2 - 4hzz',\\ \varphi''(x) &= 2z'z'' - 4hzz'' - 4hz'^2. \end{aligned}\right.$$

Prenons aussi, pour valeur fondamentale de x, $w = 24$; il vient

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi(w) = +5,78, \quad \varphi'(w) = -23,57, \quad \varphi''(w) = -13,71;\\ &\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)} = -4,079, \quad \frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = +0,583. \end{aligned}\right.$$

Nous aurons donc, d'après (33), pour la solution de l'équation transcendante (32),

$$(36)\qquad x = 24,229.$$

Il reste à calculer de nouveau la quantité z et les fonctions de z correspondant à $x = 24,229$; on trouverait facilement

$$(36)'\qquad z = 144,31, \quad z' = 10,520, \quad \int z'^2 dx = 925,76.$$

Comme vérification, (7) et (10) donnent

$$u_1 = 3,2066, \quad \lambda = 30,002;$$

puis (8) et (12),

$$u_2 = 3,2075, \quad \lambda = 29,995.$$

Les résultats obtenus présentent une exactitude suffisante pour passer à la détermination des profils de la troisième partie du mur.

Troisième partie. — D'après les conditions que nous nous sommes imposées, il existe deux profils courbes dans la partie inférieure du mur; le profil d'aval sera toujours déterminé par le système des relations (7) et (10), et le profil d'amont sera déterminé par le système (8) et (12).

Éliminant u_1 et u_2 dans chaque système, on obtient

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned}
&z'_1 - hz_1 + h\left[z_2 + \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx\right] \\
&\qquad - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)\,z'_2\,z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)\,z''_2\,dx} = 0,\\
&z'_2 - hz_2 + hz_1 - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx}{z_1 - z_2} = 0,
\end{aligned}\right.$$

équations différentielles simultanées qu'il s'agit d'intégrer; nous les représenterons respectivement par

$$\varphi_1(z_1, z_2) = 0, \quad \varphi_2(z_1, z_2) = 0,$$

ou, plus simplement, par

$$\varphi_1(z_1) = 0, \quad \varphi_2(z_2) = 0,$$

puisque z_2 est considéré comme fonction de z_1 dans φ_1, et z_1 comme fonction de z_2 dans φ_2.

Pour effectuer ce calcul, nous adopterons une marche en tout semblable à celle que nous avons suivie dans l'intégration précédente : nous mettrons les équations réduites sous la forme (18); les valeurs fondamentales seront alors de la forme (19); et celles-ci entreront dans l'expression fondamentale (23), qui donne les fonctions cherchées.

Mais, en examinant la composition des coefficients de la seconde équation (37), on voit qu'ils ne contiennent que des fonctions de z_1 et de z_2, ce qui fait que les dérivées partielles, par rapport à z_1 et z_2, du premier membre de cette équation, seront identiques aux dérivées totales de même ordre, et ces dérivées sont nulles. Il en résulterait une indétermination qui rendrait illusoire l'expression fondamentale (23), si l'on n'opérait de la manière suivante : d'après l'origine des équations (37), il est indiqué que la première doit déterminer la fonction z_1, et la seconde la fonction z_2; or la première équation, ne présentant aueune particularité, permettra de calculer directement la fonction z_1; cette fonction, une fois connue, pourra être considérée dans la seconde équation comme une simple fonction de x; de cette manière on aura

$$
(38)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi_1(z_1) &= z'_1 - h\left[z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z'_2 z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx}, \\
\varphi'_1(z_1)) &= z''_1 - h[z'_1 - z'_2 - \theta(x-a)z''_2] \\
&\quad - \frac{1}{2}\,\frac{z'^2_1 - z'^2_2 - 2\theta(x-a)z'_2 z''_2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} + \frac{z'_1 - z'_2 - \theta(x-a)z''_2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} \\
&\quad \times \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z'_2 z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx}, \\
(\varphi''_1(z_1)) &= z'''_1 - h[z''_1 - z''_2 - \theta(x-a)z'''_2] \\
&\quad - \frac{z'_1 z''_1 - z'_2 z''_2 - \theta(x-a)(z''^2_2 + z'_2 z'''_2)}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} + \frac{z'_1 - z'_2 - \theta(x-a)z''_2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} \\
&\quad \times \frac{z'^2_1 - z'^2_2 - 2\theta(x-a)z'_2 z''_2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} + \frac{z''_1 - z''_2 - \theta(x-a)z'''_2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} \\
&\quad \times \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z'_2 z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx} \\
&\quad - 2\left[\frac{z'_1 - z'_2 - \theta(x-a)z''_2}{\displaystyle z_1 - z_2 - \int_0^x (x-a)z''_2\,dx}\right]^2 \\
&\quad \times \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z'_2 z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\displaystyle z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z''_2\,dx};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(39)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi_2(z_2) = z'_2 + h(z_1 - z_2) - \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx}{z_1 - z_2},\\
&(\varphi'_2(z_2)) = z''_2 - h z'_2 + \frac{1}{2}\,\frac{z'^2_2}{z_1 - z_2} - \frac{z'_2}{z_1 - z_2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx}{z_1 - z_2},\\
&(\varphi''_2(z_2)) = z'''_2 - h z''_2 + \frac{z'_2 - z''_2}{z_1 - z_2} + \frac{z'_2}{2}\,\frac{2 z'^2_2 - z'_1 z'_2 - z'^2_1}{(z_1 - z_2)^2} - \frac{z''_2}{z_1 - z_2}\\
&\qquad \times \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx}{z_1 - z_2} + 2\,\frac{z'_2(z'_1 - z'_2)}{(z_1 - z_2)^2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx}{z_1 - z_2};
\end{aligned}
\right.
$$

et les dérivées totales seront

$$
(40)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi'_1(z_1) = (\varphi'_1(z_1)) - \frac{1}{2}\,\frac{\theta(x - a)^2}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x - a) z''_2\,dx} = 0,\\
&\varphi''_1(z_1) = (\varphi''_1(z_1)) + h\theta z''_2\\
&\qquad + \frac{\theta(a - x + z'_2 z''_2)}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x - a) z''_2\,dx} + \frac{1}{2}\theta(x - a)^2\,\frac{z'_1 - z'_2 - \theta(x - a) z''_2}{\left[z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x - a) z''_2\,dx\right]^2}\\
&\qquad - \frac{1}{2}\theta z''_2\,\frac{\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx - 2\theta\int_0^x (x - a) z'_2 z''_2\,dx + \frac{\theta}{3}(x - a)^3}{\left[z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x - a) z''_2\,dx\right]^2} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(41)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi'_2(z_2) = (\varphi'_2(z_2)) + h z'_1 - \frac{1}{2}\,\frac{z'^2_1}{z_1 - z_2} + \frac{z'_1}{z_1 - z_2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx}{z_1 - z_2} = 0,\\
&\varphi''_2(z_2) = (\varphi''_2(z_2)) + h z''_1 - \frac{z'_1 z''_1}{z_1 - z_2}\\
&\qquad + \frac{z'_1}{2}\,\frac{2 z'^2_1 - z'_1 z'_2 - z'^2_2}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{z''_1}{z_1 - z_2}\,\frac{\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx}{z_1 - z_2}\\
&\qquad - 2 z'_1\,\frac{z'_1 - z'_2}{(z_1 - z_2)^2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z'^2_1\,dx - \int_0^x z'^2_2\,dx}{z_1 - z_2} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces relations nous permettent de déterminer les valeurs initiales.

La seconde équation (37) est identiquement satisfaite pour $x = 24,229$, puisque les quantités z_2, z'_2 et $\int_0^x z'^2_2\,dx$ sont nulles, et la dérivée totale, première équation (41), donne z''_2. La première équation (37) est ainsi satisfaite pour les valeurs précédentes, en faisant de plus

$$\int_0^x (x-a)z''_2\,dx = 0, \quad \int_0^x (x-a)z'_2 z''_2\,dx = 0,$$

ce qui est conforme aux conditions du problème. La dérivée totale, première relation (40), donnera z''_1, valeur qui diffère de la quantité $z'' = 0,7246$ du profil précédent à cause des nouvelles quantités qui entrent dans l'expression de z''_2.

On a ainsi, à l'origine, pour $x = 24,229$,

$$(42)\quad \begin{cases} z_1 = 144,31, & z'_1 = 10,520, & z''_1 = 0,7476, & \int_0^x z'^2_1\,dx = 925,76, \\ z_2 = 0, & z'_2 = 0, & z''_2 = -0,0841, & \int_0^x z'^2_2\,dx = 0, \\ \int_0^x (x-a)z''_2\,dx = 0, & \int_0^x (x-a)z'_1 z''_2\,dx = 0. \end{cases}$$

Maintenant, si l'on veut prendre pour valeurs fondamentales des quantités de la forme (19), on observera, d'après (21), que l'on aurait une quantité infinie pour r_2 correspondant à z_2; les expressions (19) ne peuvent donc convenir. Le moyen le plus simple de lever cette difficulté est de mettre ici l'équation réduite sous la forme

$$(43)\qquad w' - hw - px - q = 0,$$

qui est suffisante; nous l'adopterons pour les deux profils [1].

---

[1] On aurait pu aussi, dans (18), substituer avec avantage à la fonction se^{rx} la fonction plus simple $px + q$.

Nous aurons donc ainsi

$$(44)\qquad \begin{cases} w_1 = M_1 e^{hx} + P_1 x + Q_1, \\ w_1' = M_1 h e^{hx} + P_1, \\ w_1'' = M_1 h^2 e^{hx}; \end{cases}$$

$$(44)'\qquad \begin{cases} w_2 = M_2 e^{hx} + P_2 x + Q_2, \\ w_2' = M_2 h e^{hx} + P_2, \\ w_2'' = M_2 h^2 e^{hx}; \end{cases}$$

et les constantes seront

$$(45)\qquad \begin{cases} M_1 = \dfrac{0,7476}{h^2} e^{-h.24,229} = +883,612, \\ P_1 = 10,520 - M_1 h e^{h.24,229} = -23,122, \\ Q_1 = 144,31 - M_1 h^2 e^{h.24,229} - P.24,229 = -809,36; \end{cases}$$

$$(45)'\qquad \begin{cases} M_2 = -\dfrac{0,0841}{h^2} e^{-h.24,229} = -99,471, \\ P_2 = -M_2 h e^{h.24,229} = +3,787, \\ Q_2 = -M_2 h^2 e^{h.24,229} - P.24,229 = +78,664. \end{cases}$$

On a ensuite, pour les intégrales définies,

$$(46)\qquad \int_0^x w_1'^2\,dx = \tfrac{1}{2} M_1^2 h e^{2hx} + 2M_1 P_1 e^{hx} + P_1^2 x + 32515,26;$$

$$(46)'\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x w_2'^2\,dx = \tfrac{1}{2} M_2^2 h e^{2hx} + 2M_2 P_2 e^{hx} + P_2^2 x + 620,63, \\ \displaystyle\int_0^x (x-a) w_2''\,dx = M_2 h\left(x - a - \frac{1}{h}\right) e^{hx} - 97,600, \\ \displaystyle\int_0^x (x-a) w_1' w_2''\,dx = \frac{1}{2} M_2^2 h^2 \left(x - a - \frac{1}{2h}\right) e^{2hx} \\ \qquad\qquad + M_2 P_2 h\left(x - a - \frac{1}{h}\right) e^{hx} - 16648,31. \end{cases}$$

Nous pouvons à présent calculer les ordonnées du double profil, pour une valeur donnée de x, par exemple pour $x = 30$.

On a successivement, dans l'ordre des calculs,

$$
(47)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
w_1 = +218,02, & \text{d'après l'express.} & (44), \\
w'_1 = +15,123, & \text{»} & (44), \\
\int_0^x w'^2_1\,dx = +1877,13, & \text{»} & (46), \\
w_2 = -1,464, & \text{»} & (44)', \\
w'_2 = -0,5182, & \text{»} & (44)', \\
\int_0^x w'^2_2\,dx = +0,50, & \text{»} & (46)', \\
\int_0^x (x-a)w''_2\,dx = -11,492, & \text{»} & (46)', \\
\int_0^x (x-a)w'_2 w''_2\,dx = +3,105, & \text{»} & (46)', \\
w''_2 = -0,1422, & \text{d'après la 2}^e\text{ express. (39) et 1}^{re}\text{ (41)}, & \\
\varphi''_2(w_1) = +0,178, & \text{» 1}^{re}\text{ » (38)} & \\
(\varphi'_1(w_1)) = +0,6937, & \text{» 1}^{re}\text{ » (40) derniers termes}, & \\
w''_1 = +0,8103, & \text{» 2}^e\text{ » (38) et 1}^{re}\text{ (40)}, & \\
w'''_2 = -0,0135, & \text{» 3}^e\text{ » (39) et 2}^e\text{ (41)}, & \\
(\varphi''_1(w_1)) = +0,0010, & \text{» 2}^e\text{ » (40) derniers termes}, & \\
w'''_1 = +0,0545, & \text{» 3}^e\text{ » (38) et 2}^e\text{ (40)}; &
\end{array}
\right.
$$

l'équation réduite eût donné

$$
w''_1 = 0,849, \quad w'''_1 = 0,0188,
$$
$$
w''_2 = -0,095, \quad w'''_2 = -0,0021.
$$

On en déduit

$$
(47)'\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{(\varphi'_1(w_1))}{\varphi_1(w_1)} = +3,8972, & \dfrac{(\varphi''_1(w_1))}{(\varphi'_1(w_1))} = +0,0014, \\[2ex]
\dfrac{w''_1}{w'_1} = +0,5358, & \dfrac{w'''_1}{w''_1} = +0,0672;
\end{array}
\right.
$$

par suite, l'expression fondamentale (23), savoir

$$F(z) = F(w) - \frac{(F'(w))}{\frac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} + \frac{1}{2}\left\{\frac{(F''(w))}{(F'(w))} - \frac{(\varphi'_1(w))}{(\varphi'(w))}\right\}},$$

donnera, en mettant φ_1 pour φ et successivement z_1, ainsi que ses dérivées, puis l'intégrale définie désignée plus haut, pour $F(z)$,

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} z_1 &= 218,020 - 3,632 = 214,388,\\ z'_1 &= 15,123 - 0,206 = 14,917,\\ z''_1 &= 0,8103 - 0,0140 = 0,7963,\\ \int_0^{x} z'^2_1\,dx &= 1877,13 - 50,02 = 1827,11; \end{aligned}\right.$$

les seconds termes de ces quantités proviennent respectivement des divisions suivantes :

$$\frac{15,123}{4,164},\quad \frac{0,8103}{3,930},\quad \frac{0,0545}{3,897},\quad \frac{222,52}{4,432}.$$

Avec ces valeurs de z_1, z'_1, ..., on calcule les quantités

$$(49)\quad \left\{\begin{array}{llll} \varphi_2(w_2) = +0,0474, & \text{d'après la } 1^{re} \text{ express.} & (39), & \\ (\varphi'_2(w_2)) = -0,1084, & \quad\text{»}\quad 1^{re} & \text{»} & (41) \text{ derniers termes,}\\ w''_2 = -0,1364, & \quad\text{»}\quad 2^{e} & \text{»} & (39) \text{ et } 1^{re}\ (41),\\ (\varphi''_2(w_2)) = -0,0061, & \quad\text{»}\quad 2^{e} & \text{»} & (41) \text{ derniers termes,}\\ w'''_2 = -0,0161, & \quad\text{»}\quad 3^{e} & \text{»} & (39) \text{ et } 2^{e}\ (41). \end{array}\right.$$

On en déduit, avec les quantités w_2, w'_2 de (47),

$$(49)'\quad \left\{\begin{aligned} \frac{(\varphi'_2(w_2))}{\varphi_2(w_2)} &= -2,2870, & \frac{(\varphi''_2(w_2))}{(\varphi'_2(w_2))} &= +0,0562,\\ \frac{w''_2}{w'_2} &= +0,2631, & \frac{w'''_2}{w''_2} &= +0,1180, \end{aligned}\right.$$

et l'expression fondamentale (23) donne

$$(50)\quad \begin{cases} z_2 = -1,464 - 0,238 = -1,702, \\ z'_2 = -0,5182 - 0,0604 = -0,5786, \\ z''_2 = -0,1364 - 0,0070 = -0,1434, \\ \displaystyle\int_0^x z_2'^2\,dx = +0,50 + 0,13 = +0,63; \end{cases}$$

les seconds termes de ces quantités proviennent respectivement des divisions

$$\frac{0,5182}{2,1736}, \quad \frac{0,1364}{2,2561}, \quad \frac{0,0161}{2,287}, \quad \frac{0,268}{2,052}.$$

Pour le calcul des deux dernières intégrales définies de (47), on a respectivement

$$\frac{(F''(w_2))}{(F'(w_2))} = \frac{(x-a)w_2'''}{(x-a)w_2''} = 0,118,$$

$$\frac{(F''(w_2))}{(F'(w_2))} = \frac{(x-a)(w_2' w_2''' + w_2''^2)}{(x-a)w_2' w_2''} = 0,381,$$

et ensuite

$$(50)'\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (x-a) z''_2\,dx = -11,492 - 1,512 = -13,004, \\ \displaystyle\int_0^x (x-a) z'_2 z''_2\,dx = +3,105 + 0,832 = +3,937; \end{cases}$$

les seconds termes proviennent des divisions

$$\frac{2,410}{2,256}, \quad \frac{1,767}{2,124}.$$

Nous pouvons vérifier maintenant, au moyen des quantités obtenues (48), (50), (50)', si les équations proposées sont satisfaites; nous avons ainsi

$$\varphi_1(z_1) = +0,0268,$$
$$\varphi_1(z_2) = -0,0008.$$

Ce résultat montre qu'avec les formules dont nous avons fait usage et pour l'approximation qui convient il n'est pas avantageux de calculer les ordonnées des profils, au delà de $x = 30$, sans changer de valeurs initiales. Cependant, au moyen de la méthode d'exhaustion, il est possible d'avoir une approximation plus grande que celle que nous obtenons, et même, avec la convergence donnée par l'expression fondamentale (23), on peut arriver rapidement au même résultat par un simple procédé de répétition.

En effet, substituant les valeurs obtenues dans le second terme de la première expression (40), on a

$$(\varphi'_1(z_1)) = +0,7019,$$

d'où

$$\frac{\varphi_1(z_1)}{(\varphi'_1(z_1))} = +0,0382,$$

et l'expression fondamentale réduite à ses deux premiers termes,

$$F(z) = F(w) - \frac{\varphi(z)}{(\varphi'(z))}(F'(w)),$$

donne, en prenant les quantités (48) pour valeurs fondamentales,

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} z_1 &= 214,388 - 0,0382 \,.\, 14,917 = 213,818,\\ z'_1 &= 14,9168 - 0,0382 \,.\, 0,7963 = 14,8864,\\ z''_1 &= 0,7963 - 0,0382 \,.\, 0,0545 = 0,7942,\\ \int_0^r z'^2_1 dx &= 1827,11 - 0,0382 \,.\, 222,52 = 1818,61. \end{aligned}\right.$$

Avec ces nouvelles valeurs (51) et les précédentes (50) et (50)', les équations proposées donnent comme vérification

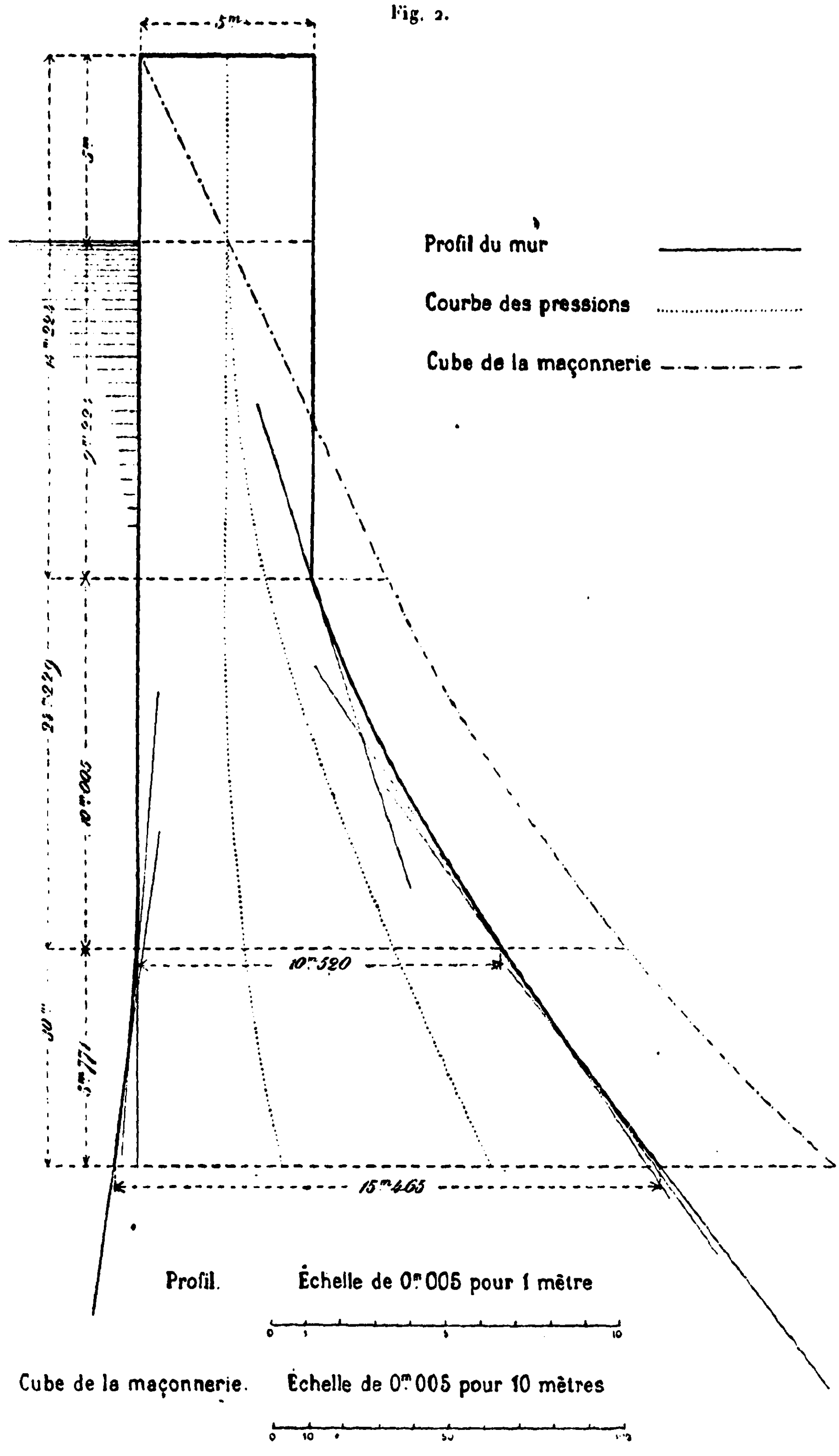
$$\varphi_1(z_1) = 14,8864 - 4,9338 - 9,9499 = +0,0027,$$
$$\varphi_2(z_2) = -0,5786 + 4,7893 - 4,2176 = -0,0069;$$

de là on déduit

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= 14,8864 - 9,9499 = 4,9365, && \text{d'après l'express. (7)}\\ \lambda_1 &= \frac{2}{3}\,\frac{222,022}{u_1} = 29,984, && \text{» (10)} \end{aligned}\right.$$

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} u_2 &= +0,5786 + 4,2176 = 4,7962, && \text{» (8)}\\ \lambda_2 &= \frac{2}{3}\,\frac{215,52}{u_2} = 29,954 && \text{» (12)} \end{aligned}\right.$$

Fig. 2.


5m
Profil du mur
Courbe des pressions
Cube de la maçonnerie
10m520
15m465
Profil.
Échelle de 0m005 pour 1 mètre
Cube de la maçonnerie.
Échelle de 0m005 pour 10 mètres

Les résultats auxquels nous parvenons présentent donc toute l'exactitude désirable; nous vérifions encore, par les valeurs de u_1 et u_2 comparées au tiers de l'épaisseur du mur $\frac{1}{3}(z'_1 + z'_2) = 5,155$, que les expressions (7), (8), (10) et (12), d'où nous avons déduit les équations du problème (37), sont bien celles qu'il convenait de choisir.

Nous avons ainsi les principales quantités qui déterminent le profil d'égale résistance jusqu'à 30^m; il serait facile à présent de calculer les valeurs intermédiaires et même de poursuivre le calcul du profil jusqu'à 40^m ou 50^m.

L'épure ci-jointe (*fig.* 2) résume les résultats obtenus :

la quantité $z_1 + z_2$ donne le cube de maçonnerie par mètre courant de l'ouvrage,
z'_1 et z'_2 donnent les ordonnées du profil du mur,
z''_1 et z''_2 l'inclinaison des profils sur la verticale,
u_1 et u_2 les points de rencontre des résultantes des pressions sur chaque joint fictif horizontal.

Nous terminons ce dernier exemple, qui offrait quelque intérêt à cause des difficultés mêmes. Nous avons refait les calculs à plusieurs reprises afin de nous rendre un compte exact des résultats que pouvait donner la méthode secondaire; nous avons même effectué les intégrations par un moyen complètement différent [1], et nous sommes aujourd'hui convaincu que les méthodes de Wronski, quand elles seront connues, devront se substituer rapidement aux procédés ordinaires, presque toujours insuffisants et compliqués; les transcendantes élémentaires pratiques se réduiront alors aux logarithmes et aux sinus de tous les ordres, ces fonctions comprenant les exponentielles et les sinus du cercle.

La méthode que nous faisons connaître peut avoir dès maintenant de nombreuses applications, mais la réussite dépendra surtout d'un choix judicieux des quantités arbitraires qui entrent dans les formules. On sera assuré d'avoir rempli les conditions voulues quand les

[1] Nous voulons parler de la Méthode secondaire systématique que nous avons rétablie avant celle-ci.

inconnues et les fonctions de ces inconnues engagées dans les équations seront toutes données par des développements d'une convergence à peu près égale.

On ne peut reprocher aux calculs qui précèdent d'être longs à exécuter : les avantages qu'ils présentent les rend bien supérieurs par la précision aux tracés d'épures et à tous les autres moyens employés, ils n'ont pas d'équivalents; les deux ou trois jours de calcul qu'ils peuvent au plus réclamer sont peu de chose comparés aux trois ou quatre campagnes que nécessite la construction des grands murs de réservoirs; d'ailleurs, quelles précautions ne doit-on pas prendre pour assurer la réussite de pareils ouvrages? Les calculs ne sont pas aussi pénibles qu'ils semblent être au premier abord : il suffit d'examiner la disposition des formules (38), (39), (40) et (41) pour s'en convaincre et, en faisant usage de procédés expéditifs, le travail se trouve très sensiblement réduit; c'est ainsi que nous avons obtenu très simplement les dérivées secondes de φ_1 et de φ_2 au moyen de la règle à calcul.

Dans la pratique, les profils ne se déterminent pas comme nous l'avons admis; pour des raisons relatives à l'exécution des travaux, les murs présentent un fruit dès la partie supérieure et les raccords des diverses courbes ont lieu insensiblement; il suffit donc de vérifier si le profil que l'on adopte ne s'écarte pas trop des conditions d'égale résistance, en considérant les sections de rupture probable et non des joints fictifs horizontaux qui n'ont aucune raison d'être *a priori* d'après le mode de construction usité en pareils cas. Enfin si l'on admet, comme on doit le faire pour les matériaux avec lesquels sont construits ces ouvrages, une résistance supérieure à celle de 6^{kg} que nous avons supposée, les calculs se trouveront notablement simplifiés pour une même hauteur, et on réalisera de plus une économie sur la construction; en effet, jusqu'à une hauteur de 40^{m} environ, et même au delà, et pour une résistance de 8^{kg} à 9^{kg} par centimètre carré, la partie courbe d'amont n'aura pas de raison d'être et les calculs ne se rapporteront qu'à l'intégration d'une seule équation différentielle, comme l'équation (16).

Mais ces considérations sont étrangères à notre sujet : notre but était d'indiquer seulement la marche des calculs dans une application importante de la nouvelle méthode.

RÉSUMÉ DE LA MÉTHODE.

Avant d'abandonner le sujet qui nous occupe, il ne sera peut-être pas inutile de donner l'expression calculée du troisième progrès de la génération neutre. D'après les notations adoptées, nous avons, en mettant pour simplifier φ à la place de $\varphi(w)$,

$$(107)\quad y = w - \frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\varphi')}w'\,\frac{2\dfrac{w'''}{w''}\dfrac{w''}{w'} - 3\left(\dfrac{w''}{w'}\right)^2 + 6\dfrac{(\varphi')}{\varphi}\dfrac{w''}{w'} - 3\dfrac{(\varphi'')}{(\varphi')}\left[2\dfrac{(\varphi')}{\varphi} - \dfrac{(\varphi'')}{(\varphi')} + \dfrac{2}{3}\dfrac{(\varphi''')}{(\varphi'')}\right]}{\dfrac{w'''}{w''}\dfrac{w''}{w'} + 3\left[\dfrac{(\varphi')}{\varphi} - \dfrac{(\varphi'')}{(\varphi')}\right]\dfrac{w''}{w'} - 3\dfrac{(\varphi'')}{(\varphi')}\left[\dfrac{(\varphi')}{\varphi} - \dfrac{(\varphi'')}{(\varphi')} + \dfrac{1}{3}\dfrac{(\varphi''')}{(\varphi'')}\right]}.$$

Ce troisième progrès ne se réduit pas au second en faisant $w''' = 0$ et $\varphi''' = 0$. Si au lieu de y on avait $F(y)$ dans le premier membre, il suffirait dans le second de mettre $F(w)$, $(F'(w))$, $(F''(w))$, $(F'''(w))$ au lieu de w, w', w'', w'''.

Nous nous sommes servi de cette expression pour résoudre l'équation transcendante (32) du dernier exemple, en partant de la valeur fondamentale $w = 23$, de l'inconnue x, au lieu de celle que nous avons admise dans les calculs précédents, $w = 24$; l'expression (107) prend alors la forme plus simple

$$(108)\qquad y = w - \frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\varphi')}w'\,\frac{2\dfrac{(\varphi')}{\varphi} - \dfrac{(\varphi'')}{(\varphi')} + \dfrac{2}{3}\dfrac{(\varphi''')}{(\varphi'')}}{\dfrac{(\varphi')}{\varphi} - \dfrac{(\varphi'')}{(\varphi')} - \dfrac{1}{3}\dfrac{(\varphi''')}{(\varphi'')}}.$$

Précisons aussi les caractères principaux de la méthode.

1° Toute équation à résoudre ou à intégrer par rapport à une inconnue y,

$$\varphi(y) = 0$$

a pour solution (2) ou (22)″, cette inconnue pouvant dépendre d'une variable indépendante x, ou de plusieurs; plus généralement une fonction déterminée de l'inconnue, $F(y)$, a pour expression (3) ou (22) à laquelle on substitue dans la pratique une réduite telle que (107). Ces expressions fondamentales contiennent une quantité w totalement arbitraire en principe, et sont par conséquent des expressions techniques; elles diffèrent en cela des expressions théoriques dont on fait ordinairement usage.

2° Quelle que soit la convergence, ou la divergence, de l'expression (3), les coefficients étant des fonctions déterminées de φ et de F formées avec les différentielles de ces fonctions, aucune fonction autre que la fonction $F(y)$, qui dépend de l'équation proposée, ne peut être représentée par cette expression. Il en résulte nécessairement que l'expression fondamentale représente dans tous les cas la fonction cherchée. C'est là un point très important qui, cependant, n'est généralement pas admis.

3° Les différentielles des fonctions φ et F, ou leurs dérivées, sont prises seulement par rapport à la quantité w (¹). S'il existe plusieurs inconnues $y_1, y_2, \ldots$, toutes doivent être considérées comme fonctions de celle d'entre elles qui sera calculée au moyen de l'équation dont il s'agit. C'est pour cette raison que cette équation, qui devrait s'écrire

$$\varphi(y_1, y_2 \ldots y_\alpha \ldots x_1, x_2, \ldots) = 0,$$

est simplement notée

$$\varphi(y_\alpha) = 0,$$

y_α étant l'inconnue désignée.

4° La résolution, ou l'intégration, d'une équation est donc ramenée par cette méthode au calcul des dérivées de l'inconnue et à la détermination de la quantité w.

5° Cette quantité w, *appelée valeur fondamentale*, s'obtient au moyen d'une équation réduite que l'on peut toujours former, même de plusieurs manières.

6° Dans les applications, il est nécessaire que les développements présentent une convergence suffisante; la condition principale de cette convergence est que la valeur fondamentale w diffère aussi peu que

(¹) Nous avons fait usage d'une ancienne notation des différentielles partielles, au lieu de celle qui est adoptée ordinairement; la première a l'avantage de pouvoir être employée pour les dérivées partielles, ainsi que cela se présente dans les expressions (107) et (108).

possible de l'inconnue y, ce qui conduit à rechercher des équations réduites différant aussi peu que possible de l'équation proposée. Aussi l'équation réduite devra-t-elle être de même nature que celle-ci, c'est-à-dire que ces équations devront être du même degré ou du même ordre.

7° Si l'on ne pouvait obtenir ainsi la convergence voulue, on aurait recours, pour augmenter la convergence, et même pour y parvenir si elle n'existe pas primitivement, à l'un des procédés auxiliaires indiqués, lesquels peuvent être mis en usage ensemble ou séparément.

8° Si l'équation réduite ne donne pas les dérivées fondamentales avec une approximation suffisante, on aura recours à la différentiation de l'équation proposée, ou des équations, s'il en existe plusieurs, et par de simples résolutions d'équations linéaires on obtiendra, dans tous les cas, les dérivées cherchées à partir de l'ordre immédiatement supérieur à celui qui caractérise l'équation proposée comme équation différentielle. Ainsi pour les équations algébriques ou transcendantes, ou pour les équations aux différences finies, les dérivées peuvent être toutes ainsi calculées.

9° Si les dérivées de φ par rapport à y se confondent avec les dérivées totales de cette fonction, l'expression fondamentale présentera une indétermination. On évite cet inconvénient en considérant une ou plusieurs fonctions de y entrant dans les coefficients de l'équation comme des fonctions de x, et, conduisant les calculs comme dans le cas ordinaire, on parviendra, par des approximations successives, à obtenir l'inconnue (¹).

Malgré les imperfections que l'on aura pu rencontrer dans notre travail, nous espérons nous être fait suffisamment comprendre pour qu'il soit possible dès maintenant de faire l'application de cette méthode aux questions difficiles de Mécanique et d'Astronomie, Sciences qui sont aujourd'hui arrêtées dans leurs développements, par l'impossibilité où l'on est de résoudre ou d'intégrer avec une exactitude suffisante les équations que l'on est parvenu à établir.

(¹) Ce procédé nous paraît être le seul applicable dans ce cas, contrairement à ce que nous avons indiqué, à propos de l'intégration des équations différentielles, dans la note qui fait suite à l'expression (23)''.

Dans un complément nous donnerons les démonstrations et les développements théoriques que nous avons dû omettre jusqu'ici.

A présent, nous pouvons citer les paroles suivantes de Wronski (¹), elles ne paraîtront sans doute plus exagérées :

Nous obtenons donc ainsi, d'une manière absolument générale, par l'application de notre méthode élémentaire secondaire, la solution complète des équations conjointes, quels que soient leur nombre et leur genre, soit primitives, immanentes ou transcendantes, soit dérivées, aux différences ou aux différentielles totales ou partielles. Et les géomètres remarqueront sans doute que c'est là précisément la solution du problème le plus grand et le plus difficile de leur science, de ce problème immense qu'ils osaient à peine envisager dans son infinie généralité.

Il nous reste à adresser tous nos remercîments à M. Resal qui a bien voulu accueillir ce travail dans son Journal; nous lui en sommes d'autant plus reconnaissant que, jusqu'à ces temps derniers, les géomètres, pour la plupart, ont accordé peu de faveur à tout ce qui se rapporte à l'œuvre de Wronski. Nous remercions également M. Yvon Villarceau, le savant astronome, d'avoir bien voulu nous donner ses encouragements et ses conseils pendant la rédaction de ce Mémoire.

(¹) *Réforme*, t. I, page cxvij.