JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Équations des petits mouvements d'un liquide pesant, quand ils sont principalement horizontaux, que les frottements s'y trouvent peu sensibles, et que le liquide est contenu soit dans un bassin à fond presque horizontal, soit dans un tuyau ou un canal de peu de pente longitudinale, la surface supérieure, soumise à des pressions constantes ou légèrement variables, n'ayant aussi que des pentes faibles

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 9 (1883), p. 273-300.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9__273_0>

Équations des petits mouvements d'un liquide pesant, quand ils sont principalement horizontaux, que les frottements s'y trouvent peu sensibles, et que le liquide est contenu soit dans un bassin à fond presque horizontal, soit dans un tuyau ou un canal de peu de pente longitudinale, la surface supérieure, soumise à des pressions constantes ou légèrement variables, n'ayant aussi que des pentes faibles;

PAR M. J. BOUSSINESQ [1].

I. — BUT DE CE MÉMOIRE.

Parmi les classes nombreuses d'ondes qu'on observe dans les liquides, la plus intéressante est celle des ondes dites *de translation*, où toutes les couches fluides, depuis la surface jusqu'au fond, participent au mouvement, dans une proportion à fort peu près égale s'il s'agit d'un fluide qui était en repos à l'instant où les ondes étudiées s'y sont produites ou propagées, et, tout au moins, dans une mesure très

[1] Ce travail se rattache au sujet traité déjà, en 1872, dans un Mémoire du *Journal de Mathématiques*, relatif à l'onde solitaire et aux autres ondes de translation propagées le long de canaux contenant un liquide en repos. Il constitue aussi un *deuxième complément* à l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, publié dans le *Recueil des Savants étrangers* de l'Académie des Sciences de Paris (t. XXIII et XXIV) : un *premier complément* a paru au Volume de 1878 du *Journal de Mathématiques* (t. IV, p. 335 à 376).

notable si, au contraire, le fluide animé du mouvement ondulatoire s'écoule en même temps, le long d'un canal, par filets inégalement rapides. Ces ondes, au nombre desquelles on compte l'onde si remarquable appelée *solitaire*, sont celles dont la longueur est très supérieure à la profondeur totale du liquide : caractère provenant de ce que les vitesses imprimées à la masse fluide y sont en majeure partie horizontales, c'est-à-dire parallèles aux grandes dimensions de la masse.

Dans mon *Essai sur la théorie des eaux courantes*, où j'ai étudié en détail cette classe d'ondes (p. 261 à 324, 348 à 470, etc.), je me suis attaché à deux cas principaux et, pour ainsi dire, extrêmes, qui sont, d'une part, le cas où le mouvement ondulatoire se produit au sein d'une eau tranquille, d'autre part, le cas où, au contraire, il se propage le long d'un courant dont le régime préalable était sensiblement uniforme. Mais j'ai supposé, en traitant le second cas, que le passage des ondes n'altérait pas beaucoup l'uniformité du régime, ou, autrement dit, que les changements qu'il introduit dans les vitesses des divers filets fluides n'étaient que d'assez petites fractions de ces vitesses mêmes. Or, pour des ondes d'une hauteur sensible, un peu comparable à la profondeur totale, les vitesses variables qu'elles apportent sont, dans la plupart des cours d'eau non torrentueux, du même ordre que les vitesses antérieures et, surtout, que leurs différences entre les filets de la surface et ceux du fond. Il restait donc à traiter un cas intermédiaire important, celui où les filets fluides présentent entre eux, avant l'arrivée des ondes, des différences de rapidité qui ne soient ni très petites, ni très grandes par rapport aux vitesses produites ultérieurement. Je me propose d'embrasser ici ce cas, avec celui d'un liquide d'abord en repos, dans une analyse aussi générale et aussi simple que possible.

La légère pente primitive des filets fluides et l'influence des frottements pourront y être négligées sur des longueurs ou pendant des périodes de temps modérées et même assez considérables. En effet, d'une part, la petitesse des vitesses de régime uniforme acquises par le liquide impliquera la supposition de pentes de superficie insignifiantes en comparaison de celles qui se produiront lors du passage des ondes; et, d'autre part, les frottements développés par des vitesses de cet ordre, n'ayant qu'une influence comparable à celle de la pente superficielle de régime uniforme dont il vient d'être parlé et qu'ils neutralisaient, se trouveront également négligeables. Sans doute les vitesses initiales, très sensibles, des filets fluides sont dues à cette action de la pente superficielle primitive, dont on ne tient pas compte, et leur régularisation est due de même aux frottements, qu'on néglige aussi; mais ces deux effets ont exigé, pour se produire, des temps ou des parcours beaucoup plus longs que ceux durant lesquels se fait l'évolution considérée du mouvement ondulatoire, de sorte que leurs causes n'en sont pas moins très petites par rapport à celles qui se trouvent en jeu dans ce mouvement, le seul dont nous voulions ici nous occuper.

II. — Formules fondamentales

Supposons d'abord le liquide contenu dans un large bassin, ayant son fond horizontal ou peu incliné, et prenons pour plan des xy un plan horizontal très voisin de la surface libre primitive, pour axe des z une verticale, dirigée vers le bas. Appelons :

H, fonction de t, x et y, l'ordonnée du fond, que nous supposerons d'abord mobile, pour plus de généralité;
ζ, autre fonction de t, x et y, l'ordonnée de la surface;
p_1, égal encore à une fonction de t, x et y, la pression, p, mesurée à cette surface;
enfin, u, v, w les trois composantes de la vitesse, au point quelconque (x, y, z); et u_0, v_0, w_0 leurs valeurs au fond ou pour $z = H$, u_1, v_1, w_1 leurs valeurs à la surface, ou pour $z = \zeta$.

Les équations indéfinies de l'Hydrodynamique rationnelle deviendront ici, en observant que le fluide n'est soumis dans sa masse à aucune autre action extérieure que la pesanteur g, et en désignant, comme à l'ordinaire, par ρ sa densité constante, par u', v', w' les trois composantes de l'accélération produite au point (x, y, z) :

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -u', \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = -v', \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = g - w';$$

$$(2) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Les conditions spéciales, données également dans les Cours de Mécanique rationnelle, seront : 1°, au fond, ou pour $z = H$,

$$(3) \qquad w_0 = \frac{dH}{dt} + u_0 \frac{dH}{dx} + v_0 \frac{dH}{dy};$$

2°, à la surface, ou pour $z = \zeta$,

$$(4) \qquad w_1 = \frac{d\zeta}{dt} + u_1 \frac{d\zeta}{dx} + v_1 \frac{d\zeta}{dy}, \quad p = p_1.$$

Cherchons d'abord la relation, exprimant la conservation des volumes fluides, qui existe entre la profondeur $H - \zeta$ et les deux *composantes horizontales moyennes de la vitesse*

$$U = \int_\zeta^H u \frac{dz}{H-\zeta}, \quad V = \int_\zeta^H v \frac{dz}{H-\zeta},$$

prises à l'époque t, depuis la surface jusqu'au fond, sur la verticale quelconque (x, y). A cet effet, multiplions l'équation de continuité (2) par dz et intégrons, sur chaque verticale, de $z = \zeta$ à $z = H$. Comme

$$\int_\zeta^H \frac{dw}{dz} dz = w_0 - w_1,$$

il viendra, d'après (3) et (4),

$$\int_\zeta^H \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right) dz + \frac{d(H-\zeta)}{dt} + u_0 \frac{dH}{dx} - u_1 \frac{d\zeta}{dx} + v_0 \frac{dH}{dy} - v_1 \frac{d\zeta}{dy} = 0.$$

Or, si l'on observe que la règle classique de la différentiation des intégrales définies donne

$$\frac{d}{dx}\int_\zeta^H u\,dz = \int_\zeta^H \frac{du}{dx} dz + u_0 \frac{dH}{dx} - u_1 \frac{d\zeta}{dx},$$

$$\frac{d}{dy}\int_\zeta^H v\,dz = \int_\zeta^H \frac{dv}{dy} dz + v_0 \frac{dH}{dy} - v_1 \frac{d\zeta}{dy},$$

et que, de plus,

$$\int_\zeta^H u\,dz = (H - \zeta)U, \quad \int_\zeta^H v\,dz = (H - \zeta)V,$$

cette relation devient l'équation cherchée

$$(5) \qquad \frac{d(H-\zeta)}{dt} + \frac{d(H-\zeta)U}{dx} + \frac{d(H-\zeta)V}{dy} = 0.$$

On l'aurait obtenue directement, en considérant le filet d'étendue vertical dont la coupe horizontale est un rectangle élémentaire $dx\,dy$ du plan des xy, et en exprimant que le volume liquide qui l'occupe, $(H - \zeta)dx\,dy$, diminue, pendant l'instant dt, d'une quantité

$$-\frac{d(H-\zeta)}{dt}\,dt\,dx\,dy,$$

égale à l'excédent, $\frac{d(H-\zeta)U}{dx}\,dx\,dy\,dt$, du fluide qui sort par la seconde face normale aux x, sur celui, $(H - \zeta)dy(U\,dt)$, qui entre par la première, plus un excédent analogue pour les faces normales aux y.

A une première approximation, cette équation (5) donne simplement, dans la question traitée ici,

$$\frac{d(H-\zeta)}{dt} + (H - \zeta)\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy}\right) = 0.$$

En effet, les termes supprimés,

$$U\frac{d(H-\zeta)}{dx}, \quad V\frac{d(H-\zeta)}{dy},$$

de l'ordre des produits des vitesses U, V par les petites dérivées $\frac{d(H-\zeta)}{d(x,y)}$, sont négligeables devant la dérivée $\frac{d(H-\zeta)}{dt}$, laquelle est comparable aux produits des $\frac{d(H-\zeta)}{d(x,y)}$ par des vitesses de propagation supposées très supérieures à U ou V (¹). De plus, on admet que ζ n'égale qu'une très petite fraction de $H - \zeta$, ou que la hauteur des ondes est, *à une première approximation*, négligeable en comparaison de la profondeur totale. Le facteur $H - \zeta$ pourra donc se réduire à H et, en résolvant par rapport à $\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy}$, on aura

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} = \text{sensiblement} - \frac{1}{H}\frac{d(H-\zeta)}{dt}. \tag{6}$$

III. — Recherche d'une première approximation, dans trois cas distincts.

La dernière équation (1), multipliée par dz, puis intégrée, à partir de $z = \zeta$, en observant que $p = p_1$ à cette limite, donne

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + g(z-\zeta) - \int_\zeta^z w'\,dz; \tag{7}$$

et les valeurs de $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}, \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}$ qui s'en déduisent transforment les deux autres (1) en celles-ci :

$$\left\{\begin{aligned} u' &= g\frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right) + \frac{d}{dx}\int_\zeta^z w'\,dz, \\ v' &= g\frac{d}{dy}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right) + \frac{d}{dy}\int_\zeta^z w'\,dz. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Or, rappelons qu'il s'agit ici de mouvements *principalement horizon-*

(¹) Par définition, les vitesses avec lesquelles se propagent, le long d'une horizontale donnée, les diverses valeurs soit de la profondeur $H - \zeta$, soit des composantes u, ou v, ou w, sont les vitesses que devrait avoir un point mobile parcourant l'horizontale en question, pour que $H - \zeta$, u, v ou w y conservassent toujours ces mêmes valeurs, ou eussent leurs différentielles totales, obtenues en suivant le point, égales à zéro. Il suit évidemment de là que la vitesse de propagation, à l'époque t, pour chacune des quantités $H - \zeta$, u, v, w, est le rapport, changé de signe, de la dérivée partielle de celle-ci par rapport au temps à sa dérivée partielle par rapport à l'espace, prise le long de l'horizontale donnée. Or ce rapport reste fini, même quand ζ, u, v, w, U et V deviennent infiniment petits.

taux, ou tels, que la composante verticale w' de l'accélération soit très faible en comparaison de u' ou v'. Donc, à une première approximation, les derniers termes de (8) disparaissent à côté de u', v', et il vient

$$(9) \qquad u' = g\frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right), \quad v' = g\frac{d}{dy}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right).$$

D'où il résulte que les accélérations horizontales u', v' sont presque les mêmes tout le long d'une verticale et aussi, par suite, dans toute région ayant ses dimensions petites par rapport à la longueur d'une onde, région pour toute l'étendue de laquelle les *pentes motrices*

$$\frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right), \quad \frac{d}{dy}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right)$$

se trouveront à fort peu près pareilles. Et, comme nous supposons des vitesses u, v assez faibles pour ne faire parcourir aux molécules, durant le passage d'une intumescence (ou pendant la durée d'une période si le mouvement est périodique), que des espaces assez petits à côté de la longueur d'une onde, on voit que toutes les molécules pour lesquelles x et y étaient les mêmes, au début du temps assez modéré où on les considère, recevront constamment, à peu près, les mêmes accélérations u', v' et acquerront, par conséquent, des vitesses sensiblement égales dans le sens horizontal. Ainsi, *les différences existant entre les composantes u ou v de leurs vitesses resteront, à une première approximation, ce qu'elles étaient d'abord.*

Cela posé, nous admettrons que l'on se trouve dans l'un des trois cas suivants.

1° Ou bien les vitesses, au début du temps considéré, étaient nulles dans la partie de la masse fluide pour laquelle on étudie le mouvement, et, alors, d'après ce qu'on vient de voir, les vitesses horizontales acquises u, v seront peu dépendantes de z, ou ne différeront guère de leurs moyennes prises depuis le fond jusqu'à la surface le long d'une même verticale, moyennes que nous représentons respectivement par U et V.

2° Ou bien le mouvement est en majeure partie oscillatoire, de sorte que les molécules se retrouvent à peu près dans les mêmes positions au bout d'un temps T assez modéré; et, dans ce cas, la moyenne

$$\int_t^{t+T} u\frac{dt}{T}, \quad \int_t^{t+T} v\frac{dt}{T},$$

pour une même molécule, des valeurs successives de u, v étant très faible par rapport à ces valeurs mêmes de u, v, la différence entre ces moyennes respectives, pour deux molécules quelconques, sera également très faible par rapport à u, v. Cela implique que la différence, à chaque instant, entre les valeurs effectives de u, ou de v, pour deux molécules peu éloignées, soit encore du même ordre de petitesse; puisque, d'après ce qu'on a vu, cette différence ne varie pas sensiblement durant le temps T et est, par suite, aussi faible que sa moyenne. Ainsi, dans le cas actuel d'un mouvement principalement oscillatoire, tout comme dans le cas précédent où l'état initial était le repos, u, v ne diffèrent pas sensiblement de U, V, c'est-à-dire dépendent peu de z.

3° Ou bien enfin, le fond étant supposé horizontal et situé à une profondeur constante H au-dessous de la surface libre primitive prise pour plan des xy, le fluide possédait, antérieurement à la production ou à la propagation des ondes qu'il s'agit d'étudier, de petites vitesses horizontales u, v, indépendantes du temps, et telles, que, si l'on appelle α, β leurs excédents respectifs sur la moyenne,

$$\int_0^H u\frac{dz}{H}, \quad \int_0^H v\frac{dz}{H},$$

de leurs valeurs prise de haut en bas, on ait les deux relations

$$(9\ bis) \quad \int_0^H \left(\alpha\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\alpha}{dy}\right)\frac{dz}{H} = 0, \quad \int_0^H \left(\alpha\frac{d\beta}{dx} + \beta\frac{d\beta}{dy}\right)\frac{dz}{H} = 0.$$

Ces relations, que nous admettrons entre les deux composantes des vitesses primitives des filets fluides, ou, plutôt, entre les excédents α, β de ces composantes sur leurs moyennes respectives, reviennent à supposer nulles en moyenne, le long de chaque verticale, des accélérations $u' = \alpha\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\alpha}{dy}$, $v' = \alpha\frac{d\beta}{dx} + \beta\frac{d\beta}{dy}$ qui correspondraient à un mouvement pour lequel on aurait partout $u = \alpha$, $v = \beta$. Les valeurs primitives considérées u, v vérifient d'ailleurs, d'après la condition de continuité (2), prise avec $w = 0$, la relation $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$: d'où il résulte évidemment, dans le même état primitif,

$$\frac{d}{dx}\int_0^H u\frac{dz}{H} + \frac{d}{dy}\int_0^H v\frac{dz}{H} = 0$$

et, par suite, en retranchant celle-ci de la précédente,

$$\frac{d}{dx}\left(u - \int_0^H u\frac{dz}{H}\right) + \frac{d}{dy}\left(v - \int_0^H v\frac{dz}{H}\right) = 0,$$

ou bien

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} = 0. \tag{9 ter}$$

Ce cas se présentera, par exemple, vu que les équations (9 *bis*) et (9 *ter*) se trouveront satisfaites identiquement, quand les diverses couches horizontales du fluide seront initialement animées, dans leurs plans respectifs, de petites translations, variables à volonté, en grandeur et en direction, d'une couche à l'autre; car u, v et, par suite, leurs différences α, β d'avec leurs moyennes n'y dépendront que de z, non de x ni de y.

Il se présenterait encore, entre autres cas, si la masse fluide s'écoulait par filets horizontaux, rectilignes et parallèles, inégalement rapides, suivant le sens desquels on aurait pris, par exemple, l'axe de x. En effet, dans un tel mouvement, la vitesse u et, par suite, son excédent α sur $\int_0^H u\frac{dz}{H}$ seraient fonction de y et de z seulement, tandis qu'on aurait $v = 0$, $\beta = 0$. Les relations (9 *bis*) et (9 *ter*) continueraient donc à se trouver vérifiées identiquement.

De telles vitesses initiales u, fonctions de y et z seulement, seront, par exemple, celles qu'auront acquises les différentes parties du fluide après de longs trajets, quand il s'agira d'un cours d'eau, d'une pente superficielle assez faible pour qu'on puisse la négliger dans une question d'ondes, parvenu à un régime uniforme dans lequel il y a équilibre entre les frottements et la petite composante de la pesanteur suivant le sens des filets liquides.

On a déjà dit que la durée des phénomènes étudiés (passage d'une intumescence dans une certaine région ou oscillation complète du fluide) est supposée assez peu longue, pour que l'influence des frottements n'ait pas le temps de se faire sentir. Si l'on considère, en particulier, le troisième cas, où des vitesses, inégales aux divers points, existent initialement dans le bassin, ces vitesses tendent à y disperser les molécules qui, au début du phénomène, se trouvaient sur une même verticale. Alors nous admettrons que ce phénomène soit assez court non seulement pour que les frottements y restent négligeables mais encore pour que l'éparpillement des molécules primitivement alignées sur une verticale n'ait lieu que dans une étendue de dimensions très petites par rapport à la longueur d'une ondulation, et comparables, par exemple, à la profondeur du bassin. Dans ces conditions, leur déplacement vertical et leurs déplacements latéraux suivant les x et les y, respectivement égaux à de minimes fractions des dimensions de mêmes sens de la masse liquide, auront fait varier assez peu leurs coordonnées z, x et y pour qu'on puisse, sauf de petites erreurs relatives, continuer à exprimer, par les mêmes fonctions de x, y et z qu'au début, leurs vitesses primitives horizontales, comme si ces coordonnées n'avaient pas changé.

IV. — Équations définitives de cette première approximation.

Il résulte de ce qui précède que u, v auront en général, une fois le phénomène commencé, deux parties distinctes, l'une, *acquise*, variable avec le temps t et les coordonnées x, y, mais sensiblement constante le long d'une verticale ou ne dépendant guère de z, l'autre, *initiale* ou indépendante de t, comprenant, en outre de sa valeur moyenne du fond à la surface, le terme appelé ci-dessus α ou β, qui satisfait aux relations (9 *bis*), (9 *ter*) et aux conditions évidentes

$$\int_0^H \alpha \frac{dz}{H} = 0, \quad \int_0^H \beta \frac{dz}{H} = 0.$$

On aura donc, à une première approximation,

$$u = U + \alpha, \quad v = V + \beta. \tag{10}$$

Cela posé, voyons d'abord ce que deviennent les équations (9) à cette première approximation. On peut y réduire la formule connue de u',

$$u' = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},$$

à son premier terme $\frac{du}{dt}$. En effet, celui-ci, étant de l'ordre du produit des $\frac{du}{d(x,y)}$ par des vitesses de propagation très supérieures à u, v, est beaucoup plus grand que les deux termes suivants; et il l'est également beaucoup plus que le dernier terme, $w\frac{du}{dz}$, comme on le voit en observant que la composante w de la vitesse éprouve, du fond à la surface, des variations comparables à ses valeurs intégrales, ou est de l'ordre de $\frac{dw}{dz}\mathrm{H} = -\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)\mathrm{H}$, et que, par suite, le produit $w\frac{du}{dz}$ se trouve seulement comparable à $\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)\mathrm{H}\frac{du}{dz}$, c'est-à-dire, *tout au plus*, à $\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)u$ ou aux termes $u\frac{du}{dx}$, $u\frac{dv}{dy}$, évidemment de l'ordre du précédent $u\frac{du}{dx}$, déjà négligé. D'ailleurs, d'après ce qui vient d'être dit, $\frac{du}{dt}$ est, à une première approximation, réductible à $\frac{d(\mathrm{U}+\alpha)}{dt}$, expression qui égale $\frac{d\mathrm{U}}{dt}$, vu que α ne dépend pas de t. Donc, on aura sensiblement $u' = \frac{d\mathrm{U}}{dt}$ et, de même, $v' = \frac{d\mathrm{V}}{dt}$; de sorte que les équations (9) deviendront, en y joignant l'équation approchée de continuité (6) :

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{U}}{dt} = g\dfrac{d}{dx}\left(\zeta - \dfrac{p_1}{\rho g}\right), \quad \dfrac{d\mathrm{V}}{dt} = g\dfrac{d}{dy}\left(\zeta - \dfrac{p_1}{\rho g}\right); \\ \dfrac{d(\mathrm{H}-\zeta)}{dt} = -\mathrm{H}\left(\dfrac{d\mathrm{U}}{dx}+\dfrac{d\mathrm{V}}{dy}\right). \end{cases}$$

Si l'ordonnée H du fond et la pression p_1 à la surface sont connues en fonction de x, y et t, comme il arrive d'ordinaire, et si l'on donne de plus, en x et y, les valeurs initiales de l'ordonnée ζ de la surface, ainsi que des composantes U, V de la vitesse moyenne sur chaque verticale, ces trois équations (11) détermineront à une première approximation, d'instant en instant, les variations de U, V, ζ sur chaque verticale (x, y). On en déduira donc, pour tout instant t : 1° la forme et la situation de la surface libre; 2° les vitesses moyennes U, V, qui, jointes aux valeurs initiales α, β, données dans chaque cas, de $u - U$, $v - V$, feront connaître sensiblement, pour les divers points de la masse fluide, les composantes horizontales u, v de la vitesse.

Quant à la composante verticale w, en observant que $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}$ vaut à fort peu près, d'après (10) et (9 *ter*), $\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy}$ et que, par suite, les équations (2) et (6) donnent

$$(11\ bis)\qquad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{H}\frac{d(H-\zeta)}{dt},$$

il viendra, en multipliant celle-ci, (11 *bis*), par dz et intégrant, depuis $z = z$, jusqu'à la limite $z = H$ où $w = w_0$,

$$w = w_0 - \left(1 - \frac{z}{H}\right)\frac{d(H-\zeta)}{dt}.$$

Or, d'après (3), w_0 égale sensiblement $\frac{dH}{dt}$; car, les dérivées $\frac{dH}{d(x, y)}$ étant supposées au plus comparables à $\frac{d\zeta}{d(x, y)}$, les termes, $u_0 \frac{dH}{dx}$, $v_0 \frac{dH}{dy}$, de l'expression de w_0 autres que $\frac{dH}{dt}$, ne sont pas d'un ordre de petitesse moins élevé que les produits $u \frac{d\zeta}{dx}$, $v \frac{d\zeta}{dy}$ et disparaissent à côté du terme $\frac{d\zeta}{dt}$, de même que $u \frac{du}{dx}$, $v \frac{du}{dy}$ ont été négligés devant $\frac{du}{dt}$. On aura donc, pour calculer w, la formule approchée

$$(12)\qquad w = \frac{dH}{dt} - \left(1 - \frac{z}{H}\right)\frac{d(H-\zeta)}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + \frac{z}{H}\frac{d(H-\zeta)}{dt}.$$

V. — Équations de deuxième approximation, pour les trois mêmes cas.

L'expression (12) de w nous permet actuellement d'évaluer les très petites accélérations verticales w'. On a, en effet,

$$w' = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}.$$

Or, le premier terme, $\frac{dw}{dt}$, est encore de l'ordre des produits des dérivées $\frac{dw}{d(x,y)}$ par des vitesses de propagation très supérieures à u, v; en sorte que ce premier terme rend insensibles les deux suivants. Et l'on peut également supprimer le dernier, $w\frac{dw}{dz}$ ou $-w\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)$, qui est aussi de l'ordre de $u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}$ pour ce fait que les rapports $\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ et $\frac{1}{w}\frac{dw}{dx}$, $\frac{1}{v}\frac{dv}{dy}$ et $\frac{1}{w}\frac{dw}{dy}$ sont comparables entre eux, les quantités u, v, w se propageant, pour ainsi dire, autant les unes que les autres, suivant les x ou les y. On peut donc poser $w'=\frac{dw}{dt}$; et la formule (12) donne, en y négligeant le produit des deux petites dérivées premières $\frac{dH}{dt}$, $\frac{d(H-\zeta)}{dt}$ et de $\frac{1}{H}$, à côté de la dérivée seconde $\frac{d^2(H-\zeta)}{dt^2}$,

$$w'=\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{z}{H}\frac{d^2(H-\zeta)}{dt^2}. \tag{13}$$

Par suite, dans la formule (7) de la pression, le terme de deuxième approximation $-\int_\zeta^z w'\,dz$ a pour valeur approchée

$$-(z-\zeta)\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\frac{z^2-\zeta^2}{2H}\frac{d^2(H-\zeta)}{dt^2};$$

et il vient sensiblement, vu que z, comparable à H, est très supérieur à ζ,

$$\int_\zeta^z w'\,dz=z\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{z^2}{2H}\frac{d^2(H-\zeta)}{dt^2}. \tag{13 bis}$$

La formule (7) s'écrira donc

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_1}{\rho}+g(z-\zeta)-z\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\frac{z^2}{2H}\frac{d^2(H-\zeta)}{dt^2}. \tag{14}$$

Les deux derniers termes représentent, comme on voit, la petite partie de la pression qui, le long d'une verticale, ne varie pas d'après la loi hydrostatique.

La valeur (13 *bis*) de $\int_\zeta^z w'\,dz$, différentiée par rapport à x ou à y

en négligeant, à côté des dérivées troisièmes $\frac{d^3(H-\zeta)}{dt^2 d(x,y)}$, les produits de la dérivée seconde $\frac{d^2(H-\zeta)}{dt^2}$ par les dérivées premières $\frac{dH}{d(x,y)}$ et par $\frac{1}{H}$, change de même les équations (8) en celles-ci :

$$(15)\quad \begin{cases} u' = g\frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right) + z\frac{d^3\zeta}{dt^2 dx} + \frac{z^2}{2H}\frac{d^3(H-\zeta)}{dt^2 dx}, \\ v' = g\frac{d}{dy}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right) + z\frac{d^3\zeta}{dt^2 dy} + \frac{z^2}{2H}\frac{d^3(H-\zeta)}{dt^2 dy}. \end{cases}$$

Multiplions-les par $\frac{dz}{H-\zeta}$ et intégrons sur toute la profondeur $H-\zeta$ du fluide, c'est-à-dire de $z=\zeta$ à $z=H$, en remarquant que les derniers et avant-derniers termes, de seconde approximation, ne seront changés que de fractions négligeables de leurs valeurs si l'on y remplace cet intervalle $H-\zeta$ par H, ou la limite ζ par zéro. Nous aurons

$$(16)\quad \begin{cases} \int_\zeta^H u'\frac{dz}{H-\zeta} = g\frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right) + \frac{H}{6}\frac{d^3(2\zeta+H)}{dt^2 dx}, \\ \int_\zeta^H v'\frac{dz}{H-\zeta} = g\frac{d}{dy}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right) + \frac{H}{6}\frac{d^3(2\zeta+H)}{dt^2 dy}. \end{cases}$$

Pour calculer les premiers membres de ces équations, c'est-à-dire les valeurs moyennes des accélérations horizontales u', v' le long d'une même verticale, observons que, dans l'expression de u',

$$u' = \frac{du}{dt} + w\frac{du}{dz} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy},$$

les trois derniers termes, qui sont de deuxième approximation, peuvent s'évaluer en y mettant, si l'on veut, pour u, v et w, leurs expressions approchées (10) et (12). Il vient d'abord, pour les deux derniers de ces termes,

$$u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} = (U+\alpha)\left(\frac{dU}{dx} + \frac{d\alpha}{dx}\right) + (V+\beta)\left(\frac{dU}{dy} + \frac{d\alpha}{dy}\right).$$

Multiplions par $\frac{dz}{H-\zeta}$ ou, sensiblement, par $\frac{dz}{H}$, et intégrons sur toute la profondeur du fluide, c'est-à-dire, à fort peu près, de $z=0$ à $z=\mathrm{H}$. Si nous développons les produits du second membre et que nous tenions compte des relations (9 *bis*), ainsi que des conditions évidentes

$$\int_0^{\mathrm{H}} \alpha \frac{dz}{\mathrm{H}} = 0, \quad \int_0^{\mathrm{H}} \beta \frac{dz}{\mathrm{H}} = 0,$$

$$\frac{d}{d(x,y)} \int_0^{\mathrm{H}} \alpha \frac{dz}{\mathrm{H}} = 0 \quad \text{ou} \quad \int_0^{\mathrm{H}} \frac{d\alpha}{d(x,y)} \frac{dz}{\mathrm{H}} = 0,$$

toujours vérifiées, même les dernières, quand les quantités α et β existent (car H est alors supposé constant), nous aurons

$$\int_\zeta^{\mathrm{H}} \left(u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy}\right) \frac{dz}{\mathrm{H}-\zeta} = \mathrm{U}\frac{d\mathrm{U}}{dx} + \mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dy}.$$

Quant au terme $w\dfrac{du}{dz}$, si l'on y remplace w, d'après (12), par

$$\frac{d\zeta}{dt} + \frac{z}{\mathrm{H}} \frac{d(\mathrm{H}-\zeta)}{dt}$$

et $\dfrac{du}{dz}$ par $\dfrac{d(u-\mathrm{U})}{dz}$, sa moyenne, $\dfrac{1}{\mathrm{H}-\zeta}\displaystyle\int_\zeta^{\mathrm{H}} w \frac{du}{dz} dz$, sera

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\mathrm{H}-\zeta}\int_\zeta^{\mathrm{H}} \left[\frac{d\zeta}{dt} + \frac{z}{\mathrm{H}}\frac{d(\mathrm{H}-\zeta)}{dt}\right] \frac{d(u-\mathrm{U})}{dz} dz \\ &\quad = \frac{1}{\mathrm{H}-\zeta}\int_\zeta^{\mathrm{H}} \frac{d}{dz}\left[(u-\mathrm{U})\frac{d\zeta}{dt} + (u-\mathrm{U})\frac{z}{\mathrm{H}}\frac{d(\mathrm{H}-\zeta)}{dt}\right] dz \\ &\quad\quad - \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{d(\mathrm{H}-\zeta)}{dt}\int_\zeta^{\mathrm{H}} (u-\mathrm{U})\frac{dz}{\mathrm{H}-\zeta}. \end{aligned}\right.$$

Or la première intégrale du second membre s'obtient immédiatement et a pour valeur, après des réductions évidentes,

$$(u_0 - \mathrm{U})\frac{d\mathrm{H}}{dt} - (u_1 - \mathrm{U})\left[\frac{d\zeta}{dt} + \frac{\zeta}{\mathrm{H}}\frac{d(\mathrm{H}-\zeta)}{dt}\right],$$

ou, simplement,

$$(u_0 - \mathrm{U})\frac{d\mathrm{H}}{dt} - (u_1 - \mathrm{U})\frac{d\zeta}{dt},$$

vu que le petit facteur $\frac{\zeta}{H}$ rend le produit $-(u_1 - U)\frac{\zeta}{H}\frac{d(H-\zeta)}{dt}$ négligeable à côté du terme $-(u_1 - U)\frac{d\zeta}{dt}$, qui est déjà de seconde approximation. Celui-ci, en effet, se trouvant, dans (17), divisé par $H - \zeta$, est de l'ordre de $\frac{d\zeta}{dt}\frac{u_1 - U}{H}$, ou, évidemment, de $\frac{d\zeta}{dt}\frac{du}{dz}$, c'est-à-dire, enfin, d'après (12), comparable au terme même $w\frac{du}{dz}$, dont on a démontré la petitesse relative, dans u', en comparaison de $\frac{du}{dt}$. Comme, d'autre part, le dernier terme de (17) est identiquement nul d'après la définition même de U, il vient, pour la valeur moyenne de la somme $\frac{du}{dt} + w\frac{du}{dz}$, en groupant deux parties de terme affectées de U, l'expression

$$\frac{1}{H-\zeta}\left[\int_\zeta^H \frac{du}{dt}dz + u_0\frac{dH}{dt} - u_1\frac{d\zeta}{dt} - U\frac{d(H-\zeta)}{dt}\right].$$

Mais, d'après la règle classique de la différentiation des intégrales définies, la somme

$$\int_\zeta^H \frac{du}{dt}dz + u_0\frac{dH}{dt} - u_1\frac{d\zeta}{dt}$$

n'est autre chose que

$$\frac{d}{dt}\int_\zeta^H u\,dz = \frac{d[(H-\zeta)U]}{dt} = (H-\zeta)\frac{dU}{dt} + U\frac{d(H-\zeta)}{dt};$$

et l'on a finalement, pour la valeur moyenne de $\frac{du}{dt} + w\frac{du}{dz}$, la simple dérivée $\frac{dU}{dt}$.

Il viendra donc, en définitive, comme valeur moyenne de u' le long d'une même verticale,

$$(18)\qquad \int_\zeta^H u'\frac{dz}{H-\zeta} = \frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx} + V\frac{dU}{dy}.$$

On trouverait de même

$$(18\,bis)\qquad \int_\zeta^H v'\frac{dz}{H-\zeta} = \frac{dV}{dt} + U\frac{dV}{dx} + V\frac{dV}{dy}.$$

Par suite, si l'on appelle, afin d'abréger, I et I' les deux *pentes motrices* suivant les deux axes rectangulaires des x et des y,

$$(19)\qquad \mathrm{I}=\frac{d}{dx}\left(\zeta-\frac{p_1}{\rho g}\right),\quad \mathrm{I}'=\frac{d}{dy}\left(\zeta-\frac{p_1}{\rho g}\right),$$

les deux relations (16) prendront les formes

$$(20)\qquad \begin{cases} \mathrm{I}=\dfrac{1}{g}\left(\dfrac{d\mathrm{U}}{dt}+\mathrm{U}\dfrac{d\mathrm{U}}{dx}+\mathrm{V}\dfrac{d\mathrm{U}}{dy}\right)-\dfrac{\mathrm{H}}{6g}\,\dfrac{d^3(2\zeta+\mathrm{H})}{dt^2dx}, \\ \mathrm{I}'=\dfrac{1}{g}\left(\dfrac{d\mathrm{V}}{dt}+\mathrm{U}\dfrac{d\mathrm{V}}{dx}+\mathrm{V}\dfrac{d\mathrm{V}}{dy}\right)-\dfrac{\mathrm{H}}{6g}\,\dfrac{d^3(2\zeta+\mathrm{H})}{dt^2dy}. \end{cases}$$

Voilà ce que deviennent, à une deuxième approximation, les équations qui, jointes à celle, (5), de conservation des volumes fluides, permettront de déterminer les accroissements éprouvés, d'un instant à l'autre, par les trois principales inconnues du problème, qui sont d'ordinaire ζ, U et V, fonctions des deux coordonnées horizontales x, y et du temps t.

Quand la pression p_1 à la surface est constante, I et I' se réduisent à $\frac{d\zeta}{dx}, \frac{d\zeta}{dy}$. Si, de plus, le fond est fixe et peut être supposé horizontal sur des étendues notables, ou n'a que des pentes insignifiantes par rapport à celles que le mouvement ondulatoire imprime à la surface, en appelant h le petit excédent variable de la profondeur actuelle $\mathrm{H}-\zeta$ sur la profondeur constante H antérieure aux ondes étudiées, il viendra $\zeta=-h$, et les trois équations (5) et (20) pourront aisément s'écrire

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt}+\mathrm{H}\left(\dfrac{d\mathrm{U}}{dx}+\dfrac{d\mathrm{V}}{dy}\right)+\dfrac{dh\mathrm{U}}{dx}+\dfrac{dh\mathrm{V}}{dy}=0; \\ \dfrac{d\mathrm{U}}{dt}+g\dfrac{dh}{dx}+\mathrm{U}\dfrac{d\mathrm{U}}{dx}+\mathrm{V}\dfrac{d\mathrm{U}}{dy}+\dfrac{\mathrm{H}}{3}\,\dfrac{d^3h}{dt^2dx}=0, \\ \dfrac{d\mathrm{V}}{dt}+g\dfrac{dh}{dy}+\mathrm{U}\dfrac{d\mathrm{V}}{dx}+\mathrm{V}\dfrac{d\mathrm{V}}{dy}+\dfrac{\mathrm{H}}{3}\,\dfrac{d^3h}{dt^2dy}=0. \end{cases}$$

VI. — Ce qu'elles deviennent, quand il s'agit d'un canal sensiblement rectangulaire, d'une largeur bien moindre que la longueur des ondes.

Concevons qu'il s'agisse d'étudier en particulier des ondes produites ou propagées le long d'un canal ayant pour axe l'axe même des x, et d'une largeur constante l. Nous supposerons cette largeur horizontale sensiblement la même de la surface au fond : autrement dit, nous admettrons que la section normale du canal ait ou la forme d'un rectangle, ou du moins, à peu près, celle d'un trapèze à bases horizontales et beaucoup plus large que haut. Alors la vitesse latérale V devra s'annuler, soit en toute rigueur, soit très sensiblement, sur les deux bords, ou très près des bords, quand même ceux-ci ne seraient pas verticaux; car, les trajectoires étant supposées peu inclinées sur l'horizon et le canal se trouvant prismatique à arêtes horizontales, les molécules fluides contiguës aux bords ne peuvent y décrire que des lignes s'écartant peu des génératrices ou sensiblement perpendiculaires à l'axe des y.

Donc la composante transversale V s'annulera, ou à fort peu près, sur les deux côtés du canal, et elle devra, vu la graduelle variation supposée de h, U, V en fonction de t, x et y, être partout d'un ordre de petitesse supérieur à celui de la composante longitudinale U : celle-ci, en effet, s'annulera seulement à des intervalles beaucoup plus longs que la largeur l. Par suite, $\frac{dV}{dt}$ pourra être négligé devant $\frac{dU}{dt}$; et les deux dernières équations (21), qui donnent, à une première approximation,

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}, \quad \frac{dh}{dy} = -\frac{1}{g}\frac{dV}{dt},$$

montrent que la dérivée $\frac{dh}{dy}$ devra être insensible par rapport à la dérivée $\frac{dh}{dx}$, ou que les pentes de la surface seront beaucoup plus faibles dans le sens transversal des y que dans le sens longitudinal des x.

Les dénivellations dans le sens transversal se trouvent ainsi négligeables, au moins à une première approximation, et h, $\frac{dh}{dx}$, $\frac{dh}{dt}$ ont presque les mêmes valeurs d'un bord à l'autre ou ne dépendent que très peu de y. De plus, V s'annulant ou devenant insensible sur les deux bords, sa dérivée $\frac{dV}{dy}$ s'annule dans l'intervalle, pour toutes les valeurs de x, et elle ne pourra être que fort petite en général à côté de $\frac{dU}{dx}$ qui, au contraire, ne s'annule que de loin en loin le long du canal. Il suit de là que, à une première approximation, la première équation (21) donnera $\frac{dU}{dx}$ sensiblement égal à $-\frac{1}{H}\frac{dh}{dt}$ et, par suite, presque pareil, comme $\frac{dh}{dx}$, d'un bord à l'autre.

Même parmi les termes de deuxième approximation, le terme $V\frac{dU}{dy}$ sera, dans la seconde relation (21), rendu insensible à côté du précédent $U\frac{dU}{dx}$, par cette circonstance que V est très petit en comparaison de U, et, dans la première (21), le terme $\frac{dhV}{dy}$ se trouvera négligeable devant le précédent $\frac{dhU}{dx}$, car, hV s'annulant, comme V, sur les deux bords, sa dérivée en y s'annule dans l'intervalle, comme le fait celle de V, et elle est par suite, en général, très petite à côté de la dérivée en x de la quantité hU, beaucoup plus grande d'ailleurs que hV.

En résumé, dans le cas d'un canal de largeur et de profondeur constantes, les deux premières équations (21) se réduisent généralement, pour les longues ondes qu'on veut étudier, à celles-ci :

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dh}{dt}+H\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}\right)+\frac{dhU}{dx}=0,\\ &\frac{dU}{dt}+g\frac{dh}{dx}+U\frac{dU}{dx}+\frac{H}{3}\frac{d^3h}{dt^2dx}=0.\end{aligned}\right.$$

La composante transversale V de la vitesse n'y paraît que par le terme $H\frac{dV}{dy}$, lequel n'est tout au plus, comme on a vu, que de seconde approximation. On l'élimine, et l'on se débarrasse tout à fait, en même temps, de la variable y, en introduisant pour inconnues, au lieu de U et de h, les moyennes de leurs valeurs sur toute la largeur d'une section transversale, largeur qui sera, exactement ou à fort peu près, la distance l des deux verticales menées, dans la section même, à partir du fond, aux points de départ des deux bords (supposés en talus).

Dans ce but, multiplions les deux relations (22) par $\frac{dy}{l}$ et intégrons sur toute la distance l, ou pour toute la longueur constante de la base inférieure de la section, en observant : 1° que les intégrales $\int h\,dy$, $\int \mathrm{U}\,dy$ se différentieront évidemment sous le signe $\int$, par rapport à x ou à t; 2° que l'intégrale $\int \frac{d\mathrm{V}}{dy}\,dy$ vaudra la différence, toujours négligeable, des deux valeurs de V sur les verticales menées aux deux bords en partant du fond, valeurs nulles ou insensibles; 3° et que, enfin, les facteurs $\frac{dh}{dx}$, $\frac{d\mathrm{U}}{dx}$, peu variables d'un bord à l'autre, comme on a vu, peuvent être remplacés, dans les termes de deuxième approximation, par leurs moyennes $\frac{d}{dx}\int h\frac{dy}{l}$, $\frac{d}{dx}\int \mathrm{U}\frac{dy}{l}$. Il viendra, si l'on a soin de mettre provisoirement $h\frac{d\mathrm{U}}{dx}+\mathrm{U}\frac{dh}{dx}$ au lieu de $\frac{dh\mathrm{U}}{dx}$ pour réduire finalement de nouveau, dans le résultat, ces deux termes en un seul :

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int h\frac{dy}{l}+\mathrm{H}\frac{d}{dx}\int \mathrm{U}\frac{dy}{l}+\frac{d}{dx}\left(\int h\frac{dy}{l}\int \mathrm{U}\frac{dy}{l}\right)=0,\\&\frac{d}{dt}\int \mathrm{U}\frac{dy}{l}+g\frac{d}{dx}\int h\frac{dy}{l}\\&\qquad+\left(\int \mathrm{U}\frac{dy}{l}\right)\frac{d}{dx}\left(\int \mathrm{U}\frac{dy}{l}\right)+\frac{\mathrm{H}}{3}\frac{d^3}{dt^2dx}\int h\frac{dy}{l}=0.\end{aligned}\right.$$

Ces équations, sauf la substitution à h et U de leurs moyennes sur toute la largeur, sont identiques à celles qu'on aurait déduites immédiatement des relations (21) ou (22), en supposant les mouvements exactement pareils d'un bord à l'autre, c'est-à-dire en prenant V nul et h, U indépendants de y. Donc on pourra, *même à une deuxième approximation*, dans l'étude de mouvements propagés le long du canal, faire ces hypothèses simplificatrices, ou poser les équations indéfinies

$$(24)\quad \frac{dh}{dt}+\mathrm{H}\frac{d\mathrm{U}}{dx}+\frac{dh\mathrm{U}}{dx}=0,\quad \frac{d\mathrm{U}}{dt}+g\frac{dh}{dx}+\mathrm{U}\frac{d\mathrm{U}}{dx}+\frac{\mathrm{H}}{3}\frac{d^3h}{dt^2dx}=0.$$

Mais il sera bien entendu que, dans ces relations, h désigne la hauteur effective *moyenne* du fluide, au-dessus de son niveau primitif de repos ou de régime uniforme, sur toute la largeur de la section transversale définie par l'abscisse x, et que U y désigne, non pas la moyenne des valeurs que reçoit, le long d'une verticale unique, la composante de la vitesse suivant le sens longitudinal des x, mais bien la valeur (parfois très différente) obtenue en considérant ces vitesses longitudinales moyennes sur une infinité de verticales équidistantes, menées d'un bord à l'autre de la section, et en divisant leur somme par leur nombre.

On peut observer, du reste, que cette moyenne générale

$$\int U\frac{dy}{l} \quad \text{ou} \quad \int\frac{dy}{l}\int u\frac{dz}{H+h}$$

se confond, même à une deuxième approximation, avec ce qu'on nomme la *vitesse moyenne de débit*, c'est-à-dire avec la valeur moyenne de u sur toute l'étendue de la section, quotient du débit actuel de celle-ci, $\int dy\int u\,dz = \int U(H+h)\,dy$, par son aire $\int dy\int dz = \int(H+h)\,dy$. Appelons, en effet, pour fixer les idées, h_1 la moyenne des valeurs *très peu différentes* que prend h d'un bord à l'autre, en sorte qu'on ait

$$\int(H+h)\,dy = (H+h_1)\,l:$$

le quotient à évaluer, ou la vitesse de débit, sera $\frac{\int U(H+h)\,dy}{(H+h_1)\,l}$. Or, si l'on observe que, h et h_1 étant petits devant H, le rapport $\frac{H+h}{H+h_1}$ vaut sensiblement $1+\frac{h-h_1}{H}$, ce quotient devient

$$\int U\left(1+\frac{h-h_1}{H}\right)\frac{dy}{l} = \int U\frac{dy}{l} + \int U\frac{h-h_1}{H}\frac{dy}{l},$$

et l'on voit que le terme $\int U\,\frac{h-h_1}{H}\,\frac{dy}{l}$, où $h-h_1$ n'est qu'une petite fraction de h_1, n'égale pas même, à côté de U, une quantité de deuxième approximation, laquelle se trouverait comparable au produit de U par le petit rapport $\frac{h}{H}$.

Dans le cas où, antérieurement à l'arrivée des ondes, le fluide serait en mouvement suivant le sens des x, par filets rectilignes et parallèles animés de petites vitesses quelconques, il y aurait avantage, en vue de simplifier les résultats des intégrations ultérieures, à concevoir le lit du canal et les axes des x, y, z, ou l'observateur, animés de la moyenne de ces vitesses, translation rectiligne et uniforme qui ne changerait pas le phénomène, ni la forme de ses équations différentielles (car, fût-elle effective, elle ne ferait que modifier dans une mesure finie les frottements extérieurs dont on ne tient pas compte), et qui aurait cependant l'avantage de donner $\int U \frac{dy}{l} = 0$ aux endroits, non encore atteints par le mouvement ondulatoire, où la profondeur n'aurait pas cessé d'être égale à H. Et l'on voit que, alors, rien, dans les équations (23) ou (24) du mouvement non plus que dans les circonstances initiales concernant la vitesse moyenne et la profondeur, ne différencierait le fluide considéré d'avec un liquide primitivement en repos. Ainsi, *pour tout ce qui concerne la propagation et les déformations successives des ondes de translation, dans un canal rectangulaire dont l'eau s'écoule par filets rectilignes et parallèles, inégalement rapides, animés de vitesses du même ordre que celles que produisent ces ondes, ou très petites par rapport aux vitesses de propagation, les lois de première et de deuxième approximation sont les mêmes que lorsqu'il s'agit d'ondes propagées le long d'une pareille masse fluide en repos ou, du moins, n'ayant qu'un mouvement commun de transport, d'une vitesse égale à la vitesse moyenne des filets considérés.* Il n'y a de différence qu'en ce que ces lois doivent s'appliquer moins longtemps, d'après une remarque de la fin du n° III (p. 282). Seules les trajectoires des molécules fluides sont moins simples, parce que les inégalités de vitesse des divers filets ne permettent pas de supposer, à une première approximation, que le mouvement se fasse par tranches verticales, perpendiculaires à l'axe du canal, et conservant leur verticalité durant leur transport et leurs déformations.

VII. — Cas des longues ondes dont la courbure est très faible et qui sont produites ou propagées le long d'un canal non rectangulaire sensiblement prismatique.

Nous continuerons à admettre ici que l'un des axes horizontaux des x et des y, celui des x par exemple, soit choisi à peu près parallèle aux parois du canal, et nous supposerons insensibles les composantes transversales v', w' des accélérations, hypothèse admissible pour les ondes très longues et, par conséquent, très peu courbes, où le mouvement est presque exclusivement longitudinal. Il est évident que les équations indéfinies (1) du mouvement subsisteront toujours. La première donnera, en appelant encore p_1 la pression à la surface libre (pression que nous supposerons la même d'un bord à l'autre ou indépendante de y), et ζ l'ordonnée de cette surface :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + g(z - \zeta); \tag{25}$$

et celle-ci réduira la seconde (1), où v' sera négligeable, à $\frac{d\zeta}{dy} = 0$. Donc, l'ordonnée ζ de la surface libre ne dépendra, comme p_1, que de x et de t. Autrement dit, *le profil en travers de la surface libre sera horizontal, et la pression variera hydrostatiquement aux divers points d'une même section normale du canal.*

Il en résulte que la première (1), devenue, en vertu de (25),

$$u' = g\frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right), \tag{26}$$

donnera à l'accélération longitudinale u' les mêmes valeurs pour toutes les molécules ayant actuellement la même abscisse x. Donc, en raisonnant comme on l'a fait plus haut (nos III et IV, p. 279 à 282), dans le cas d'un bassin à fond sensiblement horizontal, et en appelant U la moyenne des valeurs de u sur toute l'étendue σ d'une section fluide normale aux x, on en conclura que la différence $u - U$ est très petite en comparaison de U, si le liquide considéré était d'abord en repos ou si le mouvement est principalement oscillatoire, et qu'elle se trouve, du moins, à fort peu près indépendante de x et de t, quand il s'agit d'ondes propagées dans une eau qui s'écoule le long du canal par filets inégalement rapides parallèles à l'axe des x. Dans tous ces cas, des deux termes, $u - U$ et U, qui composent l'expression de u, le premier, $u - U$, que j'appellerai α, est seul fonction des coordonnées transversales y et z, mais, par contre, dépend fort peu de x et de t, contrairement au second U.

Cela posé, cherchons en premier lieu quelle relation existe, en vertu de la continuité ou de la conservation des volumes fluides, entre la vitesse moyenne U sur une section et l'aire σ de cette section fluide, ou leurs dérivées. On l'obtient de suite, en exprimant que l'accroissement $\frac{d\sigma}{dt}\,dt\,dx$, durant un instant dt, du volume fluide σdx compris entre les sections normales qui correspondent aux deux abscisses fixes x, $x + dx$, est égal à l'excédent du volume, $\sigma \mathrm{U}\,dt$, débité en même temps par la première de ces sections, sur celui, $\left(\sigma \mathrm{U} + \frac{d\sigma \mathrm{U}}{dx}dx\right)dt$, qu'a débité la seconde. Il vient ainsi

$$(27) \qquad \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\sigma \mathrm{U}}{dx} = 0,$$

formule dont on remarquera l'analogie avec les autres équations de conservation des volumes fluides, (5) et (24), que nous avons obtenues pour les cas d'un bassin où la profondeur est $\mathrm{H} - \zeta$ et d'un canal rectangulaire d'une largeur constante l et d'une hauteur d'eau, $\mathrm{H} + h$, ayant comme partie variable h.

Évaluons enfin, pour en porter dans (26) l'expression en fonction de U, σ et leurs dérivées, l'accélération u' commune à toutes les particules situées actuellement sur une même section normale σ ou, plutôt, dans une même tranche élémentaire d'épaisseur dx ayant la masse $\rho\sigma\,dx$. Pendant un instant dt, cette accélération accroît de $(\rho\sigma\,dx)(u'\,dt)$ la quantité de mouvement animant suivant les x la matière de la tranche. Il nous suffira donc d'obtenir, en fonction de U, σ ou leurs dérivées, une expression de la même quantité acquise de mouvement, puis de l'égaler à $\rho\sigma\,u'\,dx\,dt$, pour que u' s'en déduise.

A cet effet, considérons d'abord la masse fluide comprise, à l'époque t, entre deux sections σ_0, σ_1, ayant deux abscisses respectives fixes x_0, x_1, dont la seconde sera supposée la plus grande. Si nous représentons par $\int_\sigma$ une intégrale prise sur toute l'étendue d'une section déterminée σ, cette masse fluide vaudra évidemment $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_\sigma \rho\,d\sigma$, et la quantité de mouvement qu'elle possède dans le sens des x, à l'époque t, égalera de même $\int_{x_1}^{x_1} dx \int_\sigma \rho u\,d\sigma$. A l'époque $t + dt$, la quantité analogue de mouvement sera donc, pour la matière comprise alors entre les deux mêmes abscisses ou les deux mêmes plans extrêmes,

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\left(\int_\sigma \rho u\, d\sigma + dt\frac{d}{dt}\int_\sigma \rho u\, d\sigma\right) = \int_{x_0}^{x_1} dx\int_\sigma \rho u\, d\sigma + dt\int_{x_0}^{x_1} dx\frac{d}{dt}\int_\sigma \rho u\, d\sigma.$$

Mais, par les divers éléments $d\sigma$ de la section σ_1, il sera sorti, durant l'intervalle écoulé dt, de petits prismes fluides, $(d\sigma)(u\,dt)$, emportant la quantité de mouvement $\rho(d\sigma)(u\,dt)\,u$, c'est-à-dire, en tout, $dt\int_{\sigma_1} \rho u^2\, d\sigma$, qu'il y a lieu de joindre à la précédente, puisque ces prismes fluides font partie de la masse dont on a à s'occuper; et, d'autre part, il sera entré, au contraire, par la section σ_0, une masse fluide étrangère, apportant une quantité de mouvement exprimée de même par $dt\int_{\sigma_0} \rho u^2\, d\sigma$, qui est à retrancher. En somme, la quantité de mouvement gagnée, durant l'instant dt, par la tranche fluide

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\int_\sigma \rho\, d\sigma,$$

aura donc pour expression

$$dt\left(\int_{x_0}^{x_1} dx\,\frac{d}{dt}\int_\sigma \rho u\, d\sigma + \int_{\sigma_1} \rho u^2 d\sigma - \int_{\sigma_0} \rho u^2 d\sigma\right),$$

laquelle peut s'écrire évidemment

$$dt\,dx\left[\frac{d}{dt}\int_\sigma \rho u\, d\sigma + \frac{d}{dx}\int_\sigma \rho u^2\, d\sigma\right]$$

quand l'épaisseur $x_1 - x_0$ de la tranche se réduit à dx et que les deux abscisses x_0, x_1 deviennent x, $x + dx$. Telle est la quantité qu'il faut égaler à $\rho\sigma u'\,dx\,dt$. Observons que, le fluide étant un liquide homogène, le facteur ρ, constant, sort des signes d'intégration ou de ceux de différentiation, et il viendra simplement

$$(28)\qquad u' = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{d}{dt}\int_\sigma u\, d\sigma + \frac{d}{dx}\int_\sigma u^2\, d\sigma\right).$$

Or, d'une part, $\int_\sigma u\,d\sigma = U\sigma$; d'autre part, comme

$$u^2 = (U + \alpha)^2 = U^2 + 2U\alpha + \alpha^2,$$

et que $\int_\sigma \alpha\,d\sigma$ s'annule identiquement, vu que

$$\int_\sigma \alpha\,d\sigma = \int_\sigma (u - U)\,d\sigma = \int_\sigma u\,d\sigma - U\sigma,$$

l'expression $\int_\sigma u^2\,d\sigma$, ou $\int_\sigma U^2\,d\sigma + 2\int_\sigma U\alpha\,d\sigma + \int_\sigma \alpha^2\,d\sigma$, se réduit à $U^2\sigma + \int_\sigma \alpha^2\,d\sigma$, somme où le second terme, généralement du même ordre que le premier, varie en fonction de x et t incomparablement moins que celui-ci, car α n'y dépend presque que de y et z, et σ n'y diffère que peu de la section fluide constante primitive. La dérivée $\frac{d}{dx}\int_\sigma u^2\,d\sigma$ se réduira donc sensiblement à $\frac{dU^2\sigma}{dx}$, et comme celle-ci, de l'ordre de $\frac{dU^2}{dx}$ ou de $U\frac{dU}{dx}$, après qu'on l'a divisée par σ, n'est à considérer, dans les formules (28) et (26), qu'à une deuxième approximation, on pourra négliger absolument la dérivée en x du terme $\int_\sigma \alpha^2\,d\sigma$. Ainsi, l'expression de l'accélération u' sera

$$(28\ bis) \qquad u' = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{dU\sigma}{dt} + \frac{dU^2\sigma}{dx}\right).$$

Or, en y regardant $U\sigma$ et $U^2\sigma$ comme les produits respectifs de U par σ et par $U\sigma$, il vient

$$\frac{dU\sigma}{dt} + \frac{dU^2\sigma}{dx} = U\left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\sigma U}{dx}\right) + \sigma\left(\frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx}\right),$$

relation où la première partie du second membre est identiquement nulle en vertu de (27). Par suite, l'expression définitive, aussi simplifiée que possible, de u',

$$u' = \frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx}, \tag{29}$$

est, à une première et à une deuxième approximation, la même que dans le cas où tous les filets fluides possèdent une vitesse initiale commune et où le mouvement se fait par tranches verticales conservant leur parallélisme.

En conséquence, les deux équations du mouvement en U et σ seront, d'après (27) et (26), si l'on appelle, pour abréger, I la *pente motrice* $\frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right)$,

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\sigma U}{dx} = 0, \quad I = \frac{1}{g}\left(\frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx}\right). \tag{30}$$

On voit qu'elles ne gardent pas trace de l'inégalité de vitesse des filets fluides que le mouvement ondulatoire vient agiter; de sorte qu'*on pourra, dans ce cas d'un canal prismatique quelconque, comme dans celui d'un canal rectangulaire, étendre les lois des ondes de translation propagées au sein d'une eau en repos aux ondes qui le sont le long d'un courant, pourvu, du moins, qu'elles se trouvent être de courbure insensible, ou très longues, c'est-à-dire telles, que les accélérations latérales v', w' n'y aient aucun effet appréciable, et pourvu que les différences initiales de vitesse des divers filets fluides y soient seulement de l'ordre des vitesses mêmes qu'apportent les ondes, ou bien moindres que les vitesses de propagation*. Toutefois, encore d'après une remarque de la fin du n° III (p. 282), ces lois doivent y être un peu moins exactes que pour une eau en repos, ou ne pas s'appliquer aussi longtemps; et, d'ailleurs, l'inégalité de vitesse des filets fluides s'y fait sentir sur la forme des trajectoires des molécules liquides, qu'elle rend moins simples.

On peut voir dans l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 281 à 299, 465 à 470, et *Additions* à cet *Essai*, p. 51 à 53, 58 à 59, etc.) comment les équations (30) permettent d'étudier les longues ondes, non périodiques ou périodiques, propagées le long de canaux prismatiques ou quasi prismatiques, et même le long de tuyaux élastiques pleins de liquide. La superposition de deux *houles* égales et de sens contraires y donnerait d'ailleurs des *clapotis*, comme on l'explique dans le même *Essai* (p. 334 et 335) pour le cas où le fluide est contenu dans un bassin de profondeur constante; et la combinaison de clapotis de diverses périodes, multiples les unes des autres, représenterait tous les petits mouvements longitudinaux possibles de l'eau contenue dans un canal prismatique limité à ses deux bouts par deux parois normales à son axe (même *Essai*, p. 314, 325, etc.) Je me contenterai de ces indications, car mon but n'était ici que de démontrer les équations différentielles régissant les longues ondes, dites de *translation*, produites ou propagées au sein des liquides pesants (1).

---

(1) *Voir*, à la fin du Volume, une *Addition* à ce Mémoire.