

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

M.-N. VANECEK

**Sur la génération des surfaces et des courbes à double  
courbure analogue à celle de Mac-Laurin**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 3<sup>e</sup> série*, tome 9 (1883), p. 269-272.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1883\\_3\\_9\\_269\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9_269_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur la génération des surfaces et des courbes à double courbure analogue à celle de Mac-Laurin;*

PAR M. M.-N. VANÉČEK.

1. En écrivant dans cette Note *un polyèdre P de forme variable à n faces*, on entend que toutes ses faces  $F_1, F_2, \dots, F_n$  enveloppent respectivement des surfaces développables  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , de classe  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , et que toutes ses arêtes (c'est-à-dire des droites de rencontre de deux faces successives)  $\overline{F_1 F_2}, \overline{F_2 F_3}, \dots, \overline{F_{n-1} F_n}$ , moins une (savoir  $\overline{F_n F_1}$ ), rencontrent respectivement des courbes  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ , d'ordre  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  <sup>(1)</sup>.

*Si le polyèdre P varie ainsi, l'arête libre  $\overline{F_1 F_n}$  engendre une surface gauche X qui sera du degré*

$$(a) \quad 2s_1 s_2 \dots s_n c_1 \dots c_{n-1}.$$

On verra que cette formule est vraie pour la surface  $S_k$ , de classe  $s_k$ , si elle est vraie pour une droite quelconque D (surface développable de première classe) remplaçant la surface  $S_k$ . La droite qui joint le point où la face  $F_{k-1}$  rencontre la courbe  $C_{k-1}$  avec le point où la face  $F_{k+1}$  perce la courbe  $C_k$ , engendre une surface Y de classe  $\gamma$ , quand l'arête

<sup>(1)</sup> On entend dans toute cette Note, excepté dans le dernier alinéa, les lignes à double courbure.

libre  $\overline{F, F_n}$  rencontre continuellement une droite quelconque P. Les plans tangents communs aux surfaces Y et  $S_k$  donnent les points où la droite P perce la surface X. On peut déterminer la classe  $\gamma$  de la surface Y comme il suit : On prend une droite quelconque D, et, quand la face  $F_k$  l'enveloppe, l'arête libre  $\overline{F, F_n}$  engendre une surface gauche U d'ordre  $u$ . Les points où la surface U perce la droite P donnent les plans tangents de la surface Y, qui passent par la droite D. Donc  $\gamma = u$ . Mais la surface U est la surface X, quand on remplace la surface  $S_k$  par la droite D. Donc, etc.

On démontrerait d'une manière analogue que la formule (a) est vraie pour la courbe  $C_k$ , quand elle est vraie pour une droite quelconque D, remplaçant la courbe  $C_k$ .

Au cas où toutes les surfaces  $S_1, \dots, S_n$  et toutes les courbes  $C_1, \dots, C_{n-1}$  sont des droites, la surface X est du deuxième degré. Alors la formule (a) est vraie.

Tous les plans de la surface  $S_n$  sont multiples plans tangents d'ordre

$$s_1 s_2 \dots s_{n-1} c_1 \dots c_{n-1}$$

de la surface X.

2. Si trois polyèdres variables P, P', P'' à  $n, n', n''$  faces ont la première face commune qui enveloppe une surface développable  $S_1$  d'ordre  $s_1$ , c'est-à-dire  $F_1 \equiv F'_1 \equiv F''_1$  et  $S_1 \equiv S'_1 \equiv S''_1$ , les dernières faces  $F_n, F'_n, F''_n$  se rencontrent en un point qui parcourt une courbe d'ordre <sup>(1)</sup>

$$(b) \quad 3s_1 s_2 \dots s_n s'_1 \dots s'_n s''_1 s''_2 s''_3 \dots s''_n c_1 \dots c_{n-1} c'_1 \dots c'_{n-1} c''_1 \dots c''_{n-1}$$

(1) Chasles (*Aperçu historique*, p. 404, seconde édition) indique la construction suivante de la courbe du troisième ordre :

« Quand les quatre faces d'un tétraèdre mobile sont assujetties à passer respectivement par quatre droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, et que trois sommets du tétraèdre doivent se trouver sur trois autres droites, placées aussi d'une manière quelconque dans l'espace, le quatrième sommet du tétraèdre parcourra une courbe à double courbure du troisième degré. »

Il est évident que cette construction est impossible. Au cas particulier du théorème 2, on aura une construction semblable à celle de Chasles, savoir :

Quand quatre faces d'un tétraèdre mobile sont assujetties à passer respectivement par quatre droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, et que

Nous ne démontrons pas ce théorème et les théorèmes suivants, parce qu'il suffit d'employer la même voie, comme dans le précédent.

3. En désignant par  $\gamma, \gamma', \gamma''$  les points où les dernières faces  $F_n, F'_n, F''_n$  des polyèdres  $P, P', P''$  rencontrent respectivement les courbes  $C_n, C'_n, C''_n$  d'ordre  $c_n, c'_n, c''_n$ , on obtiendra :

*Si trois polyèdres variables  $P, P', P''$  ont la première face commune qui enveloppe une surface développable  $S_1$  d'ordre  $s_1$ , le plan  $\gamma\gamma'\gamma''$  enveloppe une surface développable de classe*

$$(c) \quad 3s_1s_2 \dots s_n s'_2 \dots s'_n s''_1 \dots s''_n c_1 \dots c_n c'_1 \dots c'_n c''_1 \dots c''_n.$$

4. En prenant, au lieu de la surface développable  $S_1$ , une surface quelconque  $S_1$  de classe  $s_1$ , on obtiendra au cas 2 une surface d'ordre (b) et au cas 3 une surface de classe (c).

5. On peut déduire les théorèmes suivants, d'après le principe de dualité des théorèmes précédents.

Désignons par  $\gamma_0$  chaque point où la première face  $F_1$  du polyèdre  $P$ , de forme variable à  $n$  faces, perce une courbe quelconque  $C_n$  d'ordre  $c_0$  et par  $\gamma_n$  chaque point où la dernière face  $F_n$  de ce polyèdre rencontre une courbe quelconque  $C_n$  d'ordre  $c_n$ . La droite  $\gamma_0\gamma_n$  remplit une surface gauche du degré

$$(a') \quad 2s_1s_2 \dots s_n c_0 c_1 \dots c_{n-1} c_n,$$

quand le polyèdre  $P$  varie de manière déterminée.

*Si les premières faces  $F_1, F'_1, F''_1$  des polyèdres variables  $P, P', P''$  se coupent sur une courbe  $C$  d'ordre  $c$ , les dernières faces  $F_n, F'_n, F''_n$  se coupent en un point qui parcourt une courbe d'ordre*

$$(b') \quad 3s_1 \dots s_n s'_1 \dots s'_n s''_1 \dots s''_n c c_1 \dots c_{n-1} c'_1 \dots c'_{n-1} c''_1 \dots c''_{n-1}.$$

---

trois arêtes situées dans une face  $F_1$  du tétraèdre doivent rencontrer trois autres droites placées aussi d'une manière quelconque dans l'espace, le sommet où se coupent trois autres faces du tétraèdre parcourra une courbe à double courbure du troisième ordre.

Et, en remplaçant la courbe C par *une surface* quelconque C d'ordre  $c$ , on obtiendra *une surface* d'ordre ( $b'$ ).

Lorsque les premières faces  $F_1, F'_1, F''_1$  des polyèdres variables P, P', P'' se coupent sur une courbe C d'ordre  $c$ , le plan  $\gamma\gamma'\gamma''$  enveloppe une surface développable de classe

$$(c') \quad 3s_1 \dots s_n s'_1 \dots s'_n s''_1 \dots s''_n c_1 \dots c_{n-1} c_n c'_1 \dots c'_n c''_1 \dots c''_n,$$

et pour une surface quelconque C d'ordre  $c$ , au lieu de la courbe C, on aura une surface de classe ( $c'$ ).

6. On peut généraliser enfin le théorème dû à Mac-Laurin <sup>(1)</sup> sur la génération des courbes planes de la manière suivante :

*Si un polygone, de forme variable, se meut de manière que tous ses côtés enveloppent respectivement des courbes  $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$  de classe  $c'_1, c'_2, \dots, c'_n$ , et que tous ses sommets, moins un, parcourent des courbes  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  d'ordre  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ , le sommet libre engendre une courbe d'ordre*

$$2c'_1 c'_2 \dots c'_n c_1 c_2 \dots c_{n-1}.$$

Je ne connais pas la démonstration du théorème de Mac-Laurin donnée par lui-même, mais on peut démontrer ce théorème d'une manière analogue à celle de 1, en prouvant qu'il est vrai pour une courbe quelconque  $C'_k$  quand il est vrai pour un point quelconque remplaçant la courbe  $C'_k$ , et qu'il est vrai pour une courbe quelconque  $C_k$  quand il est vrai pour une droite quelconque D, remplaçant cette courbe.

(1) Voir *Aperçu historique*, etc., p. 150.