JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

Exposé des principes de la théorie des courants électriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 9 (1883), p. 25-42.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9__25_0>

Exposé des principes de la théorie des courants électriques;

PAR M. H. RESAL.

§ I. — COURANTS CONSTANTS.

1. Lorsque la fonction potentielle n'est pas constante dans l'intérieur d'un conducteur, l'électricité entre en mouvement et il se produit un *courant électrique*. Si cette fonction est indépendante du temps, ce mouvement devient permanent au bout d'un temps très court, à partir de l'instant initial, et le courant devient *constant*. Dans ce qui suit nous ne nous occuperons que des courants de cette nature.

2. *Loi de Ohm.* — Soient

A un point intérieur du conducteur;
V sa fonction potentielle;
$d\omega_x$ un élément superficiel en ce point normal à une droite Ox partant d'une origine O déterminée;
q_x la quantité d'électricité, rapportée à l'unité de surface, qui traverse $d\omega_x$ dans l'unité de temps, et qui ne dépend que de la position de A et de l'orientation de Ox;
dx une longueur infiniment petite portée à partir de A sur la normale à $d\omega_x$.

Ohm suppose que le *flux électrique* q_x est proportionnel à la composante $\frac{dV}{dx}$ de la force qui agit sur A, c'est-à-dire à la cause de ce flux.

On a ainsi, en désignant par a une constante,

$$(1) \qquad q_x = a\frac{dV}{dx}.$$

Cette expression n'est autre chose que celle d'un flux de chaleur traversant $d\omega_x$, en admettant que la température en A soit représentée par V.

Si donc Oy, Oz sont deux axes rectangulaires dont le plan est perpendiculaire à Ox, et x, y, z les coordonnées du point A, nous avons l'équation connue

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Mais on sait que, pour le point intérieur A, le second membre de cette équation, au lieu d'être nul, devrait être égal à $4\pi a\rho$, en désignant par ρ la densité du fluide concentrée en ce point; d'où il suit que $\rho = 0$, et comme conséquence :

1° *Le fluide se trouve à l'état neutre dans le conducteur;*

2° *L'électricité qui donne lieu à la fonction potentielle, c'est-à-dire au* NIVEAU POTENTIEL, *doit se trouver sur la surface du conducteur ou à l'extérieur de ce conducteur.*

Le flux principal, ou la plus grande valeur q de $q_x \ldots$, correspond au cas où Ox est parallèle à la normale en A à la surface de niveau passant par ce point; et, en continuant à désigner par dx un élément infiniment petit de la partie extérieure de cette normale, nous aurons

$$(3) \qquad q = a\frac{dV}{dx}.$$

Nous rappellerons que q_x n'est autre chose que la projection de q sur Ox.

On est convenu de désigner sous le nom de *force électromotrice* en A la dérivée $\frac{dV}{dx}$.

3. *Des conducteurs allongés dont la section est très petite.* — Dans

ces conducteurs, qui sont ceux que l'on emploie le plus généralement, on peut considérer la section normale ω en un point A de l'axe comme un élément de surface de niveau; et l'on a, pour la quantité de fluide qui traverse, dans l'unité de temps, cette section, c'est-à-dire pour l'*intensité du courant,*

$$i = a\omega \frac{dV}{dx}. \tag{4}$$

Soient V_0, V_1 les valeurs de V qui se rapportent à deux points déterminés A_0, A_1 de l'axe du conducteur; l la longueur de l'arc A_0A_1.

Nous aurons

$$V_1 - V_0 = i \int_0^l \frac{dx}{a\,d\omega}. \tag{5}$$

On est convenu de donner à la valeur $V_1 - V_0$ le nom de *force électromotrice de la longueur* A_0A_1 du courant, et de représenter par $\frac{dx}{a\omega}$ la *résistance à la conductibilité de l'élément linéaire dx.* Nous représenterons par

$$R = \int_0^l \frac{dx}{a\omega} \tag{6}$$

la *résistance totale de la longueur l du courant.*

Nous avons ainsi

$$Ri = V_1 - V_0. \tag{7}$$

Si la section du courant est constante, on a

$$R = \frac{l}{a\omega},$$

et

$$a = \frac{\omega}{l}(V_1 - V_0). \tag{8}$$

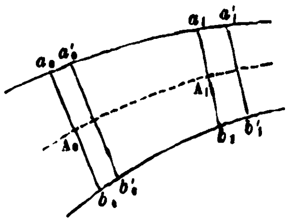
Cette formule a été vérifiée expérimentalement au moyen du rhéomètre, lorsque, ne changeant rien à la pile, c'est-à-dire à $(V_1 - V_0)$, on fait varier la section et la longueur du circuit.

4. *Loi de Joule.* — Considérons un conducteur de la même catégorie que les précédents.

Soient (*fig.* 1)

$a_0 b_0$, $a_1 b_1$ les sections normales à l'axe du circuit en A_0, A_1;

Fig. 1.



$a'_0 b'_0$, $a'_1 b'_1$ les sections que viennent occuper, au bout d'un temps infiniment petit dt, les particules électriques qui se trouvaient primitivement dans $a_0 b_0$, $a_1 b_1$.

Le travail des forces électriques développé dans le transport de la masse $a_0 b_0 a_1 b_1$ en $a'_0 b'_0 a'_1 b'_1$ ne peut résulter que du transport fictif de la masse $a_0 b_0 a'_0 b'_0$ égale à $i\,dt$ en $a_1 b_1 a'_1 b'_1$ [1], puisque rien n'est changé dans la partie commune $a'_0 b'_0 a_1 b_1$. Le travail électrique effectué dans le temps dt est donc $(V_1 - V_0)dt$ et, dans l'unité de temps,

$$\mathfrak{T} = i(V_1 - V_0), \tag{9}$$

ou, en ayant égard à la relation (7),

$$\mathfrak{T} = i^2 R. \tag{10}$$

---

[1] On admet ainsi l'hypothèse des tranches dans le mouvement permanent des fluides.

Ce travail est équivalent à la demi-force vive de la masse électrique i, censée condensée en A_0, en passant de là en A_1, augmentée d'un terme proportionnel à la quantité de chaleur dégagée par le circuit. Si l'on considère la première de ces quantités comme négligeable, $\mathfrak{T}$ se trouvera ainsi transformée en une quantité de chaleur sensible $\mathfrak{Q}$, et l'on aura, en désignant par A l'équivalent mécanique de la chaleur, sous toute réserve du choix des unités,

$$\mathfrak{Q} = \frac{i^2 R}{A}. \tag{11}$$

Ainsi donc *la quantité de chaleur développée dans le circuit est proportionnelle au carré de l'intensité du courant et à la résistance du conducteur.*

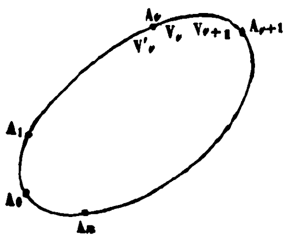
Cette loi, découverte expérimentalement par M. Joule, n'est qu'une conséquence de celle de Ohm et *vice versa*. Qu'il nous suffise de dire que nous avons déjà jusqu'ici une double justification des résultats de la théorie.

§ II. — Courants thermo-électriques.

5. Considérons un circuit formé de $n+1$ parties ou éléments appartenant respectivement à différents métaux, et soudées les unes à la suite des autres.

Si les soudures successives $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (*fig.* 2) sont portées à di-

Fig. 2.



verses températures, il se développera généralement un courant électrique d'intensité i.

Supposons, pour fixer les idées, sous toutes réserves, que $A_0, A_1, \ldots, A_n$ indiquent le sens du courant.

Pour expliquer le fait dont il s'agit, on a été conduit, par des considérations qui appartiennent au domaine de la philosophie naturelle, et auxquelles nous ne croyons pas devoir nous arrêter, à admettre que le niveau potentiel change brusquement de valeur lorsque l'on traverse la soudure A_ν. Néanmoins, la formule (9), d'après la manière dont elle a été établie, est encore applicable à deux sections infiniment voisines situées de part et d'autre de A_ν.

Cela étant posé, soient

V_ν, $V'_{\nu+1}$ les valeurs du niveau potentiel aux extrémités A_ν, $A_{\nu+1}$ de l'une des parties du circuit;

R_ν la résistance à la conductibilité correspondante.

Nous avons

$$R_\nu i = V'_{\nu+1} - V_\nu.$$

En faisant la somme de toutes les expressions semblables et désignant par

$$\mathfrak{R} = \Sigma R_\nu$$

la résistance totale du circuit, il vient

$$\mathfrak{R} i = \Sigma(V'_{\nu+1} - V_\nu)$$

ou encore, comme il est facile de le reconnaître,

$$\mathfrak{R} i = \Sigma(V'_\nu - V_\nu). \tag{12}$$

Il faut que le second membre de cette expression soit positif pour que le courant ait lieu dans le sens supposé; s'il est négatif, le sens du courant sera changé; enfin, s'il est nul, il n'y aura pas de courant.

6. *Cas d'un courant bimétallique.* — C'est le seul cas qui ait été étudié par les physiciens et qui offre, par suite, de l'intérêt. Nous avons ici simplement

$$i = \frac{V'_0 - V_0 - (V_1 - V'_1)}{\mathfrak{R}}. \tag{13}$$

Comme l'intensité d'un courant thermo-électrique est toujours faible, on peut négliger la quantité de chaleur

$$\mathfrak{Q} = \frac{i^2 R}{A}$$

développée dans le courant, indépendante de celle qui se rapporte aux soudures A_0, A_1.

Soient

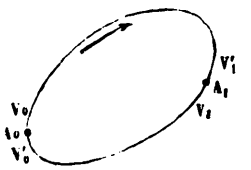
t_0, t_1 les températures de ces soudures;

$Q_0 = \frac{i(V'_0 - V_0)}{A}$ la quantité de chaleur dégagée par la surface A_0 dans l'unité de temps;

$Q_1 = \frac{i(V_1 - V'_1)}{A}$ la quantité de chaleur absorbée par la source froide A_1.

Comme le fluide électrique qui sert de véhicule à la chaleur revient

Fig. 3.



au même état quand il a parcouru le circuit, on peut appliquer ici le principe de Carnot et écrire

$$\frac{Q_0}{Q_1} = \frac{1 + \alpha t_0}{1 + \alpha t_1},$$

en se rappelant que α représente le coefficient de dilatation des gaz.

On déduit de là

$$\frac{V'_0 - V_0}{1 + \alpha t_0} = \frac{V_1 - V'_1}{1 + \alpha t_1}.$$

Nous représenterons ce rapport par $\frac{KR}{\alpha}$, et nous supposerons que K ne dépend que de la nature et des dimensions du circuit, et est par conséquent indépendant des températures des soudures. La formule (16) devient alors

$$i = K(t_0 - t_1), \tag{14}$$

et s'accorde avec les résultats des expériences de César Becquerel, lorsque l'excès de température $(t_0 - t_1)$ ne dépasse pas 50°.

Au delà de cette limite, i croît moins rapidement que l'excès de température, et son accroissement devient sensiblement nul et même négatif quand $t_0 - t_1$ atteint et dépasse 300°. On attribue cette irrégularité à ce que deux métaux en contact, dont les températures sont très différentes, éprouvent des modifications dans leur constitution, et qu'ils se comportent vis-à-vis l'un de l'autre comme des métaux d'une autre nature.

§ III. — *Théorie de la pile.*

7. *De l'électrolyse.* — On donne le nom d'*électrolyte* à toute substance qui est complètement décomposée dans ses éléments chimiques lorsqu'elle est traversée par un courant. Si la décomposition n'a lieu que partiellement, en d'autres termes, si au moins un des produits de cette décomposition est encore une combinaison chimique, la substance est une *électrolycale*.

Les expressions *électrolyse* et *électrolysation* sont des dérivés de celle de *électrolyte*.

Une *électrode* est l'un ou l'autre des points de la substance par où arrive et d'où sort le courant.

L'électrolyse est soumise aux lois suivantes :

1° *L'action décomposante d'un courant, ou sa puissance chimique, est la même dans toutes ses parties.*

2° *La quantité de substance décomposée est proportionnelle à la quantité d'électricité qui passe dans un temps donné, ou encore à l'intensité du courant.*

3° (Loi de Faraday). *Quand un même courant traverse successivement plusieurs électrolytes, les poids des éléments séparés sont entre eux comme leurs équivalents chimiques.*

On donne le nom d'*équivalents électrochimiques* au poids d'un corps qui est modifié dans l'unité de temps par un courant dont l'intensité est égale à l'unité.

8. *De la pile.* — En continuant à désigner par A l'équivalent mécanique de la chaleur, soient q' la quantité de chaleur produite par la dissolution de 1^{kg} de zinc dans un liquide acide; ε' l'équivalent électrochimique du zinc.

Lorsque l'intensité du courant est i, le poids du zinc dissous dans l'unité de temps est $\varepsilon' i$, et donne lieu à un dégagement de chaleur $\varepsilon' i q'$ correspondant à la production de travail $A\varepsilon' i q'$. Si la pile est formée de n éléments, le travail électrochimique ou l'*action chimique*, suivant une expression admise, sera $nA\varepsilon' iq$.

Soient R la résistance du fil conducteur que forme le circuit en dehors de la pile; R′ la résistance de chacun des éléments de la pile; la résistance totale sera $R + nR'$ et la loi de Joule conduit à l'identité

$$nA\varepsilon' i q' = (R + nR')i^2,$$

d'où

$$i = \frac{nA\varepsilon' q'}{R + nR'}. \tag{17}$$

Si le nombre des éléments de la pile est suffisamment petit, on a à très peu près

$$i = \frac{nA\varepsilon' q'}{R}, \tag{18}$$

et *l'intensité du courant est proportionnelle au nombre des éléments*.

Si, au contraire, le nombre des éléments est très grand, on a approximativement

$$i = \frac{A\varepsilon' q'}{R'}, \tag{19}$$

et *l'intensité du courant est sensiblement constante*. On voit ainsi qu'il n'y a aucun avantage à multiplier outre mesure le nombre des éléments de la pile.

Ces deux résultats sont conformes à ceux de l'expérience.

9. Supposons que l'on place dans le circuit un certain nombre d'électrolytes (E_1), (E_2), ...; soient ε_ν, R_ν, q_ν l'équivalent électrochimique de (E_ν), sa résistance et la quantité de chaleur nécessaire pour décomposer son unité de poids; on reconnaît sans peine que l'on a

$$nA\varepsilon' i q' = i^2(R + nR' + \Sigma_1 R_\nu) + \Sigma_1 A\varepsilon_\nu i q_\nu,$$

d'où

$$i = \frac{A(n\varepsilon' q' - \Sigma_1 \varepsilon_\nu q_\nu)}{R + nR' + \Sigma_1 R_\nu}. \tag{20}$$

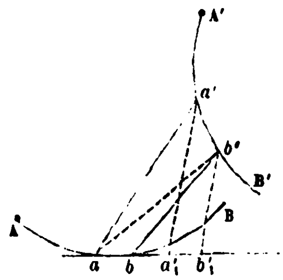
Pour que le courant se produise, il faut que $An\varepsilon' q' > \Sigma_1 A\varepsilon_\nu q_\nu$ ou que l'action chimique de la pile soit supérieure à la somme des actions chimiques des électrolytes.

§ IV. — De l'induction électrique.

10. *Différentes formes sous lesquelles on peut mettre la formule d'Ampère* (1). — Soient (*fig.* 1)

AB, A'B' deux courants électriques;

Fig. 1.



A, A' deux points déterminés de ces courants, qui sont censés se produire de A vers B et de A' vers B';
a, a' deux points quelconques de AB, A'B';
s, s' les longueurs d'arc Aa, $A'a'$;

(1) *Voir* nos *Recherches sur l'Électrodynamique.*

$ab = ds$, $a'b' = ds'$ les deux éléments de courant correspondant à a et a';
r la distance aa';
α, α' les angles formés par ab, $a'b'$ avec aa' et $a'a$;
θ l'angle compris sous les deux plans $a'ab$, $aa'b'$;
i, i' les intensités des courants AB, A'B';
ε l'angle formé par ab avec $a'b'$.

Nous pouvons considérer r, α, α', θ et ε comme étant des fonctions de s et s'.

Nous avons trouvé, pour l'expression de l'action mutuelle de deux courants,

$$\psi = ii'\,ds\,ds'\left(\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{2} + \sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta\right). \tag{1}$$

Une parallèle en a à $a'b'$, le prolongement de $a'a$ et la direction de ab déterminent un angle trièdre qui conduit à la relation

$$\cos\varepsilon = -\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta,$$

et l'expression (1) peut se mettre sous la forme

$$\psi = ii'\,ds\,ds'\left(\frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\varepsilon\right). \tag{2}$$

Nous avons vu que l'on avait aussi l'expression plus simple

$$\psi = \frac{ii'ds\,ds'}{2\cos\alpha}\,\frac{d\dfrac{\cos^2\alpha}{r}}{ds'}, \tag{3}$$

ou, en développant,

$$\psi = ii'\frac{ds\,ds'}{r^2}\left(-\frac{\cos\alpha}{2}\frac{dr}{ds'} + r\frac{d\cos\alpha}{ds'}\right);$$

mais on a

$$\cos\alpha = -\frac{dr}{ds},$$

par suite,

$$(4)\qquad \psi = \frac{ii'ds\,ds'}{r^2}\left(\frac{1}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right).$$

Si l'on pose $r = z^2$, $\frac{dr}{ds} = u$, on reconnaît facilement que le facteur en r de cette expression devient

$$-\frac{1}{2}\frac{d\frac{u}{z}}{ds'} = -\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{d}{ds'}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{dr}{ds} = -\frac{2}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}.$$

Nous avons donc enfin

$$(5)\qquad \psi = -\frac{2\,ii'ds\,ds'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}.$$

11. *Formules de Weber.* — Dès 1822, Ampère [1] avait émis l'idée que l'on pourrait se rendre compte de la loi relative à l'action mutuelle de deux éléments de courant, en supposant que deux particules électriques m, m' s'attirent ou se repoussent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance, à la condition de faire intervenir un coefficient égal à l'unité augmentée d'un terme U qui ne dépend que du mouvement relatif de m et m'; ce qui revient à représenter l'action mutuelle de m, m' par

$$x = -\frac{mm'}{r^2}(1 + \mathrm{U}),$$

en continuant à considérer une attraction comme positive

Ampère est resté à cette conception philosophique sans la développer. Gauss l'a reprise plus tard et a admis que U est composé de deux termes, l'un proportionnel au carré de la vitesse relative de m et m',

---

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1823.

l'autre au carré de la composante $\frac{dr}{dt}$ suivant mm' de cette vitesse, les coefficients des deux termes pouvant d'ailleurs dépendre de r. L'hypothèse de Gauss doit être rejetée, parce qu'elle conduit à des résultats inadmissibles au point de vue de l'expérience.

En considérant le cas de deux éléments de courant situés dans le prolongement l'un de l'autre, Weber a été conduit à admettre que U renferme un terme qui dépend de la vitesse relative estimée suivant r, et il a supposé que ce terme, à un coefficient près, est de la forme $\frac{dr^2}{dt^2}$. Examinant ensuite le cas de deux éléments perpendiculaires à une droite, il est arrivé à conclure que U doit renfermer aussi un terme proportionnel à l'accélération relative $\frac{d^2 r}{dt^2}$, estimée suivant r. C'est ainsi qu'il a été amené à poser généralement

$$x = -\frac{mm'}{r^2}\left(1 + \alpha\frac{dr^2}{dt^2} + \beta\frac{d^2 r}{dt^2}\right), \tag{6}$$

α et β désignant des fonctions de r qui doivent être déterminées de manière que les résultats auxquels conduit cette formule soient d'accord avec la formule d'Ampère.

Soient v, v' les vitesses de m, m' qui sont censées des fonctions des trois variables s, s', t; ds, ds' les chemins parcourus par ces points dans l'élément de temps dt. Nous avons, en employant la caractéristique ∂, pour les dérivées partielles, à la place de celle d qui est réservée aux dérivées totales,

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned}
&v = \frac{ds}{dt}, \quad v' = \frac{ds'}{dt},\\
&\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial r}{\partial t} = v\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial r}{\partial t},\\
&\frac{d^2 r}{dt^2} = v^2\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + 2vv'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + v'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s'}\\
&\qquad + v\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r'}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}.
\end{aligned}\right.$$

En substituant ces valeurs dans la formule (6), et posant

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{A} = 1 + \alpha \frac{\partial r^2}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^2 r}{dt^2},\\
&\mathcal{B} = \alpha \frac{\partial r^2}{\partial s^2} + \beta \frac{\partial r^2}{\partial s^2}, \quad \mathcal{B}' = \alpha \frac{\partial r^2}{\partial s'^2} + \beta \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2},\\
&\mathcal{C} = 2\left(\alpha \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \beta \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right),\\
&\mathcal{D} = 2\alpha \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t} + \beta \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}, \quad \mathcal{D}' = 2\alpha \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial t} + \beta \frac{dv'}{dt}\frac{\partial r}{\partial s'},\\
&\mathcal{E} = \beta \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}, \quad \mathcal{E}' = \beta \frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial s'}{\partial r},
\end{aligned}
\right.
$$

on trouve

$$
(8)\quad \chi = -\frac{mm'}{r^2}(\mathcal{A} + \mathcal{B}v^2 + \mathcal{C}vv' + \mathcal{B}'v'^2 + \mathcal{D}v + \mathcal{D}'v' + \mathcal{E} + \mathcal{E}').
$$

Supposons maintenant que les éléments de courant ds, ds' soient formés chacun d'un couple de particules électriques, savoir m, m_1 pour le premier élément et m', m'_1 pour le second. Soient v_1, v'_1 les vitesses de m_1, m'_1 qui peuvent être différentes de v, v'; $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{D}'_1$, $\mathcal{E}'_1$ les valeurs de $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$ quand on y remplace respectivement v par v_1 et v' par v'_1.

L'action mutuelle ψ de ds et ds' s'obtiendra en ajoutant l'expression (8) à celles qui en résultent quand on y remplace successivement m par m_1, m' par m'_1 et enfin m, m' par m_1, m'_1. On trouve ainsi

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\psi = -\frac{1}{r^2}\,&\mathcal{A}(m + m_1)(m' + m'_1) + \mathcal{B}(m' + m'_1)(mv^2 + m_1 v_1^2)\\
&+ \mathcal{B}'(m + m_1)(m'v'^2 + m'_1 v'_1)^2 + \mathcal{C}(mv + m_1 v_1)(m'v' + m'_1 v'_1)\\
&+ \mathcal{D}\,m(m' + m'_1)v + \mathcal{D}_1 m_1 (m' + m'_1)v_1 + \mathcal{E}(m' + m'_1)m + \mathcal{E}_1(m' + m'_1)m_1\\
&+ \mathcal{D}'m'(m + m_1)v' + \mathcal{D}'_1 m'_1(m + m_1)v'_1 + \mathcal{E}'(m + m_1)m' + \mathcal{E}'_1(m + m_1)m'_1.
\end{aligned}
\right.
$$

En comparant ce résultat à la formule (4), on voit que, à l'exception du terme en $\mathcal{C}$, tous les autres doivent disparaître, condition à laquelle on satisfait en posant

$$(10) \qquad m_1 = -m, \quad m'_1 = -m',$$

et l'expression précédente se réduit à

$$(11) \qquad \psi = -\frac{2mm'}{r^2}(v - v_1)(v' - v'_1)\left(\alpha\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \beta\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right).$$

Si, en désignant par a une longueur constante, nous posons

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{m(v - v_1)}{a}\sqrt{2} = i\,ds, \quad m'\dfrac{(v' - v'_1)}{a}\sqrt{2} = i'ds', \\ \alpha = -\dfrac{1}{2a^2}, \quad \beta = \dfrac{r}{a^2}, \end{cases}$$

la formule (11) rentre dans la formule (4), et la formule (6) prend la forme

$$(13) \qquad x = -\frac{mm'}{r^2}\left[1 + \frac{1}{a^2}\left(r\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt^2}\right)\right],$$

et par suite la suivante

$$(14) \qquad x = -mm'\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right).$$

Il résulte des relations (10) qu'un élément de courant ds peut être considéré comme étant composé de deux particules électriques de même masse en valeur absolue, mais appartenant respectivement à l'un et à l'autre fluide. Rien ne s'oppose à ce que l'on puisse admettre que ces deux particules sont animées de deux vitesses égales et de sens contraires, et alors on a simplement

$$(15) \qquad i = 2\sqrt{2}\frac{mv}{a}, \quad i' = 2\sqrt{2}\frac{m'v'}{a}.$$

Il suit de là que l'on peut regarder un courant comme formé de deux courants inverses l'un de l'autre et appartenant, l'un au fluide positif, l'autre au fluide négatif, et qui ont chacun pour intensité la moitié de celle du courant complet.

On s'assurera facilement que la force x dérive d'un potentiel et que ce potentiel a pour expression

$$\varphi = \frac{mm'}{r}\left[1 - \frac{1}{4a^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]. \tag{16}$$

12. *Potentiel de l'action mutuelle de deux éléments de courant.* — En se reportant à la troisième formule (a), on a

$$mm'\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = mm'\left(v^2\frac{\partial r^2}{\partial s^2} + v'^2\frac{\partial r^2}{\partial s'^2} + 2vv'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + 2v\frac{\partial r}{\partial t} + 2v'\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r^2}{\partial t^2}\right).$$

Remplaçons dans cette expression m par m' puis m par m_1, enfin m, m' par m_1, m'_1. Faisons la somme des expressions ainsi obtenues, puis supposons dans cette somme $m_1 = -m$, $m'_1 = -m'$; on reconnaît facilement qu'elle se réduit à

$$8mm'vv'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Le potentiel cherché Φ ou la somme des expressions (16) pour les quatre couples de molécules a ainsi pour expression

$$\Phi = -2\frac{mm'vv'}{a^2 r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'},$$

ou, en vertu des relations (15),

$$\Phi = -\frac{1}{4}\frac{ii'ds\,ds'}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}. \tag{17}$$

13. *Potentiel total relatif à deux courants fermés d'intensités constantes agissant l'un sur l'autre.* — Ce potentiel, que l'on appelle aussi l'*énergie potentielle* des deux circuits, a pour expression

$$\Theta = -\frac{ii'}{4}\int\int\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}ds\,ds'. \tag{18}$$

Mais on a, en intégrant par parties,

$$\int \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}ds' = -\int r\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}ds' = -\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) + \int \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}ds'.$$

De ce que le courant AB est fermé, le premier terme de cette expression est nul; on a donc simplement

$$\Theta = -\frac{ii'}{4}\int\int \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}ds\,ds'.$$

Soient (*fig.* 1) a'_1, b'_1 les projections de a', b' sur la direction de ab; il vient, en conservant les notations du n° **1**,

$$aa'_1 = r\cos\alpha,\quad ab'_1 = r\cos\alpha + \frac{\partial r\cos\alpha}{\partial s'}ds',\quad a'_1 b'_1 = \frac{\partial r\cos\alpha}{\partial s'}ds',$$

$$a'_1 b'_1 = ds'\cos\varepsilon,\quad \cos\alpha = -\frac{\partial r}{\partial s};$$

d'où

$$\cos\varepsilon = \frac{\partial r\cos\alpha}{\partial s'} = -\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'},$$

et enfin

(19) $$\Theta = \frac{ii'}{4}\int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}ds\,ds',$$

formule qui est due à F.-E. Neumann.

14. *Force électromotrice d'un courant induit produit dans un circuit par un courant extérieur.* — Soient A'B' le courant et AB le circuit dans lequel se développe le courant induit.

L'accélération tangentielle, ou suivant ab, de la particule m produite par les actions de m, m'_1 s'obtiendra en faisant dans la formule (9) $m = 1$, $m'_1 = -m'$, $v'_1 = -v'$ et multipliant le résultat par $\cos\alpha = -\frac{\partial r}{\partial s}$, ce qui donne

$$\frac{m'}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\left[2Cvv' + (\mathfrak{V}' + \mathfrak{V}'_1)v' + \varepsilon' - \varepsilon'_1\right].$$

L'accélération semblable de m_1 se déduira de cette expression en y remplaçant v par $v_1 = -v$, et comme elle est de sens contraire à la précédente, elle devra lui être ajoutée pour avoir l'accélération relative η de m par rapport à m'; on trouve ainsi

$$\eta = 2\frac{m'}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}[(\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'_1)v' + \mathcal{E}' - \mathcal{E}'_1].$$

Mais, en se reportant aux formules (7) et remarquant que $v'_1 = -v'$, on a

$$\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'_1 = 4\alpha\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial t}, \quad \mathcal{E}' - \mathcal{E}'_1 = 2\beta\frac{\partial r'}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s'},$$

d'où

$$\eta = \frac{4m'}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\left(2\alpha v'\frac{\partial r}{\partial t} + \beta\frac{\partial v'}{\partial t}\right),$$

et en remplaçant α, β, $m'v'$ par leurs valeurs déduites des équations (12) et (15),

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{a}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{1}{r^2}\left(-i'\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{r\,\partial i'}{\partial t}\right)ds' = \frac{\sqrt{2}}{a}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial\frac{i'}{r}}{\partial t}ds'.$$

Nous avons donc, pour la force électromotrice totale développée dans le courant AB, en remarquant que i' seul est fonction du temps,

$$E = \int\eta\,ds = \frac{\sqrt{2}}{a}\int\int\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial\frac{i'}{r}}{\partial t}ds\,ds' = \frac{\sqrt{2}}{a}\frac{di'}{dt}\int\int\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}ds\,ds',$$

ou, d'après le numéro précédent,

$$E = -\frac{\sqrt{2}}{a}\frac{di'}{dt}\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}ds\,ds'. \tag{20}$$

Tel est le résultat cherché.