JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

Du magnétisme statique

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 9 (1883), p. 195-244.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9__195_0>

Du magnétisme statique;

PAR M. H. RESAL.

§ I. — PRÉLIMINAIRES.

1. Pour expliquer les propriétés magnétiques de certains corps (¹), Coulomb considère les éléments matériels du corps comme renfermant en quantités égales et indéfinies deux fluides, l'un dit *boréal* ou *positif*, l'autre *austral* ou *négatif*.

En admettant que le corps soit soustrait à toute action capable de développer ses propriétés magnétiques, ces deux fluides se trouvent à l'état de combinaison ou se neutralisent dans la molécule matérielle correspondante. Mais, dès que le corps devient un aimant, les deux fluides se trouvent séparés, en quantités égales, et restent isolés pendant toute la durée de l'aimantation.

Par une extension donnée aux lois déduites de l'expérience par Coulomb, on est conduit à admettre que deux particules magnétiques se repoussent ou s'attirent proportionnellement à leurs masses, selon qu'elles sont ou non de même nature, et que leur action mutuelle varie en raison inverse du carré de leur distance.

Nous conviendrons de considérer une répulsion comme une force

(¹) Les oxydes de fer et principalement l'oxydule, le fer, le nickel à la température de 20°.

positive et, par suite, d'attribuer une valeur négative à la masse d'une particule du fluide austral.

Un barreau d'acier trempé, convenablement orienté, devient au bout d'un certain temps, sous l'influence de la Terre, un aimant permanent, ce qui revient à dire que, lorsqu'il est soustrait à l'action magnétique, les deux fluides n'arrivent à se neutraliser que partiellement. Coulomb attribue cette opposition à la reconstitution du fluide neutre à une résistance passive à laquelle il a donné le nom de *force coercitive*, force sur la nature de laquelle on ne peut faire que des conjectures. Le barreau, dans certaines conditions, peut devenir un aimant permanent sous l'action d'un aimant permanent.

L'oxydule de fer est doué de la force coercitive et l'on attribue ses propriétés magnétiques à ce que les filons qui le renferment sont compris sensiblement dans les plans qui passent par les pôles magnétiques de la Terre.

Le fer doux et l'acier non trempé ne possèdent pas la propriété due à la force coercitive; l'aimantation cesse en même temps que l'influence de l'aimant qui l'a produite. On considère un aimant comme étant formé de petites parties matérielles qui ont reçu le nom d'*éléments magnétiques* et dans lesquelles la séparation des fluides s'est opérée. En faisant le même raisonnement que pour l'électricité statique, on arrive à conclure que l'action magnétique sur un point intérieur de l'élément est nulle, et que, par suite, les deux fluides séparés se sont portés sur sa surface. La forme des éléments magnétiques peut d'ailleurs dépendre de la manière dont l'aimantation a été produite.

Coulomb admet que les deux fluides, après leur séparation, se sont respectivement concentrés en deux points ou *pôles* de la surface de l'élément. L'hypothèse d'Ampère, dans laquelle les éléments magnétiques sont remplacés par des solénoïdes infinitésimaux, revient, au point de vue de la mise en équation, à celle de Coulomb.

Poisson [1] n'a recours à aucune supposition sur le mode de répartition des deux fluides sur la surface de l'élément. Nous reconnaîtrons plus loin que, en se plaçant respectivement aux points de vue de Coulomb

---

[1] *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1822.

et de Poisson, on arrive aux mêmes résultats en ce qui concerne l'action exercée par un aimant sur un point extérieur.

Dans son *Essai sur l'application de l'Analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme* (¹), G. Green ne mentionne pas les recherches de Poisson sur le magnétisme. Qu'il les ait ou non ignorées, il est arrivé à la même équation que Poisson relativement à l'équilibre magnétique intérieur d'un aimant. L'analyse de Green est assez obscure et paraît avoir pour objet plutôt de déguiser que de faire disparaître une difficulté éludée par Poisson, à l'aide de considérations particulières qui ne sont pas des plus satisfaisantes.

L'exposition de la théorie du magnétisme de M. W. Thomson se trouvant implicitement comprise dans le premier Mémoire de Poisson, nous n'avons pas à nous y arrêter.

Nous ne nous occuperons pas d'ailleurs de l'étude des feuillets magnétiques, qui n'offre aucun intérêt au point de vue des phénomènes physiques; nous ne considérerons que des aimants doués de force coercitive (²).

§ II. — Équations générales.

2. *De l'action exercée par un aimant sur un point qui n'est pas compris dans la masse.* — Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires; x, y, z les coordonnées de la particule magnétique M sur laquelle l'aimant exerce son action.

(¹) Nottingham, 1828.

(²) Green paraît être le seul géomètre qui ait cherché à expliquer les effets de la force coercitive en se plaçant dans le cas d'un fil d'acier trempé, étudié expérimentalement par Coulomb.

Il est arrivé à une formule qui cadre, presque aussi bien que la formule d'interpolation de Biot, avec les résultats des observations de Coulomb.

Si nous ne reproduisons pas la théorie de Green, c'est par la raison qu'elle pèche par plusieurs points que nous allons faire ressortir. Il suppose que la force coercitive est constante et qu'elle se développe parallèlement à l'aiguille cylindrique dans un sens déterminé, ce qui nous paraît inadmissible; car cette force, devant changer de signe en passant d'une moitié à l'autre de l'aiguille, doit être nulle au milieu.

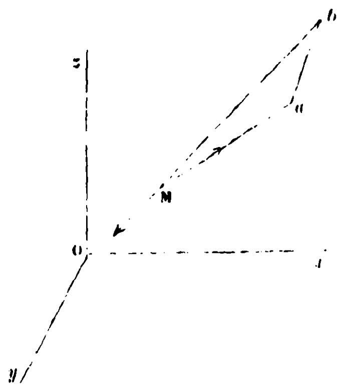
Par un artifice de calcul, justifié ultérieurement par une application ingénieuse

Pour simplifier, nous supposerons que la masse de cette particule est égale à l'unité, sauf à multiplier ultérieurement, s'il y a lieu, les résultats auxquels nous parviendrons par la valeur positive ou négative de la masse M. D'après cette convention, une particule magnétique m sera censée exercer sur M une répulsion ou une attraction, selon qu'elle appartiendra au fluide boréal ou au fluide austral.

Nous allons maintenant chercher à déduire successivement des conséquences des hypothèses de Coulomb et de Poisson sur la constitution d'un aimant.

(a) *D'après les idées de Coulomb.* — Soient (*fig.* 1)

Fig. 1.



a, b les pôles austral et boréal d'un élément magnétique de l'aimant (A);

ds sa longueur;

---

de la méthode des moindres carrés, il fait sortir d'une intégrale définie, fort embarrassante, le facteur inconnu qui se rapporte à l'action exercée sur un point déterminé de l'aimant.

Par un raisonnement insaisissable, il supprime deux termes importants de son équation fondamentale et s'impose deux conditions relatives aux extrémités de l'aiguille, qui consistent chacune en une équation dont le premier membre est la somme de deux fonctions homogènes qui ne sont pas du même degré, ce qui n'est pas non plus admissible.

Il paraîtrait assez naturel de supposer que la force coercitive en un point est proportionnelle à l'intensité magnétique en ce point; et alors l'équation de Green, débarrassée des deux termes dont on vient de parler et sans avoir égard aux conditions aux extrémités qu'il s'est imposées, conduit à la formule de Biot.

ν la valeur absolue de chacune des masses magnétiques condensées en a et b;
x', y', z' les coordonnées du point a;
$u' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$ la distance $\overline{\mathrm{M}a}$;
$u' + \frac{du'}{ds}ds$ la distance $\overline{\mathrm{M}b}$.

Les fonctions potentielles de M dues à a et b étant respectivement

$$\frac{\nu}{u'}, \quad -\nu\left(\frac{1}{u'} + \frac{d\frac{1}{u'}}{ds}ds\right),$$

celle à laquelle donne lieu l'élément a pour valeur

$$(a) \qquad -\nu\frac{d\frac{1}{u'}}{ds}ds.$$

On donne le nom d'*intensité magnétique linéaire de l'élément* à l'expression

$$(b) \qquad \mathrm{I}' = \nu\frac{ds}{dv'},$$

dans laquelle dv' représente le volume de l'élément.

Cette intensité pouvant être considérée comme une force dirigée du pôle austral a vers le pôle boréal b, nous désignerons par α', β', γ' ses composantes parallèles à Ox, Oy, Oz.

L'expression (a) prend la forme (1)

$$-\mathrm{I}'\frac{d\frac{1}{u'}}{ds}dv',$$

et nous avons, pour la fonction potentielle de M due à l'action totale

(1) En prenant la dérivée par rapport à x, on trouve pour la composante, paral-

de (A),

$$Q = -\int I' dv' \frac{d\frac{1}{u'}}{ds} = -\int I' dv' \left(\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'}\frac{dx'}{ds} + \frac{d\frac{1}{u'}}{dy'}\frac{dy'}{ds} + \frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\frac{dz'}{ds} \right),$$

---

lèle à Ox, de l'action exercée par ab sur M.

$$(\alpha)\left\{\begin{aligned} \xi &= -I' dv' \frac{d}{ds}\left(\frac{x'-x}{u'^3}\right) = -I'\frac{dv'}{u'^3}\left[-3\frac{(x'-x)}{u'}\frac{du'}{ds} + \frac{dx'}{ds}\right] \\ &= I'\frac{dv'}{u'^3}\left[3\cos(u', ds)\cos(u', x) - \cos(ds, x)\right]. \end{aligned}\right.$$

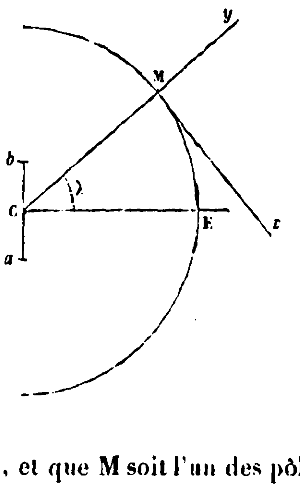
On a des expressions semblables pour les composantes η, ζ, suivant Oy, Oz, et l'on trouve facilement pour la résultante

$$I'\frac{dv'}{u'^3}\left[3\cos^2(u', ds) + 1\right].$$

Pour se rendre compte du pouvoir magnétique de la Terre, Biot suppose qu'elle possède deux pôles magnétiques situés sur un même diamètre, à égale distance du centre, possédant les mêmes pouvoirs attractifs et répulsifs et dont la distance est très petite par rapport au rayon terrestre.

Supposons que a, b (*fig.* 2) soient les pôles magnétiques austral et boréal de

Fig. 2.



la Terre dont C est le centre, et que M soit l'un des pôles d'une aiguille aimantée placée à la surface du globe.

Prenons pour plan de la figure le méridien magnétique de M, c'est-à-dire le ou

$$(c) \qquad Q = -\int dv'\left(\alpha' \frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta' \frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma' \frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\right),$$

expression dans laquelle nous pouvons considérer maintenant x', y', z' comme étant les coordonnées du milieu C de ab.

Concevons autour de ce point un volume dw extrêmement petit par rapport au volume de (A), mais cependant assez étendu pour contenir un grand nombre d'éléments magnétiques, et désignons par k' le rapport de la somme des volumes de ces éléments à dw. Ce rapport, qui atteindra au plus l'unité, sera spécifique pour un corps aimante

plan déterminé par ce point et ab: pour partie positive de l'axe des y, le prolongement de CM, et pour axe des x la portion de la méridienne de M dirigée vers l'équateur. Soit λ la latitude magnétique de M ou le complément de l'angle formé par CM avec ab.

Nous avons, en considérant u' comme se rapportant au point C,

$$\zeta = 0,\quad \cos(u', ds) = \sin\lambda,\quad \cos(u', x) = 0,\quad \cos(ds, x) = -\cos\lambda,$$
$$\cos(u', y) = 1,\quad \cos(ds, y) = \sin\lambda.$$

L'équation (α) et celle qui en dérive pour l'axe des y donnent, en ayant égard à la formule (b), pour les composantes de l'action exercée par la Terre sur M suivant Mx, My,

$$\chi = \frac{\nu\,ds}{u'^3}\cos\lambda, \qquad \eta = \frac{2\,ds}{u'^3}\sin\lambda,$$

d'où

$$\frac{\eta}{\chi} = 2\tang\lambda.$$

Pour le second pôle de l'aiguille, η et χ seront changés de signe. L'aiguille étant censée en équilibre, la ligne des pôles sera dirigée suivant la résultante de η et χ : si donc i désigne l'inclinaison magnétique au lieu considéré, nous aurons

$$\tang i = 2\tang\lambda.$$

porté à une température uniforme déterminée, mais variera d'un point à un autre de ce corps si la température est elle-même variable, comme nous le supposerons pour plus de généralité, k' devenant ainsi une fonction donnée de x', y', z'. Quoique le volume dw soit censé extrêmement petit, les quantités α', β', γ', k' n'auront pas les mêmes valeurs dans toute son étendue, si les éléments magnétiques qu'il renferme n'ont pas tous la même forme, ou si, quoique identiques, ils ne sont pas régulièrement disposés. Nous les supposerons néanmoins constantes dans le volume considéré en leur attribuant des valeurs moyennes qui seront censées soumises à la loi de continuité et par suite exprimables en fonction de x', y', z'.

Nous pouvons dès lors supposer que, dans la formule (c), dv' représente la somme des volumes des éléments magnétiques contenus dans dw, et alors nous obtenons

$$Q = -\int k'\left(\alpha'\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta'\frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma'\frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\right)dw,$$

et, comme l'intégrale doit être étendue au volume de (A), on est ramené à poser

$$(1)\qquad Q = -\int\int\int k'\left(\alpha'\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta'\frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma'\frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\right)dx'\,dy'\,dz'.$$

(b). *D'après Poisson.* — Soient (*fig.* 3)

x', y', z' les coordonnées d'un point C situé dans l'intérieur d'un élément magnétique de (A);

c le côté du cube équivalent au volume de cet élément;

$x' + c\chi$, $y' + c\eta$, $z' + c\zeta$ les coordonnées d'un point m de la surface du même élément;

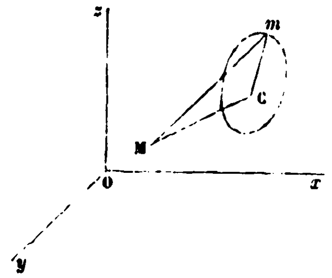
e, ρ l'épaisseur normale et la densité relative correspondante du fluide magnétique;

$c^2 ds$ un élément superficiel en m;

$u' = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$ la distance MC.

Comme l'action de m sur M est une répulsion ou une attraction selon

Fig. 3.



que ρ est positif ou négatif, la fonction potentielle de M due à l'élément magnétique a pour expression

$$(d)\qquad -c^2\int \rho e\,\frac{ds}{\overline{\mathrm{M}m}},$$

l'intégrale s'étendant à la surface entière de l'élément.

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, comme il y a autant de fluide positif que de fluide négatif sur l'élément, on a

$$(2)\qquad \int \rho e\,ds = 0.$$

En admettant que M soit suffisamment éloigné de C pour que l'on puisse négliger les puissances de $\frac{c\chi}{u}$, $\frac{c\eta}{u}$, $\frac{c\zeta}{u}$ d'un ordre supérieur au premier, nous avons

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{M}m}} = \frac{1}{u'} + c\left(\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'}\chi + \frac{d\frac{1}{u'}}{dy'}\eta + \frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\zeta\right).$$

Si nous posons

$$(3)\qquad \alpha' = \int \chi e\rho\,ds,\quad \beta' = \int \eta e\rho\,ds,\quad \gamma' = \int \zeta e\rho\,ds,$$

et si nous avons égard à la relation (2), l'expression (d) devient

$$(e)\qquad -c^2\left(\alpha'\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta'\frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma'\frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\right).$$

Les valeurs (3) sont indépendantes de la position du point C dans l'intérieur de l'élément considéré; car, en passant d'une position à une autre, les coordonnées relatives χ, η, ζ ne varient que de quantités constantes qui, d'après la formule (2), donnent des résultats nuls.

Si nous représentons par dv' le volume c^3 de l'élément magnétique, on voit que la formule (c) nous conduira identiquement à l'expression (e) de la fonction potentielle de M due à (A) et enfin, à la suite d'un raisonnement qu'il est inutile de reproduire, à l'équation (1).

En considérant les quantités α', β', γ' comme définies par les formules (3) et se reportant à l'article précédent, on voit qu'un élément magnétique de (A) agira sur M de la même manière qu'une aiguille infinitésimale qu'on lui substituerait et qui ferait avec Ox, Oy, Oz des angles dont les cosinus seraient

$$\frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}},\quad \frac{\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}},\quad \frac{\gamma'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}.$$

D'après ce qui précède, il n'y a plus aucun motif pour préférer la manière de voir de Coulomb à celle de Poisson, qui sera seule en question dans ce qui suit, tout en conservant à la résultante de α', β', γ' le nom d'*intensité magnétique linéaire*.

Les composantes parallèles à Ox, Oy, Oz de l'action exercée par (A) sur M ont pour expressions, comme on le sait,

$$(4)\qquad X = \frac{dQ}{dx},\quad Y = \frac{dQ}{dy},\quad Z = \frac{dQ}{dz}.$$

3. *Autre forme sous laquelle on peut mettre la fonction* Q. — En intégrant par parties, l'équation (1) donne

$$Q = -\int\int\int\left(\frac{d\frac{\alpha' k'}{u'}}{dx'} + \frac{d\frac{\beta' k'}{u'}}{dy'} + \frac{d\frac{\gamma' k'}{u'}}{dz'}\right)\frac{dx'\,dy'\,dz'}{u'}$$
$$+\int\int\int\frac{1}{u'}\left(\frac{d\alpha' k'}{dx'} + \frac{d\beta' k'}{dy'} + \frac{d\gamma' k'}{dz'}\right)dx'\,dy'\,dz'$$

ou, en vertu d'un théorème connu,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} Q = &-\int(\alpha'\cos l' + \beta'\cos m' + \gamma'\cos n')k'\frac{d\omega'}{u'}\\ &+\int\int\int\frac{1}{u}\left(\frac{d\alpha' k'}{dx'} + \frac{d\beta' k'}{dy'} + \frac{d\gamma' k'}{dz'}\right)dx'\,dy'\,dz', \end{aligned}\right.$$

en désignant par $d\omega'$ un élément de la surface de (A) au point M′ dont les coordonnées sont x', y', z' et par l', m', n' les angles formés par la normale extérieure à cet élément avec Ox, Oy, Oz.

On remarquera que le facteur de $k'\frac{d\omega'}{u'}$ dans la première intégrale n'est autre chose que la composante I'_n suivant la normale en M′ de l'intensité magnétique en ce point (nº 2).

De la formule précédente et de l'identité

$$\frac{d^2\frac{1}{u'}}{dx^2}+\frac{d^2\frac{1}{u'}}{dy^2}+\frac{d^2\frac{1}{u'}}{dz^2}=0,$$

on déduit l'équation connue

$$(6)\qquad \frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dy^2}+\frac{d^2Q}{dz^2}=0.$$

A l'inspection de l'équation (5), on reconnaît que l'aimant (A) agit sur M comme si la surface était recouverte d'un fluide dont la densité superficielle serait $I'_n k'$, et que les molécules renfermeraient un autre fluide dont la densité de masse aurait pour valeur

$$-\left(\frac{d\alpha' k'}{dx'}+\frac{d\beta' k'}{dy'}+\frac{d\gamma' k'}{dz'}\right).$$

4. *Action d'un corps aimanté sur un point intérieur de l'un de ses éléments magnétiques.* — Concevons une sphère (B) ayant son centre en M, dont le rayon est extrêmement petit par rapport aux dimensions de l'aimant, mais qui est censée assez étendue cependant pour renfermer un grand nombre d'éléments magnétiques.

Les composantes de l'action exercée sur M par la portion de (A) extérieure à (B) pourront se déterminer au moyen des formules (1) et (4), parce que le développement sur lequel elles reposent est ici parfaitement admissible. Mais il n'en est pas de même pour celles de (B) qui exigent un calcul spécial, puisque u' est de l'ordre de ds, $c\chi$, $c\eta$, $c\zeta$.

Occupons-nous d'abord de l'action exercée sur M par la portion de (A) extérieure à (B); on peut supposer que Q s'étende au volume entier en retranchant ensuite de $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{dQ}{dy}$, $\frac{dQ}{dz}$ les composantes X', Y', Z' dues à (B), estimées au moyen des formules (1) et (4).

Nous avons

$$X' = -\int\int\int\left(\alpha'\frac{d}{dx}\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta'\frac{d}{dy}\frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma'\frac{d}{dz}\frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\right)k'\,dx'\,dy'\,dz'.$$

En raison des dimensions extrêmement petites du volume (B), on peut considérer α', β', γ', k' comme ayant les mêmes valeurs dans toute l'étendue de ce volume. Si donc nous désignons par α, β, γ, k celles de ces valeurs qui correspondent au point M, c'est-à-dire aux coordonnées x, y, z, nous aurons

$$\begin{aligned}X' = &-\alpha k\int\int\int\frac{d}{dx}\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'}dx'\,dy'\,dz'\\ &-\beta k\int\int\int\frac{d}{dx}\frac{d\frac{1}{u'}}{dy'}dx'\,dy'\,dz' - \gamma k\int\int\int\frac{d}{dx}\frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}dx'\,dy'\,dz'\end{aligned}$$

ou, en effectuant les différentiations par rapport à x,

$$\begin{aligned}X' = &-\alpha k\int\int\int\frac{d\frac{x'-x}{u'^3}}{dx'}dx'\,dy'\,dz'\\ &-\beta k\int\int\int\frac{d\frac{x'-x}{u'^3}}{dy'}dx'\,dy'\,dz' - \gamma k\int\int\int\frac{d\frac{x'-x}{u'^3}}{dz'}dx'\,dy'\,dz'.\end{aligned}$$

En étendant à la surface de (B) les notations admises pour celle de (A), cette expression peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}X' = &-\alpha k\int\frac{(x'-x)}{u'^3}\cos l'\,d\omega'\\ &-\beta k\int\frac{(y'-y)}{u'^3}\cos m'\,d\omega' - \gamma k\int\frac{(z'-z)}{u'^3}\cos n'\,d\omega;\end{aligned}$$

et comme

$$x' - x = u' \cos l', \quad y' - y = u' \cos m', \quad z' - z = u' \cos n',$$

il vient

$$\begin{aligned} X' = &- \alpha k \int \frac{(x'-x)^2}{u'^4} d\omega' \\ &- \beta k \int \frac{(x'-x)(y'-y)}{u'^4} d\omega' - \gamma k \int \frac{(x'-x)(z'-z)}{u'^4} d\omega'. \end{aligned}$$

Concevons, momentanément, que les axes coordonnés soient transportés parallèlement à eux-mêmes au point M pris pour origine; soient θ et ψ les angles formés par u' avec Mz et sa projection sur le plan xMy avec Mx; nous avons

$$x' - x = u' \sin\theta \cos\psi, \quad y' - y = u' \sin\theta \sin\psi, \quad z' - z = u' \cos\theta,$$
$$d\omega' = u'^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi$$

et

$$\begin{aligned} X' = &- \alpha k \int\int \sin^3\theta \cos^2\psi \, d\theta \, d\psi - \beta k \int\int \sin^3\theta \sin\psi \cos\psi \, d\theta \, d\psi \\ &- \gamma k \int\int \sin^2\theta \cos\theta \cos\psi \, d\theta \, d\psi, \end{aligned}$$

les intégrales étant prises entre les limites $\theta = 0$, $\psi = 0$ et $\theta = \pi$, $\psi = 2\pi$. On tire de là

$$X' = -\tfrac{4}{3}\pi\alpha k,$$

et l'on trouverait de même

$$Y' = -\tfrac{4}{3}\pi\beta k, \quad Z' = -\tfrac{4}{3}\pi\gamma k.$$

Nous avons donc, pour les composantes de l'action sur M par la portion de l'aimant extérieur à (B),

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \frac{dQ}{dx} + \tfrac{4}{3}\pi\alpha k, \\ Y_1 &= \frac{dQ}{dy} + \tfrac{4}{3}\pi\beta k, \\ Z_1 &= \frac{dQ}{dz} + \tfrac{4}{3}\pi\gamma k. \end{aligned} \right.$$

Il nous reste maintenant à déterminer les composantes de l'action exercée par la sphère (B) sur le point M.

Concevons un cône ayant son sommet en ce point, d'une ouverture sphérique infiniment petite $d\sigma$ et terminé à la surface de (B). Une masse fluide élémentaire $\rho\iota^2 d\sigma dr$, comprise dans ce cône et située à la distance ι du sommet, donnera lieu à l'action $\rho d\sigma d\iota$, et l'on aura $d\sigma\int\rho d\iota$ pour l'action du cône entier. L'action produite par le cône opposé sera de sens contraire à cette dernière et ces deux actions se détruiront au moins en partie. Comme les deux cônes ont la même longueur, ils traverseront à peu près le même nombre d'éléments magnétiques extérieurs à celui auquel M appartient, et la surface de chacun de ces éléments sera traversée deux fois. Quoique ces éléments ne soient pas nécessairement identiques, comme leur nombre est très grand et pour ainsi dire infini, il n'y a pas de raison de supposer qu'il y a plus de fluide libre d'un côté que de l'autre. Alors il ne restera de l'action des cônes que celle qui est due aux portions qu'ils déterminent dans la couche fluide de l'élément dans l'intérieur duquel M est situé. Il suit de ce raisonnement que, si ce point était extérieur à tout élément magnétique, il ne serait soumis à aucune action magnétique de la part de (B), c'est-à-dire qu'une particule magnétique de l'un ou l'autre fluide que l'on placerait au même point y resterait en équilibre si elle n'était influencée que par (B).

Supposons, pour un instant, que l'on ait transporté les axes Ox, Oy, Oz parallèlement à eux-mêmes au point M.

Soient θ et ψ les angles formés par ι avec Mz et sa projection sur le plan xMy avec Mx; ε l'épaisseur de la couche magnétique déterminée par la direction de ι; on peut prendre $d\sigma = \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ et l'on reconnaît facilement que les composantes de l'action due à (B), parallèles à Ox, Oy, Oz, ont pour expressions

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= -\int\!\!\int\rho\varepsilon\sin^2\theta\cos\psi\, d\theta\, d\psi,\\ \beta_1 &= -\int\!\!\int\rho\varepsilon\sin^2\theta\sin\psi\, d\theta\, d\psi,\\ \gamma_1 &= -\int\!\!\int\rho\varepsilon\sin\theta\cos\theta\, d\psi,\end{aligned}\right.$$

les intégrales étant prises entre les limites $\theta = 0$, $\psi = 0$ et $\theta = \pi$, $\psi = 2\pi$. Nous rappellerons que nous avons désigné par α, β, γ les valeurs de α', β', γ' qui se rapportent aux point M.

En remontant au n° **2**, nous remarquerons que

$$ec^2 ds = \varepsilon r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$
$$c\chi = r\sin\theta\cos\psi, \quad c\eta = r\sin\theta\sin\psi, \quad c\zeta = r\cos\theta;$$

d'où l'on déduit

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{c^3}\int\int \rho\varepsilon r^3 \sin^2\theta\cos\psi\, d\theta\, d\psi,\\ \beta &= \frac{1}{c^3}\int\int \rho\varepsilon r^3 \sin^2\theta\sin\psi\, d\theta\, d\psi,\\ \gamma &= \frac{1}{c^3}\int\int \rho\varepsilon r^3 \sin\theta\cos\theta\, d\psi. \end{aligned}\right.$$

Poisson a supposé que α, β, γ sont des fonctions linéaires de α_1, β_1, γ_1 dont les coefficients ne dépendent que de la forme de l'élément magnétique et de sa position par rapport aux trois plans coordonnés. Par des transformations de coordonnées et en exprimant que α, β, γ ne changent pas de valeur, si l'aimant (A), étant une sphère homogène, tourne sur lui-même, il arrive à conclure que six des coefficients de α_1, β_1, γ_1 sont nuls, que les trois autres sont égaux et que l'on peut ainsi poser

$$\alpha = -p\alpha_1, \quad \beta = -p\beta_1, \quad \gamma = -p\gamma_1,$$

p étant une fonction inconnue; il cherche à déterminer cette fonction par une savante analyse où il fait intervenir les fonctions sphériques; il arrive à un résultat approximatif tel, qu'il a dû supposer en chemin que l'élément magnétique était sensiblement sphérique. En effet, en substituant à cet élément une sphère moyenne de rayon r_1, ayant le même volume, nous aurons

$$c^3 = \frac{4}{3}\pi r_1^3,$$

et, en faisant $r = r_1$ dans les formules (9) et en ayant égard aux valeurs (8), on voit sans peine que l'on a

$$(10)\qquad \alpha_1 = -\frac{4}{3}\pi\alpha, \quad \beta_1 = -\frac{4}{3}\pi\beta, \quad \gamma_1 = -\frac{4}{3}\pi\gamma.$$

Telles sont les relations auxquelles Poisson est arrivé, quoique les raisonnements qui l'y ont conduit ne soient pas de la dernière rigueur ([1]).

Il résulte de ce qui précède que les composantes de l'action totale exercée par l'aimant (A) sur un point intérieur de l'un de ses éléments magnétique sont pour expressions

$$(11)\quad \begin{cases} X = \dfrac{dQ}{dx} - \frac{4}{3}\pi\alpha(1-k), \\ Y = \dfrac{dQ}{dy} - \frac{4}{3}\pi\beta(1-k), \\ Z = \dfrac{dQ}{dz} - \frac{4}{3}\pi\gamma(1-k). \end{cases}$$

5. *Équations d'équilibre des deux fluides contenus dans un corps aimanté.* — Supposons que les particules magnétiques de (A) soient soumises non seulement à leurs actions mutuelles, mais encore à celles d'aimants extérieurs. Désignons par V la fonction potentielle de M due à l'action de ces aimants.

Il faut que les forces magnétiques qui sollicitent le point M se fassent équilibre, car autrement il y aurait, en ce point, décomposition du fluide neutre, et l'équilibre magnétique dans (A) n'existerait pas, comme on l'a supposé; c'est pourquoi d'ailleurs on a admis, comme pour les fluides électriques, que le fluide magnétique était répandu sur la surface de chaque élément d'aimant.

On doit donc avoir, pour tous les points de l'intérieur de (A) ou quels que soient x, y, z,

$$X + \frac{dV}{dx} = 0, \quad Y + \frac{dV}{dy} = 0, \quad Z + \frac{dV}{dz} = 0,$$

([1]) Il le reconnaît lui-même dans son Mémoire de 1828 intitulé : *Sur la théorie du magnétisme en mouvement* (*Mémoires de l'Institut*, p. 454), Mémoire que nous n'analyserions qu'en sortant du cadre que nous nous sommes tracé. Il nous paraît cependant que l'on pourrait éluder les difficultés en multipliant les expressions (10) par un coefficient, probablement peu différent de l'unité, mais qui ne pourrait être qu'une donnée expérimentale.

d'où, pour les équations cherchées,

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{dV}{dx} + \dfrac{dQ}{dx} - \dfrac{4}{3}\pi\alpha(1-k) = 0, \\ \dfrac{dV}{dy} + \dfrac{dQ}{dy} - \dfrac{4}{3}\pi\beta(1-k) = 0, \\ \dfrac{dV}{dz} + \dfrac{dQ}{dz} - \dfrac{4}{3}\pi\gamma(1-k) = 0. \end{cases}$$

On sait que, par sa nature, la fonction V satisfait à l'équation

$$(13)\quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0;$$

on a de plus

$$(f)\quad \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dz^2} = 0,$$

lorsque les différences $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ ne sont pas infiniment petites, et dans le cas contraire

$$(g)\quad \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dz^2} = -4\pi.$$

Si l'on forme au moyen de l'équation (5) du n° **3** l'expression

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} + \frac{d^2Q}{dz^2},$$

la somme des trois intégrales qui se rapportent à la surface de (A) est nulle; la somme des trois autres se réduit à celle qui est relative à une sphère d'un rayon infiniment petit enveloppant le point M et dans laquelle on peut supposer

$$\frac{d\alpha' k'}{dx'} = \frac{d\alpha k}{dx}, \quad \frac{d\beta' k'}{dy'} = \frac{d\beta k}{dy}, \quad \frac{d\gamma' k'}{dx'} = \frac{d\gamma k}{dx};$$

on obtient ainsi, eu égard à la relation (f),

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} + \frac{d^2Q}{dz^2} = -4\pi\left(\frac{d\alpha k}{dx} + \frac{d\beta k}{dy} + \frac{d\gamma k}{dz}\right).$$

Si donc on ajoute entre elles les équations (12), après les avoir différentiées respectivement par rapport à x, y, z, on trouve

$$(14) \qquad 2\left(\frac{d\alpha k}{dx}+\frac{d\beta k}{dy}+\frac{d\gamma k}{dz}\right)+\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0.$$

6. *Cas où la température de l'aimant est uniforme.* — Nous ne considérerons dorénavant que le cas dans lequel k est une constante (nº **2**).

L'équation précédente se réduit alors à la suivante :

$$(15) \qquad \frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0.$$

A l'inspection des équations (12), on reconnaît que α, β, γ sont les dérivées partielles, par rapport à x, y, z, d'une même fonction que nous désignerons par f. Nous aurons ainsi

$$(16) \qquad \alpha=\frac{df}{dx},\quad \beta=\frac{df}{dy},\quad \gamma=\frac{df}{dz},$$

et, au lieu de l'équation (15),

$$(17) \qquad \frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}+\frac{d^2f}{dz^2}=0.$$

Les équations (12) se réduisent alors à la suivante :

$$(18) \qquad V+Q-\frac{4\pi}{3}(1-k)f=0 \quad (^1),$$

d'où on les déduira par la différentiation relative aux trois coordonnées.

En vertu de l'équation (15) et en supposant k' ou k constant, la seconde intégrale de l'expression (5), (nº **3**) est nulle et l'on a sim-

(1) Cette équation n'est autre chose que celle qui a été reproduite par Green et à laquelle nous avons fait allusion au nº **1**.

plement

$$(19)\qquad Q = -k\int\left(\frac{df'}{dx'}\cos l' + \frac{df'}{dy'}\cos m' + \frac{df'}{dz'}\cos n'\right)\frac{d\omega'}{u'},$$

en désignant par f' ce que devient f quand on y remplace x, y, z par x', y', z'. La couche fictive superficielle dont nous avons parlé à la fin du n° 3 est donc tout ce qu'il reste de l'action exercée par (A) sur M.

Portons sur la normale extérieure au point M' de la surface de (A) une longueur infiniment petite $M'M'_1 = dv'$, et soient $x'+dx', y'+dy', z'+dz'$ les coordonnées de M'_1; comme on a

$$\cos l' = \frac{dx'}{dv'},\quad \cos m' = \frac{dy'}{dv'},\quad \cos n' = \frac{dz'}{dv'},$$

l'expression (19) se met alors sous la forme simple

$$(19')\qquad Q = -k\int\frac{df'}{dv'}\frac{d\omega'}{u'},$$

Comme les équations d'après lesquelles Q s'est réduit à l'expression (19) n'ont pas lieu pour les éléments magnétiques situés sur la surface de (A), ou qui en sont à une distance insensible, les valeurs de $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{dQ}{dy}$, $\frac{dQ}{dz}$ ne comprendront pas l'action de ces éléments; mais on peut, sans erreur appréciable, négliger cette action ou la regarder comme insensible par rapport à celle de tous les éléments dont (A) est composé.

7. *Le volume renferme un vide à l'intérieur.* — On calculera d'abord Q comme si le volume était plein, et de l'expression obtenue on retranchera celle qui est relative au volume du vide intérieur considéré comme plein.

Supposons que les éléments qui entrent dans les formules (19) et (19') se rapportent à la surface extérieure; augmentons d'un accent les éléments correspondants qui sont relatifs à un point M'' de la surface intérieure. Nous aurons

$$(20)\qquad Q = -k\int\frac{df'}{dv'}\frac{d\omega'}{u'} + k\int\frac{df''}{dv''}\frac{d\omega''}{u''},$$

la première de ces intégrales s'étendant à la surface extérieure et la seconde à la surface intérieure.

Supposons que la fonction V se rapporte aux aimants extérieurs à (A) et que U soit son équivalent pour les aimants qui pourraient se trouver dans le vide; à l'équation (18) on devra substituer la suivante :

$$(21)\qquad V + U + Q - \frac{4\pi}{3}(1-k)f = 0,$$

dans laquelle Q sera remplacé par sa valeur (20).

Plaçons l'origine O des coordonnées dans l'intérieur du vide, et soient r, le rayon vecteur OM; θ l'angle $\widehat{MOz}$; ψ l'angle formé avec Ox par la projection de r sur le plan yOx; affectons d'un accent et de deux accents les quantités analogues qui se rapportent aux points M′ et M″ de la surface extérieure et de la surface intérieure. Soient, de plus ϖ', ϖ'' des angles qui forment avec r', r'' les normales en M′, M″; E′, E″ les épaisseurs suivant les directions de r', r'' des couches fluides fictives répandues sur les surfaces extérieure et intérieure. Nous avons

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} u^2 &= r^2 - 2rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')] + r'^2,\\ u'^2 &= r^2 - 2rr''[\cos\theta\cos\theta'' + \sin\theta\sin\theta''\cos(\psi-\psi'')] + r''^2,\end{aligned}\right.$$

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} d\omega'\cos\varpi' &= r'^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi',\\ d\omega''\cos\varpi'' &= r''^2\sin\theta''\,d\theta''\,d\psi'',\end{aligned}\right.$$

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} k\frac{df'}{dv'} &= E'\cos\varpi',\\ k\frac{df''}{dv''} &= E''\cos\varpi''.\end{aligned}\right.$$

Les formules (20) et (21) deviennent alors

$$(25)\qquad Q = -\int\!\!\int \frac{1}{u'}E'r'^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi' - \int\!\!\int\frac{1}{u''}E''r''^2\sin\theta''\,d\theta''\,d\psi'',$$

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} V + - U\frac{4}{3}\pi(1-k)f - \int\!\!\int\frac{1}{u'}E'r'^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi'&\\ + \int\!\!\int\frac{1}{u''}E''r''^2\sin\theta''\,d\theta''\,d\psi'',&\end{aligned}\right.$$

les intégrales étant prises entre $\theta' = 0$, $\theta'' = 0$, $\psi' = 0$, $\psi'' = 0$ et $\theta' = \pi$, $\theta'' = \pi$, $\psi' = 2\pi$, $\psi'' = 2\pi$.

On sait d'ailleurs que, en substituant les coordonnés polaires aux coordonnés rectilignes, l'équation (17) se transforme dans la suivante :

$$r\frac{d^2 rf}{dr^2} + \frac{d\left(\sin\theta \frac{df}{d\theta}\right)}{\sin\theta\, d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d f^2}{d\psi^2} = 0. \tag{27}$$

8. ***Indications générales sur la marche à suivre pour arriver à l'intégration.*** — Posons

$$f = \sum\nolimits_{i=0} R_i, \tag{28}$$

R_i étant une fonction rationnelle entière du degré i, de $\cos\theta$, $\sin\theta\sin\psi$, $\sin\theta\cos\psi$, dépendante de r, qui satisfait à l'équation

$$\frac{d\sin\theta \frac{dR_i}{d\theta} +}{d\theta}\,\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2 R_i}{d\psi^2} + i(i+1)R_i = 0. \tag{29}$$

En remplaçant f par R_i dans l'équation (27) et ayant égard à la précédente, on trouve

$$r\frac{d^2 rR_i}{dr^2} - i(i+1)R_i = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$R_i = H_i r^i + \frac{G_i}{r^{i+1}},$$

H_i, G_i étant des *fonctions* sphériques du degré i en θ et ψ, indépendantes de r, qui satisfont à l'équation (29) quand on les substitue à R_i. L'équation (27) sera donc satisfaite par

$$f = \sum\left(H_i r^i + \frac{G_i}{r^{i+1}}\right). \tag{30}$$

Cela posé, on substituera à f cette valeur dans l'équation (26), ainsi que les expressions de u, u', V, U exprimées en séries convergentes ordonnées, selon les cas, suivant les puissances ascendantes ou descendantes de r, et l'on égalera à zéro la somme des coefficients des mêmes puissances de r. On déterminera ainsi les H_i, G_i, par suite f, puis α, β, γ, et enfin les composantes de l'action magnétique du corps au moyen de la quantité Q dont la valeur se déduira de celle de f par des intégrations immédiates.

§ III. — Application aux corps sphériques.

9. *Équilibre magnétique intérieur d'une enveloppe sphérique.* — Considérons une sphère creuse dont les rayons extérieur et intérieur soient a, b, et plaçons l'origine des coordonnées au centre O de cette sphère.

On a

$$dw' = dr', \quad dw'' = dr'';$$

par suite,

$$E' = k\frac{df'}{dr'}, \quad E'' = k\frac{df''}{dr''},$$

expressions dans lesquelles on devra faire $r' = a$, $r'' = b$, après avoir effectué les différentiations.

Si nous distinguons par un accent et deux accents les valeurs que prennent H_i et G_i lorsque l'on y remplace θ, ψ par θ', ψ' et par θ'', ψ'', nous aurons, en vertu de l'équation (30) du n° 8,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} E' &= k\sum\left[iH'_i a^{i-1} - (i+1)\frac{G'_i}{a^{i+2}}\right],\\ E'' &= k\sum\left[iH''_i b^{i-1} - (i+1)\frac{G''_i}{b^{i+2}}\right].\end{aligned}\right.$$

L'équation (26) du n° 7 prend alors la forme suivante :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &V + U - \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum\left(H_i r_i + \frac{G_i}{r^{i+1}}\right)\\ &\quad - ka^2\int\!\!\int\frac{1}{u}\sum\left[iH'_i a^{i-1} - (i+1)\frac{G'_1}{a^{i+2}}\right]\sin\theta' d\theta' d\psi'\\ &\quad + kb^2\int\!\!\int\frac{1}{u'}\sum\left[iH''_i b^{i-1} - (i+1)\frac{G'_1}{b^{i+2}}\right]\sin\theta'' d\theta'' d\psi'' = 0.\end{aligned}\right.$$

Comme on a $r < a$, $r > b$, $\frac{1}{u}$ ne pourra être développé en série convergente que suivant les puissances ascendantes de r, et $\frac{1}{u'}$ que suivant les puissances descendantes de la même variable. Nous poserons en conséquence (¹)

$$(3)\qquad \frac{1}{u} = \sum \frac{Y'_i r^i}{a^{i+1}}, \quad \frac{1}{u'} = \sum \frac{Y''_i b^i}{r^{i+1}},$$

les coefficients Y'_0, Y''_0 étant égaux à l'unité. La fonction Y'_i est symétrique en θ, θ' et ψ, ψ' et satisfera, substituée à R_i, à l'équation (29), en remplaçant toutefois θ par θ' et ψ par ψ'. On sait d'ailleurs que l'on a, en intégrant entre les limites $\theta' = 0$, $\psi' = 0$ et $\theta' = \pi$, $\psi' = 2\pi$,

$$\int\int H'_{i'} Y'_i \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' = 0 \quad \text{pour } i' \gtrless i,$$

$$\int\int H'_i Y'_i \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' = \frac{4\pi H_i}{2i+1},$$

équations dans lesquelles H_i peut être remplacé par G_i.

Tout ce que nous venons de dire s'applique à Y'', H'', G'' en remplaçant θ', φ' par θ'', φ''.

Il résulte de là que, en substituant les séries (3) dans l'équation (2), cette dernière devient

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} & V + U - \frac{4}{3}\pi(1-k)\sum\left[H_i r^i + \frac{G_i}{r^{i+1}}\right] \\ & - 4\pi k \sum \frac{i H_i r^i}{2i+1} + 4\pi k \sum \frac{(i+1)}{2i+1}\frac{G_i r^i}{a^{2i+1}} \\ & + 4\pi k \sum \frac{i b^{2i+1}}{2i+1}\frac{H_i}{r^{i+1}} - 4\pi k \sum \frac{(i+1)}{2i+1}\frac{G_i}{r^{i+1}} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remarque que les fonctions V et U correspondent à des centres de forces dont les distances au point O sont plus grandes que r pour la première et plus petites pour la seconde, ces fonctions seront respectivement développables suivant les puissances ascendantes et descendantes de r et nous pourrons écrire

$$(5)\qquad \begin{cases} V = \sum V_i r_i, \\ U = \sum \frac{U_i}{r^{i+1}}, \end{cases}$$

V_i et U_i étant des fonctions sphériques du même ordre que H_i, G_i.

A mesure que r augmentera, U tendra à se réduire à son premier terme, mais, à la limite, cette fonction sera égale à la somme des quantités de fluide libre appartenant aux aimants intérieurs divisée par r et, comme cette somme est nécessairement nulle, on a $U_0 = 0$.

Portant les valeurs (5) dans l'équation (4) et égalant à zéro les coefficients de r^i, $\frac{1}{r^{i+1}}$, on trouve

$$(6)\qquad \begin{cases} V_i - \frac{4\pi}{3}(1-k)H_i - 4\pi k\,\frac{i}{2i+1}\,H_i + 4\pi k\,\frac{i+1}{(2i+1)a^{2i+1}}\,G_i = 0, \\ U_i - \frac{4\pi}{3}(1-k)G_i + 4\pi k\,\frac{i b^{2i+1}}{2i+1}\,H_i - 4\pi k\,\frac{(i+1)}{2i+1}\,G_i = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduira les valeurs de H_i, G_i qu'il s'agissait de déterminer. De ce que $U_0 = 0$, la seconde des équations précédentes donne $G_0 = 0$ et on tire de la première

$$(7)\qquad V_0 - \frac{4\pi}{3}(1-k)H_0 = 0,$$

En remarquant que l'unité est une fonction sphérique de l'ordre O, les formules (1) donnent pour les quantités totales de fluide libre fictives répandues sur les surfaces extérieure et intérieure de l'enveloppe

$$a^2\int\int E' \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' = -4\pi G_0,$$
$$b^2\int\int E'' \sin\theta''\, d\theta''\, d\psi'' = -4\pi G_0,$$

et sont ainsi nulles puisque $G_0 = 0$.

10. *Action de l'enveloppe sur un point donné extérieur ou intérieur.* — Soient F la fonction dont les dérivées changées de signe par rapport à x, y, z donnent les composantes suivant Ox, Oy, Oz de l'action exercée sur le point M.

Cette fonction ne sera autre chose que le premier membre de l'équation (2) dans lequel on supprimera le terme en $(1-k)$ qui caractérise un point d'un élément magnétique de l'enveloppe et par conséquent on aura

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F} = \mathrm{V} + \mathrm{U} &- ka^2\int\!\!\int \frac{1}{u'}\sum\left[i\mathrm{H}'_i a^{i-1} - (i+1)\frac{\mathrm{G}'_i}{a^{i+2}}\right]\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi' \\ &+ kb^2\int\!\!\int \frac{1}{u''}\sum\left[i\mathrm{H}''_i b^{i-1} - (i+1)\frac{\mathrm{G}''_i}{b^{i+2}}\right]\sin\theta''\,d\theta''\,d\psi''. \end{aligned}\right.$$

1° *Le point* M *est extérieur.* Comme $r > a > b$, nous pourrons écrire, comme plus haut,

$$\frac{1}{u''} = \sum \mathrm{Y}''_i\,\frac{b^i}{r^{i+1}},\quad \mathrm{U} = \sum \frac{\mathrm{U}_i}{r^{i+1}}.$$

On reconnaît facilement que le coefficient du terme en $\frac{1}{r^{i+1}}$ de F fournit par U et u'' n'est autre chose que le premier membre de la seconde des équations (6) dont on aurait supprimé le second terme; ce coefficient est donc égal à $\frac{4\pi}{3}(1-k)\,\mathrm{G}_i$; nous avons donc déjà

$$\begin{aligned} \mathrm{F} = \mathrm{V} &+ \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum\frac{\mathrm{G}_i}{r^{i+1}} \\ &- ka^2\int\!\!\int\frac{1}{u'}\sum\left[i\mathrm{H}_i a^{i-1} - (i+1)\frac{\mathrm{G}'_i}{a^{i+2}}\right]\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi'. \end{aligned}$$

Mais nous devons poser aussi

$$\frac{1}{u'} = \sum\frac{\mathrm{Y}'_i a^i}{r^{i+1}},$$

Y'_i ayant la même valeur qu'au numéro précédent. Il vient donc

$$\mathrm{F} = \mathrm{V} + \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum\frac{\mathrm{G}_i}{r^{i+1}} + 4\pi k\sum\frac{1}{r^{i+1}}\left[\frac{i\mathrm{H}_i}{2i+1}a^{2i+1} - \frac{(i+1)}{2i+1}\mathrm{G}_i\right].$$

Au moyen de la première des équations (6), cette expression se réduit facilement à la suivante :

$$(9)\qquad F = V - \sum \frac{a^{2i+1} V_i}{r^{i+1}} + \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum \frac{a^{2i+1} H_i + G_i}{r^{i+1}}.$$

2° *Le point* M *est intérieur à l'enveloppe ou* $r < b < a$. — On devra prendre

$$\frac{1}{u'} = \sum \frac{Y'_i r^i}{a^{i+1}}, \quad V = \sum V_i r^i,$$

comme au n° **8.** Le terme en r^i fourni par le premier et le troisième terme de F ne sera alors autre chose que le premier membre de la première des équations (6) dans lequel on aurait supprimé le terme en $(1 - k)$; nous avons donc déjà

$$F = U + \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum H_i r^i$$
$$+ kb^2 \int\int \frac{1}{u'} \left[H''_i \, i \, b^{i1} - \frac{i+1}{b^{i+2}} G''_i \right] \sin\theta'' \, d\theta'' \, d\Phi''$$

Comme ici nous devons prendre

$$\frac{1}{u''} = \sum \frac{Y'_i r^i}{b^{i+1}},$$

il vient

$$F = U + \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum H_i r^i + 4\pi k \sum r^i \left[\frac{H_i}{2i+1} - \frac{G_i}{(2i+1) b^{2i+1}} \right],$$

ou, en ayant égard à la seconde des équations (6),

$$(10)\qquad F = U - \sum \frac{U_i r_i}{b^{2i+1}} + \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum r^i \left[H_i + \frac{G_i}{b^{2i+1}} \right].$$

11. *Examen de quelques cas particuliers.* — 1° $k = 1$. Cette hypothèse se réalise à très peu près pour le fer doux. Les équations (9) et (10) se réduisent aux suivantes :

$$(9')\qquad F = V - \sum \frac{a^{2i+1} V_i}{r^{i+1}},$$

$$(10')\qquad F = U - \sum \frac{U_i r^i}{b^{2i+1}}.$$

D'où cette double proposition : *L'action exercée sur le point* M *est indépendante des masses magnétiques intérieures s'il est intérieur et des masses magnétiques extérieures s'il est intérieur.*

2° *La sphère est pleine.* Nous avons $U = 0$, $b = 0$, par suite $G_i = 0$ d'après la seconde des équations (6); la première de ces équations donne

$$H_i = \frac{V_i}{4\pi\left[\frac{(1-k)}{3} + \frac{ki}{2i+1}\right]} \tag{6''}$$

et l'équation (9)

$$F = V - \sum \frac{a^{2i+1} V^i}{r^{i+1}}\left(1 - \frac{1}{1-k+3ki}\right). \tag{9''}$$

3° *L'enveloppe sphérique n'est soumise qu'à une action extérieure constante en grandeur et en direction.* Supposons, pour fixer les idées, que cette action est celle qui est produite par la terre. Nous dirigerons la partie positive de l'axe Oz vers le pôle boréal terrestre, et nous ferons passer par M le plan zOx qui, étant un plan de symétrie, renfermera l'intensité magnétique. Nous poserons

$$V = -mz = -mr\cos\theta, \quad U = 0, \quad \beta = 0,$$

m étant une constante qui sera positive pour notre hémisphère.

Nous aurons ainsi

$$V_0 = 0, \quad V_1 = -m\cos\theta \quad \text{et} \quad V_i = 0 \text{ pour } i > 2$$

et, en vertu des équations (6),

$$H_i = 0, \quad G_i = 0 \text{ pour } i > 1, \quad H_0 = 0,$$

en nous rappelant que $G_0 = 0$.

De ces mêmes équations on déduit

$$\left\{\begin{aligned} H_1 &= A(1+k)\cos\theta, \\ G_1 &= Akb^3\cos\theta, \end{aligned}\right. \tag{6'''}$$

en posant

$$(11) \qquad A = \frac{3ma^3}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]}.$$

De la formule (30) du n° 8 on déduit alors

$$f = Ar\cos\theta\left(1 + k + k\frac{b^3}{r^3}\right).$$

Désignons par $\mathcal{R}$, $\mathfrak{M}$ les composantes suivant le rayon et la méridienne de l'intensité magnétique au point M (n° 2), dont les projections sur Ox, Oy, Oz sont respectivement

$$\alpha = \frac{df}{dx}, \quad \beta = \frac{df}{dy}, \quad \gamma = \frac{df}{dz}.$$

Nous avons

$$(11') \qquad \begin{cases} \mathcal{R} = \dfrac{df}{dr} = \quad A\cos\theta\left(1 + k - 2k\dfrac{b^3}{r^3}\right), \\ \mathfrak{M} = \dfrac{df}{rd\theta} = -A\sin\theta\left(1 + k + k\dfrac{b^3}{r^3}\right), \end{cases}$$

et l'on voit ainsi que l'intensité magnétique en chacun des points de (A) est parallèle à la direction du magnétisme terrestre. Des formules (11'), on déduit

$$\alpha = \mathcal{R}\sin\theta + \mathfrak{M}\cos\theta = -3Ak\frac{b^3}{r^3}\sin\theta\cos\theta,$$

$$\gamma = \mathcal{R}\cos\theta - \mathfrak{M}\sin\theta = A\left[1 + k + k\frac{b^3}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta)\right].$$

En se rapportant à la formule (9) et ayant égard aux valeurs ci-dessus de V_1, H_1, G_1, A, on trouve, pour la fonction potentielle d'un point M extérieur à l'enveloppe,

$$(12) \qquad F = m\cos\theta\left(-r + B\frac{a^3}{r^2}\right),$$

en posant

$$(13) \qquad B = k\frac{(k+1)(a^3 - b^3)}{(1+k)a^3 - 2k^2b^3}.$$

On déduit de là pour les composantes de l'action exercée sur M, estimées suivant le rayon et la méridienne,

$$(14)\quad \begin{cases} \mathcal{R}_1 = -m\cos\theta\left(1+2\mathrm{B}\dfrac{a^3}{r^3}\right), \\ \mathfrak{M}_1 = -m\sin\theta\left(-1+\mathrm{B}\dfrac{a^3}{r^3}\right). \end{cases}$$

Ainsi donc l'action dont il s'agit est parallèle à la direction du magnétisme terrestre.

Des formules précédentes on déduit aussi

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} = \mathcal{R}_1\sin\theta + \mathfrak{M}_1\cos\theta = -m\mathrm{B}\frac{a^3}{r^3}\sin\theta\cos\theta,$$

$$\frac{d\mathrm{F}}{dz} = \mathcal{R}_1\cos\theta - \mathfrak{M}_1\sin\theta = -m\left[1-\mathrm{B}\frac{a^3}{r^3}(1-3\cos^2\theta)\right],$$

ou encore

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{F}}{dx} = -m\mathrm{B}\dfrac{a^3}{r^5}xz, \\ \dfrac{d\mathrm{F}}{dz} = -m\left[1-\mathrm{B}\dfrac{a^3}{r^3}\left(1-\dfrac{3z^2}{r^2}\right)\right]. \end{cases}$$

Si la sphère est pleine ou si $b=0$, on a simplement

$$(15')\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{F}}{dx} = -mk\dfrac{a^3}{r^5}xz, \\ \dfrac{d\mathrm{F}}{dz} = -m\left[1-k\dfrac{a^3}{r^3}\left(1-\dfrac{3z^2}{r^2}\right)\right]. \end{cases}$$

Il est évident que, si les axes Ox et Oy sont orientés d'une manière quelconque, on doit substituer à ces formules les suivantes :

$$(15'')\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{F}}{dx} = -mk\dfrac{a^3}{r^5}xz, \\ \dfrac{d\mathrm{F}}{dy} = -mk\dfrac{a^3}{r^5}yz, \\ \dfrac{d\mathrm{F}}{dz} = -m\left[1-k\dfrac{a^3}{r^3}\left(1-\dfrac{3z^2}{r^2}\right)\right]. \end{cases}$$

§ IV. — Application des formules générales a l'ellipsoïde.

12. *Expression de la fonction potentielle* Q. — Rappelons-nous les formules suivantes du n° 6 :

$$(1) \qquad \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2} = 0,$$

$$(2) \qquad Q = -k\int\left(\frac{df'}{dx'}\cos l' + \frac{df'}{dy'}\cos m' + \frac{df'}{dz'}\cos n'\right)\frac{d\omega'}{u'}.$$

Soient

$$(3) \qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde donné (A);
ϖ' l'angle formé par la normale au point (x', y', z') avec le rayon vecteur $OM' = r'$ mené en ce point;
$d\sigma$ l'ouverture sphérique du cône ayant son sommet et pour base l'élément $d\omega'$ de la surface de (A).

En posant

$$\Delta = \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}},$$

nous avons

$$\cos l' = \frac{1}{\Delta}\frac{x'}{a^2}, \quad \cos m' = \frac{1}{\Delta}\frac{y'}{b^2}, \quad \cos n' = \frac{1}{\Delta}\frac{z'}{c^2},$$

$$\cos\varpi' = \frac{x'}{r'}\cos l' + \frac{y'}{r'}\cos m' + \frac{z'}{r'}\cos n' = \frac{1}{r'\Delta},$$

$$d\omega' = r'^2\frac{d\sigma}{\cos\varpi'} = \Delta r'^3\, d\sigma.$$

Par suite,

$$(2') \qquad Q = -k\int\left(\frac{df}{dx'}\frac{x'}{a^2} + \frac{df}{dy'}\frac{y'}{b^2} + \frac{df}{dz'}\frac{z'}{c^2}\right)r'\frac{r'^2 d\sigma}{u'}.$$

Nous supposerons que l'ellipsoïde n'est soumis qu'à une action extérieure constante en grandeur et en direction, ce qui revient à poser

$$(4) \qquad V = \mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C}z,$$

en désignant par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ trois constantes données. Nous allons chercher à satisfaire aux conditions d'équilibre magnétique intérieur de l'ellipsoïde en posant

$$(5)\qquad f = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

α, β, γ étant des coefficients inconnus.

Nous rappellerons (nos 5 et 6) que $\alpha = \frac{df}{dx}$, $\beta = \frac{df}{dy}$, $\gamma = \frac{df}{dz}$ doivent être considérés comme des infiniment petits.

La formule (2′) devient

$$(2'')\qquad Q = -k\int\left(\frac{\alpha x'}{a^2} + \frac{\beta y'}{b^2} + \frac{\gamma z'}{c^2}\right) r' \frac{r'^2 d\varpi}{u'}.$$

Considérons un second ellipsoïde (A′) obtenu en transportant (A), parallèlement à lui-même, de manière que son centre vienne coïncider avec le point dont les coordonnées parallèles à Ox, Oy, Oz sont respectivement α, β, γ. En désignant par x'', y'', z'' les coordonnées d'un point quelconque M″ de la surface de (A′) et par r'' le rayon OM″ de ce point, nous avons

$$\frac{(x''-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y''-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z''-\gamma)^2}{c^2} = 1,$$

ou, en ne conservant que les premières puissances de α, β, γ,

$$\frac{x''^2 - 2\alpha x''}{a^2} + \frac{y''^2 - 2\beta y''}{b^2} + \frac{z''^2 - 2\gamma z''}{c^2} = 1.$$

Si l'on fait coïncider la direction de OM″ avec celle de OM′, on a

$$x'' = \frac{r''}{r'}x', \quad y'' = \frac{r''}{r'}y', \quad z'' = \frac{r''}{r'}z'$$

et par suite, en ayant égard à l'équation (3),

$$\left(\frac{\alpha x'}{a^2} + \frac{\beta y'}{b^2} + \frac{\gamma z'}{c^2}\right) r' = \frac{r''^2 - r'^2}{2r'} = r'' - r'.$$

Nous avons donc

$$Q = k\int (r' - r'')\frac{r'^2 d\sigma}{u'}.$$

Cette expression n'est autre chose, au facteur k près, que la fonction potentielle de M qui serait due à l'attraction du volume de la couche limitée par (A) et (A') ou la différence des potentiels qui se rapportent à ces deux volumes. On sait que les composantes suivant Ox, Oy, Oz de l'attraction exercée par (A) sur un point (x, y, z), qu'il soit extérieur ou intérieur, sont de la forme

$$-Nx, \quad -N'y, \quad -N''z,$$

N, N', N'' étant des coefficients positifs qui ne dépendent que de a, b, c. Les composantes semblables relatives à (A') seront

$$-N(x-\alpha), \quad -N'(y-\beta), \quad N''(z-\gamma);$$

d'où, pour les différences,

$$-N\alpha, \quad -N'\beta, \quad -N''\gamma,$$

nous aurons donc

$$(6) \qquad \frac{dQ}{dx} = -Nk\alpha, \quad \frac{dQ}{dy} = -N'k\beta, \quad \frac{dQ}{dz} = -N''k\gamma,$$

par suite

$$(7) \qquad Q = -k(N\alpha x + N'\beta y + N''\gamma z).$$

13. *Rappel des formules relatives à l'attraction exercée par le volume d'un ellipsoïde sur un point* (x, y, z). — Supposons que $2c$ soit le plus petit des trois axes et posons

$$\frac{a^2 - c^2}{c^2} = \lambda^2, \quad \frac{b^2 - c^2}{c^2} = \lambda'^2.$$

Considérons d'abord le cas où le point attiré est intérieur et désignons par c_1 le demi-axe parallèle à Oz de l'ellipsoïde homofocal du proposé passant par ce point. Nous avons, pour déterminer c_1, l'équation

$$(8) \qquad \frac{z^2}{c_1^2} + \frac{y^2}{c_1^2 + b^2 - c^2} + \frac{x^2}{c_1^2 + a^2 - c^2} = 1,$$

qui n'admet qu'une racine positive pour c_1^2; les deux autres racines se rapportent aux hyperboloïdes homofocaux.

Nous avons maintenant ([1]), u étant une variable auxiliaire,

$$(9) \qquad \mathrm{L} = \int_0^{\frac{c}{c_1}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)(1+\lambda'^2 u^2)},$$

$$(10) \qquad \begin{cases} \mathrm{N} = \dfrac{4\pi ab}{c^2}\,\dfrac{d\lambda \mathrm{L}}{d\lambda}, \\[2ex] \mathrm{N}' = \dfrac{4\pi ab}{c^2}\,\dfrac{d\lambda' \mathrm{L}}{d\lambda'}, \\[2ex] \mathrm{N}'' = \dfrac{4\pi ab}{c^2}\,\mathrm{L}. \end{cases}$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (9) u par $\frac{c}{c_1}u$ et posons

$$\lambda_1^2 = \frac{a^2 - c^2}{c_1^2} = \lambda^2 \frac{c^2}{c_1^2}, \qquad \lambda_1'^2 = \frac{b^2 - c^2}{c_1^2} = \lambda'^2 \frac{c^2}{c_1^2},$$

$$(11) \qquad \mathrm{L}_1 = \int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda_1^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda_1'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous aurons

$$\mathrm{L} = \frac{c^3}{c_1^3}\,\mathrm{L}_1,$$

$$\frac{d\lambda \mathrm{L}}{d\lambda} = \frac{d\lambda_1 \mathrm{L}}{d\lambda_1} = \frac{c^3}{c_1^3}\,\frac{d\lambda_1 \mathrm{L}_1}{\lambda_1^2}, \qquad \frac{d\lambda' \mathrm{L}}{d\lambda'} = \frac{c^3}{c_1^3}\,\frac{d\lambda_1' \mathrm{L}_1}{d\lambda_1'}.$$

([1]) *Voir* notamment les formules des p. 151-152 de notre *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, en y remplaçant m par l'unité, M par $4\pi abc$, L par $\frac{4}{3}\pi abc$L, c' par c_1 et enfin λ par λ', et *vice versa*.

Par suite

$$(12)\quad \begin{cases} \mathrm{N} = \dfrac{4\pi abc}{c_1^3}\dfrac{d\lambda_1 \mathrm{L}_1}{d\lambda_1}, \\ \mathrm{N}' = \dfrac{4\pi abc}{c_1^3}\dfrac{d\lambda'_1 \mathrm{L}_1}{d\lambda'_1}, \\ \mathrm{N}'' = \dfrac{4\pi abc}{c_1^3}\mathrm{L}_1. \end{cases}$$

Les formules (11) et (12) s'appliqueront au cas où le point attiré se trouve sur la surface de l'ellipsoïde, en y supposant $c_1 = c$ ou $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda'_1 = \lambda'$, et alors nous avons

$$(11')\quad \mathrm{L} = \int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$(12')\quad \begin{cases} \mathrm{N} = \dfrac{4\pi ab}{c^2}\dfrac{d\lambda \mathrm{L}}{d\lambda}, \\ \mathrm{N}' = \dfrac{4\pi ab}{c^2}\dfrac{d\lambda' \mathrm{L}}{d\lambda'}, \\ \mathrm{N}'' = \dfrac{4\pi ab}{c^2}\mathrm{L}. \end{cases}$$

Si le point est intérieur, l'attraction se réduira a celle de l'ellipsoïde déterminé par la surface semblable à celle du précédent passant par ce point; mais, comme pour les deux ellipsoïdes les rapports $\frac{ab}{c^2}$, λ, λ' ont les mêmes valeurs, les formules (11') et (12') s'appliqueront encore au cas considéré.

On voit ainsi que l'on peut se borner à considérer les formules (11) et (12) en convenant d'y faire $c_1 = c$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda'_1 = \lambda'$ si le point attiré est situé sur la surface de l'ellipsoïde ou dans son intérieur.

Cas particulier. — On a

$$\frac{d\mathrm{L}_1}{d\lambda_1} = -\int_0^1 \frac{\lambda_1 u^2\,du}{(1+\lambda_1^2 u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda_1'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'ellipsoïde est de révolution autour de Oz, ou si $a = b$ ou $\lambda_1 = \lambda'_1$, il vient

$$\frac{dL_1}{d\lambda_1} = -\int_0^1 \frac{\lambda_1 u^2 du}{(1+\lambda_1^2 u^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\int_0^1 \frac{u^2 du}{1+\lambda_1^2 u^2},$$

$$L_1 = \int_0^1 \frac{u^2 du}{1+\lambda_1^2 u^2} = \frac{1}{\lambda_1^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\operatorname{arc\,tang}\lambda_1\right).$$

Au moyen de ces deux expressions il est facile de former celle de $\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}$ et l'on a par suite

$$(13)\quad \begin{cases} N = N' = \dfrac{4\pi a^2 c}{c_1^3}\dfrac{1}{2\lambda_1^2}\left(\dfrac{1}{\lambda_1}\operatorname{arc\,tang}\lambda_1 - \dfrac{1}{1+\lambda_1^2}\right), \\ N'' = \dfrac{4\pi a^2 c}{c_1^3}\dfrac{1}{\lambda_1^2}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda_1}\operatorname{arc\,tang}\lambda_1\right). \end{cases}$$

14. *Équilibre magnétique intérieur de l'ellipsoïde.* — Des équations (12) du n° 5, en ayant égard aux valeurs (4) et (6), on déduit

$$\mathcal{A} = \alpha\left[\frac{4\pi}{3}(1-k) + Nk\right],$$

$$\mathcal{B} = \beta\left[\frac{4\pi}{3}(1-k) + N'k\right],$$

$$\mathcal{C} = \gamma\left[\frac{4\pi}{3}(1-k) + N''k\right],$$

ou, en vertu des formules (12'),

$$(14)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = 4\pi\alpha\left(\dfrac{1-k}{3} + k\dfrac{ab}{c^2}\dfrac{d\lambda L}{d\lambda}\right), \\ \mathcal{B} = 4\pi\beta\left(\dfrac{1-k}{3} + k\dfrac{ab}{c^2}\dfrac{d\lambda' L}{d\lambda'}\right), \\ \mathcal{C} = 4\pi\gamma\left(\dfrac{1-k}{3} + k\dfrac{ab}{c^2}L\right); \end{cases}$$

on déduira de là α, β, γ et l'on voit par suite que la forme (5) attribuée à la fonction f satisfait bien aux conditions du problème.

15. *Action de l'ellipsoïde sur un point extérieur.* — Soient X, Y, Z les composantes de cette force suivant Ox, Oy, Oz. Nous avons, en ayant égard à la valeur (4),

$$(15)\qquad \begin{cases} X = \mathcal{A} + \dfrac{dQ}{dx}, \\ Y = \mathcal{B} + \dfrac{dQ}{dy}, \\ Z = \mathcal{C} + \dfrac{dQ}{dz}. \end{cases}$$

En se reportant au n° **16**, l'action de l'ellipsoïde (A) sur le point M a pour composantes, suivant Ox, Oy, Oz,

$$-4\pi\frac{abc}{c_1^3}x\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1},\quad -4\pi\frac{abc}{c_1^3}y\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1},\quad -4\pi\frac{abc}{c_1^3}zL_1,$$

en ne perdant pas de vue que c_1, λ_1, λ'_1 sont des fonctions de x, y, z.

Les composantes semblables de l'attraction exercée par l'ellipsoïde (A′) s'obtiendront en remplaçant dans les expressions précédentes x, y, z respectivement par $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$; mais, comme α, β, γ sont traités comme des infiniment petits, on voit que le résultat sera le même que si l'on ajoutait aux expressions ci-dessus leurs différentielles totales, en y remplaçant dx, dy, dz par $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$.

En prenant la différence entre les actions exercées par (A) et (A′), nous aurons

$$\frac{dQ}{dx} = -4\pi kabc\left(\alpha\frac{d\dfrac{x}{c_1^3}\dfrac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}}{dx} + \beta\frac{d\dfrac{x}{c_1^3}\dfrac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}}{dy} + \gamma\frac{d\dfrac{x}{c_1^3}\dfrac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}}{dz}\right),$$

$$\frac{dQ}{dy} = -4\pi kabc\left(\alpha\frac{d\dfrac{y}{c_1^3}\dfrac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dx} + \beta\frac{d\dfrac{y}{c_1^3}\dfrac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dy} + \gamma\frac{d\dfrac{y}{c_1^3}\dfrac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dz}\right),$$

$$\frac{dQ}{dz} = -4\pi kabc\left(\alpha\frac{d\dfrac{zL_1}{c_1^3}}{dx} + \beta\frac{d\dfrac{zL_1}{c_1^3}}{dy} + \gamma\frac{d\dfrac{zL_1}{c_1^3}}{dz}\right).$$

Si l'on ajoute entre elles ces valeurs multipliées respectivement par dx, dy, dz, on trouve, pour le coefficient de $-4\pi k\,abc\alpha$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{c_1^3}\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}dx + y\frac{d\lambda'_1 L_1}{c_1^3 d\lambda'_1}dy + z\frac{L_1}{c_1^3}dz\right).$$

Cette expression n'étant autre chose que celle d'un potentiel, la quantité entre crochets est nécessairement une différentielle exacte de x, y, z et l'on doit avoir par suite

$$\frac{d x \dfrac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}}{dy} = \frac{d y \dfrac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dx}, \quad \frac{d x \dfrac{d\lambda L_1}{d\lambda_1}}{dz} = \frac{dz L_1}{dx}, \quad \frac{d y \dfrac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dz} = \frac{dz L_1}{dy},$$

Il suit de là que l'on a

$$(16) \quad \begin{cases} \dfrac{dQ}{dx} = -4\pi kabc \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\alpha x}{c_1^3}\dfrac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} + \dfrac{\beta y}{c_1^3}\dfrac{d\lambda'_1 L^2_1}{d\lambda'_1} + \dfrac{\gamma z L_1}{c_1^3}\right), \\ \dfrac{dQ}{dy} = -4\pi kabc \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\alpha x}{c_1^3}\dfrac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} + \dfrac{\beta y}{c_1^3}\dfrac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1} + \dfrac{\gamma z L_1}{c_1^3}\right), \\ \dfrac{dQ}{dz} = -4\pi kabc \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\alpha x}{c_1^3}\dfrac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} + \dfrac{\beta y}{c_1^3}\dfrac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda'_1} + \dfrac{\gamma z L_1}{c_1^3}\right), \end{cases}$$

d'où

$$(17) \qquad Q = -4\pi abc\left(\frac{\alpha x}{c_1^3}\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} + \frac{\beta y}{c_1^3}\frac{d\lambda'_1 L'_1}{d\lambda'_1} + \frac{\gamma z L_1}{c_1^3}\right).$$

Au moyen des valeurs (16) les formules (14) feront connaître les composantes cherchées.

16. *Vérification dans le cas de la sphère.* — On a $a = b = c$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda'_1 = 0$, $L_1 = \frac{1}{3}$. Les formules (12) donnent

$$\frac{4\pi\alpha}{3} = \mathcal{A}, \quad \frac{4\pi\beta}{3} = \mathcal{B}, \quad \frac{4\pi\gamma}{3} = \mathcal{C},$$

et l'équation (17) devient

$$(18) \qquad Q = -k\frac{a^3}{r^3}(\mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C}z).$$

Si l'on fait coïncider l'axe des z avec la direction de la force extérieure qui sera, si l'on veut, l'action $-m$ du globe terrestre, et si l'on fait passer le plan zOx par le point M, on a

$$\mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{B} = 0, \quad \mathcal{C} = -m, \quad y = 0,$$

puis

$$Q = mk\frac{a^3}{r^3}z;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dQ}{dx} = -3mk\frac{a^3}{r^5}xz,$$

$$\frac{dQ}{dz} = mk\frac{a^3}{r^3}\left(1 - 3\frac{z^2}{r^2}\right).$$

En ajoutant la force extérieure $-m$ à la seconde de ces formules, on retombe sur les formules (15′) du n° **11**.

17. *Cas d'un ellipsoïde de révolution aplati.* — Nous avons $a = b$, $\lambda_1' = \lambda_1$; les équations (13) et (14) donnent, en faisant $\lambda_1 = \lambda = \frac{a-c}{c}$,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= 4\pi\alpha\left[\frac{1-k}{3} + \frac{k}{2}\frac{a^2}{a^2-c^2}\left(\frac{1}{\lambda}\text{arc tang}\,\lambda - \frac{1}{1+\lambda^2}\right)\right],\\ \mathcal{B} &= 4\pi\beta\left[\frac{1-k}{3} + \frac{k}{2}\frac{a^2}{a^2-c^2}\left(\frac{1}{\lambda}\text{arc tang}\,\lambda - \frac{1}{1+\lambda^2}\right)\right],\\ \mathcal{C} &= 4\pi\gamma\left[\frac{1-k}{3} + k\frac{a^2}{a^2-c^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\text{arc tang}\lambda\right)\right],\end{aligned}\right.$$

d'où α, β, γ.

En ce qui concerne l'action de l'ellipsoïde sur un point extérieur, on a, en portant les valeurs (13) dans la formule (17),

$$(20)\quad Q = -4\pi k\frac{a^2c}{c_1(a^2-c^2)}\left[\frac{1}{2}(\alpha x + \beta y)\left(\frac{1}{\lambda_1}\text{arc tang}\,\lambda_1 - \frac{1}{1+\lambda_1^2}\right) + \gamma z\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\text{arc tang}\lambda_1\right)\right].$$

En faisant $a = b$ et désignant par r la distance du point M au centre O, la formule (8) donne

$$(21)\quad c_1^2 = \frac{1}{2}[r^2 - a^2 + c^2] + \frac{1}{2}\sqrt{(r^2 - a^2 + c^2)^2 + 4(a^2 - c^2)z^2},$$

en y joignant la relation

$$(22)\qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

On pourra ainsi former les valeurs de $\frac{dQ}{dx}, \frac{dQ}{dy}, \frac{dQ}{dz}$, et par suite trouver les composantes X, Y, Z de l'action cherchée.

18. *L'ellipsoïde de révolution est très aplati.* — Supposons que le rapport $\frac{c}{a}$ soit assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré; nous obtiendrons une sorte de plaque circulaire dont l'épaisseur décroîtra en allant du centre à la circonférence; on a

$$\lambda \frac{c}{a} = 1, \quad \text{arc tang} \lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{c}{a},$$

et les équations (19) deviennent

$$(19') \quad \left\{ \begin{aligned} 4\pi\alpha &= \frac{3\mathcal{A}}{1 - k + \frac{3\pi}{4} k \frac{c}{a} - 3k \frac{c^2}{a^2}}, \\ 4\pi\beta &= \frac{3\mathcal{B}}{1 - k + \frac{3\pi}{4} k \frac{c}{a} - 3k \frac{c^2}{a^2}}, \\ 4\pi\gamma &= \frac{3\mathcal{C}}{1 - k + \frac{3\pi}{2} k \frac{c}{a}}. \end{aligned} \right.$$

On a conservé le terme en $\frac{c^2}{a^2}$ en dénominateur des deux premières de ces expressions, en raison de ce que, en général, $1 - k$ est une très petite fraction.

La formule (20) donne ensuite

$$(20') \quad \left\{ \begin{aligned} Q = &- \frac{3kc(\mathcal{A}x + \mathcal{B}y)}{2\left(1 - k + \frac{3\pi}{4}\frac{kc}{a} - 3k\frac{c^2}{a^2}\right)} \left(\frac{1}{a} \text{arc tang} \frac{a}{c_1} - \frac{c_1}{a^2 + c_1^2}\right) \\ &- \frac{3kc\mathcal{C}z}{1 + 2k - \frac{3\pi}{2}\frac{k^2}{a}} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{a} \text{arc tang} \frac{a}{c_1}\right). \end{aligned} \right.$$

Admettons maintenant que le point M soit assez peu éloigné du centre de la plaque pour que l'on puisse négliger les carrés de $\frac{z^2}{a^2}, \frac{r^2}{a^2}$. L'équation (21) donne

$$c_1 = \pm z\left(1 + \frac{r^2 - z^2}{2a^2}\right), \tag{21'}$$

en prenant le signe + ou le signe — selon que z est positif ou négatif. On a d'ailleurs

$$\text{arc tang}\frac{a}{c_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{c_1}{a} + \frac{c^3}{3a^3},$$

et l'expression (20') se réduit à

$$\begin{aligned} Q = &- \frac{3kc(\mathcal{A}x + \mathcal{B}y)}{2\left(1 - k + \dfrac{3\pi}{2}\dfrac{kc}{a} - 3k\dfrac{c^2}{a^2}\right)}\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{2z}{a}\right) \\ &- \frac{3rc\mathfrak{C}z}{1+2k}\left(\pm\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \frac{\pi z}{2a} \pm \frac{z^2}{a^2}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= -\frac{3k\pi\mathcal{A}c}{4a\left(1 - k + \dfrac{3\pi kc}{4a} - \dfrac{3kc^3}{a^3}\right)} \pm \frac{3kc\mathcal{A}z}{\left(1 - k + \dfrac{3\pi kc}{4a}\right)a^2}, \\ \frac{dQ}{dy} &= -\frac{3\pi kc\mathcal{B}}{4a\left(1 - k + \dfrac{3\pi kc}{4a} - \dfrac{3kc^2}{a^2}\right)} \pm \frac{3kc\mathcal{B}z}{\left(1 - k + \dfrac{3\pi kc}{4a}\right)a^2}, \\ \frac{dQ}{dz} &= -\frac{3\pi kc\mathfrak{C}}{2(1+2k)a} \pm \frac{3kc(\mathcal{A}x + \mathcal{B}y)}{\left(1 - k + \dfrac{3\pi kc}{4a}\right)a^2}. \end{aligned}\right.$$

De ces formules on déduit ce qui suit :

Supposons que la différence $1 - k$ soit assez petite pour être négligée. Les équations (15) et (22) donneront, pour les composantes de l'action exercée sur M,

$$X = \frac{4e\mathcal{A}}{\pi a} \mp \frac{4\mathcal{A}z}{\pi a},$$

$$Y = \frac{4c\mathcal{B}}{\pi a} \mp \frac{4\mathcal{B}z}{\pi a},$$

$$Z = -\mathfrak{C} - \frac{\pi c\mathfrak{C}}{2a} - \frac{4(\mathcal{A}x + \mathcal{B}y)}{\pi a}.$$

On voit ainsi que l'action de la plaque détruit en presque totalité la composante de la force extérieure parallèle au plan moyen de cette plaque, tandis que la composante normale à ce plan n'a pas été sensiblement modifiée, à la condition toutefois que la composante dont il s'agit ne soit pas très petite ou que la force extérieure ne soit pas trop inclinée sur la plaque; de sorte qu'une aiguille aimantée suspendue librement par son centre prendrait une direction sensiblement normale à la plaque.

En supposant que la force extérieure soit due au magnétisme terrestre, Poisson a considéré, comme application de sa formule, les cas où la plaque est horizontale et où elle est parallèle à l'axe des pôles magnétiques. Les conséquences auxquelles il arrive ne sont pas de nature à trouver place dans cette analyse.

19. *Cas d'un ellipsoïde allongé.* — Soit $b = c$; on a

$$\lambda'_1 = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$L_1 = \frac{\sqrt{1+\lambda_1^2}}{2\lambda_1^2} - \frac{1}{2\lambda_1^3}\log(\lambda_1 + \sqrt{1+\lambda_1^2}),$$

$$\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} = -\frac{1}{\lambda_1^2\sqrt{1+\lambda_1^2}} + \frac{1}{\lambda_1^3}\log(\lambda_1 + \sqrt{1+\lambda_1^2}),$$

$$\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1} = L_1,$$

et, pour déterminer c_1,

$$y^2 + z^2 + \frac{c_1^2 x^2}{c_1^2 + a^2 - c^2} = c_1^2,$$

d'où

$$c_1^2 = \tfrac{1}{2}(r^2 - a^2 + c^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(r^2 - a^2 + c^2)^2 + 4(a^2 - c^2)(y^2 + z^2)}.$$

On n'a plus maintenant qu'à faire des substitutions dans les équations (14) et (17) pour obtenir la solution du problème.

20. *L'ellipsoïde est très allongé.* Supposons que $\frac{c}{a}$ soit assez petit pour que l'on puisse en négliger le carré; l'ellipsoïde deviendra une sorte d'aiguille (A) ayant pour longueur $2a$ et dont c serait le rayon en son milieu. On a

$$\lambda_1 c_1 = a,$$

$$(24)\quad \begin{cases} 4\pi\alpha = \dfrac{3\mathcal{A}}{1-k+3k\dfrac{c^2}{a^2}\left(\log\dfrac{2a}{c}-1\right)}, \\ 4\pi\beta = \dfrac{3\mathcal{B}}{1+\dfrac{k}{2}}, \\ 4\pi\gamma = \dfrac{3\mathcal{C}}{1+\dfrac{k}{2}}, \end{cases}$$

$$Q = -\frac{3kc^2(\mathcal{B}y+\mathcal{C}z)}{\left(1+\dfrac{k}{2}\right)c_1^2} - \frac{3kc^2\mathcal{A}x\left(\log\dfrac{2a}{c_1}-1\right)}{(1-k)a^2+3kc^2\left(\log\dfrac{2a}{c}-1\right)}.$$

Admettons maintenant que la distance du point M au milieu de l'aiguille soit assez petite pour que l'on puisse négliger le carré de $\frac{r}{a}$, et, par suite, celui de $\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{a}$; alors on a

$$c_1 = \sqrt{y^2+z^2},$$

et, en posant

$$(25)\quad k' = \frac{3kc^2}{(1-k)a^2+3kc^2\left(\log\dfrac{2a}{c}-1\right)},$$

on trouve

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{dQ}{dx} = -k'\mathcal{A}\left(\log\dfrac{2a}{\sqrt{y^2+z^2}}-1\right), \\ \dfrac{dQ}{dy} = \dfrac{3kc^2[\mathcal{B}(y^2-z^2)+2\mathcal{C}yz]}{\left(1+\dfrac{k}{2}\right)(y^2+z^2)} + k'\dfrac{\mathcal{A}xy}{y^2+z^2}, \\ \dfrac{dQ}{dz} = \dfrac{3kc^2[\mathcal{C}(z^2-y^2)+2\mathcal{B}yz]}{\left(1+\dfrac{k}{2}\right)(y^2+z^2)} + k'\dfrac{\mathcal{A}xz}{y^2+z^2}. \end{cases}$$

On déduit de ces formules les conséquences suivantes, en supposant que la force extérieure soit due à l'action magnétique terrestre.

1° *L'aiguille* (A) *est perpendiculaire au plan du méridien magnétique.* — On a $\mathcal{A} = 0$ et, de plus, $\mathcal{B} = 0$ en prenant la partie positive de l'axe des z dirigée vers le pôle boréal; la quantité $\mathcal{C}$ sera négative ou positive selon que la particule magnétique placée en M sera boréale ou australe.

Désignant par u la distance du point M à l'axe de l'aiguille et par ν l'angle qu'elle fait avec l'axe Oz, on a

$$y = u \sin\nu, \quad z = u \cos\nu,$$

et, en posant

$$\frac{3k}{1+\frac{k}{2}} = 2g,$$

on trouve

$$\frac{dQ}{dx} = 0,$$

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{2gc^2\mathcal{C}\sin 2\nu}{u^2},$$

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{2gc^2\mathcal{C}\cos 2\nu}{u^2};$$

puis on a

$$X = 0,$$

$$Y = -\frac{2gc^2\mathcal{C}\sin 2\nu}{u^2},$$

$$Z = -\mathcal{C} - \frac{2gc^2\mathcal{C}\cos 2\nu}{u^2}.$$

Si le point M appartient à une aiguille aimantée (C), suspendue librement par son centre de gravité, très courte relativement à la distance u de son milieu au point O, cette aiguille restera dans le plan du méridien magnétique, mais l'influence de l'aiguille ellipsoïdale (A) modifiera son inclinaison. En appelant ε l'angle que la partie de l'aiguille (C) qui aboutit au pôle boréal fera avec sa direction naturelle, on aura

$$\tang \varepsilon = \frac{Y}{Z} = \frac{2gc^2 \sin 2\nu}{u^2 + 2gc^2 \cos 2\nu}\cdots$$

Il y aura un cas où l'aiguille (C) ne prendra plus de direction déterminée, c'est lorsque l'on aura en même temps $Y = 0$, $Z = 0$, ou

$$\nu = \frac{\pi}{2}, \quad u = c\sqrt{2g}.$$

2° *L'aiguille* (A) *est parallèle à l'action magnétique terrestre.* — On a $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ et, si la partie positive de Ox est dirigée vers le pôle magnétique boréal, la quantité $\mathfrak{A}$ sera positive ou négative selon que la particule située en M sera boréale ou australe.

En continuant à désigner par u la distance du point M à Ox, et par ν l'angle qu'elle fait avec Oz, on a

$$X = -\mathfrak{A} + k'\mathfrak{A}\left(\log\frac{2a}{u} - 1\right),$$

$$Y = -\frac{k'\mathfrak{A}' x \sin\nu}{u},$$

$$Z = -\frac{k'\mathfrak{A} x \cos\nu}{u}.$$

La résultante des forces Y et Z est dirigée suivant la distance de M à l'axe de l'aiguille et varie en raison inverse du carré de cette distance.

Si donc le point M appartient à une aiguille aimantée (C) librement suspendue par son centre de gravité, la projection de cette aiguille sur un plan perpendiculaire à l'axe de (A) sera normale à cette droite, et l'on voit, d'après les signes de $\mathfrak{A}$ et de x, que ce sera la projection de son pôle boréal ou celle de son pôle austral qui tombera du côté de (A), selon que le plan perpendiculaire en O à Ox passera au-dessous ou au-dessus du milieu de (C), ou selon que x sera positif ou négatif. Si l'on désigne par ε' l'inclinaison sur Ox de l'aiguille (C) dont la longueur est censée très petite par rapport à u, on a

$$\operatorname{tang} i' = -\frac{\sqrt{Y^2+Z^2}}{X} = \frac{k'x}{u\left(1+k'-k'\log\dfrac{2a}{u}\right)}.$$

Supposons maintenant que l'aiguille (C) soit assujettie à rester horizontale; soient $O\chi$ la projection horizontale de Ox; i l'inclinaison magnétique $\widehat{xO\chi}$; nous prendrons pour axe des y la perpendiculaire en O au plan des $xO\chi$; soit, de plus, δ l'angle formé par (C) avec sa direction naturelle $O\chi$. Les forces X et Z donnent suivant $O\chi$ la composante

$$X\cos i + Z\sin i;$$

on a, par suite,

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{Y}{X\cos i + Z\sin i} = \frac{k'x\sin\nu}{k'x\cos\nu\sin i + u\left(1+k'-k'\log\dfrac{2a}{u}\right)\cos i}.$$

Telle est la formule qu'il s'agissait d'établir.

§ V. — Actions simultanées de plusieurs sphères aimantées par l'influence de la Terre sur un point qui leur est extérieur.

21. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les centres des n sphères.

Nous rappellerons (nº **19**) que pour chaque sphère les coordonnées du point extérieur M sont rapportées à trois axes rectangulaires menés par le centre de cette sphère. Nous supposerons tous les systèmes d'axes parallèles entre eux, de manière que les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ du magnétisme terrestre suivant leurs trois directions soient les mêmes quand on passera d'une sphère à une autre.

Nous distinguerons par l'indice i les quantités k, a, r, x, y, z, Q qui se rapportent à la sphère dont le centre est C_i.

Les composantes de l'action totale exercée par les sphères sur le point M sont

$$X = \sum \frac{dQ_i}{dx_i},\quad Y = \sum \frac{dQ_i}{dy_i},\quad Z = \sum \frac{dQ_i}{dz_i}$$

ou, en vertu de la formule (19) du n° **19**,

$$(1)\quad \begin{cases} X = -\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathcal{A}\left(1 - \frac{3x_i^2}{r_i^2}\right) - \frac{3x_i}{r_i^2}(\mathcal{B}y_i + \mathcal{C}z_i)\right], \\ Y = -\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathcal{B}\left(1 - \frac{3y_i^2}{r_i^2}\right) - \frac{3y_i}{r_i^2}(\mathcal{A}x_i + \mathcal{C}z_i)\right], \\ Z = -\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathcal{C}\left(1 - \frac{3z_i^2}{r_i^2}\right) - \frac{3z_i}{r_i^2}(\mathcal{A}x_i + \mathcal{B}y_i)\right]. \end{cases}$$

25. Cherchons à voir si le système de sphères ne peut pas être combiné de manière qu'il n'exerce aucune action sur le point M, quand même le magnétisme terrestre viendrait à éprouver un changement en grandeur et en direction. Nous avons, en égalant à zéro les coefficients de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des expressions précédentes,

$$(2)\quad \begin{cases} \sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left(1 - \frac{3x_i^2}{r_i^2}\right) = 0, \\ \sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left(1 - \frac{3y_i^2}{r_i^2}\right) = 0, \\ \sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left(1 - \frac{3z_i^2}{r_i^2}\right) = 0; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3} x_i y_i = 0, \\ \sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3} x_i z_i = 0, \\ \sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3} y_i z_i = 0. \end{cases}$$

La somme [1] des équations (2) étant identiquement nulles, on voit que l'on n'a à satisfaire qu'à cinq conditions.

---

(1) Par une singulière inadvertance, Poisson a écrit ainsi cette somme

$$\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3},$$

et, comme elle ne peut pas être nulle, il avait conclu de là que les actions des sphères ne pouvaient pas s'entre-déduire pour toutes les directions du magnétisme terrestre.

22. Déterminons maintenant les conditions que doit remplir le système de sphères pour qu'il n'ait aucune influence sur la direction de l'aiguille de déclinaison, quelle que soit celle du magnétisme terrestre. Nous placerons l'origine des coordonnées au milieu O de l'aiguille en prenant le plan horizontal pour celui des xy.

Nous poserons en conséquence

$$\frac{X}{Y} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}};$$

d'où, en vertu des deux premières des équations (1),

$$\begin{aligned}&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathcal{A}\mathcal{B}\left(1 - \frac{3x_i^2}{r_i^2}\right) - \frac{3x_i}{r_i^2}(\mathcal{B}^2 y_i + \mathcal{B}\mathcal{C} z_i)\right]\\ -&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathcal{B}\mathcal{A}\left(1 - \frac{3y_i^2}{r_i^2}\right) - \frac{3y_i}{r_i^2}(\mathcal{A}^2 x_i + \mathcal{A}\mathcal{C} z_i)\right] = 0.\end{aligned}$$

On déduit de là, en égalant à zéro les coefficients de $\mathcal{A}\mathcal{B}$, $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{B}^2$, $\mathcal{A}\mathcal{C}$, $\mathcal{B}\mathcal{C}$,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5}(x_i^2 - y_i^2) = 0,\\ &\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} x_i y_i = 0,\\ &\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} x_i z_i = 0,\\ &\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} y_i z_i = 0.\end{aligned}\right.$$

23. Considérons d'abord le cas de deux sphères; nous avons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5}(x_1^2 - y_1^2) = -k_2 \frac{a_2^3}{r_2^5}(x_2^2 - y_2^2),\\ &k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5} x_1 y_1 \qquad = -k_2 \frac{a_2^3}{r_2^5} x_2 y_2,\\ &k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5} x_1 z_1 \qquad = -k_2 \frac{a_2^3}{r_2^5} x_2 z_2,\\ &k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5} x_1 z_1 \qquad = -k_2 \frac{a_2^3}{r_2^5} y_2 z_2.\end{aligned}\right.$$

En multipliant terme à terme les deux dernières de ces équations et supprimant le facteur commun qui résulte de la considération de la seconde, on trouve

$$k_1 \frac{a_1^3 z_1^2}{r_1^5} + k_2 \frac{a_2^3 z_2^2}{r_2^5} = 0,$$

ce qui exige que l'on ait $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, ou que *les centres des sphères soient situés dans le plan horizontal.*

Soient φ_1, φ_2 les angles que forment r_1, r_2 avec Ox. Nous avons

$$x_1 = r_1 \cos\varphi_1, \quad y_1 = r_1 \sin\varphi_1, \quad x_2 = r_2 \cos\varphi_2, \quad y_2 = r_2 \sin\varphi_2,$$

et les deux premières des équations (5) deviennent

$$k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} \cos 2\varphi_1 = - k_2 \frac{a_2^3}{r_2^3} \cos 2\varphi_2,$$

$$k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} \sin 2\varphi_1 = - k_2 \frac{a_1^3}{r_2^3} \sin 2\varphi_2;$$

d'où successivement

$$\operatorname{tang} 2\varphi_1 = \operatorname{tang} 2\varphi_2,$$

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_1 = \varphi_2 \pm \frac{\pi}{2}, \\ &\frac{k_1 a_1^3}{r_1^4} = \frac{k_2 a_2^3}{r_2^3}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi *les rayons vecteurs des deux sphères doivent être perpendiculaires entre eux et, si les sphères sont de même nature, proportionnels aux rayons des sphères.*

27. Revenons au cas général où le système est composé d'un nombre quelconque de sphères. Faisons sortir des sommes des équations (4) les éléments qui se rapportent à la sphère (C_1), et considérons comme données les quantités

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^n k_i \frac{a_i^3}{r_i^5}(x_i^2 - y_i^2) = \mathrm{A}, \\ &\sum_1^n k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} x_i y_i = \mathrm{B}, \\ &\sum_1^n k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} x_i r_i = \mathrm{C}, \\ &\sum_1^n k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} y_i z_i = \mathrm{D}, \end{aligned}\right.$$

sauf à établir ultérieurement les conditions que doivent remplir les constantes pour que le problème soit susceptible d'une solution. En posant, comme plus haut,

$$x_i = r_1 \cos\varphi_1, \quad y_1 = r_1 \sin\varphi_1,$$

les équations précitées deviennent

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} \cos 2\varphi_1 &&= -\mathrm{A}, \\ &k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} \sin 2\varphi_1 &&= -2\mathrm{B}, \\ &k_1 \frac{a_1^3}{r_1^4} z_1 \cos\varphi_1 &&= -\mathrm{C}, \\ &k_1 \frac{a_1^3}{r_1^4} z_1 \sin\varphi_1 &&= -\mathrm{D}. \end{aligned}\right.$$

De ces équations on déduit d'abord

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} &&= \sqrt{\mathrm{A}^2 + 4\mathrm{B}^2}, \\ &k_1 \frac{a_1^3}{r_1^4} z_1 &&= \sqrt{\mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2}, \end{aligned}\right.$$

puis

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang} 2\varphi_1 &= \frac{B}{2A}, \\ \operatorname{tang} \varphi_1 &= \frac{D}{C}. \end{aligned}\right.$$

Pour que ces deux équations soient compatibles, il faut que l'on ait

$$(11)\qquad 4ADC = B(C^2 - D^2).$$

En admettant que cette condition soit remplie, et que k_1, a_1 soient donnés, les formules ci-dessus feront connaître r_1, z_1 et φ_1.