

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

E. VALLIER

Étude sur les lois de la résistance de l'air

*Journal de mathématiques pures et appliquées 3<sup>e</sup> série*, tome 9 (1883), p. 147-194.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1883\\_3\\_9\\_\\_147\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9__147_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

---

*Étude sur les lois de la résistance de l'air;***PAR M. E. VALLIÈR,**Capitaine d'Artillerie.

---

La question de la résistance de l'air au mouvement des corps qui y sont plongés n'a guère été étudiée jusqu'ici que d'après des résultats d'expérience, et l'on n'a encore énoncé, à la suite de ces essais, que des lois empiriques ne découlant d'aucun principe théorique. Cependant, M. Athanase Dupré, dans sa *Théorie mécanique de la chaleur*, a essayé de rattacher cette question aux lois de l'écoulement des gaz.

Toutefois, ses expériences n'ont pu être réalisées qu'avec de faibles vitesses, de telle sorte que la question peut être considérée comme entière. Je me propose dans le présent travail, après avoir exposé, aussi brièvement que possible, l'état actuel du problème; d'en entreprendre une étude théorique, et, si les résultats qui en seront déduits concordent avec ceux de l'expérience, ils constitueront par cela même une démonstration expérimentale de la loi théorique énoncée.

Laissant de côté la question des faibles vitesses, sur laquelle divers essais ont été faits, essais qui ont conduit à admettre la résistance comme proportionnelle au carré de la vitesse et à l'emploi de formules correspondantes, modifiées par des coefficients de correction, je ne m'occuperai dans cette étude que des grandes vitesses, de 200<sup>m</sup> à 500<sup>m</sup>, qui ne sont réalisées que dans le tir des projectiles de l'Artillerie.

Cette étude du mouvement des projectiles dans l'air, dite *Balistique extérieure*, est d'une très grande complication, puisqu'il y a lieu de tenir compte de la forme du mobile et en outre, actuellement, du mouve-

ment de rotation dont il est animé. La dérivation, conséquence du mouvement de rotation ci-dessus énoncé, est l'objet d'une étude spéciale dans les Ouvrages de Balistique; mais l'expérience a montré qu'elle ne modifiait pas sensiblement la loi de la projection verticale du mouvement et que, par suite, on pouvait la négliger dans l'examen de cette loi.

Les essais ont été faits jusqu'à présent de la manière suivante. On a mesuré, par des procédés variables, la vitesse du projectile en deux points de sa trajectoire, assez rapprochés pour que la perte de vitesse pût être attribuée uniquement à la résistance de l'air, abstraction faite de la pesanteur, et que cette résistance elle-même pût être considérée comme constante, et l'on a déduit de cette perte de vitesse la valeur de la résistance correspondant à la vitesse moyenne observée. C'est ainsi que l'on a été conduit à admettre aujourd'hui, comme représentant les résultats de l'expérience, que :

La résistance de l'air par unité de surface est proportionnelle au cube de la vitesse, pour les projectiles sphériques, et à la quatrième puissance pour les projectiles oblongs. Elle est dirigée suivant la tangente à la trajectoire.

Toutefois, un géomètre anglais, M. Bashforth, la représente dans tous les cas par la formule cubique

$$R = cv^3;$$

mais, dans cette expression, le paramètre  $c$  prend diverses valeurs selon la vitesse et ne peut être considéré comme constant, pour la facilité du calcul, qu'entre certaines limites. M. le général Mayewski, de l'Artillerie russe, admet diverses formules, monômes ou binômes, à exposants entiers, selon la valeur de la vitesse.

Quelle que soit la formule adoptée, les auteurs ont toujours étudié le problème analytiquement en considérant le projectile comme un point matériel et établissant, d'après cela, diverses équations (trajectoire, tangente, etc.) dont ils déterminaient ensuite les paramètres, d'après les données de l'expérience. La position actuelle de la question est donc la suivante :

Représentation de la résistance de l'air par des expressions empiriques;

Lois du mouvement du projectile, considéré comme point matériel, déduites analytiquement des expressions ci-dessus mentionnées, et mises d'accord avec la réalité par une détermination convenable des paramètres.

Cherchons maintenant, comme l'ont proposé Athanase Dupré et, après lui, M. le colonel Sébert, de l'Artillerie de la Marine, à appliquer au problème qui nous occupe les lois de l'écoulement des gaz.

Si l'on suppose que, le projectile étant en mouvement, on lui imprime, ainsi qu'à l'air ambiant, une vitesse égale et contraire à celle dont il est animé, rien ne sera changé au mouvement relatif : le projectile restera immobile, et l'air s'écoulera le long de ses parois d'après les règles ordinaires.

Or ces lois de l'écoulement des gaz ont fait connaître que la vitesse dépend des pressions, et, par suite, on peut remonter de cette vitesse aux pressions sur les parois du projectile, et de là à la résistance.

Il existe trois formules relatives à cette loi d'écoulement : la première suppose que la densité du gaz reste constante dans toute l'étendue du filet considéré, ce qui suppose implicitement que les pressions extrêmes sont égales, à moins de changements notables de température : elle n'est donc évidemment applicable que dans le cas de faibles vitesses, qui n'est pas celui qui nous occupe.

La deuxième, dite formule de Navier, suppose que la température du gaz ne change pas (transformation isotherme).

La troisième, formule de Zeuner, suppose, au contraire, que les éléments gazeux se déplacent sans recevoir ni dégager de chaleur (transformation adiabatique) et qu'il y a donc, par suite du travail intérieur qui s'opère entre les molécules, un changement de température. Il n'entre pas dans le cadre de cette étude d'examiner les considérations théoriques qui peuvent amener à faire un choix entre ces deux formules : il semble d'ailleurs que ni l'une ni l'autre ne soit absolument l'expression du phénomène qui nous occupe et que la transformation ne doive être exactement ni isotherme, car il est probable que le projectile et par suite les gaz s'échauffent, ni adiabatique, puisque, pour échauffer le projectile, le gaz doit dépenser une partie de son énergie.

Entre ces deux lois, qui présentent sans doute, l'une et l'autre, une

image approchée du phénomène, j'ai été conduit à adopter la loi de Navier comme l'avait fait Athanase Dupré; mais la raison principale est simplement que cette formule se prête aux recherches analytiques, ce qui n'est pas le cas de celle de Zeuner qui conduit, dès la première intégration, à des expressions trop compliquées.

Le présent travail a donc pour but l'application de la loi de Navier à l'étude des problèmes balistiques.

#### BALISTIQUE D'UN POINT MATÉRIEL.

*Formule de Navier.* — Considérons un filet gazeux en mouvement; soient

$u_1$  et  $u_2$  les vitesses d'écoulement en deux points;

$p_1$  et  $p_2$  les pressions correspondantes;

$T$  la température absolue au moment de l'expérience (température qui est celle du filet);

$p_0$  la pression atmosphérique normale;

$\delta$  le poids spécifique de l'air à  $0^\circ$  et à la pression  $p_0$ .

La formule de Navier est

$$u_2^2 - u_1^2 = \frac{2g p_0}{\delta} \frac{T}{273} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

ou, en posant

$$\frac{\delta}{2g p_0} \frac{273}{T} = b$$

et résolvant par rapport à  $p_1$ ,

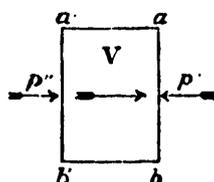
$$p_1 = p_2 e^{b(u_2^2 - u_1^2)}.$$

Soit maintenant un disque élémentaire  $aba'b'$  (*fig. 1*), animé d'une vitesse  $V$  au sein d'une atmosphère à la pression  $p_0$ .

Ce disque supporte à sa partie antérieure une pression  $p'$ , à sa partie postérieure une pression  $p''$ . Pour évaluer ces pressions, Athanase Dupré remarque que, lorsque le régime régulier est établi, il doit y

avoir équilibre entre la pression  $p'$  de la couronne gazeuse placée à l'avant du disque et celle qui, d'après sa formule, correspond à l'ac-

Fig. 1.



tion d'un gaz à la pression  $p_0$ , et animé d'une vitesse  $V$  égale et contraire à celle du disque : faisant donc, dans la formule,

$$u_1 = V, \quad p_1 = p_0, \quad u_2 = 0,$$

on en déduit

$$p_2 = p_0 e^{bV^2}$$

et, comme  $p' = p_2$ ,

$$p' = p_0 e^{bV^2}.$$

On aurait de même, par un raisonnement semblable, pour la pression arrière,

$$p'' = p_0 e^{-bV^2},$$

et par suite, en désignant par  $S$  l'aire du disque élémentaire et par  $R$  la résistance, il viendra

$$R = p_0 S (e^{bV^2} - e^{-bV^2}) = S(p' - p'').$$

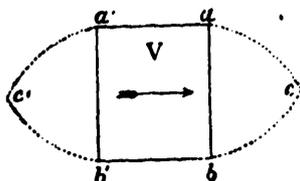
Ce raisonnement, comme le reconnaît Dupré, n'est pas à l'abri de toute objection : il ne doit être considéré que comme donnant une première approximation du phénomène.

On peut encore présenter le calcul comme il suit :

Considérons le disque  $aa'bb'$ , animé de la vitesse  $V$ , dans le sens de la flèche, et imprimons-lui, ainsi qu'à l'atmosphère ambiante, une vitesse égale et de signe contraire, de telle sorte que rien n'est changé au mouvement relatif. L'air s'écoulera sans difficulté le long des parois  $aa'$  et  $bb'$ , et conservera sa pression  $p_0$ . Quant à la colonne gazeuse qui se présente en  $ab$ , elle se comprimera d'abord en avant, jusqu'à ce que

le régime définitif soit établi, puis le gaz continuera à s'écouler le long d'un certain contour  $ca$  et  $cb$ ; à ce moment, il y a équilibre entre l'action du courant gazeux à la pression  $p_0$ , tendant à pénétrer dans  $acb$

Fig. 2.



en vertu de sa vitesse  $V$ , et celle du gaz immobile en  $acb$  à la pression moyenne  $p'$ , et en faisant, comme plus haut, dans la formule de Navier,

$$u_2 = 0, \quad u_1 = V, \quad p_1 = p_0,$$

on aura

$$p' = p_2 = p_0 e^{bV^2}.$$

Il s'établira en arrière un équilibre analogue entre l'action du courant gazeux à la pression  $p_0$  et à la vitesse  $V$ , et celle du gaz immobile en  $a'c'b'$  à la pression  $p''$ , et par suite, en faisant

$$u_2 = 0, \quad u_1 = V, \quad p_2 = p_0,$$

on aura

$$p'' = p_0 e^{-bV^2}.$$

Sous cette forme, on voit que le raisonnement laisse de côté, ou plutôt préjuge l'état du courant gazeux le long des contours  $ca$  et  $a'c'$ . Nous admettrons cependant ces résultats en première approximation, nous réservant d'y revenir ultérieurement.

Reprenant la valeur

$$R = p_0 S (e^{bV^2} - e^{-bV^2}),$$

désignant par  $m$  la masse du projectile et posant

$$c = \frac{p_0 S}{m},$$

il viendra

$$c(e^{bV^2} - e^{-bV^2}),$$

pour valeur de l'accélération correspondant à la force retardatrice de l'atmosphère, et c'est cette expression que nous allons introduire dans nos calculs.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL DANS UN MILIEU HOMOGÈNE  
ET DE TEMPÉRATURE CONSTANTE.

Dans un tel milieu, le coefficient  $b$  est constant, ainsi que  $v_0$  et, par suite, que  $c$  : il n'y a donc de variable que la vitesse.

*Mouvement rectiligne horizontal.* — Désignons par

$x$  l'espace parcouru;

$u$  la vitesse;

$t$  le temps.

On aura

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -R = -mc(e^{bu^2} - e^{-bu^2})$$

ou

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -c(e^{bu^2} - e^{-bu^2})$$

et d'autre part, par définition,

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = u.$$

On déduit aisément des équations (1) et (2) le système

$$(3) \quad c dt = - \frac{du}{e^{bu^2} - e^{-bu^2}}$$

et

$$(4) \quad c dx = - \frac{u du}{e^{bu^2} - e^{-bu^2}}.$$

*Calcul de  $x$ .* — En posant, pour simplifier l'écriture,

$$e^{bu^2} = z,$$

on met l'équation (4) sous la forme

$$c dx = -\frac{1}{2b} \frac{dz}{z^2 - 1},$$

et, en intégrant de 0 à  $x$ , désignant par  $u_0$  la vitesse initiale et par  $z_0$  l'expression  $e^{bu_0^2}$ , il vient

$$(5) \quad x = -\frac{1}{4bc} \operatorname{L} \frac{z-1}{z+1} \frac{z_0+1}{z_0-1}.$$

On peut résoudre l'équation (5) par rapport à  $z$ , ce qui donne

$$(6) \quad z = \frac{\frac{1+z_0}{z_0-1} e^{1/2 bcx} + 1}{\frac{1+z_0}{z_0-1} e^{1/2 bcx} - 1},$$

et, par suite, on a la vitesse en chaque point, puisque  $z = e^{bu^2}$ .

*Calcul de  $t$ .* — La valeur de  $dt$  peut s'écrire

$$(3 \text{ bis}) \quad c dt = \frac{-e^{-bu^2} du}{1 - e^{-2bu^2}}$$

ou

$$-c dt = e^{-bu^2} (1 + e^{-2bu^2} + e^{-4bu^2} + \dots + e^{-2n bu^2} + \dots) du,$$

que nous écrirons

$$-c dt = \sum_{n=0}^{n+\infty} e^{-(2n+1)bu^2} du,$$

pour toutes les valeurs entières de  $n$ .

Considérons le terme général, pris entre les limites  $u_0$  et  $u$ ,

$$\int_{u_0}^u e^{-(2n+1)bu^2} du,$$

et cherchons à en calculer la valeur.

Si l'on pose

$$(2n+1)bu^2 = \gamma^2,$$

$$\gamma = u \sqrt{(2n+1)b},$$

on aura

$$\int_{u_0}^{u''} e^{-(2n+1)bu^2} du = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)b}} \int_{\gamma_0}^{\gamma'} e^{-\gamma^2} d\gamma.$$

Il a été construit des Tables de la fonction

$$\Pi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\gamma^2} d\gamma,$$

et il vient, par suite, pour le terme général,

$$\int_{u_0}^{u''} e^{-(2n+1)bu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} [\Pi(\gamma) - \Pi(\gamma_0)].$$

L'expression de  $t$  devient donc, en substituant à  $\gamma$  sa valeur et changeant les signes des deux membres,

$$ct = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}} \sum_{n=0}^{n''+1} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} [\Pi(u_0\sqrt{b}\sqrt{2n+1}) - \Pi(u\sqrt{b}\sqrt{2n+1})],$$

et l'on peut ainsi, à l'aide des Tables de la fonction  $\Pi$ , calculer les durées en fonction de  $u$ .

On connaît donc tous les éléments de la question, qui n'a d'ailleurs qu'un intérêt théorique.

*Mouvement rectiligne vertical.* — Envisageons maintenant le cas du mouvement d'un projectile lancé verticalement et soumis aux lois de la pesanteur.

En désignant par  $v$  la vitesse, on aura les équations différentielles

$$\frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -c(e^{bv^2} - e^{-bv^2}) - g;$$

d'où

$$(1) \quad dy = -c \frac{v dv}{c(e^{bv^2} - e^{-bv^2}) + g}.$$

En suivant la même marche que dans l'étude du mouvement

horizontal et posant

$$e^{bv} = w,$$

on aura

$$2b dy = - \frac{dw}{cw^2 + gw - c}.$$

Désignant par  $r_1$  et  $r_2$  les racines du dénominateur égalé à zéro, on écrira

$$- 2bc dy \frac{1}{r_1 - r_2} \left( \frac{1}{w - r_1} - \frac{1}{w - r_2} \right) dw$$

et, en intégrant de 0 à  $y$  et posant  $w_0 = e^{bv_0}$ ,

$$- 2bcy = \frac{1}{r_1 - r_2} \int_r \frac{w - r_1}{w - r_2} \frac{w_0 - r_2}{w_0 - r_1}.$$

Soit  $r_1$  la racine positive de l'équation; substituant à  $r_2$  sa valeur  $-\frac{1}{r_1}$  et supprimant l'indice après la substitution, il viendra

$$- 2bcy = \frac{r}{1 + r^2} \int_r \frac{w - r}{1 + rw} \frac{1 + rw_0}{w_0 - r},$$

ou enfin

$$(2) \quad 2bc \frac{1 + r^2}{r} y = \int_r \frac{1 + rw}{w - r} \frac{w_0 - r}{1 + rw_0}.$$

*Hauteur maxima.* — Le projectile s'arrête lorsque l'on a  $v = 0$  ou  $w = r$ , ce qui donne

$$2bc \frac{1 + r^2}{r} Y = \int_r \frac{1 + r}{1 - r} \frac{w_0 - r}{1 + rw_0}.$$

*Mouvement descendant.* — A partir de ce moment, le projectile se met à redescendre, mais  $c$  change de signe, puisque la résistance de l'air ralentit le mouvement de chute; et, en désignant par  $r'$  une quelconque des racines de l'équation

$$cw^2 - gw - c = 0,$$

on aura, par le même calcul que plus haut et intégrant depuis  $Y$  jusqu'à  $y$ ,

$$2bc(y - Y) \frac{1 + r'^2}{r'} = \int_r \frac{1 - r'}{1 + r'} \frac{r'w + 1}{w - r'}.$$

L'équation en  $r'$  a les mêmes racines, changées de signe, que l'équation en  $r$  : on peut donc prendre  $r' = -r$ , et il vient alors, en substituant à  $Y$  sa valeur,

$$2bc \frac{1+r^2}{r} Y = L \left( \frac{1+r}{1-r} \right)^2 \frac{1-rw}{w+r} \frac{1+rw_0}{w_0-r}.$$

*Vitesse à l'origine.* — En faisant  $y = 0$ , il vient

$$w = \frac{w_0(1+2r-r^2) - 2r}{1-2r-r^2+2rw_0}.$$

*Vitesse limite.* — En se reportant à l'équation différentielle du mouvement descendant

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c(e^{bv^2} - e^{-bv^2}) - g = \frac{c w^2 - g(w-r)}{w},$$

où  $w$  par définition est positif et au moins égal à 1, on voit que l'accélération est négative tant que  $w$  est compris entre les racines, c'est-à-dire que le mouvement descendant s'accélère jusqu'à ce que l'on ait

$$w = \frac{1}{r}.$$

A ce moment l'accélération devient nulle et la vitesse est donnée par l'équation

$$bv^2 = L \frac{1}{r} = L \frac{\sqrt{g^2 + \frac{1}{2}c^2} - g}{2c}.$$

En se reportant d'ailleurs à l'équation de la branche descendante, on voit que, pour une valeur de  $w$  supérieure à  $\frac{1}{r}$ , la quantité sous le signe L devient négative et, par suite,  $y$  imaginaire. Pour  $w = \frac{1}{r}$ , on a

$$y = -\infty.$$

Ainsi la vitesse limite n'est atteinte qu'à  $-\infty$ .

Passons maintenant au problème général.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL, LANCÉ OBLIQUEMENT ET SOUMIS  
A L'ACTION DE LA PESANTEUR.

En désignant par

$x, y$  les coordonnées d'un point de la trajectoire;

$\vartheta$  l'angle d'inclinaison;

$V$  la vitesse,

les équations différentielles du mouvement sont

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -c(e^{bV^2} - e^{-bV^2}) \cos \theta,$$

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -c(e^{bV^2} - e^{-bV^2}) \sin \theta - g,$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \tan \theta;$$

en posant, pour simplifier l'écriture,  $p = \tan \theta$ , on déduit de ce système

$$(2 \text{ bis}) \quad dp dx = -g dt^2,$$

qui remplace l'équation (2).

On ne peut, dans un tel système, arriver à la séparation des variables, et force est d'opérer par approximation. Cette difficulté se présente dans toutes les équations de Balistique, à moins qu'on ne suppose la résistance proportionnelle à la première puissance de la vitesse. On emploie alors l'artifice suivant, auquel je vais également recourir.

Soit, d'une manière générale,  $f(v)$  l'expression de l'accélération due à la résistance, de telle sorte que l'équation du mouvement projeté sur l'axe des  $x$  soit

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -f(v) \cos \theta$$

ou, en désignant par  $u$  la vitesse horizontale,

$$\frac{du}{dt} = -f\left(\frac{u}{\cos \theta}\right) \cos \theta$$

ou, comme  $u = \frac{dx}{dt}$ ,

$$\frac{u du}{dx} = -f\left(\frac{u}{\alpha \cos \theta}\right) \cos \theta,$$

que l'on peut écrire

$$\frac{u du}{dx} = -f\left(\frac{xu}{\alpha \cos \theta}\right) \frac{x \cos \theta}{\alpha}.$$

Si l'on admet maintenant que, entre les limites que l'on considère, on puisse donner au paramètre  $\alpha$  une valeur constante, telle que le produit  $\alpha \cos \theta$  s'écarte peu de l'unité, l'équation différentielle se réduira, par approximation, à

$$\alpha \frac{u du}{dx} = -f(\alpha u),$$

où les variables sont séparées.

Dans le cas de tirs sous de petits angles, on se contentera de prendre une seule valeur pour  $\alpha$  : pour le tir sous de grands angles, on subdivisera la trajectoire en plusieurs arcs, à chacun desquels on affectera une valeur convenable de  $\alpha$ .

D'après cette méthode, l'équation (1) sera remplacée par l'équation approchée

$$(1 \text{ bis}) \quad x \frac{u du}{dx} = -c(e^{b\alpha^2 u^2} - e^{-b\alpha^2 u^2})$$

ou

$$\frac{xu d(xu)}{dx} = -cx(e^{b\alpha^2 u^2} - e^{-b\alpha^2 u^2}).$$

Cette équation n'est autre que celle que nous avons rencontrée dans l'étude du mouvement horizontal, en y remplaçant  $u$  par  $\alpha u$ ; la même analyse conduira donc à l'équation

$$(1) \quad x = -\frac{1}{4bc\alpha} \text{I.} \frac{z-1}{z+1} \frac{z_0+1}{z_0-1},$$

en posant

$$z = e^{b\alpha^2 u^2}, \quad z_0 = e^{b\alpha^2 u_0^2}.$$

Désignons

$$4bc\alpha \text{ par } m, \quad \frac{z_0+1}{z_0-1} \text{ par } n, \quad \frac{z_0-1}{z_0+1} \text{ par } n' = \frac{1}{n},$$

il vient, en résolvant (4) par rapport à  $z$ ,

$$z = \frac{1 + n'e^{-mx}}{1 - n'e^{-mx}}$$

ou

$$(5) \quad b\alpha^2 u^2 = J. \frac{1 + n'e^{-mx}}{1 - n'e^{-mx}},$$

on remarquera que le produit  $n'e^{-mx}$  est moindre que l'unité.

Cette équation (5) donne la vitesse horizontale en chaque point de la trajectoire ou de l'arc de trajectoire considéré.

*Équation de la trajectoire.* — L'équation (2 bis)

$$dp dx = -g dt^2$$

peut s'écrire

$$\frac{dp}{dx} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -g$$

ou

$$u^2 \frac{dp}{dx} = -g,$$

et, en substituant à  $u$  sa valeur tirée de (5) et séparant les variables, il vient

$$dp = -gbx^2 \frac{1}{J. \frac{1 + n'e^{-mx}}{1 - n'e^{-mx}}} dx.$$

Développant le dénominateur par rapport aux puissances de  $n'e^{-mx}$ , il vient

$$dp = -\frac{gbx^2}{2} \frac{1}{n'e^{-mx} + \frac{n'^3}{3} e^{-3mx} + \dots} dx$$

ou

$$dp = -\frac{gbnx^2}{2} e^{mx} \frac{1}{1 + \frac{n'^2}{3} e^{-2mx} + \dots} dx$$

et, en effectuant la division,

$$dp = -\frac{gbnx^2}{2} e^{mx} \left( 1 - \frac{n'^2}{3} e^{-2mx} - \frac{4n'^4}{45} e^{-4mx} \right) dx$$

ou

$$dp = -\frac{gbnx^2}{2} \left( e^{mx} - \frac{n'^2}{3} e^{-mx} - \frac{4n'^4}{45} e^{-3mx} \right) dx,$$

et, en intégrant de zéro à  $x$ ,

$$(6) \quad p - p_0 = -\frac{gbnx^2}{2} \left( \frac{e^{mx} - 1}{m} + \frac{n'^2}{3} \frac{e^{-mx} - 1}{m} + \frac{4n'^4}{45} \frac{e^{-3mx} - 1}{3m} \right),$$

qui donne l'inclinaison de la tangente en chaque point.

L'équation (3),  $p = \frac{dy}{dx}$ , substituée dans l'équation (6), donne

$$dy - p_0 dx = -\frac{gbnx^2}{2} \left( \frac{e^{mx} - 1}{m} + \frac{n'^2}{3} \frac{e^{-mx} - 1}{m} + \frac{4n'^4}{45} \frac{e^{-3mx} - 1}{3m} + \dots \right) dx,$$

et, en intégrant de zéro à  $x$ ,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} y - p_0 x = -\frac{gbnx^2}{2} \left( \frac{e^{mx} - mx - 1}{m^2} - \frac{n'^2}{3} \frac{e^{-mx} + mx - 1}{m^2} \right. \\ \left. - \frac{4n'^4}{45} \frac{e^{-3mx} + 3mx - 1}{9m^2} + \dots \right), \end{aligned} \right.$$

ce qui est l'équation de la courbe cherchée.

Les équations (6) et (7) peuvent se mettre sous une autre forme.

Les expressions

$$\frac{e^{mx} - 1}{m}, \quad \frac{e^{-mx} - 1}{m}, \quad \dots$$

contiennent  $x$  en facteur;

$$\frac{e^{mx} - mx - 1}{m^2}, \quad \frac{e^{-mx} + mx - 1}{m^2}, \quad \dots$$

contiennent  $x^2$  en facteur, ce qui conduit à poser

$$\frac{e^{mx} - 1}{m} = x F_1(mx),$$

et

$$\frac{e^{mx} - mx - 1}{m^2} = x^2 \frac{F(mx)}{2}.$$

Il a été construit des Tables des fonctions  $F$  et  $F_1$ , qui se rencontrent en Balistique lorsque l'on prend la résistance proportionnelle au carré de la vitesse (ces Tables se trouvent dans les Ouvrages de MM. Didion et Mayewski), et les équations (6) et (7) se mettent alors sous la forme

$$p = p_0 - \frac{gbnx^2}{2} x \left[ F_1(mx) - \frac{n^2}{3} F_1(-mx) + \dots \right],$$

$$y = p_0 x - \frac{gbnx^2}{4} x^2 \left[ F(mx) - \frac{n^2}{3} F(-mx) \right],$$

en se bornant aux deux premiers termes.

Quant aux durées de trajet, on les déduira de l'analyse faite pour le cas du mouvement horizontal, et l'on aura

$$ct = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left[ \Pi(\alpha u_0 \sqrt{b} \sqrt{2n+1}) - \Pi(\alpha u_0 \sqrt{b} \sqrt{2n+1}) \right].$$

*Discussion du coefficient  $n$ .* — Le coefficient  $n$  a pour valeur

$$\frac{z_0 + 1}{z_0 - 1} = \frac{e^{ba^2 u_0^2} + 1}{e^{ba^2 u_0^2} - 1},$$

et, si l'on remarque que le dénominateur contient  $ba^2 u_0^2$  en facteur, on est conduit à écrire

$$n = \frac{1}{b x^2 u_0^2} \frac{e^{ba^2 u_0^2} + 1}{\frac{e^{ba^2 u_0^2} - 1}{b x^2 u_0^2}} = \frac{1}{b x^2 u_0^2} \frac{2 + b x^2 u_0^2 + \frac{b^2 x^4 u_0^4}{1 \cdot 2} + \dots}{1 + \frac{b x^2 u_0^2}{1 \cdot 2} + \dots}$$

ou

$$n = \frac{2}{b x^2 u_0^2} \frac{1 + \frac{b x^2 u_0^2}{2} + \frac{b^2 x^4 u_0^4}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \dots}{1 + \frac{b x^2 u_0^2}{1 \cdot 2} + \frac{b^2 x^4 u_0^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}$$

et, en effectuant la division,

$$n = \frac{2}{b x^2 u_0^2} \left( 1 + \frac{b^2 x^4 u_0^4}{1 \cdot 2} + \dots \right).$$

On prendra donc

$$n = \frac{2}{b^2 x^2 u_0^2} \left( 1 + \frac{b^2 x^4 u_0^4}{12} \right),$$

avec une approximation d'autant plus satisfaisante que le développement ne comprend pas de termes en  $b^3$ , comme on le vérifiera aisément.

Il vient alors dans les deux équations de la tangente et de la courbe

$$p = p_0 - \frac{g}{2 u_0^2} \left( 1 + \frac{b^2 x^4 u_0^4}{12} \right) x \left[ F_1(mx) - \frac{n^2}{3} F_1(-mx) \right]$$

et

$$v = p_0 x - \frac{g}{2 u_0^2} \left( 1 + \frac{b^2 x^4 u_0^4}{12} \right) x^2 \left[ F(mx) - \frac{n^2}{3} F(-mx) \right].$$

Il reste à déterminer le coefficient  $\alpha$ . On se rappelle que ce coefficient doit avoir une valeur intermédiaire entre les valeurs extrêmes de  $\frac{1}{\cos \theta}$  pour toute l'étendue de l'arc considéré. Pour un arc donné de trajectoire, où  $\theta$  varierait par exemple entre  $20^\circ$  et  $30^\circ$ , on déterminerait  $\alpha$  à l'aide de Tables construites à cet effet et qui se trouvent dans les *Traité de Balistique*. Mais, si l'on peut représenter toute la trajectoire par un seul arc, ce qui exige que  $\theta$  varie un peu, c'est-à-dire que l'angle de projection soit faible (on admet qu'il ne doit pas dépasser  $10^\circ$ ), on peut chercher à donner à  $\alpha$  une valeur en fonction des éléments connus sans recourir à la Table spéciale. Dans ce cas, l'angle  $\theta$  varie depuis  $\varphi$ , angle de projection, jusqu'à  $0^\circ$  dans la branche ascendante, et depuis  $0^\circ$  jusqu'à une valeur un peu supérieure à  $\varphi$  dans la branche descendante : la valeur de  $\alpha$  doit donc être comprise entre  $\frac{1}{\cos \varphi}$  et 1.

L'examen de l'équation différentielle (1 bis), comme celui des équations de la courbe et de la tangente, montre qu'en donnant à  $\alpha$  une valeur trop forte on augmente la valeur de la résistance et l'on obtient une trajectoire surbaissée. Malgré cet inconvénient, il est commode d'adopter ici la valeur trop forte  $\alpha = \frac{1}{\cos \varphi}$ , parce que l'on arrive ainsi au plus grand degré de simplicité dans les expressions; mais il ne faut pas oublier qu'il en résulte pour les trajectoires des courbes moins

tendues, et comme conséquence des valeurs trop fortes pour les angles de projection dans les équations aux portées.

En introduisant la valeur  $\alpha = \frac{1}{\cos \varphi}$  dans nos équations, on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Tangente... } \quad \text{tang } \theta &= \text{tang } \varphi - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \varphi} \left( 1 + \frac{b^2 v_0^4}{12} \right) x \left[ F_1 \left( \frac{4bc}{\cos \varphi} x \right) - \frac{n^2}{3} F_1 \left( \frac{-4bc}{\cos \varphi} x \right) \right]. \\ \text{Trajectoire... } \quad y &= x \text{ tang } \varphi - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} \left( 1 + \frac{b^2 v_0^4}{12} \right) x^2 \left[ F \left( \frac{4bc}{\cos \varphi} x \right) - \frac{n^2}{3} F \left( \frac{-4bc}{\cos \varphi} x \right) \right]. \end{aligned}$$

Ces expressions peuvent se mettre sous une autre forme, en employant la notation des fonctions hyperboliques, dont les Tables numériques sont bien connues; et cette transformation permet d'abord de conserver au paramètre  $n$  sa vraie valeur, et ensuite de faire plus rapidement les calculs des formules ci-dessus : car, s'il existe des Tables des  $F(z)$  et  $F_1(z)$ , ces Tables ne sont qu'à argument positif et ne permettent pas, par suite, d'en tirer la valeur du second terme de la parenthèse.

En adoptant donc les notations

$$\text{Sh } \lambda = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}, \quad \text{Ch } \lambda = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}, \quad \text{Th } \lambda = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{e^\lambda + e^{-\lambda}},$$

qui définissent les fonctions hyperboliques, nous aurons

$$n = \frac{e^{bv_0^2} + 1}{e^{bv_0^2} - 1}$$

(dans l'hypothèse  $\alpha = \frac{1}{\cos \varphi}$ ); d'où

$$n = \frac{e^{\frac{bv_0^2}{2}} + e^{-\frac{bv_0^2}{2}}}{e^{\frac{bv_0^2}{2}} - e^{-\frac{bv_0^2}{2}}} = \text{Coth } \frac{bv_0^2}{2}$$

(dans le cas général, on aurait  $n = \text{Coth } \frac{bx^2 u_0^2}{2}$  et l'on écrirait dans les

formules, pour dégager le facteur  $bx^2u_0^2$ ,

$$n = \frac{1}{bx^2u_0^2} \operatorname{Coth} \frac{bx^2u_0^2}{2} bx^2u_0^2.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} F_1(-mx) &= \frac{e^{-mx} - 1}{-mx} = \frac{1}{mx} (-e^{mx} + 1 + e^{mx} - e^{-mx}) \\ &= -F_1(mx) + \frac{2\operatorname{Sh} mx}{mx} \end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned} F(-mx) &= \frac{e^{-mx} + mx - 1}{\frac{1}{2}m^2x^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}m^2x^2} (-e^{mx} + mx + 1 + e^{-mx} + e^{mx} - 2) \end{aligned}$$

ou

$$F(-mx) = -F(mx) + \frac{2\operatorname{Ch} mx - 2}{\frac{1}{2}m^2x^2} = -F(mx) + \frac{4\operatorname{Sh}^2 \frac{mx}{2}}{\frac{1}{2}m^2x^2}$$

ou

$$F(-mx) = -F(mx) + 2 \frac{\operatorname{Sh}^2 \frac{mx}{2}}{\left(\frac{mx}{2}\right)^2}.$$

En faisant les substitutions de ces expressions dans les équations, on obtient

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tang} \varphi - \frac{gx^2}{4v_0^2 \cos^2 \varphi} bv_0^2 \operatorname{Coth} \frac{bv_0^2}{2} \\ &\quad \times \left\{ F(mx) + \frac{n^2}{3} \left[ F(mx) - 2 \frac{\operatorname{Sh}^2 \frac{mx}{2}}{\left(\frac{mx}{2}\right)^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

ou

$$y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{bgx^2}{4 \cos^2 \varphi} \operatorname{Coth} \frac{bv_0^2}{2} \left( 1 + \frac{n^2}{3} \right) \left[ F(mx) - \frac{\frac{2n^2}{3} \operatorname{Sh}^2 \frac{mx}{2}}{1 + \frac{n^2}{3} \left(\frac{mx}{2}\right)^2} \right]$$

et, de même,

$$\operatorname{tang} \theta = \operatorname{tang} \varphi - \frac{bgx}{\cos^2 \varphi} \operatorname{Coth} \frac{bv_0^2}{2} \left( 1 + \frac{n^2}{3} \right) \left[ F_1(mx) - \frac{\frac{2n^2}{3} \operatorname{Sh} mx}{1 + \frac{n^2}{3} \frac{1}{mx}} \right].$$

L'équation aux portées, qui donne l'angle de projection correspondant à une portée donnée, s'obtient en faisant  $y = 0$  dans l'équation de la trajectoire et l'on a

$$\sin 2\varphi = \frac{gX}{2v_0^2} \left( 1 + \frac{b^2 v_0^4}{12} \right) \left[ F\left(\frac{4bc}{\cos\varphi} X\right) - \frac{n'^2}{3} F\left(\frac{-4bc}{\cos\varphi} X\right) \right]$$

ou, avec les notations hyperboliques,

$$\sin 2\varphi = \frac{gbX}{2} \operatorname{Coth} \frac{bv_0^2}{2} \left( 1 + \frac{n'^2}{3} \right) \left[ F\left(\frac{4bc}{\cos\varphi} X\right) - \frac{2n'^2}{3 \left( 1 + \frac{n'^2}{3} \right)} \frac{\operatorname{Sh}^2 \frac{2bcX}{\cos\varphi}}{\left( \frac{2bcX}{\cos\varphi} \right)^2} \right],$$

équations qui se résoudreient par rapport à  $\varphi$  par une méthode d'approximations successives, dans laquelle on donnerait successivement à  $\cos\varphi$ , dans le second membre, les valeurs correspondant à la valeur obtenue précédemment pour  $\varphi$ . Mais il est inutile d'insister sur ces questions, qui ne sont pas susceptibles d'applications pratiques.

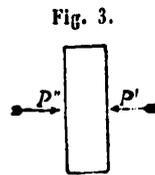
Effectivement, tous ces résultats ont été obtenus en considérant le projectile comme un point matériel, comme un disque élémentaire, ce qui est loin d'être les conditions de la pratique : on n'a donc tenu aucun compte de ses formes extérieures, et l'on a admis, en outre, qu'il ne s'élevait pas assez haut pour que l'on ne pût considérer la densité et la température de l'atmosphère comme constantes, et enfin que l'arc décrit était assez faible pour que l'on prit, sans erreur sensible, pour  $\alpha$  la valeur  $\frac{1}{\cos\varphi}$ .

Ce sont tous ces éléments qu'il nous faut maintenant introduire successivement dans notre analyse.

#### INFLUENCE DE LA FORME ANTÉRIEURE DU MOBILE.

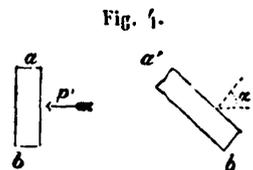
Nous venons d'étudier le mouvement d'un projectile considéré comme point matériel, ou, pour être plus exact, d'un mobile assimilé à un disque élémentaire se mouvant normalement à sa surface et

éprouvant sur ses deux faces des pressions  $p'$ ,  $p''$  dont la différence donne la mesure de la résistance par unité de surface. Il convient



maintenant d'examiner l'influence de la forme antérieure du projectile et de calculer, en tenant compte de cet élément, la véritable valeur de la résistance.

On admet généralement que, pour passer de la pression correspondant à un mouvement du disque élémentaire normal à la surface à celle qui correspond à un mouvement oblique, il suffit de considérer, au



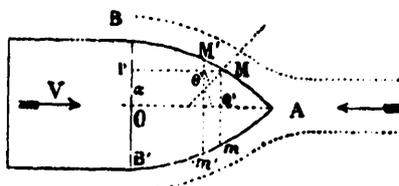
lieu de la vitesse de translation, la composante de cette vitesse suivant la normale à la surface du disque et prendre dans les formules (soit de Navier, soit de Zeuner), au lieu de la vitesse  $v$ , la vitesse  $v \cos \alpha$ .

M. Athanase Dupré admet cette loi, tout en faisant remarquer que son exactitude est loin d'être indiscutable, et que la composante parallèle à l'élément doit également intervenir. Je me contenterai, à son exemple, de cette approximation, ou plutôt j'adopterai les conclusions du raisonnement approché qui va suivre, conclusions qui sont d'accord avec celles de l'hypothèse ci-dessus.

Considérons un projectile, constitué par un corps de révolution, animé d'une vitesse  $V$  dans le sens de son axe, et imprimons-lui, ainsi qu'à l'air ambiant, une vitesse  $-V$ , ce qui ne change rien au mouvement relatif. Il restera immobile, tandis que l'air s'écoulera le long des parois. Nous aurons ainsi un filet gazeux, à la pression  $p_0$ , qui arrivera au sommet A et s'écoulera le long de l'ogive. En un point M,

la vitesse de translation ne sera plus que la composante, suivant la tan-

Fig. 5.



gente en M, de la vitesse V, c'est-à-dire  $v \sin \theta'$ . En faisant donc, dans la formule de Navier,

$$u_1 = V, \quad p_1 = p_0, \quad u_2 = V \sin \theta',$$

on aura

$$V^2 \sin^2 \theta' - V^2 = \frac{1}{\beta} L \frac{p_0}{p_x},$$

$p_x$  étant la pression en M, ou

$$(1) \quad p_x = p_0 e^{\beta V^2 \sin^2 \theta'}.$$

On voit que nous négligeons ainsi l'influence du frottement, puisque, par l'emploi même de la formule de Navier, nous admettons la constance de la température du filet gazeux.

En acceptant la formule (1) sous ces réserves, nous en déduisons la pression totale sur l'ogive. Au point M, en effet, on peut décomposer la pression  $p_x$ , normale à l'élément en deux composantes, l'une perpendiculaire à l'axe, et qui aura pour valeur  $p_x \sin \theta'$ , et l'autre parallèle à l'axe,  $p_x \cos \theta'$ , et sur le parallèle élémentaire  $mm'MM'$ , on aura les composantes

$$p_x \sin \theta' d\sigma,$$

$$p_x \cos \theta' d\sigma,$$

$d\sigma$  étant l'aire élémentaire, que l'on peut représenter par  $2\pi x ds$ ,  $ds$  étant l'élément  $MM'$ .

La composante parallèle à l'axe est la seule qui puisse agir sur le mouvement de translation du projectile, l'autre composante ne pro-

duisant qu'une compression sur le métal : elle a pour valeur

$$2\pi x p_x \cos\theta' ds$$

ou, comme  $\cos\theta' = \frac{dx}{ds}$ ,

$$2\pi x p_x dx.$$

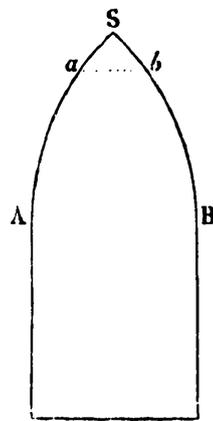
On aura donc la pression totale en prenant

$$P = 2\pi \int x p_x dx$$

entre les limites de  $x$  correspondant aux points A et B.

Les projectiles actuellement en service sont formés d'une partie cylindrique, terminée par une ogive, engendrée par la révolution d'un arc de cercle qui est, en général, tangent à la génératrice du cylindre,

Fig. 6.



ou qui est si peu incliné que l'on peut négliger cette inclinaison. Le projectile est dit ogival lorsque la courbe se continue jusqu'au sommet comme dans la figure : il est dit oblong lorsqu'il se termine par un méplat  $ab$  normal à l'axe.

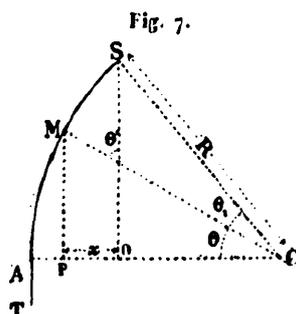
Pour les projectiles ogivaux, nous aurons donc à prendre l'intégrale

$$P = 2\pi \int p_x x dx$$

le long d'une courbe AS continue et parfaitement définie; pour les

projectiles oblongs, il faudrait prendre l'intégrale le long de  $Aa$ , puis calculer, d'autre part, la pression sur le méplat, et la composer avec celle sur la paroi ogivale : toutefois, vu les faibles dimensions du méplat, il conviendrait dans la pratique d'assimiler l'obus oblong à l'obus ogival; mais, dans l'étude théorique qui nous occupe, on ne s'attachera qu'aux projectiles ogivaux; afin de pouvoir obtenir exactement, d'après les formules, la valeur de la pression résultante.

Soit donc un projectile ogival, engendré par la révolution autour de



l'axe  $OS$  de l'arc de cercle  $SA$ , puis de la tangente  $AT$  au point  $A$ . Soient  $R$  le rayon  $CS$ ,  $\theta$ , l'angle  $ACS$ , on a, en  $M$ ,

$$\cos \theta' = \sin \theta,$$

d'où

$$P = 2\pi p_0 \int_{\theta_1}^{\theta} e^{bv^2 \sin^2 \theta} x dx,$$

et, comme  $x = PO = PC - OC$ ,

$$x = R(\cos \theta - \cos \theta_1),$$

$$dx = -R \sin \theta d\theta,$$

$$P = 2\pi R^2 p_0 \int_{\theta_1}^{\theta} e^{bv^2 \sin^2 \theta} (\cos \theta_1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta :$$

c'est cette intégrale définie qu'il s'agit d'évaluer.

DE L'INTÉGRALE DÉFINIE  $\int_{\theta_1}^0 e^{bv^2 \sin^2 \theta} (\cos \theta_1 - \cos \theta) \sin \theta \, d\theta$ .

Cette intégrale est la différence A — B des deux intégrales

$$A = \int_{\theta_1}^0 e^{bv^2 \sin^2 \theta} \cos \theta \, \sin \theta \, d\theta$$

et

$$B = \int_{\theta_1}^0 e^{bv^2 \sin^2 \theta} \cos \theta \sin \theta \, d\theta.$$

1° *Calcul de A.* — On a

$$e^{bv^2 \sin^2 \theta} = e^{bv^2} e^{-bv^2 \cos^2 \theta}, \quad \text{d'où} \quad A = e^{bv^2} \cos \theta_1 \int_{\theta_1}^0 e^{-bv^2 \cos^2 \theta} \sin \theta \, d\theta.$$

Posant, pour abrégier l'écriture,  $bv^2 = v'^2$ ; posant, en outre,  $\cos \theta = z$ , ce qui donne, pour les limites  $z = 1$  et  $z_1 = \cos \theta_1$ , on aura

$$A = e^{v'^2} \cos \theta_1 \int_{z_1}^1 e^{-v'^2 z^2} - dz$$

ou

$$A = \frac{1}{v'} e^{v'^2} \cos \theta_1 \int_1^{z_1} e^{-z^2 v'^2} v' dz.$$

Nous avons déjà rappelé qu'il existe des Tables de la fonction

$$\Pi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

et, d'après cela, nous aurons

$$A = \frac{e^{v'^2}}{v'} \cos \theta_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} [\Pi(v' z_1) - \Pi(v')] = \Pi(v' \cos \theta_1) - \Pi(v'),$$

2° *Calcul de B.* — On a

$$B = \int_{\theta_1}^0 e^{bv^2 \sin^2 \theta} \sin \theta \cos \theta \, d\theta$$

ou

$$B = \frac{1}{2v'^2} \int_{\theta_1}^0 e^{v'^2 \sin^2 \theta} (2v'^2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta = dv'^2 \sin^2 \theta),$$

et, en intégrant,

$$B = \frac{1}{2v'^2} (1 - e^{v'^2 \sin^2 \theta_1})$$

L'expression A - B devient donc

$$\frac{1}{2v'^2} (e^{v'^2 \sin^2 \theta_1} - 1) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{v'^2}}{v'} \cos \theta_1 [\Pi(v') - \Pi(v' \cos \theta_1)],$$

et, en se rappelant que nous avons écrit

$$F_1(t) = \frac{e^t - 1}{t}$$

et qu'il existe des Tables de  $F_1(t)$ , on a finalement

$$P = 2\pi R^2 p_0 \left\{ \frac{\sin^2 \theta_1}{2} F_1(v'^2 \sin^2 \theta_1) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{v'^2}}{v'} \cos \theta_1 [\Pi(v') - \Pi(v' \cos \theta_1)] \right\}.$$

On peut donc, pour un projectile donné, calculer la valeur de P pour toutes les valeurs de  $v'$  et par suite de  $v$ .

Mais, pour la solution analytique des problèmes de Balistique, cette valeur de P en fonction de  $v$  est beaucoup trop compliquée : elle renferme des transcendantes qui ne se prêtent nullement à des intégrations ultérieures. Force est donc de chercher à représenter P par une autre fonction en différenciant suffisamment peu dans les limites des valeurs de  $v$  que l'on considère et se prêtant aux recherches de l'Analyse.

Reprenons à cet effet l'examen de l'intégrale définie

$$\int_0^{\theta_1} e^{v'^2 \sin^2 \theta} (\cos \theta_1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$e^{v'^2} \int_1^0 e^{-v'^2 \cos^2 \theta} (\cos \theta_1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

soit, en posant  $\cos \theta = z$  comme plus haut,

$$e^{v'^2} \int_{z_1}^1 - e^{-v'^2 z^2} (z_1 - z) dz = e^{v'^2} \int_1^{z_1} e^{-v'^2 z^2} (z_1 - z) dz.$$

Développant  $e^{-\nu'^2 z^2}$  en série

$$e^{-\nu'^2 z^2} = 1 - \nu'^2 z^2 + \frac{\nu'^4 z^4}{1.2} + \dots + (-1)^n \frac{\nu'^{2n} z^{2n}}{n!} + \dots$$

Nous aurons, en multipliant chacun des termes de ce développement par  $(z - z_1) dz$  et intégrant de 1 à  $z_1$ , une série de termes qui représentera la valeur de l'intégrale définie que nous étudions. Ce développement est licite, car aucun des termes ne devient infini dans les limites de l'intégration. Le terme général de ce développement sera

$$T_n = e^{\nu'^2} \int_1^{z_1} (-1)^n \frac{(\nu'^2 z^2)^n}{n!} (z_1 - z) dz$$

ou

$$T_n = \frac{(-1)^n}{n!} \nu'^{2n} e^{\nu'^2} \int_{z_1}^1 (z^{2n+1} - z_1 z^{2n}) dz$$

ou

$$T_n = \frac{(-1)^n}{n!} \nu'^{2n} e^{\nu'^2} \left( \frac{z^{2n+2}}{2n+2} - \frac{z_1 z^{2n+1}}{2n+1} \right)_{z=z_1}^1$$

ou enfin

$$T_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\nu'^{2n} e^{\nu'^2}}{(2n+1)(2n+2)} [(2n+1) - (2n+2)z_1 + z_1^{2n+2}]$$

Le trinôme en  $z_1$  admet la racine  $z_1 = 1$  pour racine double; on peut donc écrire

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} [(2n+1) - (2n+2)z_1 + z_1^{2n+2}] = (1-z_1)^2 \varphi_{2n}(z_1)$$

en posant

$$\varphi_{2n}(z_1) = \frac{(2n+1) - (2n+2)z_1 + z_1^{2n+2}}{(1-z_1)^2 (2n+1)(2n+2)},$$

$$\varphi_{2n}(z_1) = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \times (z_1^{2n} + 2z_1^{2n-1} + 3z_1^{2n-2} + \dots + pz_1^{2n-p+1} + \dots + 2n+1)$$

D'après cela, la pression résultante P peut se mettre sous la forme

$$P = \pi R^2 p_0 e^{\nu'^2} (1 - z_1)^2 (a_0 + a_1 \nu'^2 + a_2 \nu'^4 + \dots + a_n \nu'^{2n} + \dots),$$

en posant

$$a_n = (-1)^n \times \frac{\lambda}{n!} \varphi_{2n}(z_1),$$

et l'expression

$$\pi R^2 (1 - z_1)^2$$

n'étant autre que l'aire de la section droite du cylindre base de l'ogive, que nous désignerons par  $S$ , il vient

$$P = p_0 S e^{\nu^2} (a_0 + a_1 \nu^2 + \dots + a_n \nu^{2n} + \dots)$$

En remarquant que  $a_0 = 1$ , et que les signes sont alternés dans le polynôme, on est conduit à chercher à le représenter par une expression de la forme  $e^{-\lambda \nu^2}$   $\lambda$  étant une constante à déterminer, ce qui donnerait pour  $P$  la valeur

$$P = p_0 S e^{\nu^2} e^{-\lambda \nu^2} = p_0 S e^{(1-\lambda)\nu^2}$$

ou, en posant  $1 - \lambda = \beta$ ,

$$P = p_0 S e^{\beta \nu^2}$$

Le paramètre  $\beta$  sera moindre que l'unité, en valeur absolue, par définition, et il doit être positif : on a en effet

$$\frac{dP}{d\nu^2} = \beta p_0 S e^{\beta \nu^2}$$

qui a le signe de  $\beta$ , et, d'autre part, en différentiant par rapport à  $\nu^2$  l'expression

$$P = 2\pi R^2 p_0 \int_{\theta_1}^0 e^{\nu^2 \sin^2 \theta} (\cos \theta_1 - \cos \theta) \sin^3 \theta d\theta,$$

il vient

$$\frac{dP}{d\nu^2} = 2\pi R^2 p_0 \int_{\theta_1}^0 e^{\nu^2 \sin^2 \theta} (\cos \theta_1 - \cos \theta) \sin^3 \theta d\theta :$$

or cette expression se compose d'une somme d'éléments positifs, car le facteur  $e^{\nu^2 \sin^2 \theta} \sin^3 \theta$  est constamment positif, et, de  $\theta_1$  à 0, les deux

facteurs  $(\cos \theta_1 - \cos \theta)$  d'une part et  $d\theta$  de l'autre, étant négatifs, donnent un produit positif.

L'expression  $\frac{dP}{dv^2}$  étant positive dans les limites considérées, il doit donc en être de même de  $\beta$ .

Reste à calculer numériquement ce paramètre  $\beta$  et à se rendre ainsi compte de l'approximation obtenue.

On l'a calculé pour des valeurs de  $\theta$ , égales à  $37^\circ$  et  $45^\circ$ , qui sont les valeurs correspondant aux projectiles ogivaux en usage, et pour des valeurs de  $v'$  variant de 0,50 à 1,50. Dans les conditions expérimentales admises (température de  $15^\circ$  et densité de l'atmosphère égale à 1,208, ce qui correspond à la pression  $760^{\text{mm}}$ , lorsque l'air est à moitié saturé), la valeur de  $b$  est égale à  $\frac{1}{420}$ . Les variations de  $v'$  de 0,50 à 1,50 correspondent à des variations de la vitesse  $v$  depuis  $210^{\text{m}}$  jusqu'à  $630^{\text{m}}$ , ce qui comprend tous les cas des tirs actuels.

Les Tableaux ci-dessous montrent la comparaison des valeurs obtenues pour  $\frac{P}{\rho_0 S}$  par la formule exacte donnée ci-dessus et par la formule exponentielle approchée  $e^{\beta v^2}$ . On voit que les écarts sont très faibles, et sont les uns positifs, les autres négatifs, ce qui permet d'admettre la substitution de l'une des fonctions à l'autre sans qu'il en résulte d'erreur sensible dans les applications.

Angle de  $45^\circ$ ,  $\beta = 0,1878$ .

$v$ .	$v'$ .	Valeur de $\frac{P}{\rho_0 S}$		Différence.
		exacte.	approchée.	
210.....	0,50	1,049	1,048	- 0,001
315.....	0,75	1,107	1,111	+ 0,004
420.....	1,00	1,212	1,207	- 0,005
525.....	1,25	1,225	1,226	+ 0,001
630.....	1,50	1,556	1,526	- 0,003

Angle de  $37^\circ$ ,  $\beta = 0,133$ .

210.....	0,50	1,035	1,034	- 0,001
315.....	0,75	1,085	1,078	- 0,007
420.....	1,00	1,134	1,142	+ 0,008
525.....	1,25	1,208	1,231	+ 0,023
630.....	1,50	1,356	1,349	- 0,007

Nous admettrons donc, dans la suite de ce travail, que l'on peut représenter la résistance de l'air sur la partie antérieure des projectiles ogivaux par la formule

$$P = p_0 e^{\beta b v^2} = p_0 e^{b' v^2},$$

le paramètre  $b'$  ou  $\beta b$  étant déterminé par des calculs théoriques, sans rien demander à l'expérience (1).

#### BALISTIQUE DES PROJECTILES OGIVAUX.

Nous venons d'établir dans les lignes qui précèdent l'expression de la résistance opposée par l'air au mouvement de la partie antérieure du projectile, et, en désignant par  $S$  la section droite et par  $p_0$  la pression atmosphérique, nous avons trouvé pour valeur

$$p_0 S e^{b' v^2}.$$

Comme nous avons admis que le projectile restait couché sur la tangente à la trajectoire, nous n'avons pas à tenir compte des pressions sur la partie cylindrique. Cependant le projectile est muni, dans le voisinage du culot, d'une ceinture de cuivre, faisant une légère saillie sur le contour, dont le rôle a été d'obturer l'âme de la pièce et de faire prendre à l'obus le mouvement de rotation sous l'action des rayures. L'influence de cette ceinture est incontestable au point de vue balistique : de sa position et de son fonctionnement dépendent la régularité de départ de l'obus et sa stabilité; mais il ne semble pas qu'elle ait une grande importance en tant qu'obstacle opposé à l'écoulement de l'air le long des parois, et nous avons, en conséquence, négligé d'en tenir compte.

---

(1) Pour les applications on a une valeur suffisamment approchée de  $b'$  en prenant le coefficient du terme en  $v^2$  du développement en série de la valeur de  $P$  déduite de la formule exacte, soit

$$b' = \frac{3 - 2 \cos \theta - \cos^2 \theta}{6}.$$

Par contre, lorsque l'air arrive à l'extrémité de la paroi latérale du projectile, il se répand à l'arrière du culot et il y aurait lieu d'étudier de quelle façon se produit cet écoulement. Cette question ne semble pouvoir se résoudre qu'à l'aide d'hypothèses plus ou moins hasardées, et ne pas comporter de solution aussi précise que celle des pressions sur la partie antérieure, où l'on avait, au moins, des indications sur le trajet imposé aux filets gazeux par la forme de l'ogive. Son examen fera le sujet de recherches ultérieures. Toutefois, en se reportant aux considérations qui ont été exposées à propos du disque élémentaire et qui ont conduit à l'expression  $p'' = p_0 e^{-b''v^2}$ , on est amené à étudier analytiquement le problème du mouvement des projectiles en représentant la poussée par une expression  $p = p_0 e^{-b''v^2}$ , la détermination du paramètre  $b''$  devant faire l'objet du travail ultérieur, annoncé plus haut. Cependant, on peut dire, dès à présent, qu'il devra être moindre que  $b$ , car nous avons obtenu  $p'' = p_0 e^{-b''v^2}$  en ne considérant au culot que l'action des gaz compris dans le prolongement du cylindre qui forme le corps de l'obus, et à cette pression il faudrait ajouter celle provenant des gaz extérieurs à ce cylindre, qui viennent également combler le vide laissé derrière lui par le projectile.

Nous allons donc examiner la question du mouvement lorsque la résistance est représentée par une expression de la forme

$$R = p_0 S (e^{b''v^2} - e^{-b''v^2}).$$

En désignant, comme plus haut, par  $P$  le poids du projectile, et par  $c$  l'expression

$$c = \frac{p_0 g S}{P},$$

conservant d'ailleurs les mêmes notations pour les éléments de la trajectoire, nous aurons le système d'équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c(e^{b''v^2} - e^{-b''v^2}) \cos \theta,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -c(e^{b''v^2} - e^{-b''v^2}) \sin \theta - g,$$

$$\frac{dy}{dx} = p = \tan \theta.$$

A ce système, nous substituons, par la même marche que celle qui a déjà été suivie, et à l'aide de l'introduction du paramètre  $x$ , le système

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= u = v \cos \theta, \\ \frac{dp}{dx} &= -\frac{g}{u^2}, \\ dy &= p dx, \\ \alpha \frac{u du}{dx} &= -c(e^{b\alpha^2 u^2} - e^{-b'\alpha^2 u^2});\end{aligned}$$

cette dernière équation, en posant  $\alpha u = u'$ , s'écrit

$$-c\alpha dx = \frac{u' du'}{e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2}}$$

et, en substituant la valeur de  $dx$  dans les autres équations, on arrivera au système

$$\begin{aligned}-c\alpha x &= \int \frac{u' du'}{e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2}}, \\ p &= \frac{g\alpha}{c} \int \frac{u' du'}{u'^2(e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2})},\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}dy = p dx &= -\frac{g}{c^2} \frac{u' du'}{e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2}} \int \frac{u' du'}{u'^2(e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2})}, \\ t &= -\frac{1}{c} \int \frac{du'}{e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2}}.\end{aligned}$$

Mais cette solution n'a qu'un intérêt purement théorique; effectivement, si l'on peut toujours obtenir la valeur de  $x$  sous forme finie (comme il est aisé de s'en rendre compte en posant  $u'^2 = kz$ ,  $k$  étant une constante égale au dénominateur commun des deux nombres  $b'$  et  $b''$ ), il n'en est pas de même des autres expressions, qui devraient être développées en séries, et les termes de ces développements, qui se rattacherait pour la plupart au type du logarithme intégral, seraient eux-mêmes d'un calcul fort compliqué.

On est donc conduit à chercher à prendre  $x$  pour variable indépendante, quitte à sacrifier, pour cela, un peu de l'exactitude de l'ana-

lyse et à se contenter d'intégrations approchées; et, pour cela, il y a lieu de chercher à intégrer l'équation différentielle

$$-c a dx = \frac{u' du'}{e^{b'u'^2} - e^{-b'u'^2}},$$

de telle sorte que l'on puisse résoudre par rapport à  $u'^2$  l'équation obtenue et substituer ensuite la valeur de  $u'^2$  ainsi trouvée dans les équations

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{u^2} = -\frac{g a^2}{u'^2}$$

et

$$dy = p dx,$$

ce qui permettra d'exprimer  $p$  et  $y$  en fonction de la variable indépendante  $x$ .

De l'intégrale définie  $\int_{u'_0}^u \frac{u' du'}{e^{b'u'^2} - e^{-b'u'^2}}$ . — On peut écrire la fonction placée sous le signe  $\int$

$$\frac{e^{b'u'^2} u' du'}{e^{(b'+b'')u'^2} - 1}.$$

L'analyse faite précédemment nous permet de nous rendre compte de la valeur de  $b'$ , puisque nous avons appris à calculer ce paramètre, et nous pouvons dire que, dans les limites de la pratique, on aura  $\frac{b'}{b}$  compris entre 0,1 et 0,2,  $b$  étant toujours la constante  $\frac{\hat{\gamma}}{2g\rho_0}$ .

Quant à la valeur de  $\frac{b''}{b}$ , nous en avons ajourné l'étude, remarquant seulement qu'elle devait être moindre que l'unité.

On peut maintenant mettre la différentielle sous une des deux formes

$$e^{\frac{b''-b'}{2}u'^2} \frac{e^{\frac{b'+b''}{2}u'^2}}{e^{(b'+b'')u'^2} - 1} u' du'$$

et

$$e^{-b'u'^2} \frac{e^{(b'+b'')u'^2} u' du'}{e^{(b'+b'')u'^2} - 1}$$

ou

$$e^{\frac{b''-b'}{2}u^2} d \frac{1}{2(b'+b'')} L \frac{e^{\frac{(b'+b'')}{2}u^2} - 1}{e^{\frac{(b'+b'')}{2}u^2} + 1}$$

dans le premier cas, et

$$e^{-b'u^2} d \frac{1}{2(b'+b'')} L(e^{(b'+b'')u^2} - 1).$$

dans le second cas.

Par suite, en considérant un arc de courbe limité aux points où les valeurs de  $u$  sont  $u_1$  et  $u_2$ , nous pourrons obtenir une valeur approchée de l'intégrale cherchée en prenant, dans le premier cas,

$$A \frac{1}{2(b'+b'')} L \frac{e^{\frac{(b'+b'')}{2}u^2} - 1}{e^{\frac{(b'+b'')}{2}u^2} + 1}$$

et, dans le second,

$$C \frac{1}{2(b'+b'')} L(e^{(b'+b'')u^2} - 1),$$

A et C étant des coefficients constants déterminés par la condition d'avoir, le premier, une valeur intermédiaire entre

$$e^{\frac{b''-b'}{2}u_1^2} \quad \text{et} \quad e^{\frac{b''-b'}{2}u_2^2}$$

et le second, une valeur intermédiaire entre

$$e^{-b'u_1^2} \quad \text{et} \quad e^{-b'u_2^2},$$

pourvu que ces valeurs limites ne soient que très peu différentes.

Toutefois, pour que cette méthode soit admissible, elle devra être appliquée au calcul de l'arc entier  $u_1$ ,  $u_2$ , et ce n'est que pour les éléments du point limite  $u_1$  que l'on peut admettre une approximation suffisante : il se peut qu'entre  $u_1$  et  $u_2$  les valeurs réelles et approchées de  $x$  diffèrent notablement, mais les points extrêmes seraient sensiblement exacts.

De cette manière, on obtiendra, pour  $x$ , l'une des deux valeurs

$$- 2(b' + b'')c\alpha x = AL \frac{e^{\left(\frac{b'+b''}{2}\right)u^2} - 1}{e^{\left(\frac{b'+b''}{2}\right)u^2} + 1} + \text{const.}$$

et

$$- 2(b' + b'')c\alpha x = CL(e^{b'+b''u^2} - 1) + \text{const.}$$

En posant, dans la première formule,

$$\frac{2(b' + b'')c\alpha}{\Lambda} = m, \quad b' + b'' = 2B,$$

on aura

$$- mx = I. \frac{e^{bu^2} - 1}{e^{bu^2} + 1} + \text{const.}$$

Cette expression a la même forme que celle qui a été obtenue dans l'étude de la Balistique du point matériel, et qui était

$$- mx = I. \frac{e^{b\alpha^2 u^2} - 1}{e^{b\alpha^2 u^2} + 1} + \text{const.},$$

où l'on avait  $m = \frac{1}{2}bc\alpha$ .

Les autres équations du système sont d'ailleurs identiques; il en résulte que toute l'analyse déjà faite est applicable, et par suite toutes les formules finales, à la condition d'y substituer à  $m$  et à  $b$  les valeurs

$$2 \frac{b' + b''}{\Lambda} c\alpha \quad \text{et} \quad \frac{b' + b''}{2}.$$

L'autre valeur de  $x$  donnera lieu à de nouveaux calculs et à l'établissement d'un nouveau système de formules, et l'on devra recourir à l'un ou à l'autre système, selon que l'approximation sera plus forte et que l'on pourra prendre avec moins d'erreur une valeur moyenne soit pour  $e^{\frac{b'+b''}{2}u^2}$ , soit pour  $e^{-b'u^2}$ , ou que les variations de ces deux exponentielles seront plus faibles entre les deux limites considérées; dans le premier cas, on prendra les formules du point matériel, et, dans le second cas, celles que nous allons établir.

Nous avons d'abord l'expression

$$-mx = L\left(\frac{e^{nu^2} - 1}{n}\right),$$

$n$  étant une constante, en posant

$$B = b' + b'', \quad m = \frac{2Bcz}{C},$$

et, en déterminant la constante à l'aide de la valeur  $u_0$  de  $u'$  pour  $x = 0$ , on aura

$$n = e^{Bu_0^2} - 1$$

et enfin

$$mx = L\left(\frac{e^{Bu^2} - 1}{e^{Bu_0^2} - 1}\right)$$

ou, en résolvant par rapport à  $u' = \alpha u$ , afin d'exprimer la vitesse en fonction de la variable indépendante  $x$ ,

$$e^{B\alpha^2 u^2} = 1 + ne^{-mx}$$

ou

$$(1) \quad B\alpha^2 u^2 = L(1 + ne^{-mx}).$$

Nous avons, en outre, les autres équations établies plus haut,

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = u,$$

$$(3) \quad u = v \cos \theta = v \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$(4) \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{g}{u^2},$$

$$(5) \quad dy = p dx,$$

et nous allons chercher à en déduire l'équation de la courbe. Substituant, à cet effet, dans (4), à  $u^2$  sa valeur tirée de (1), il vient

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{gB\alpha^2}{L(1 + ne^{-mx})}$$

ou

$$dp = -gB\alpha^2 \frac{dx}{L(1 + ne^{-mx})}.$$

L'intégrale définie du second membre n'existe pas sous forme finie : il y a lieu de l'évaluer à l'aide d'un développement en série convenable. Soit, à cet effet,

$$1 + ne^{-mx} = \frac{1+z}{1-z}$$

ou

$$z = \frac{ne^{-mx}}{2 + ne^{-mx}} < 1,$$

on aura

$$I.(1 + ne^{-mx}) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right) = 2z\left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \dots\right)$$

et, par suite,

$$dp = -gB\alpha^2 dx \frac{1}{2z\left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \dots\right)}$$

ou, en effectuant la division,

$$dp = -gB\alpha^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{1}{45} z^3 - \dots \right) dx,$$

c'est-à-dire

$$dp = -g \frac{B\alpha^2}{2} \left( \frac{2 + ne^{-mx}}{ne^{-mx}} - \frac{1}{3} \frac{ne^{-mx}}{2 + ne^{-mx}} - \dots \right) dx;$$

en se bornant aux deux premiers termes du développement et en posant  $n' = \frac{1}{n}$ , pour simplifier l'écriture, on obtient

$$dp = -g \frac{B\alpha^2}{2} \left( 1 + 2n'e^{mx} - \frac{1}{3} \frac{ne^{-mx}}{2 + ne^{-mx}} \right) dx,$$

et intégrant de 0 à  $x$  et désignant par  $p_0$  la valeur initiale de  $p$ ,

$$(6) \quad p - p_0 = -g \frac{B\alpha^2}{2} \left[ x + \frac{2n'(e^{nx} - 1)}{m} - \frac{1}{3m} I. \frac{2 + ne^{-mx}}{2 + n} \right],$$

équation qui donne l'inclinaison de la tangente en fonction de l'abscisse.

En substituant, dans cette équation (6), à  $p$  sa valeur  $p = \frac{dy}{dx}$ , on aura

$$dy - p_0 dx = -g \frac{Bx^2}{2} \left( x + 2n' \frac{e^{mx} - 1}{m} + \frac{1}{3m} L \frac{2 + ne^{-mx}}{2n} \right) dx,$$

ou, intégrant de 0 à  $x$ ,

$$y - p_0 x = -g \frac{Bx^2}{2} \left( \frac{x^2}{2} + 2n' \frac{e^{mx} - mx - 1}{m^2} \right) - g \frac{Bx^2}{6m} T,$$

en désignant par  $T$  l'expression

$$T = \int_0^x L \frac{2 + ne^{-mx}}{2 + n} dx,$$

que nous allons calculer.

Cette expression n'est pas intégrable sous forme finie; posons donc

$$\frac{2 + ne^{-mx}}{2 + n} = \frac{1 - z}{1 + z},$$

d'où

$$z = \frac{n}{n+4} \frac{1 - e^{-mx}}{1 + \frac{n}{n+4} e^{-mx}},$$

et prenant à la place du logarithme le premier terme  $-2z$  de son développement, on aura

$$T = \frac{-2n}{n+4} \int_0^x \frac{1 - e^{-mx}}{1 + \frac{n}{n+4} e^{-mx}} dx$$

ou

$$T = \frac{-n}{n+4} \left( 2x + 2 \frac{1 + \frac{n}{n+4}}{m \frac{n}{n+4}} L \frac{1 + \frac{n}{n+4} e^{-mx}}{1 + \frac{n}{n+4}} \right).$$

Sous cette forme, l'expression  $T$  n'est pas pratique pour des calculs

numériques; pour la simplifier, on peut écrire le logarithme

$$L \frac{1 + \frac{n}{n+4} e^{-mx}}{1 + \frac{n}{n+4}} = L 1 - \frac{\frac{n}{n+4}(1 - e^{-mx})}{1 + \frac{n}{n+4}}$$

et, en ne prenant que le premier terme, on aura, pour  $T$ ,

$$T = \frac{-n}{n+4} \left[ 2x + 2 \frac{1 + \frac{n}{n+4} \frac{n}{n+4} (e^{-mx} - 1)}{m \frac{n}{n+4} \left( 1 + \frac{n}{n+4} \right)} \right],$$

ou

$$T = \frac{-2n}{n+4} \left( \frac{e^{-mx} + mx + 1}{m} \right),$$

ce qui donne finalement, pour équation de la courbe,

$$y = p_0 x - g \frac{Bx^2}{2} \left[ \frac{x^2}{2} + 2n' \frac{e^{mx} - mx - 1}{m^2} - \frac{2n}{3(n+4)} \frac{e^{-mx} + mx + 1}{m^2} \right],$$

valeur dans laquelle on a négligé des termes négatifs dans la parenthèse.

Nous retrouvons ici l'expression

$$e^{mx} - mx - 1,$$

déjà rencontrée dans la Balistique du point matériel, et en posant, comme plus haut,

$$F(mx) = \frac{e^{mx} - mx - 1}{\frac{1}{2} m^2 x^2},$$

il vient

$$(7) \quad y = p_0 x - g \frac{Bx^2 \cdot x^2}{2} \left[ \frac{1}{2} + n' F(mx) - \frac{n}{3(n+4)} F(-mx) \right].$$

En mettant le coefficient  $n'$  en facteur, on obtient, pour le second terme de la valeur de  $y$ ,

$$- \frac{g \cdot x^2}{2} (Bx^2 n') \left[ \frac{n}{2} + F(mx) - \frac{n^2}{3(n+4)} F(-mx) \right],$$

et l'on a

$$Bx^2 n' = \frac{Bx^2}{e^{Bx^2 u_0^2} - 1} = \frac{1}{u_0^2} \frac{1}{\frac{e^{Bx^2 u_0^2} - 1}{Bx^2 u_0^2}}.$$

Nous avons déjà rencontré (*Balistique du point matériel*) la fonction  $F_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}$  dont il existe des Tables : nous écrirons donc

$$Bx^2 n' = \frac{1}{u_0^2} F_1(Bx^2 u_0^2);$$

d'où

$$y = p_0 x - \frac{g x^2}{2 u_0^2 F_1(Bx^2 u_0^2)} \left[ \frac{u}{2} + F_1(mx) - \frac{u^2}{3(n+4)} F_1(-mx) \right].$$

D'autre part, en portant dans l'équation qui donne  $p$ , à la place de  $l$ ,  $\frac{2+ue^{-mx}}{2+u}$ , la valeur que nous avons en réalité substituée pour l'intégration, c'est-à-dire

$$\frac{2u}{3(n+4)} \frac{e^{-mx} - 1}{m}$$

(dérivée du terme qui représente, dans l'expression de  $y$ ,  $f l \frac{2+ue^{-mx}}{2+u}$ ), il vient

$$p - p_0 = - \frac{g B x^2}{2} \left[ x + 2 n' \frac{e^{mx} - 1}{m} + \frac{2u}{3(n+4)} \frac{e^{-mx} - 1}{m} \right],$$

et les mêmes transformations que pour l'équation en  $g$  (mise en facteur de  $n'$ , et substitution aux exponentielles de leur expression à l'aide des fonctions  $F_1$ ) donneront finalement

$$p = p_0 - \frac{g x}{u_0^2 F_1(Bx^2 u_0^2)} \left[ \frac{u}{2} + F_1(mx) - \frac{u^2}{3(n+4)} F_1(-mx) \right].$$

*Durée du trajet.* — En éliminant la variable  $x$  entre les deux équations

$$dx = u dt, \quad mx = l \frac{e^{Bx^2 u_0^2} - 1}{e^{Bx^2 u_0^2} - 1},$$

il vient

$$-\frac{c}{C} dt = \frac{du'}{1 - e^{-Bu'^2}} = (1 + e^{-Bu'^2} + e^{-2Bu'^2} + \dots) du',$$

ou

$$-\frac{c}{C} dt = \sum_{k=0}^{k=+\infty} e^{-kBu'^2} du' = \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{1}{\sqrt{kB}} e^{-kBu'^2} d(u' \sqrt{kB}),$$

à intégrer de 0 à  $t$ , et par suite de  $u_0$  à  $u'$ .

En désignant, comme précédemment, par  $\Pi(z)$  la fonction

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz,$$

on a

$$\int_{u_0}^{u'} e^{-kBu'^2} d(u' \sqrt{kB}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Pi(u' \sqrt{kB} - u_0 \sqrt{kB})$$

et par suite

$$\frac{c}{C} t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{B}} \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} [\Pi(u_0 \sqrt{kB}) - \Pi(u' \sqrt{kB})]$$

ou, en mettant le paramètre  $\alpha$  en évidence et dégageant le premier terme ( $k=0$ ) qui se présente sous la forme  $\frac{0}{0}$ ,

$$\frac{c}{C} t = \alpha(u_0 - u) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}} \sum_{k=1}^{k=+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} [\Pi(\alpha u_0 \sqrt{B} \sqrt{k}) - \Pi(\alpha u \sqrt{B} \sqrt{k})].$$

Nous avons ainsi obtenu l'expression de tous les éléments de la trajectoire, vitesse, durée, tangente, ordonnée. Rappelons ici l'ensemble des formules

$$m = \frac{2Bc\alpha}{C}, \quad n = e^{B\alpha^2 u^2} - 1,$$

C'étant une valeur intermédiaire entre les valeurs que prend  $e^{B\alpha^2 u^2}$  dans l'étendue de l'arc considéré.

Vitesse :

$$B\alpha^2 u^2 = L(1 + ne^{-m.r}).$$

Durée :

$$\frac{c}{C} t = \alpha(u_0 - u) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{B}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} [\Pi(\alpha u_0 \sqrt{B} \sqrt{k}) - \Pi(\alpha u \sqrt{B} \sqrt{k})].$$

Trajectoire :

$$y = p_0 x - \frac{g x^2}{2 u_0^2 F_1(B x^2 u_0^2)} \left[ \frac{n}{2} + F_1(mx) - \frac{n^2}{3(n+1)} F_1(-mx) \right].$$

Tangente :

$$p = p_0 - \frac{g x}{u_0^2 F_1(B x^2 u_0^2)} \left[ \frac{n}{2} + F_1(mx) - \frac{n^2}{3(n+1)} F_1(-mx) \right].$$

*Discussion des paramètres.* — Les mêmes raisons qui ont été développées dans la Balistique du point matériel nous conduisent à donner au paramètre  $\alpha$  la valeur un peu trop forte  $\frac{1}{\cos \varphi}$ ,  $\varphi$  étant l'angle initial dont la tangente est  $p_0$ , sous la réserve que  $\varphi$  restera au-dessous de  $10^\circ$ ; pour des arcs de plus d'amplitude, il y aurait lieu de subdiviser la courbe et d'adopter, d'après les Tables dressées à cet effet, diverses valeurs de  $\alpha$ .

Dans toutes les formules, on peut d'ailleurs, en vertu de l'hypothèse  $\alpha \cos \varphi = 1$ , remplacer le produit  $\alpha u$  par  $v$ , puisque  $u$  est égal à  $v \cos \varphi$ , et ce n'est qu'après cette substitution qu'il y aura lieu de fixer la valeur de  $\alpha$ ; cette substitution conduit au système

$$m = \frac{1}{C} 2 B \alpha,$$

$$n = e^{B u_0^2} - 1.$$

Vitesse :

$$B v^2 = L(1 + n e^{-m x}),$$

Durée :

$$\frac{c}{C} t = v_0 - v + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{B}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} [\Pi(v_0 \sqrt{B} \sqrt{k}) - \Pi(v \sqrt{B} \sqrt{k})],$$

Trajectoire :

$$y = p_0 x - \frac{g x^2}{2 u_0^2 F_1(Bv_0^2)} \left[ \frac{n}{2} + F(mx) - \frac{n^2}{3(n+4)} F(-mx) \right],$$

Tangente :

$$p = p_0 - \frac{g x}{u_0^2 F_1(Bv_0^2)} \left[ \frac{n}{2} + F_1(mx) - \frac{n^2}{3(n+4)} F_1(-mx) \right].$$

Le paramètre  $\alpha$  ne se retrouve plus que dans  $m$ .

Quant au paramètre  $C$ , valeur intermédiaire entre les valeurs limites de  $e^{b'u}$ , c'est-à-dire  $e^{-b'a'u^2}$  ou  $e^{-b'v}$ , on le prendra sous la forme la plus aisée à calculer, et, en désignant par  $v_1$  la vitesse finale, on prendra

$$C^2 = e^{-b'v_1^2} \times e^{-b'v_1^2} \quad \text{ou} \quad C = e^{-b'v_1 v_1},$$

et en posant

$$\gamma = e^{b'v_1 v_1},$$

il viendra

$$m = 2B c x \gamma.$$

En substituant alors à  $B$  et à  $c$  leurs valeurs, savoir

$$B = b' + b'' = \frac{b' + b''}{b} \times \left( b = \frac{T_0}{2g\rho_0 v_0 T_1} \right)$$

et

$$c = \frac{\rho_0 g S}{P},$$

désignant  $\frac{b' + b''}{b}$  par  $\beta$ , on aura

$$m = \frac{\delta S}{P} \alpha \beta \gamma,$$

$\delta$  étant le poids spécifique de l'atmosphère dans les conditions de l'expérience, ou

$$m = \delta \frac{S}{P} \beta \times \alpha \gamma.$$

Le premier produit  $\delta \frac{S}{P} \beta$  est indépendant des conditions particulières du tir (angle initial et vitesse); il forme donc la caractéristique du

projectile : quant au produit  $\alpha\gamma = \frac{e^{b'v_0v_1}}{\cos\varphi}$ , on peut en faire abstraction en première approximation, car il diffère peu de l'unité dans les conditions ordinaires : dans les mêmes limites, la densité  $\delta$  varie peu sur le trajet du projectile, de telle sorte que l'on peut se contenter, pour la valeur de  $m$ , du produit constant  $m = \delta \frac{S}{p} \beta$ .

Pour  $\beta = \frac{b' + b''}{b}$ , nous avons appris à calculer exactement  $b'$  : quant à  $b''$ , sa recherche devra faire l'objet d'études ultérieures, mais, dans les applications qui vont suivre, on le prendra égal à  $b$ , valeur trop forte, puisqu'elle revient à supposer que l'air latéral ne se précipite pas dans le vide formé par le projectile en avançant : on aura donc pour  $m$  une valeur trop considérable, en prenant, comme nous allons le faire,  $\beta = 1 + \frac{b'}{b}$ ; mais toute autre valeur donnée à  $b''$  eût dû être adoptée sans raison théorique d'aucun ordre et déterminée par des conditions purement empiriques, pour faire cadrer les résultats des formules avec ceux de l'expérience, et ce mode d'opérer serait absolument contraire au but et à l'esprit de la présente étude.

Cherchons donc à déduire, des formules ci-dessus, quelques résultats pratiques, à comparer avec ceux de l'expérience. Pour ces derniers, on les trouve en grand nombre dans les Tables de tir, qui ne sont, au moins en ce qui concerne les angles à employer pour obtenir une portée déterminée, que le résumé de données expérimentales compensées entre elles. Cherchant à appliquer nos formules au même problème et faisant pour cela  $y = 0$  dans l'équation de la trajectoire, on obtient

$$\sin 2\gamma = \frac{g\Lambda}{v_0^2 F_1(B, v_0^2)} \left[ \frac{n}{2} + F(mX) - \frac{n^2}{3(n+4)} F(-mX) \right].$$

A l'aide de cette formule, on a calculé des angles de tir pour divers projectiles ogivaux et oblongs. Ne perdons pas de vue qu'aucun des paramètres de la formule n'est déduit d'expériences spéciales : tous sont déterminés par la théorie pure, à l'aide des données classiques sur la valeur de  $g$ , accélération de la pesanteur, et de la densité de l'air.

On peut d'abord se rendre compte de l'influence de la forme anté-

rière du projectile; on a, à cet effet, calculé comme exemple les angles de tir d'un même projectile : 1° en le considérant comme un point matériel, et 2° en tenant compte de sa forme antérieure. Les résultats sont les suivants :

Portée.	Angle correspondant, donné			Différence entre les deux derniers angles.
	par la formule du point matériel.	par la formule actuelle.	par les Tables de tir.	
1000.....	1.49'	1.19'	1.23'	- 4'
2000.....	5.18	2.52	3	- 8'
3000.....	9.44	4.45	4.52	- 7'
4000.....	18.52	7. 3	6.58	+ 5'
5000.....	imaginaire	9.56	9.19	+ 37'

Le seul examen de ce Tableau montre l'importance de l'étude qui a été faite : les résultats obtenus dans l'hypothèse du point matériel sont évidemment absurdes, ceux déduits de l'examen des pressions antérieures peuvent être considérés comme exacts, dans les limites de la précision que comporte la question, jusqu'à 4000<sup>m</sup>.

On trouvera ci-après d'autres Tableaux analogues, donnant les angles calculés et les angles fournis par les Tables pour divers projectiles.

L'examen de tous ces Tableaux dénote une concordance suffisante, entre la théorie et l'expérience, jusqu'à des distances d'environ 4000<sup>m</sup>. Au delà, la formule théorique donne des angles beaucoup trop forts : la raison principale en a été annoncée plus haut; en donnant à  $b''$  une valeur trop forte, c'est-à-dire tenant insuffisamment compte de la poussée arrière, on a exagéré la résistance opposée au mobile, ce qui devait conduire à des angles trop élevés : cela s'est traduit analytiquement par une valeur trop considérable du paramètre  $m$ , et si cette valeur, lorsque  $X$  est petit, n'entraîne pour  $F(mX)$  que des nombres encore admissibles, il n'en est pas ainsi lorsque  $X$  dépasse un certain nombre, 3000<sup>m</sup> ou 4000<sup>m</sup>.

En résumé, nous avons, dans cette étude, après avoir examiné le mouvement d'un point matériel soumis à une résistance atmosphérique déterminée par la loi de Navier, calculé la valeur de cette résistance, d'après la forme de la partie antérieure du mobile; puis, réservant à un prochain travail la discussion des pressions arrière, et admettant

provisoirement pour ces pressions une valeur trop faible, on a établi à nouveau, par une analyse approximative, les équations du mouvement du projectile considéré, et l'on a trouvé un accord suffisant entre la théorie et l'expérience depuis 0 jusqu'à 3000<sup>m</sup>. Il nous reste encore à étudier ces pressions arrière, à examiner la question de la variation de la densité de l'air avec la hauteur du projectile au-dessus du sol, et ces deux problèmes résolus, par l'établissement de formules définitives, avec l'approximation nécessaire à la pratique, on sera arrivé, par la théorie pure et sans le secours de données expérimentales spéciales, à déterminer la loi du mouvement dans l'air d'un solide de révolution, des formes actuellement en usage, et cela d'après une marche générale pouvant s'appliquer à un corps quelconque. Peut-être ces résultats devront-ils être pris en sérieuse considération dans les recherches balistiques; peut-être aussi pourront-ils être regardés comme une démonstration *a posteriori* des lois physiques que l'on a admises comme point de départ; sur ces deux points, c'est à des voix plus autorisées que la mienne qu'il appartient de prononcer, soit d'après les résultats déjà acquis ci-dessus, soit seulement après la solution complète des problèmes signalés plus haut comme restant à traiter.

## TABLEAUX DIVERS.

*Obus de 34<sup>m</sup>. —  $v_0 = 492^m$ .*

Portée. <sup>m</sup>	Angle donné		Erreur		Observation.
	par la théorie.	par les Tables.	absolue.	relative.	
1000 ...	1.11	1.20	- 0. 9	$< \frac{1}{15}$	Résultats exacts, dans les limites de l'expé- rience, au delà de 5000 <sup>m</sup> .
2000 ...	2.36	2.48	- 0.12	$\frac{1}{13}$	
3000 ...	4.15	4.28	- 0.13	$< \frac{1}{20}$	
4000 ...	6.15	6.21	- 0. 6	$< \frac{1}{63}$	
5000 ...	8.41	8.28	+ 0.13	$< \frac{1}{38}$	
6000 ...	11.44	10.50	+ 0.54	$< \frac{1}{12}$	

*Obus de 32<sup>m</sup>. —  $v_0 = 454^m, 5$ .*

1000 ...	1.28	1.29	- 0. 1	$< \frac{1}{39}$	Résultats exacts, dans les limites de l'expé- rience, au delà de 4000 <sup>m</sup> .
2000 ...	3. 8	3.13	- 0. 5	$< \frac{1}{38}$	
3000 ...	5.13	5.12	+ 0. 1	$\frac{1}{312}$	
4000 ...	7.30	7.27	+ 0. 3	$\frac{1}{149}$	
5000 ...	11. 5	10	+ 1. 5	$< \frac{1}{9}$	

*Obus de 27<sup>m</sup> oblong. —  $v_0 = 505^m$ .*

Portée. <sup>m</sup>	Angle donné		Erreur		Observation.
	par la théorie.	par les Tables.	absolue.	relative.	
1000 ...	1. 9 <sup>0</sup>	1. 14 <sup>0</sup>	— 0. 5 <sup>0</sup>	< $\frac{1}{15}$	Exact, dans les limites de l'expérience jus- qu'à 6000 <sup>m</sup> .
2000 ...	2. 33	2. 42	— 0. 9	$\frac{1}{18}$	
3000 ...	4. 15	4. 26	— 0. 9	< $\frac{1}{29}$	
4000 ...	6. 21	6. 24	— 0. 3	$\frac{1}{12^m}$	
5000 ...	9. 6	8. 43	+ 0. 23	< $\frac{1}{32}$	
6000 ...	12. 27	11. 18	+ 1. 9	$\frac{1}{9}$	

*Obus de 27<sup>m</sup> ogival. —  $v_0 = 470^m$ .*

1000 ...	1. 19	1. 23	— 0. 4	$\frac{1}{21}$	Exact, dans les limites de l'expérience jus- qu'à 5000 <sup>m</sup> .
2000 ...	2. 52	3	— 0. 8	< $\frac{1}{22}$	
3000 ...	4. 45	4. 52	— 0. 7	< $\frac{1}{41}$	
4000 ...	7. 3	6. 58	+ 0. 5	< $\frac{1}{83}$	
5000 ...	9. 56	9. 19	+ 0. 37	< $\frac{1}{15}$	

*Obus de 10<sup>m</sup>. —  $v_0 = 485$ .*

1000 ...	1. 27	1. 29	— 0. 2	$\frac{1}{47}$	Exact jusque vers 2500 <sup>m</sup> .
2000 ...	3. 36	3. 31	+ 0. 5	$\frac{1}{12}$	
2500 ...	5. 8	4. 46	+ 0. 22	$\frac{1}{13}$	
3000 ...	7. 16	6. 10	+ 1. 6	$\frac{1}{5}$	

*Obus de 27<sup>m</sup> oblong. Modèle de la Marine. —  $v_0 = 470^m$ .*

1000 ...	1. 20	1. 24	— 0. 4	$\frac{1}{21}$
2000 ...	3. 4	3. 8	— 0. 4	$\frac{1}{47}$
3000 ...	5. 16	5. 11	+ 0. 5	$\frac{1}{62}$
4000 ...	8. 14	7. 34	+ 0. 40	< $\frac{1}{11}$

*Obus de 27<sup>m</sup> oblong. Modèle de Bange. —  $v_0 = 470^m$ .*

1000 ...	1. 21	1. 27	— 0. 6	< $\frac{1}{24}$
2000 ...	3. 2	3. 6	— 0. 4	< $\frac{1}{46}$
3000 ...	5. 13	4. 57	+ 0. 16	$\frac{1}{19}$
4000 ...	7. 54	7. 2	+ 0. 52	$\frac{1}{7}$

Il est rappelé que tous les angles calculés théoriquement ont été effectivement déduits de la théorie pure, sans aucun paramètre déduit d'expériences de tir, et que l'on avait prévu et démontré également que l'on trouverait aux grandes distances des valeurs trop fortes pour ces angles.