JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

Commentaire à la théorie analytique de la chaleur de Fourier

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 79-124.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__79_0>

Commentaire à la théorie analytique de la chaleur de Fourier;

PAR M. H. RESAL.

L'unique édition (1822) de la *Théorie de la chaleur* de l'illustre Fourier [1] est épuisée depuis bien des années. Les volumes, en nombre restreint, dont elle se composait, ont été absorbés en grande partie par des pays étrangers, surtout par l'Allemagne, d'où certainement ils ne nous reviendront plus. Cet Ouvrage ne se trouve, à Paris, que dans quelques bibliothèques ouvertes au public, et dans des bibliothèques spéciales destinées exclusivement à des catégories déterminées de personnes.

La plupart des bibliothèques municipales et universitaires de province n'en possèdent pas.

A la suite de ventes de bibliothèques particulières, on en trouve de temps à autre un exemplaire dans le commerce, mais la plupart de nos géomètres ne sont pas en situation d'en faire l'acquisition, en raison du prix élevé auquel il est porté. Aussi le chef-d'œuvre de l'une de nos plus grandes gloires scientifiques n'est-il généralement connu de nos jeunes générations que dans certaines parties, purement analytiques, introduites dans les traités modernes de Calcul intégral [2].

---

(1) Jean-Baptiste-Joseph Fourier est né à Auxerre le 29 mars 1768, et mort à Paris, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, le 16 mars 1830.

(2) Voir notamment le *Traité de Calcul différentiel et intégral* de M. J.

Aussi ai-je reconnu, depuis longtemps, l'utilité que présenterait la publication d'un extrait des parties essentielles de la théorie de Fourier; je ne songeais pas à entreprendre moi-même ce travail, mais quelques-uns de mes amis m'ont engagé à m'exécuter, et j'aurais eu mauvaise grâce à ne pas me rendre à leurs désirs.

Toutefois, je n'ai pas cru devoir suivre Fourier pas à pas sur les points suivants : 1° au lieu de déduire l'expression du flux de chaleur dans un corps homogène de la considération d'un mur indéfini, je l'ai établie directement en partant de la loi du rayonnement particulaire à travers un élément plan ; 2° j'ai posé les équations en coordonnées cylindriques et sphériques du mouvement de la chaleur dans toutes leurs généralités, au lieu de me restreindre à des cas particuliers; 3° j'ai supprimé les développements métaphysiques auxquels Fourier s'est livré sur la chaleur, et qui ne sont plus conformes aux idées actuelles des physiciens; 4° j'ai également supprimé ses études préliminaires, qui ont précédé le développement en série trigonométrique d'une fonction périodique, et finalement la représentation d'une fonction arbitraire au moyen d'intégrales définies.

Pour éviter toutes recherches au lecteur, j'ai donné en note au bas de la page les différentes intégrales et les formules dont on a besoin, en en donnant des démonstrations ou plus simples ou plus rigoureuses que celles qui se trouvent dans la *Théorie de la Chaleur*, démonstrations empruntées à divers géomètres qui sont arrivés après Fourier.

J'ose espérer que ce Commentaire, une fois compris, facilitera la lecture des Ouvrages suivants, que l'on ne saurait trop recommander : 1° *Théorie mathématique de la chaleur*, par S.-D. Poisson (1) (1835);

Bertrand (2e Vol., 1870); le *Traité de Calcul infinitésimal* de M. Duhamel (1876); le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. Sturm (1873); le *Cours de Calcul différentiel et intégral* de M. J.-A. Serret (1880).

(1) En dehors de digressions sur le rayonnement, le refroidissement et sur l'intégration des équations aux différentielles partielles, Poisson ne s'est principalement occupé que du mouvement de la chaleur dans la sphère, indépendamment de toute hypothèse sur la répartition de la température initiale intérieure et sur la loi de la variation de la température du milieu ambiant avec la position des éléments de la surface avec lesquels il est en contact. Il fait ensuite l'application de ses formules au mouvement de la chaleur à l'intérieur et à la surface de la

2° *Cours de Physique mathématique*, par M. Émile Mathieu ([1]) (1873);
3° *Leçons sur la Théorie mathématique de la chaleur* (1861), par M. G. Lamé ([2]).

§ I. — *Généralités.*

1. *Du flux de la chaleur.* — Soient

$d\varpi$, $d\varpi'$ les volumes de deux éléments matériels très voisins m, m' d'un corps solide homogène ;
V_1, V'_1 leurs températures, la première étant censée inférieure à la seconde ;
r la distance des deux éléments ;
$F(r)$ une fonction de la distance r, dépendant de la nature du corps, qui décroît très rapidement quand r augmente, et devient insensible ou nulle quand r atteint ou dépasse une certaine limite r_1, très petite et du même ordre de grandeur que les intervalles intermoléculaires.

Une induction théorique tirée des résultats de l'expérience conduit à représenter par

$$F(r)(V'_1 - V_1)\, d\varpi\, d\varpi'\, dt$$

la quantité de chaleur envoyée par m' à m dans le temps dt, l'excès de température $V'_1 - V_1$ étant nécessairement très petit, en raison de la continuité que présentent les phénomènes naturels.

---

terre. Ces deux questions avaient déjà été traitées à peu près de la même manière par Laplace dans le 4° Volume de la *Mécanique céleste*.

([1]) M. Émile Mathieu a notamment ajouté deux chapitres importants à la Théorie mathématique de la chaleur, l'un qui se rapporte à l'équilibre de cylindres indéfinis de différentes formes, et l'autre à l'équilibre de température de l'ellipsoïde.

([2]) Lamé, abandonnant le chemin battu, a abordé la Théorie du mouvement de la chaleur, non plus dans l'hypothèse d'un solide homogène, mais plus généralement dans celle d'un corps cristallisé. Comme il y a peu de connexité entre cet Ouvrage et celui de Fourier, je ne crois pas devoir en dire plus.

Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires; $d\omega$ un élément superficiel compris dans le corps et appartenant à un plan indéfini (P) parallèle à zOy.

Pour obtenir la quantité de chaleur ε qui traverse $d\omega$ dans le temps dt, il suffit de faire la somme des quantités de chaleur envoyées par les molécules m' du corps situées d'un côté de (P) à celles des molécules m, situées de l'autre côté de ce plan, pour lesquelles les droites m, m', rencontrent $d\omega$ dans l'intérieur de son périmètre.

Soient

x, y, z les coordonnées du centre de gravité G de $d\omega$;
V la température en ce point;
$x+l, y+h, z+k$ les coordonnées de m;
$x+l', y+h', z+k'$ celles de m'.

D'après le principe élémentaire admis plus haut, les longueurs l, h, k, l', h', k' sont très petites, et nous pourrons négliger leurs puissances supérieures à la première, leurs produits deux à deux, etc., ce qui revient à poser

$$V_1 = V + \frac{dV}{dx} l + \frac{dV}{dy} h + \frac{dV}{dz} k,$$
$$V'_1 = V + \frac{dV}{dx} l' + \frac{dV}{dy} h' + \frac{dV}{dz} k'.$$

On a donc, pour la quantité de chaleur cherchée,

$$\varepsilon = dt\left[\frac{dV}{dx}\int (l'-l)\,F(r)\,d\varpi\,d\varpi' + \frac{dV}{dy}\int (h'-h)\,F(r)\,d\varpi\,d\varpi' + \frac{dV}{dz}\int (k'-k)\,F(r)\,d\varpi\,d\varpi'\right].$$

Par suite du groupement symétrique des particules du corps par rapport à la parallèle en G à Ox, particules qui peuvent être considérées comme ayant le même volume, on voit qu'à une valeur de r correspondront deux systèmes de h, h', k, k' identiques, mais affectés de signes contraires; il résulte de là que les deux dernières intégrales de l'expression ci-dessus de ε sont nulles, et que l'on a simplement

$$\varepsilon = dt\frac{dV}{dx}\int F(r)(l'-l)\,d\varpi\,d\varpi'.$$

Déterminons d'abord la portion ε' de ε qui se rapporte aux molécules m' et m, pour lesquelles la distance r reste constante en grandeur et en direction. Nous supposerons, pour fixer les idées, que les molécules m' sont situées au-dessous de $d\omega$ par rapport au plan yOz censé horizontal. Ces molécules déterminent un cylindre oblique parallèle à r, ayant pour base $d\omega$; de sorte que l'on peut prendre

$$d\varpi' = d\omega\, dl';$$

d'ailleurs on a la relation

$$l - l' = r\cos(r, x),$$

et la limite de l' est $-r\cos(r, x)$; il vient donc, en effectuant une intégration par rapport à l' entre o et cette limite,

$$\varepsilon' = -\, dt \frac{dV}{dx} F(r) r^2 \cos^2(r, x)\, d\omega\, d\varpi,$$

et, par suite,

$$\varepsilon = -\, dt \frac{dV}{dx} d\omega \int F(r) r^2 \cos^2(r, x)\, d\varpi.$$

Cette intégrale s'étend à toutes les molécules m situées au-dessus de $d\omega$ et à toutes les valeurs de r comprises entre o et r_1, et par conséquent c'est une constante α qui ne dépend que de la nature du corps. Nous avons ainsi

$$(1) \qquad \varepsilon = -\, \alpha \frac{dV}{dx} d\omega\, dt.$$

La constante α est essentiellement positive, attendu que $\frac{dV}{dx}$ est négatif et ε positif, puisque le mouvement de la chaleur ne peut avoir lieu que de la partie la plus chaude du corps vers la partie la plus froide; elle a reçu le nom de *coefficient de conductibilité intérieur*.

Si nous considérons la quantité de chaleur envoyée par m' à m comme une force dirigée de la première de ces molécules vers la seconde, et que nous transportions toutes les forces semblables parallèlement à elles-mêmes en G, leur résultante sera ε, et, en raison du groupement symétrique des molécules par rapport à la normale en G à $d\omega$, elle sera dirigée suivant cette normale.

Le *flux de chaleur*, qui, à un instant donné, se rapporte à un élément $d\omega$, est la quantité de chaleur qui traverse cet élément rapportée à l'unité de surface et à l'unité de temps. Dans les conditions ci-dessus, le flux de chaleur

$$X = -\alpha \frac{dV}{dx} \tag{2}$$

peut être représenté par une droite perpendiculaire à $d\omega$ ou à Ox. Nous dirons aussi que X est le *flux de chaleur au point* G estimé parallèlement à Ox.

2. *Propriété générale du flux de chaleur relatif à un point déterminé d'un corps homogène à un instant quelconque.* — Soient

mx, my, mz trois axes rectangulaires partant d'un point m du solide;
$ma = dx$, $mb = dy$, $mc = dz$ des longueurs infiniment petites portées respectivement suivant ces axes à partir de m;
$d\omega$ l'aire du triangle élémentaire abc;
λ, μ, ν les angles formés par la normale à cet élément avec mx, my, mz;
N le flux de chaleur qui se rapporte au même élément;
X, Y, Z les flux de chaleur en m, parallèles aux trois axes.

La quantité de chaleur qui pénètre dans le temps dt dans le tétraèdre $abcm$ par les faces $bmc = d\omega \cos\lambda$, $cma = d\omega \cos\mu$, $amb = d\omega \cos\nu$, a pour expression

$$dt\, d\omega (X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu).$$

En en retranchant la quantité de chaleur $N\, d\omega\, dt$ qui s'échappe par abc, il reste

$$dt\, d\omega (X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu - N).$$

Mais cette dernière quantité de chaleur ne serait employée qu'à élever d'une quantité infiniment petite la température du tétraèdre qui est du troisième ordre; elle est donc nulle, et nous avons ainsi

$$N = X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu. \tag{3}$$

Soient χ, η, ζ les coordonnées de l'extrémité de la droite $\overline{mN}$ qui représente N. L'équation (3) revient à la suivante

$$\overline{mN} = X \frac{\chi}{\overline{mN}} + Y \frac{\eta}{\overline{mN}} + Z \frac{\zeta}{\overline{mN}},$$

d'où

$$\chi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = X\chi + Y\eta + Z\zeta,$$

ou encore

$$\left(\chi - \frac{X}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{Y}{2}\right)^2 + \left(\zeta - \frac{Z}{2}\right)^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{4}.$$

On voit ainsi que, si, à un instant déterminé, on fait varier l'orientation de l'élément $d\omega$, 1° *le lieu des points* N *est une sphère passant par le point* m; 2° *il y a une position de l'élément pour laquelle le flux atteint une valeur maximum que nous désignerons sous le nom de* flux principal; 3° *le flux de chaleur estimé suivant une droite quelconque est la projection du flux principal sur cette droite;* 4° *le flux principal est la résultante géométrique de trois flux à angle droit* (¹).

3. *Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées rectangulaires.* — Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires auxquels on rapporte un solide homogène dans lequel la chaleur est en mouvement.

Considérons un parallélépipède élémentaire ayant son sommet en m et pour arêtes dx, dy, dz. La quantité de chaleur qui, dans le temps dt, pénètre dans la face $dy\,dz$ qui passe par m a pour expression

$$-\alpha\, dy\, dz\, dt \frac{dV}{dx},$$

et celle qui en sort par la face opposée

$$-\alpha\, dy\, dz\, dt \left(\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2}\, dx\right),$$

d'où, pour la différence,

$$\alpha\, dt\, dx\, dy\, dz \frac{d^2V}{dx^2}.$$

(¹) Le flux principal est normal à la surface isotherme passant par m à l'instant considéré. En effet, on a, par exemple,

$$\cos\lambda = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{\frac{dV}{dx}}{\sqrt{\frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2}}},$$

ce qui est bien le cosinus de l'angle formé par Ox par la surface $V = \text{const.}$

En ajoutant cette expression à celles que l'on en déduit en changeant x en y et z, on trouve que la quantité de chaleur qui reste dans l'élément est

$$\alpha\, dt\, dx\, dy\, dz \left(\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2}\right).$$

Mais cette quantité a été employée à élever de $\frac{dV}{dt}dt$ la température du volume $dx\,dy\,dz$, ou à produire l'effet calorifique

$$\beta\, dx\, dy\, dz \frac{dV}{dt} dt,$$

en désignant par β la chaleur spécifique du corps rapportée au volume. Si l'on égale cette expression à la précédente, et si l'on pose

$$(4) \qquad K^2 = \frac{\alpha}{\beta},$$

on trouve

$$(5) \qquad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dV}{dt}.$$

Lorsque la température en chaque point du corps varie avec le temps, on dit que *le mouvement de la chaleur est varié*, et l'équation (1) est celle de ce mouvement.

Quand la température reste constante en chaque point du corps, on dit qu'elle est *stationnaire* ou que *le mouvement de la chaleur est uniforme*. Dans ce cas, on a

$$\frac{dV}{dt} = 0,$$

et l'équation (5) se réduit à

$$(5') \qquad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0.$$

4. *Conditions relatives à la surface.* — La fonction V, qui représente la température au point (x, y, z), ne doit pas seulement vérifier l'équation aux différences partielles (5) ou (5'), il faut encore qu'elle satisfasse à la condition relative à la surface, dont nous allons maintenant nous occuper.

Comme, dans ce qui suit, nous ne considérerons que des corps placés dans des milieux dont la température est uniforme, nous pourrons, pour plus de simplicité, substituer à la température intérieure du corps son excès sur celle du milieu ambiant, ce qui revient, en définitive, à changer l'échelle thermométrique en prenant pour o la température du milieu.

Soient dr un élément de la normale menée au point m de la surface du corps, mesuré à partir de ce point; $d\omega$ l'élément de la surface en m.

La quantité de chaleur qui s'échappe par $d\omega$ dans le temps dt est (1)

$$-\alpha \frac{dV}{dr} d\omega\, dt.$$

En admettant que V soit assez petit pour que la loi de Newton relative au rayonnement soit admissible, la quantité de chaleur rayonnée par $d\omega$ dans le temps dt est la forme $hV\, d\omega\, dt$, h étant une constante qui ne dépend que de l'état de la surface et de la nature du milieu, et qui a reçu le nom de *coefficient de conductibilité extérieure*. Nous avons donc

$$-\alpha \frac{dV}{dr} d\omega\, dt = hV\, d\omega\, dt,$$

ou

$$(6) \qquad \frac{dV}{dr} + \frac{V}{n} = 0$$

en posant

$$(7) \qquad \frac{h}{\alpha} = \frac{1}{n}.$$

La condition (6) devra être transformée en raison du système de coordonnées dont on aura fait choix.

Revenons aux coordonnées rectangulaires.

Soient

$$(8) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface, et

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}.$$

On a

$$\frac{dV}{dr} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dr} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dr} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{dr} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{dV}{dx}\frac{df}{dx} + \frac{dV}{dy}\frac{df}{dy} + \frac{dV}{dz}\frac{df}{dz}\right),$$

et la condition (6) prend la forme

$$(9) \qquad \frac{1}{\Delta}\left(\frac{dV}{dx}\frac{df}{dx} + \frac{dV}{dy}\frac{df}{dy} + \frac{dV}{dz}\frac{df}{dz}\right) + \frac{V}{n} = 0.$$

Ainsi, pour qu'une intégrale de l'équation (5) ou (5′) soit admissible, il faut qu'après l'avoir substituée dans l'équation (9) on obtienne un résultat compatible avec l'équation (8).

Il est facile de vérifier que l'équation (9) n'est qu'une conséquence de la formule (3) du n° **2**, en supposant dans cette dernière

$$X = -\alpha\frac{dV}{dx}, \quad Y = -\alpha\frac{dV}{dy}, \quad Z = -\frac{dV}{dz}, \quad N = hV.$$

5. *Condition relative à l'état initial dans le cas du mouvement varié de la chaleur.* — A l'instant pris pour origine du temps, la température en chaque point du corps ne dépendra que de sa position ou de ses coordonnées. On pourra donc la représenter par une fonction de la forme

$$F(x, y, z),$$

et qui est censée donnée.

Ainsi, en supposant que l'on ait satisfait à l'équation (5) et aux conditions (8) et (9), il faut encore, pour que la solution obtenue soit admissible, qu'elle satisfasse à cette nouvelle condition

$$(10) \qquad V = F(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0.$$

6. *Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées cylindriques.* — L'équation qu'il s'agit de trouver pourrait se déduire de l'équation (5) par une transformation de coordonnées, mais il est bien plus simple d'y arriver directement.

Soient r la distance à l'axe Oz d'un point quelconque m du solide dont l'ordonnée est z; ψ la longitude ou l'angle formé par le plan méridien mOz avec le plan zOx.

Un élément de volume peut être considéré comme étant déterminé par trois couples de surfaces orthogonales, savoir : 1° deux cylindres circulaires ayant Oz pour axe et r, $r+dr$ pour rayons; 2° deux plans méridiens qui forment avec le plan zOx les angles ψ et $\psi+d\psi$; 3° deux plans parallèles au plan xOy, et dont les ordonnées sont z et $z+dz$.

La quantité de chaleur qui entre pendant l'instant dt dans l'élément de volume par la face située sur la surface du cylindre de rayon r est

$$-\alpha\, dt\, r\, d\psi\, dz \frac{dV}{dr},$$

et celle qui sort par la face opposée

$$-\alpha\, dt\, d\psi\, dz\left(r\frac{dV}{dr} + \frac{d}{dr} r\frac{dV}{dr} dr\right),$$

d'où, pour la différence,

$$(a) \qquad \alpha\, dt\, dr\, d\psi\, dz\left(r\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{dV}{dr}\right).$$

La chaleur qui entre par la face située dans le plan méridien dont la longitude est ψ est

$$-\alpha\, dt\, dr\, dz \frac{dV}{r\, d\psi},$$

et celle qui en sort par la face opposée

$$-\alpha\, dt \frac{dr\, dz}{r}\left(\frac{dV}{d\psi} + \frac{d^2V}{d\psi^2} d\psi\right),$$

d'où, pour la différence,

$$(b) \qquad \alpha\, dt \frac{dr\, dz\, d\psi}{r} \frac{d^2V}{d\psi^2}.$$

Enfin, par les faces correspondant aux ordonnées z, $z+dz$, il entre et sort respectivement les quantités de chaleur

$$-\alpha\, dt\, r\, d\psi\, dr \frac{dV}{dz},$$

$$-\alpha\, dt\, r\, d\psi\, dr\left(\frac{dV}{dz}+\frac{d^2V}{dz^2}dz\right),$$

dont la différence est

$$(c) \qquad \alpha\, dt\, r\, d\psi\, dr\, dz \frac{d^2V}{dz^2}.$$

La quantité de chaleur retenue par l'élément ou la somme des expressions (a), (b), (c) a servi à élever de $\frac{dV}{dt}dt$ sa température ou à produire l'effet calorifique $\beta r\, d\psi\, dz\, dr \frac{dV}{dt}dt$.

En établissant l'égalité et se reportant à la convention (4), on trouve

$$(11) \qquad r\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{dV}{dr}+r\frac{d^2V}{dz^2}+\frac{1}{v}\frac{d^2V}{d\psi^2}=\frac{r}{K^2}\frac{dV}{dt}.$$

En supposant dans cette équation $\frac{dV}{dt}=0$, on obtiendra celle qui se rapporte au mouvement uniforme.

7. *Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées sphériques.* — Soient

r la distance d'un point m quelconque du corps à l'origine O;
θ sa colatitude ou l'angle mOz;
ψ sa longitude ou l'angle formé par le plan mOz avec le plan zOx.

Nous déterminerons un élément de volume par les intersections de : 1° deux sphères ayant O pour centre, et r, $r+dr$ pour rayons; 2° deux cônes de révolution autour de Oz, dont les demi-ouvertures sont θ, $\theta+d\theta$; 3° deux plans méridiens dont les longitudes sont ψ, $\psi+d\psi$.

Les quantités de chaleur qui entrent et sortent respectivement par les éléments de surfaces sphériques de rayons r et $r+dr$ sont respectivement

$$-\alpha\, dt\, r \sin\theta\, d\psi\, r\, d\theta \frac{dV}{dr} = -\alpha\, dt \sin\theta\, d\psi\, d\theta \left(r \frac{dVr}{dr} - Vr\right),$$

$$-\alpha\, dt \sin\theta\, d\psi\, d\theta \left(r \frac{dVr}{dr} - Vr + r \frac{d^2Vr}{dr^2} dr\right),$$

d'où, pour la différence,

$$(a) \qquad \alpha\, dt\, d\psi\, d\theta\, dr \sin\theta\, r \frac{d^2Vr}{dr^2}.$$

Les éléments situés sur les surfaces coniques déterminées par les angles θ, $\theta + d\theta$ donnent de même

$$-\alpha\, dt\, r \sin\theta\, d\psi\, dr \frac{dV}{r\, d\theta} = -\alpha\, dt\, d\psi\, dr \sin\theta \frac{dV}{d\theta},$$

$$-\alpha\, dt\, d\psi\, dr \left(\sin\theta \frac{dV}{d\theta} + \frac{d}{d\theta} \sin\theta \frac{dV}{d\theta}\, d\theta\right),$$

d'où, pour la différence,

$$(b) \qquad \alpha\, dt\, d\psi\, dr\, d\theta \frac{d}{d\theta} \sin\theta \frac{dV}{d\theta}.$$

Enfin les faces situées dans le méridien dont les longitudes sont ψ, $\psi + d\psi$, donnent

$$-\alpha\, dt\, r\, d\theta\, dr \frac{dV}{r \sin\theta\, d\psi} = -\alpha \frac{d\theta\, dr}{\sin\theta} \frac{dV}{d\psi},$$

$$-\alpha\, dt \frac{d\theta\, dr}{\sin\theta} \left(\frac{dV}{d\psi} + \frac{d^2V}{d\psi^2} d\psi\right),$$

d'où, pour la différence,

$$(c) \qquad \alpha\, dt \frac{d\theta\, dr}{\sin\theta} d\psi \frac{d^2V}{d\psi^2}.$$

La somme des expressions (a), (b), (c) devant être égale à

$$\beta\, dt\, r \sin\theta\, d\psi\, dr\, r\, d\theta \frac{dV}{dt}\, dt,$$

il vient

$$(12) \qquad \sin\theta\, r \frac{d^2Vr}{dr^2} + \frac{d}{d\theta} \sin\theta \frac{dV}{d\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{d^2V}{d\psi^2} = \frac{r^2}{K^2} \frac{dV}{dt} \sin\theta.$$

Si nous posons $\mu = \cos\theta$, cette équation se met sous la forme suivante :

$$(13) \qquad r\frac{d^2 rV}{dr^2} + \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dV}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2V}{d\psi^2} = \frac{r^2}{K^2}\frac{dV}{dt}.$$

Telle est l'équation qui a servi de point de départ à Laplace dans ses recherches sur la chaleur centrale du globe, et dont Poisson a fait usage plus tard dans sa Théorie de la chaleur.

Dans le cas où le mouvement de la chaleur est uniforme, on a simplement

$$(13') \qquad r\frac{d^2 rV}{dr^2} + \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dV}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2V}{d\psi^2} = 0.$$

§ II. — *Mouvement de la chaleur dans un solide dont les dimensions sont très petites et dans un solide indéfini dans lequel la direction du mouvement de la chaleur est constante.*

8. *Équation du mouvement de la chaleur dans le solide.* — Nous supposerons que le solide est limité par une surface canal, que la section génératrice ω du volume est assez petite pour que, dans son étendue, la température puisse être considérée comme constante, enfin que la section ω et son périmètre σ ont un centre de gravité commun. Nous désignerons sous le nom de *directrice* le lieu des centres de gravité, qui, avec ω, définit la forme du solide.

Les théorèmes de Guldin, généralisés par Sturm, seront implicitement invoqués dans ce qui suit.

Soit x la longueur d'un arc quelconque de la directrice mesurée à partir d'une origine déterminée A_0.

La différence entre les quantités de chaleur reçue et rejetée par les deux sections normales correspondant à x et $x + dx$ est

$$(a) \qquad -\alpha\omega\, dt\frac{dV}{dx} + \alpha\omega\, dt\left(\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2}dx\right) = \alpha\omega\frac{d^2V}{dx^2}dx\,dt,$$

et représente la quantité de chaleur qui reste dans l'élément de volume $\omega\, dx$.

Le milieu ambiant en absorbe la partie

$$(b) \qquad \sigma\, dx\, h \mathrm{V}\, dt.$$

L'autre a pour effet d'augmenter de $\frac{d\mathrm{V}}{dt} dt$ la température du volume $\omega\, dx$, et a, par suite, pour expression

$$(c) \qquad \beta\omega\, dx \frac{d\mathrm{V}}{dt} dt.$$

Si l'on pose

$$(d) \qquad a^2 = \frac{\chi\omega}{\sigma h},$$

et si l'on exprime que l'expression (a) est égale à la somme des expressions (b) et (c), on trouve, en se rappelant la signification de K^2,

$$(1) \qquad \frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} = \frac{\mathrm{V}}{a^2} + \frac{1}{\mathrm{K}^2} \frac{d\mathrm{V}}{dt}.$$

On reconnaîtra facilement que cette équation s'applique à un prisme ou cylindre d'une section quelconque, sans restriction relativement aux positions respectives des centres de gravité de la section et de son périmètre.

9. *Mouvement uniforme de la chaleur.* — Supposons que la section correspondant à l'origine A_0 de x soit maintenue à une température constante V_0, sous l'action d'une source de chaleur ayant cette température; qu'une autre section ω_1 en un point A_1 dont la position est définie par $x = x_1$ soit maintenue à une température constante V_1 sous l'action d'une seconde source de chaleur, et ainsi de suite. Au bout d'un temps plus ou moins long, les températures deviendront sensiblement stationnaires, et nous pourrons supposer $\frac{d\mathrm{V}}{dt} = 0$. L'équation (1) se réduit alors à la suivante,

$$(2) \qquad \frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} = \frac{\mathrm{V}}{a^2},$$

qui a pour intégrale

$$(3) \qquad V = Me^{\frac{x}{a}} + Ne^{-\frac{x}{a}},$$

en désignant par M et N deux constantes arbitraires.

L'équation (3) fera connaître la température dans une section située entre A_0 et A_1, correspondant à x, en déterminant les constantes au moyen des conditions

$$V_0 = M + N, \quad V_1 = Me^{\frac{x_1}{a}} + Ne^{-\frac{x_1}{a}}.$$

Entre A_1 et A_2, on peut supposer que x a pour origine le premier de ces points, et nous aurons de même

$$V_1 = M + N, \quad V_2 = Me^{\frac{x_2}{a}} + Ne^{-\frac{x_2}{a}},$$

et ainsi de suite.

Supposons, en particulier, que le solide ne soit soumis qu'à l'action de la source de la chaleur à la température V_0 disposée à l'une de ses extrémités, et que l'autre extrémité rayonne dans le milieu ambiant. Désignons par l la longueur totale de la directrice. Nous aurons d'abord

$$(e) \qquad V_0 = M + N,$$

puis la condition

$$\frac{dV}{dx} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{pour } n = l,$$

d'où l'on tire, en se reportant à l'équation (3),

$$(f) \qquad Me^{\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right) - Ne^{-\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Des équations (e) et (f) on déduit

$$M = \frac{V_0 e^{-\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right) + e^{-\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right)},$$

$$M = \frac{V_0 e^{\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right) + e^{-\frac{l}{a}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right)}.$$

On voit que, si la longueur l est très grande, on a sensiblement

$$M = 0, \quad N = V_0$$

et

$$V = V_0 e^{-\frac{x}{a}},$$

formule dont les conséquences sont trop connues pour que nous pensions devoir nous y arrêter.

10. *Mouvement varié de la chaleur dans le solide lorsque sa directrice est fermée dans les deux sens ou qu'elle est infinie.* — Nous faisons cette restriction que la directrice est fermée ou infinie pour ne pas avoir égard aux conditions relatives aux extrémités, qui compliqueraient considérablement la solution du problème que nous avons à résoudre.

Supposons que le solide, après avoir été échauffé d'une manière inégale dans ses différentes parties, soit ensuite placé dans un milieu à la température zéro, et proposons-nous de déterminer la loi suivant laquelle décroît la température à mesure que le temps augmente.

En égalant à zéro le second membre de l'équation (1), on a

$$\frac{dV}{dt} + \frac{K^2}{a^2} V = 0,$$

d'où, en désignant par U une constante arbitraire,

$$V = U e^{-\frac{K^2}{a^2} t}. \tag{4}$$

Si nous considérons maintenant U comme une fonction de x et de t, et si nous substituons cette expression dans l'équation précitée, nous trouvons

$$K^2 \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{dU}{dt}. \tag{5}$$

Désignons par p un nombre quelconque, par α une constante arbitraire, par T une fonction de t seul, et posons

$$U = T \cos p(x - \alpha).$$

En substituant cette expression dans l'équation (5), on trouve

$$\frac{dT}{dt} = - K^2 p^2 T,$$

d'où, en appelant A une constante arbitraire,

$$T = A e^{-K^2 p^2 t}.$$

L'équation (5) sera ainsi satisfaite par

$$(6) \qquad U = A e^{-K^2 p^2 t} \cos p(x - \alpha).$$

Supposons maintenant que, A et α conservant les mêmes valeurs, on fasse croître p de quantités infiniment petites égales à dp ; l'équation (5) sera encore satisfaite par

$$A e^{-K^2 p^2 t} \cos p(x - \alpha)\, dp.$$

La somme de toutes les expressions semblables entre deux limites quelconques de p vérifiera encore cette équation ; mais nous prendrons ici pour limites $-\infty$ et ∞ ; nous aurons ainsi la solution

$$(7) \qquad U = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-K^2 p^2 t} \cos p(x - \alpha)\, dp,$$

qui est plus générale que la solution (6). Cette expression peut se mettre sous la forme suivante

$$(8) \qquad U = A \frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2 t}}}{\sqrt{t}} \ [1].$$

---

[1] Avant de montrer comment on arrive à cette intégrale, considérons d'abord la suivante :

$$2P = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2} dp,$$

dans laquelle γ désigne une constante. Il est évident que l'on a

$$P = \int_{0}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2} dp.$$

Soit k une constante arbitraire, $\gamma p = kz$, z étant une variable auxiliaire sub-

Supposons que l'on fasse varier α d'une manière continue, et posons

$$A = f(\alpha)\,d\alpha,$$

en désignant par f une fonction arbitraire. La formule (8) devient

$$U = \frac{f(\alpha)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2 t}}\,d\alpha.$$

La somme de tous les termes semblables compris entre les limites

---

stituée à p; il vient

$$P = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty e^{-k^2 z^2} k\,dz.$$

Multiplions cette équation par $2e^{-\gamma^2 k^2}$ et intégrons ensuite par rapport à k, entre les limites $k = 0$, $k = \infty$; nous aurons

$$2P\int_0^\infty e^{-\gamma^2 k^2}\,dk = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-k^2(\gamma^2+z^2)}\,dz\,dk^2$$

ou

$$2P^2 = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \frac{dz}{\gamma^2+z^2} = \frac{\pi}{2\gamma^2},$$

d'où

$$P = \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma},$$

et

$$(a)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2}\,dp = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma}.$$

Revenons maintenant à l'équation (7) et posons

$$\gamma^2 = K^2 t,\quad x - \alpha = 2\chi,$$

χ étant une variable auxiliaire substituée à x. Il vient, abstraction faite du facteur A,

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2}\cos 2p\chi\,dp,$$

d'où

$$\frac{dU}{d\chi} = -\frac{1}{\gamma^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2}\sin 2p\chi\,d(\gamma p)^2,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\frac{dU}{d\chi} = -\frac{2\chi U}{\gamma^2};$$

$\alpha = -\infty$ et $\alpha = \infty$ sera encore une solution de l'équation (5), d'où

$$(9) \qquad U = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2 t}} d\alpha.$$

On peut mettre cette expression sous une autre forme, en posant

$$\frac{x-\alpha}{2K\sqrt{t}} = -\beta,$$

β étant une variable que l'on substitue à α. Il vient alors

$$(10) \qquad U = 2K \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2K\sqrt{t}\beta) e^{-\beta^2} d\beta.$$

En portant cette valeur dans l'équation (4), après y avoir remplacé β par α, on trouve

$$(11) \qquad V = 2K e^{-\frac{K^2}{a^2}t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2K\sqrt{t}\alpha) e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Soit $F(x)$ la fonction donnée de x qui représente la loi de la répartition de la température initiale, ou la valeur de V pour $t = 0$. On a

$$F(x) = 2K f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 2K f(x) \sqrt{\pi},$$

---

on déduit de là, en appelant U_0 la valeur U correspondant à $\chi = 0$,

$$U = U_0 e^{-\frac{\chi^2}{\gamma^2}}.$$

Or

$$U_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 p^2} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma}.$$

Donc,

$$U = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} e^{-\frac{\chi^2}{\gamma^2}}.$$

En substituant à χ et γ leurs valeurs en fonction de χ et de Kt, on retombe sur la formule (8) du texte.

d'où

$$f(x) = \frac{F(x)}{2K\sqrt{\pi}},$$

et l'équation (11) devient

$$(12) \qquad V = \frac{e^{-\frac{K^2}{a^2}t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2K\sqrt{t}\alpha) e^{-\alpha^2} d\alpha \quad (^1).$$

Telle est la solution complète du problème.

Dans le cas où tous les points du solide se seraient trouvés primitivement à la même température V_0, on aurait

$$F(x) = V_0;$$

par suite,

$$V = V_0 e^{-\frac{K^2}{a^2}t}.$$

11. *Mouvement de la chaleur dans un solide indéfini en tous sens, lorsque la direction de ce mouvement est constante.* — Considérons dans le solide des plans parallèles infiniment rapprochés les uns des autres, et supposons que la température initiale soit uniforme dans chaque plan, tout en pouvant varier d'un plan à un autre. Il est évident que, au bout d'un temps quelconque, la température restera encore uniforme dans chaque plan. On est ainsi ramené à considérer une droite indéfinie $A_0 x$ normale aux plans, et dont la température initiale serait représentée par $F(x)$; comme il n'y a pas d'échange de chaleur latérale, on devra supposer $h = 0$ ou $a^2 = \infty$, en se reportant à la valeur (a) du n° 8.

En faisant cette supposition dans l'équation (12) du numéro précédent, on a, pour exprimer que la loi du mouvement varie dans le solide,

$$V = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + 2K\sqrt{t}\alpha) e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

---

(1) Cette formule est due à Laplace.

§ III. — *Mouvement varié de la chaleur dans une sphère.*

12. Considérons une sphère homogène, dont le rayon est a, dans laquelle, à une certaine époque prise pour origine du temps, les couches sphériques élémentaires qui la constituent avaient chacune une température constante, mais pouvant varier de l'une à l'autre couche, le solide ayant été placé dans un milieu à 0°. Au bout d'un temps quelconque, la température sera encore constante dans toute l'étendue d'une couche.

En nous reportant à l'équation (12) du n° 7 et supposant nulles les dérivées partielles relatives à μ et ψ, on a

$$\frac{d^2 rV}{dr^2} = \frac{r}{K^2}\frac{dV}{dt}. \tag{1}$$

En posant

$$rV = U, \tag{2}$$

cette dernière équation se réduit à la suivante,

$$\frac{d^2 U}{dr^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dU}{dt}. \tag{3}$$

La condition relative à la surface est (n° 4)

$$\frac{dV}{dr} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{pour} \quad r = a. \tag{4}$$

En remarquant que V, par suite, U doit décroître indéfiniment quand t augmente, on est conduit à poser

$$U = ue^{-m^2\frac{K^2}{a^2}t},$$

en désignant par m un nombre quelconque et par u une fonction de r. Si l'on substitue cette expression dans l'équation (3), on trouve

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -\frac{m^2}{a^2}u,$$

d'où, en désignant par A et B deux constantes arbitraires,

$$u = \mathrm{A}\sin m\frac{r}{a} + \mathrm{B}\cos m\frac{r}{a}.$$

Mais on doit avoir $\mathrm{B} = 0$, car autrement $\frac{u}{r}$, par suite $\frac{\mathrm{U}}{r} = \mathrm{V}$ seraient infinis pour $r = 0$. Nous poserons donc simplement

$$u = \mathrm{A}\sin m\frac{r}{a}.$$

Les équations (3) et (2) sont donc respectivement satisfaites par

$$\mathrm{U} = \mathrm{A}e^{-m^2\frac{\mathrm{K}^2}{a^2}t}\sin m\frac{r}{a},$$

et

$$(5) \qquad \mathrm{V} = \mathrm{A}\frac{e^{-m^2\frac{\mathrm{K}^2}{a^2}t}}{r}\sin m\frac{r}{a}.$$

En portant cette dernière expression dans la condition (4), on trouve

$$(6) \qquad \operatorname{tang} m = \frac{m}{1 - \frac{a}{n}}.$$

Cette équation en m a une infinité de racines égales et de signes contraires; mais, en changeant m en $-m$, A en $-\mathrm{A}$ dans l'équation (6), on obtiendrait le même résultat. Il nous suffit donc de considérer les racines positives m_1, m_2, ... censées rangées par ordre de grandeurs à partir de la plus petite.

En désignant par A_i la constante arbitraire qui correspond à la racine m_i, nous satisferons en même temps à l'équation (1) et la condition (4), en posant

$$(7) \qquad \mathrm{V} = \frac{1}{r}\sum \mathrm{A}_i e^{-m_i^2\frac{\mathrm{K}^2 t}{a^2}}\sin m_i\frac{r}{a}.$$

Soit $\mathrm{F}(r)$ la fonction donnée qui représente la température initiale de la couche élémentaire de rayon r ou la valeur de V pour $t=0$; nous aurons, pour déterminer les coefficients A_i, l'équation

$$F(r)=\frac{1}{r}\sum A_i \sin m_i \frac{r}{a}. \tag{8}$$

Si nous posons

$$\varphi(r)=rF(r),$$

cette équation revient à la suivante

$$\varphi(r)=\sum A_i \sin m_i \frac{r}{a}. \tag{9}$$

Soit m_j un terme quelconque de la série des m_i; multipliant l'équation (9) par $\sin m_j \frac{r}{a}\,dr$, et intégrant entre les limites $r=0$, $r=a$, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^a \varphi(r)\sin m_j \frac{r}{a}\,dr &= \sum A_i \int_0^a \sin m_i \frac{r}{a}\sin m_j \frac{r}{a}\,dr\\ &= a\sum \frac{A_i}{(m_i^2 m_j^2)}(m_j \sin m_i \cos m_j - m_i \sin m_j \cos m_j).\end{aligned}$$

Or, de l'équation (6) on déduit

$$\frac{\tang m_i}{m_i}=\frac{\tang m_j}{m_j},$$

d'où

$$m_j \sin m_i \cos m_j - m_i \sin m_j \cos m_i = 0.$$

Il suit de là que, si j diffère de i, le coefficient de A_i sera nul, et que le seul coefficient qui peut avoir une valeur déterminée doit correspondre à $j=i$; dans ce cas on a

$$\int_0^a \varphi(r)\sin m_i \frac{r}{a}\,dr = A_i \int_0^a \sin^2 m_i \frac{r}{a}\,dr = \frac{aA_i}{2}\left(1-\frac{1}{2m_i}\sin 2m_i\right),$$

d'où, en remplaçant $\varphi(r)$ par $rF(r)$,

$$A_i=\frac{2}{a}\int_0^a \frac{rF(r)\sin m_i \frac{r}{a}\,dr}{1-\frac{1}{2m_i}\sin 2m_i}. \tag{10}$$

L'équation (7) donne ainsi, pour la solution complète du problème,

$$(11)\qquad V = \frac{2}{a}\sum \frac{\sin m_i \frac{r}{a}}{r} \frac{\int_0^a r\,F(r)\sin m_i \frac{r}{a}\,dr}{1 - \frac{1}{2m_i}\sin 2m_i} e^{-m_i^2\frac{K^2}{a^2}t}.$$

Au bout d'un temps suffisamment grand, cette série se réduira sensiblement à son premier terme, qui correspond à la plus petite m_1 des valeurs des m_i.

13. *Hypothèse d'une température initiale uniforme dans l'intérieur de la sphère.* — Supposons que la sphère, avant d'être exposée au refroidissement, ait été placée assez longtemps dans un milieu dont la température V_0 est constante pour que tous ses éléments aient pris très sensiblement cette température ; nous aurons

$$F(r) = V_0,$$

et l'équation (11) donne, en effectuant l'intégration,

$$V = 2V_0 \sum \frac{1 - m_i \cot m_i}{m_i \operatorname{coséc} m_i - \cos m_i} \frac{\sin m_i \frac{r}{a}}{m_i \frac{r}{a}} e^{-m_i^2\frac{K^2}{a^2}t}.$$

Si l'on remarque que l'équation (6) donne

$$m_i \cot m_i = 1 - \frac{a}{n},$$

l'expression précédente se met sous cette forme plus simple,

$$(12)\qquad V = 2\frac{a}{n}V_0 \sum \frac{e^{-m_i^2\frac{K^2}{a^2}t}}{m_i \operatorname{coséc} m_i - \cos m_i} \frac{\sin m_i \frac{r}{a}}{m_i \frac{r}{a}}.$$

Nous allons maintenant étudier deux cas extrêmes, en désignant dorénavant par V_i la partie de V qui correspond à m_i.

1° *Le rayon de la sphère est très petit.* — Supposons que le rapport $\frac{a}{n}$ soit assez petit pour que l'on puisse négliger ses puissances supérieures à la première. L'équation (6) devient

$$\operatorname{tang} m = m\left(1 + \frac{a}{n}\right), \tag{6'}$$

et l'on voit que sa première racine m_1 est de l'ordre de $\frac{a}{n}$. Si donc on remarque que l'on a, aux termes du cinquième ordre près,

$$\operatorname{tang} m_i = m_1\left(1 + \frac{m_1^2}{3}\right),$$

l'équation (6') donne

$$m_1^2 = \frac{3a}{n}.$$

Nous avons donc aussi, pour le dénominateur du terme de la série (12) qui correspond à V_1,

$$\frac{m_1}{\sin m_1} - \cos m_1 = \frac{2}{3} m_1^2 = \frac{2a}{n};$$

de plus,

$$\frac{\sin m_1 \frac{r}{a}}{m_1 \frac{r}{a}} = 1 - \frac{1}{6}\frac{m_1^2 r^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{an}.$$

On a donc

$$V_1 = V_0\left(1 - \frac{r^2}{2an}\right) e^{-\frac{3K^2}{an}t}. \tag{13}$$

Les racines m_i à partir de m_1 deviennent de plus en plus grandes, et l'équation (6') donne notamment, en négligeant $\frac{a}{n}$ devant l'unité,

$$m_2 = 4,59483.$$

Les rapports $\frac{V_2}{V_1}$, $\frac{V_3}{V_1}$, ... diminuent donc très rapidement quand t

croît, et deviendront négligeables au bout d'un certain temps; la valeur (13) de V_1 pourra alors être considérée comme représentant la température V.

2° *Le rayon de la sphère est très grand.* — Supposons que le rayon a soit assez grand pour que l'unité soit négligeable devant le rapport $\frac{a}{n}$. L'équation (6) se réduit alors à la suivante

$$(6'') \qquad \operatorname{tang} m = -m\frac{n}{a}.$$

Si l'on néglige les puissances de $\frac{a}{n}$ des ordres supérieurs au premier, cette équation donne,

$$m_i = i\left(1 - \frac{n}{a}\right)\pi.$$

En partant de là, on formera facilement les expressions de V_1, V_2, ...; mais, comme les rapports $\frac{V_1}{V_2}$, $\frac{V_1}{V_3}$, ... décroissent rapidement quand t augmente, V se réduira bientôt à son premier terme, ou sensiblement du moins, c'est-à-dire à

$$V = 2V_0 e^{-\pi^2\frac{K^2}{a^2}t}\frac{\sin\frac{\pi r}{a}}{\pi\frac{r}{a}}.$$

§ IV. — *Mouvement varié de la chaleur dans un cylindre circulaire indéfini.*

14. Nous supposerons que la température initiale est constante dans chacune des couches cylindriques élémentaires qui constituent le solide, quoique cette température puisse varier d'une couche à une autre. Dans ces conditions il est clair que, à un instant quelconque, la température sera également uniforme dans chacune des couches. Nous désignerons par a le rayon du cylindre.

En supposant que V soit indépendant de z et de ψ, l'équation (11) du n° 6 devient

$$(1)\qquad \frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=\frac{1}{K^2}\frac{dV}{dt},$$

et l'on a, pour la condition relative à la surface,

$$(2)\qquad \frac{dV}{dr}+\frac{V}{n}=0 \quad \text{pour} \quad r=a.$$

Posons

$$(3)\qquad V=Ue^{-mt},$$

U étant une fonction de r seulement, et m un nombre quelconque, essentiellement positif attendu que la température diminue quand le temps augmente. En substituant cette expression dans l'équation (1), on obtient, pour déterminer U, l'équation différentielle

$$(4)\qquad \frac{d^2U}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}+\frac{4\theta U}{a^2}=0,$$

en posant

$$\frac{m}{K^2}=\frac{4\theta}{a^2},$$

ce qui donne à la valeur (3) la forme

$$(3')\qquad V=Ue^{-\frac{4K^2}{a^2}\theta t}.$$

L'équation (4) est satisfaite par la série [1]

$$(5)\qquad U=1+\sum_1^\infty \frac{(-1)^i}{2^2.3^2\ldots i^2}\left(\frac{r^2}{a^2}\theta\right)^i.$$

---

[1] Posons, en effet, $r=\dfrac{za}{2\sqrt{\theta}}$, l'équation (4) devient

$$(a)\qquad \frac{d^2U}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dU}{dz}+U=0.$$

Soit

$$U=\Sigma A_j z^j.$$

La valeur (5), multipliée par une constante arbitraire, ne représente que l'une des deux intégrales particulières dont la somme doit donner la solution complète de l'équation (4). Mais la première de ces deux intégrales est la seule que nous ayons à considérer dans la question que nous avons à résoudre, parce que la seconde, devenant infinie pour $r = 0$, est inadmissible [1].

15. Les valeurs que l'on doit attribuer à θ ne sont pas arbitraires, car

---

une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de z à partir de $j = 0$. En substituant cette série dans (a) et égalant à zéro le coefficient de z^{j-2}, on trouve

$$A_j = -\frac{A_{j-2}}{j^2}.$$

Il faut donc que la série commence par A_0, que les nombres j soient pairs.
Soient $j = 2i$. On a

$$A_{2i} = -\frac{A_{2i-2}}{2^2 i^2},$$

et de même

$$A_{2i-1} = -\frac{A_{2i-4}}{2^2(i-1)^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$A_1 = -\frac{A_0}{2^2},$$

d'où

$$A_{2i} = \frac{(-1)^i A_0}{1.2^2.3^3\dots i^2}\,\frac{1}{2^{2i}},$$

et enfin

$$U = A_0\left[1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^i}{1.2^2.3^3\dots i^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2i}\right].$$

En prenant $A_0 = 1$, et remplaçant z par $2\frac{r}{a}\sqrt{\theta}$, on obtient la formule (5) du texte.

[1] Pour déterminer cette seconde intégrale, posons

$$(b)\qquad U = uU_1,$$

U_1 représentant la solution (5) et u une fonction de r.

En substituant l'expression (b) dans l'équation (4), on trouve

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{2}{U_1}\frac{dU_1}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{du}{dr} = 0,$$

elles doivent être choisies de manière que $Ue^{-\frac{4K^2\theta}{a^2}t}$, ou simplement U, satisfasse à la condition (2). En remplaçant, dans cette condition, V par l'expression (5), on trouve

$$(6) \qquad \frac{2\theta}{a}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^i i\theta^{i-1}}{1.2^2\ldots i^2}+\frac{1}{n}\left[1+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{1.2^2\ldots i^2}\theta^i\right]=0.$$

Si nous posons

$$(7) \qquad 1+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{1.2^2.3^2\ldots i^2}\theta^i=f(\theta),$$

cette équation prend la forme suivante

$$(8) \qquad \frac{a}{2n}f(\theta)+\theta f'(\theta)=0.$$

De l'équation (7), ou de

$$f(\theta)=1-\theta+\sum_{2}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2^2.3^2\ldots i^2}\theta^i,$$

---

d'où successivement, en désignant par B et A deux constantes arbitraires,

$$\frac{du}{dr}=\frac{B}{U_1^2 r},$$

$$u=A+B\int\frac{dr}{U_1^2 r},$$

d'où, pour l'intégrale générale de l'équation précitée,

$$U=AU_1+BU_1\int\frac{dr}{U_1^2 r}.$$

Tous les éléments de l'intégrale du second membre de cette équation sont positifs, et comme le premier, correspondant à $r=0$, est infini, il s'ensuit que cette intégrale elle-même est infinie, de sorte que, dans le problème que nous avons à résoudre, il faut supposer $B=0$.

Comme nous le ferons voir en temps voulu.

on tire

$$f'(\theta) = -1 + \sum_2^\infty \frac{(-1)^i i}{2^2.3^2\ldots i^2}\theta^{i-1},$$

$$f''(\theta) = \sum_2^\infty \frac{(-1)^i i(i-1)}{2^2.3^2\ldots i^2}\theta^{i-2}$$

et

$$f'(\theta) + \theta f''(\theta) = -1 + \sum_2^\infty \frac{(-1)^i}{2^2.3^2\ldots(i-1)^2}\theta^{i-1},$$

ou, en remplaçant $i-1$ par i,

$$f'(\theta) + \theta f''(\theta) = -1 - \sum_1^\infty \frac{(-1)^i}{2^2.3^2\ldots i^2}\theta^i,$$

et enfin

$$(9) \qquad \theta\frac{d^2f}{d\theta^2} + \frac{df}{d\theta} + f = 0.$$

Telle est l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction f. On en déduit successivement

$$\theta\frac{d^3f}{d\theta^3} + \frac{2d^2f}{d\theta^2} + \frac{df}{d\theta} = 0,$$

$$\theta\frac{d^4f}{d\theta^4} + \frac{3d^3f}{d\theta^3} + \frac{d^2f}{d\theta^2} = 0,$$

....

et, en général,

$$\theta\frac{d^{\nu+2}f}{d\theta^{\nu+2}} + (\nu+1)\frac{d^{\nu+1}f}{d\theta^{\nu+1}} + \frac{d^\nu f}{d\theta^\nu} = 0.$$

Il suit de là que, si une valeur de θ annule une dérivée quelconque de $f(\theta)$, les dérivées adjacentes prennent des signes contraires pour cette valeur, d'où résulte que les racines en nombre infini de l'équation

$$f(\theta) = 0$$

sont toutes réelles. Elles sont de plus positives, car, d'après la forme même de la fonction $f(\theta)$ définie par la formule (7), tous les termes qui composent $f(-\theta)$ sont de même signe, et par conséquent cette dernière fonction ne peut pas s'annuler pour une valeur positive de θ ([1]).

On conclut de là que l'équation (8) a toutes ses racines réelles et positives.

Soient maintenant

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$ les racines de l'équation (8) censées rangées par ordre de grandeur à partir de la plus petite;

U_ν, V_ν les valeurs de U, V correspondant à $\theta = \theta_\nu$, la première étant donnée par l'équation (6');

A_ν une constante arbitraire.

([1]) On fait ici l'application d'un théorème que Fourier considère comme ayant été démontré depuis longtemps, mais il ne l'a pas mentionné dans son *Analyse des équations algébriques*, publiée après sa mort, en 1830, par les soins de Navier, et je n'en ai trouvé de trace nulle part. Il est facile, d'ailleurs, de combler cette lacune ainsi qu'il suit.

Soient X une fonction entière du degré m, $X_1, X_2, \ldots, X_m$ ses dérivées successives. Supposons que la fonction X jouisse de cette propriété que si une valeur réelle de x annule l'une quelconque X_i de ses dérivées, cette valeur rende X_{i-1} et X_{i+1} de signes contraires; l'équation $X = 0$ a toutes ses racines réelles.

La méthode adoptée par Sturm dans la démonstration de son théorème s'applique évidemment ici, en substituant, à la suite de ses fonctions, la suivante

$$X, X_1, X_i, \ldots, X_m.$$

Or, la suite des premiers termes de ces dernières fonctions ne présentant que des permanences, il s'ensuit que toutes les racines de $X = 0$ sont réelles. Le théorème a lieu quel que soit m, et par conséquent quand m est infini.

Il est évident, d'après ce qui précède, que $X_i = 0$ a toutes ses racines réelles.

On sait que, entre deux racines réelles consécutives de $X = 0$, il y en a au moins une de $X_1 = 0$, et il est évident que dans le cas considéré il ne peut y en avoir qu'une seule. Si donc toutes les racines de $X = 0$ sont de même signe, celles de $X_1 = 0$ porteront ce signe.

En désignant par A une constante, considérons l'équation

$$(a) \qquad AX + xX_1 = 0.$$

Soient x', x'' deux racines consécutives de $X_1 = 0$. Pour $x = x'$ et $x = x''$, X changera de signe, et il en sera par suite de même du premier membre de l'équation (a). D'où il suit que cette équation aura une racine, mais unique, comprise entre x' et x'', et que, par suite, toutes ses racines sont réelles. On voit aussi que si les racines de $X = 0$ sont toutes positives ou négatives, il en sera de même de celles de l'équation (a).

Nous avons, comme solution particulière du problème au point où il est arrivé,

$$(10) \qquad V_\nu = A_\nu U_\nu e^{-\frac{4K^2}{a^2}\theta_\nu t},$$

et, comme solution plus générale,

$$(11) \qquad V = \sum_1^\infty A_\nu U_\nu e^{-\frac{4K^2}{a^2}\theta_\nu t}.$$

16. Si $F(r)$ représente la température initiale de la couche élémentaire de rayon r ou la valeur de V pour $t = 0$, on aura, pour déterminer les A_ν, l'équation

$$(12) \qquad F(r) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu U_\nu.$$

En désignant par σ une fonction de r, on déduit de là

$$(13) \qquad \int_0^a F(r)\sigma\, dr = \sum_1^\infty A_\nu \int_0^a U_\nu \sigma\, dr.$$

Supposons que la fonction σ soit choisie de telle manière que toutes les intégrales du second membre de l'équation (13) soient nulles, à l'exception de celle qui se rapporte à U_ν, il nous restera une égalité qui nous permettra de déterminer A_ν. Le tout se réduit donc à trouver la forme de la fonction σ.

De l'équation (4), mise sous la forme

$$(4') \qquad -\frac{4\theta_\nu}{a^2} U_\nu = \frac{d^2 U_\nu}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_\nu}{dr},$$

on déduit

$$-4\frac{\theta_\nu}{a_2}\int_0^a U_\nu \sigma\, dr = \int_0^a \sigma \frac{d^2 U_\nu}{dr^2} + \int_0^a \frac{\sigma}{r}\frac{dU_\nu}{dr}\, dr.$$

Mais, en intégrant par parties, on trouve

$$\int \sigma \frac{d^2 U}{dr^2}\, dr = \sigma\frac{dU}{dr} - \int \frac{d\sigma}{dr} dU = \sigma \frac{dU}{dr} - U\frac{d\sigma}{dr} + \int U \frac{d^2\sigma}{dr^2}\, dr,$$

$$\int \frac{\sigma}{r}\frac{dU}{dr} = \frac{\sigma}{r} U - \int U \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma}{r}\right) dr;$$

l'équation précédente devient ainsi

$$-4\frac{\theta_\nu}{a^2}\int_0^a U_\nu\sigma\,dr = \int_0^a U_\nu\left[\frac{d^2\sigma}{dr^2} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma}{r}\right)\right]dr + \left(\sigma\frac{dU_\nu}{dr} - U_\nu\frac{d\sigma}{dr} + U_\nu\frac{\sigma}{r}\right)_0^a,$$

d'où

$$-\int_0^a U_\nu\left[\frac{d^2\sigma}{r^2 d} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma}{r}\right) + \frac{4\theta_\nu\sigma}{a^2}\right]dr = \left(\sigma\frac{dU_\nu}{dr} - U_\nu\frac{d\sigma}{dr} + U_\nu\frac{\sigma}{r}\right)_0^a.$$

Si σ satisfait à l'équation

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma}{r}\right) + \frac{4\theta_\mu\sigma}{a^2} = 0, \tag{14}$$

la précédente se réduit à

$$\frac{4}{a^2}(\theta_\mu - \theta_\nu)\int_0^a U_\nu\sigma\,dr = \left(\sigma\frac{dU_\nu}{dr} - U_\nu\frac{d\sigma}{dr} + U_\nu\frac{\sigma}{r}\right)_0^a. \tag{15}$$

Or, en posant

$$\sigma = sr,$$

l'équation (14) se réduit à la suivante

$$\frac{d^2s}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{ds}{dr} + \frac{4\theta_\mu s}{a^2} = 0.$$

On voit donc, en se reportant à l'équation (4'), que l'on peut prendre

$$s = U_\mu$$

et, par suite,

$$\sigma = rU_\mu. \tag{16}$$

Si l'on remarque, d'après la valeur (5), que $\frac{dU}{dr}$ est nul avec r, l'équation (15) se réduit à la suivante

$$\int_0^a U_\nu\sigma\,dr = \frac{a^3}{4}\,\frac{1}{\theta_\mu - \theta_\nu}\left(U_\mu\frac{dU_\nu}{dr} - U_\nu\frac{dU_\mu}{dr}\right)^a. \tag{17}$$

Mais, d'après l'équation (2), on a, pour $r = a$,

$$\frac{1}{U_\nu}\frac{dU_\nu}{dr} = \frac{1}{U_\mu}\frac{dU_\mu}{dr},$$

d'où il suit que cette intégrale est nulle lorsque μ est différent de ν; mais, lorsqu'il y a égalité, la valeur de l'intégrale est celle de la dérivée du second membre de l'équation (17) par rapport à θ_μ, dans laquelle on a fait ensuite $r = a$, $\theta_\mu = \theta_\nu$. Si l'on remarque, d'après l'équation (5), que U est de la forme

$$\text{(18)} \qquad U = \varphi\left(\frac{r^2}{a^2}\theta\right),$$

on reconnaît sans peine que la valeur cherchée est

$$\text{(19)} \qquad \int_0^a U_\nu \sigma\, dr = \frac{a^2}{2}(\varphi'^2\theta - \varphi\varphi' - \varphi\varphi''\theta_\nu),$$

en représentant $\varphi(\theta_\nu)$ simplement par φ; mais les équations (2) et (4) donnent, en remplaçant U par l'expression (18),

$$\varphi' = -\frac{a}{2n\theta_\nu}\varphi,$$

$$\theta_\nu\varphi'' + \varphi' + \varphi = 0.$$

En éliminant dans la formule (19) φ' et φ'' au moyen de ces équations, on trouve

$$\text{(20)} \qquad \int_0^a U_\nu \sigma\, dr = \frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{4n^2\theta_\nu} + 1\right)\varphi^2.$$

En nous reportant à l'équation (14), on voit que l'on a

$$A_\nu = \frac{2}{a}\frac{\int_0^a F(r)\, r U_\nu dr}{\left(1 + \frac{a^2}{4n^2\theta_\nu}\right)U_{\nu a}^2},$$

en représentant par $U_{\nu a}$ la valeur de U_ν pour $x = a$, c'est-à-dire $\varphi(\theta_\nu)$ Le problème se trouve ainsi résolu.

Si le temps écoulé est suffisamment grand, la série (11) se réduira très sensiblement à son premier terme, qui correspond à la plus petite valeur θ_1 des θ_ν.

§ V. — *Mouvement uniforme de la chaleur dans un prisme carré indéfini dans un sens.*

17. Soient

O le centre de la base du prisme;
Oz l'axe de figure;
Ox, Oy les parallèles en O aux côtés de la base;
$2a$ la longueur de ces côtés.

Nous supposerons que la base du prisme est maintenue à une température constante que, pour plus de simplicité, nous prendrons égale à l'unité, et que la température intérieure est devenue stationnaire.

Nous avons à considérer l'équation aux différentielles partielles

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

avec les conditions

$$(2) \qquad \pm\frac{dV}{dx} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm a,$$

$$(2') \qquad \pm\frac{dV}{dy} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm a.$$

En raison de la symétrie, la fonction V doit conserver la même valeur quand on change les signes de x et y, et, de plus, elle doit devenir nulle pour $z = \infty$.

En désignant par p, q, r des nombres positifs quelconques, et par A une constante arbitraire, on satisfera à ces conditions en posant

$$V = Ae^{-rz}\cos px \cos qy.$$

En substituant cette expression dans l'équation (1), on trouve qu'elle la vérifie, à la condition que

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Nous avons ainsi jusqu'à présent

$$V = A e^{-z\sqrt{p^2+q^2}} \cos px \cos qy. \tag{3}$$

Si l'on exprime que cette fonction satisfait aux conditions (2) et (2'), on trouve pour résultats

$$\left\{\begin{aligned} pa \operatorname{tang} pa &= \frac{a}{n}, \\ qa \operatorname{tang} qa &= \frac{a}{n}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Ces deux équations, en pa et qa, rentrent l'une dans l'autre et ont une infinité de racines positives.

Supposons que ces racines soient rangées par ordre de grandeur en commençant par la plus petite; soient $m_1, m_2, \ldots$ les quotients de ces racines par a, ou les valeurs qu'il convient d'attribuer à p et à q; A_i, A_j deux constantes arbitraires caractérisées par leurs indices.

L'expression

$$V = A_i A_j e^{-z\sqrt{m_i^2+m_j^2}} \cos m_i x \cos m_j y$$

satisfera à l'équation (1) et aux conditions (2); mais on aura une solution plus générale en faisant la somme des expressions semblables obtenues en donnant à i et j toutes les valeurs entières possibles depuis l'unité jusqu'à l'infini.

Nous prendons donc

$$\left\{\begin{aligned} V = &\left\{ A_1 e^{-z\sqrt{m_1^2+m_1^2}} \cos m_1 x + A_2 e^{-z\sqrt{m_2^2+m_1^2}} \cos m_2 x \ldots \right\} A_1 \cos m_1 y, \\ &+ \left\{ A_2 e^{-z\sqrt{m_1^2+m_2^2}} \cos m_1 x + A_2 e^{-z\sqrt{m_2^2+m_2^2}} \cos m_2 x \ldots \right\} A_2 \cos m_2 y, \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Mais on doit avoir $V = 1$ pour $z = 0$, quelles que soient les valeurs de x et y entre $-a$ et a, ou

$$1 = (A_1 \cos m_1 x + A_2 \cos m_2 x + A_3 \cos m_3 x + \ldots) \times (A_1 \cos m_1 y + A_2 \cos m_2 y + \ldots).$$

Il est évident que cette condition sera satisfaite si l'on détermine les coefficients A_i de manière que l'on ait, quel que soit x entre o et a,

$$(6) \qquad A_1 \cos m_1 x + A_2 \cos m_2 x + \ldots = 1.$$

Multiplions cette équation par $\cos m_j x\,dx$, et intégrons entre les limites o et a. Le coefficient de A_i, ou

$$\int_0^a \cos m_i x \cos m_j x\,dx = \frac{m_i \sin m_i a \cos m_j a - m_j \cos m_i a \sin m_j a}{m_i^2 - m_j^2},$$

sera nul si j est différent de i; c'est ce qui résulte de l'une ou l'autre des équations (4) qui donnent

$$m_i \operatorname{tang} m_i a = m_j \operatorname{tang} m_j a,$$

d'où

$$m_i \sin m_i a \cos m_j a - m_j \cos m_i a \sin m_j a = 0.$$

Si nous supposons $j = i$, il ne restera dans l'équation (6), multipliée par $\cos m_i x$ et intégrée entre $x = 0$ et $x = a$, que le terme en A_i, dont le coefficient sera

$$\int_0^a \cos^2 m_i x\,dx = \frac{1}{2}\left(a + \frac{\sin 2 m_i a}{2 m_i}\right),$$

et l'on obtiendra de cette manière

$$(7) \qquad A_i = \frac{4 \sin m_i a}{2 a m_i + \sin 2 m_i a}.$$

Le problème est ainsi complètement résolu.

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que la formule (6) conduit, d'après notre analyse, à la relation suivante

$$\frac{1}{4} = \Sigma \frac{\sin m_i a \cos m_i x}{2am_i a + \sin 2m_i a} = 0,$$

qui a lieu pour toutes valeurs de x comprises entre o et a, et par suite entre o et $-a$.

18. Nous allons maintenant étudier deux cas particuliers.

1° *L'épaisseur du prisme est très petite.* — En posant $u = pa$ ou qa, les équations (4) se réduisent à la suivante

$$u \operatorname{tang} u = \frac{a}{n}. \tag{8}$$

Si la fraction $\frac{a}{n}$ est très petite, cette équation aura une racine u_1 également très petite, dont la valeur approximative est

$$u_1 = \sqrt{\frac{a}{n}}.$$

Les autres racines s'obtiendront par approximation en supposant $a = 0$ dans l'équation (8), et seront

$$u_2 = \pi, \quad u_3 = 2\pi, \quad u_4 = 3\pi, \quad \ldots,$$

de sorte que nous aurons

$$m_1 = \sqrt{\frac{1}{an}}, \quad m_2 = \frac{\pi}{a}, \quad m_3 = \frac{2\pi}{a}, \quad m_4 = \frac{3\pi}{a}, \quad \ldots.$$

Il résulte de là que m_1 est beaucoup plus grand que m_2, m_3, ..., de sorte que l'on peut se borner à considérer le premier terme de la série (6), c'est-à-dire celui qui dépend de $e^{-z\sqrt{2m_1^2}}$.

Son coefficient

$$A_1 = \frac{4 \sin u_1}{2u_1 + \sin 2u_1},$$

en raison de la petitesse de u_1, est sensiblement égal à l'unité, de sorte que l'on a sensiblement

$$V = e^{-z\sqrt{\frac{2}{an}}} \cos \sqrt{\frac{a}{n}} x \cos \sqrt{\frac{a}{n}} y.$$

2° *L'épaisseur du prisme est très grande.* — Si le rapport $\frac{a}{n}$ est très grand, l'équation (8) donne, à très peu près,

$$u_1 = \frac{\pi}{2}, \quad u_2 = \frac{3}{2}\pi, \quad u_3 = \frac{5\pi}{2}, \dots$$

d'où

$$m_1 = \frac{\pi}{2a}, \quad m_2 = \frac{3\pi}{2a}, \quad m_3 = \frac{5\pi}{2a}, \quad \dots.$$

La valeur de V, qui résulte de ces données, offre trop peu d'intérêt pour que nous croyions devoir l'écrire.

§ VI. — *Mouvement varié de la chaleur dans un cube.*

19. Considérons un cube dont la température intérieure est uniforme et que l'on introduit ensuite dans un milieu dont la température est zéro. Proposons-nous de déterminer la loi de la décroissance de la température aux différents points du solide en fonction du temps écoulé.

Soient

$2a$ le côté du cube;
O son centre;
Ox, Oy, Oz les parallèles menées par ce point aux trois couples d'arêtes du cube.

Pour plus de simplicité, nous supposerons que la température initiale est égale à l'unité.

La loi cherchée se déduira de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dV}{dt},$$

en y joignant les conditions

$$(2) \qquad \begin{cases} \pm \dfrac{dV}{dx} + \dfrac{V}{n} = 0 & \text{pour} \quad x = \pm a, \\ \pm \dfrac{dV}{dy} + \dfrac{V}{n} = 0 & \text{»} \quad y = \pm a, \\ \pm \dfrac{dV}{dz} + \dfrac{V}{n} = 0 & \text{»} \quad z = \pm a. \end{cases}$$

D'après le raisonnement fait au commencement du paragraphe précédent et d'autres considérations développées auparavant, nous sommes conduit à supposer qu'une solution particulière de la question est de la forme

$$V = A e^{-lt} \cos px \cos qy \cos rz,$$

l, p, q, r désignant des nombres, et A une constante arbitraire. Cette valeur satisfait à l'équation (1), à la condition que l'on ait

$$l = K^2(p^2 + q^2 + r^2),$$

et alors elle devient

$$V = A e^{-K^2(p^2+q^2+r^2)t} \cos px \cos qy \cos rz. \tag{3}$$

Les conditions (2) se réduisent aux équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} pa \operatorname{tang} pa &= \frac{a}{n}, \\ qa \operatorname{tang} qa &= \frac{a}{n}, \\ ra \operatorname{tang} ra &= \frac{a}{n}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

qui se ramènent à la suivante :

$$u \operatorname{tang} u = \frac{a}{n}, \tag{5}$$

en désignant par u l'un quelconque des produits pa, qa et ra.

Cette équation, à laquelle nous sommes déjà arrivé au paragraphe précédent, admet une infinité de racines positives que nous supposerons rangées par ordre de grandeur à partir de la plus petite; soient m_1, m_2, m_3 les quotients des racines par a; A_i, A_j, A_k trois constantes arbitraires. Dans l'état actuel de la question, nous aurons pour solution particulière

$$\begin{aligned} U &= A_i A_j A_k e^{-K^2(m_i^2+m_j^2+m_k^2)t} \cos m_i x \cos m_j y \cos m_k z \\ &= A_i e^{-K^2 m_i^2 t} \cos m_i x \,.\, A_j e^{-K^2 m_j^2 t} \cos m_j y \,.\, A_k e^{-K^2 m_k^2 t} \cos m_k z. \end{aligned}$$

Nous obtiendrons une solution plus générale en faisant la somme des expressions semblables pour toutes les valeurs entières et positives de i, j, k, et nous obtiendrons ainsi

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} V = &[A_1 e^{-K^2 m_1^2 t}\cos m_1 x + A_2 e^{-K^2 m_2^2 t}\cos m_2 x + \ldots].\\ &+[A_1 e^{-K^2 m_1^2 t}\cos m_1 y + A_2 e^{-K^2 m_2^2 t}\cos m_2 y + \ldots],\\ &+[A_1 e^{-K^2 m_1^2 t}\cos m_1 z + A_2 e^{-K^2 m_2^2 t}\cos m_2 z + \ldots]. \end{aligned}\right.$$

Mais pour $t = 0$ on doit avoir $V = 1$, quels que soient x, y, z entre les limites $-a$ et a. On satisfera à cette condition si, quel que soit x entre $-a$ et a, ou simplement 0 et a, on a

$$A_1 \cos m_1 x + A_2 \cos m_2 x + \ldots = 1,$$

ce qui, d'après le paragraphe précédent, conduit à prendre

$$(7)\qquad A_i = \frac{4\sin m_i a}{2am_i + \sin 2m_i a};$$

l'équation (6) donnera, par suite, la solution complète du problème.

20. D'après cette équation, on voit que V est le produit de trois fonctions semblables qui ne dépendent respectivement que de x, y, z et du temps. Il est d'ailleurs facile de vérifier qu'un pareil produit peut satisfaire à l'équation (1).

Soient, en effet, X, Y, Z trois fonctions de t, mais qui ne renferment respectivement que x, y, z, et posons

$$V = XYZ.$$

En portant cette expression dans l'équation (1), on trouve la suivante :

$$YZ\frac{dX}{dt} + ZX\frac{dY}{dt} + XY\frac{dZ}{dt} = K^2\left(YZ\frac{d^2X}{dx^2} + ZX\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2}\right),$$

qui sera vérifiée en posant

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dX}{dt},\quad \frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dY}{dt},\quad \frac{d^2Z}{dz^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dZ}{dt}.$$

On satisfera aux conditions relatives à la surface en posant

$$\pm \frac{dX}{dx} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm a,$$

$$\pm \frac{dY}{dy} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{»} \quad y = \pm a,$$

$$\pm \frac{dZ}{dz} + \frac{V}{n} = 0 \quad \text{»} \quad z = \pm a,$$

et il est facile de reconnaître, en se reportant au n° **2**, que l'on retombe sur la solution (6).

21. Si le temps écoulé est devenu suffisamment grand, V se réduira sensiblement à son premier terme correspondant à $i = j = k = 1$, et l'on aura par suite

$$(7) \qquad V = \frac{4^3 \sin^3 m_1 a}{(2am_1 + \sin 2m_1 a)^3} \cos m_1 x \cos m_1 y \cos m_1 z e^{-3K^2 m_1^2 t}.$$

22. La température moyenne, au bout du temps t, a pour expression

$$\frac{1}{2^3 a^3} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} V\,dx\,dy\,dz$$
$$= \frac{1}{2^3 a^3} \int_{-a}^{a} X\,dx \int_{-a}^{a} Y\,dy \int_{-a}^{a} Z\,dz = \frac{1}{2^3 a^3} \left(\int_{-a}^{a} X\,dx \right)^3,$$

expression qu'il est facile de calculer et dont il nous paraît inutile de donner la valeur.

23. Lorsque a est très petit, la plus petite racine de l'équation (5) est à très peu près égale à $\sqrt{\frac{a}{n}}$, et l'on a

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{na}}.$$

L'expression (7) devient, eu égard à la petite valeur de $m_1 a$,

$$V = e^{-\frac{3K^2}{an} t} \cos \frac{x}{\sqrt{na}} \cos \frac{y}{\sqrt{na}} \cos \frac{z}{\sqrt{na}}.$$

Au centre d'une face on a

$$V = e^{-\frac{3K^2}{a n} t} \cos\sqrt{\frac{a}{n}} = e^{-\frac{3K^2}{a n} t}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a}{n}\right),$$

et, en se reportant à la formule (13) du n° **13**, on reconnaît que cette température est la même que la surface de la sphère inscrite.

24. Si les dimensions du cube sont très grandes, on aura, à très peu près,

$$m_1 = \frac{\pi}{2a}, \quad m_2 = \frac{3\pi}{2a}, \quad m_3 = \frac{5\pi}{2a},$$

et il sera facile de former l'expression de V.

§ VII. — *Mouvement varié de la chaleur dans un solide indéfini dans tous les sens.*

25. Nous n'avons ici qu'à déterminer la forme de l'intégrale de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{1}{k^2}\frac{dV}{dt},$$

qui satisfait à la condition

$$V = F(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0,$$

$F(x, y, z)$ étant une fonction donnée qui représente la température au point (x, y, z).

Soient α, β, γ trois constantes arbitraires. Nous avons vu (n° **10**) que l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{K^2}\frac{dV}{dx}$$

est satisfaite par

$$V = \frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2t}}}{\sqrt{t}},$$

et (nº 20) que l'équation (1) est satisfaite par le produit de trois fonctions semblables respectivement en x, y, z. Nous aurons donc la solution particulière

$$V = \frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4K^2t}}}{\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{(y-\beta)^2}{4K^2t}}}{\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{(z-\gamma)^2}{4K^2t}}}{\sqrt{t}}.$$

Si f désigne une fonction arbitraire, nous obtiendrons une autre solution particulière en multipliant cette expression par $f(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$, et enfin une solution plus générale en intégrant, par rapport à α, β, γ, entre les limites $-\infty$ et ∞. On trouve ainsi

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma . f(\alpha . \beta . \gamma)\, t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]}{4K^2t}}.$$

En posant

$$\frac{\alpha - x}{2K\sqrt{t}} = u, \quad \frac{\beta - y}{2K\sqrt{t}} = v, \quad \frac{\gamma - z}{2K\sqrt{t}} = w,$$

u, v, w étant des variables que l'on substitue respectivement à α, β, γ, il vient

$$(3)\quad V = 8K^3 \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{-(u^2+v^2+w^2)} f(x + 2uK\sqrt{t}, y + 2vK\sqrt{t}, z + 2wK\sqrt{t}),$$

et nous devons avoir

$$F(x, y, z) = 8K^3 \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{-(u^2+v^2+w^2)} f(x, y, z),$$

ou

$$F(x, y, z) = 8K^3 f(x, y, z) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw$$

$$= 8K^3 \pi^{\frac{3}{2}} f(x, y, z).$$

En portant la valeur de la fonction f déduite de cette équation dans la formule (3), on obtient, pour la solution du problème,

$$(4)\quad V = \pi^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(x + 2uK\sqrt{t},\, y + 2vK\sqrt{t},\, z + 2wK\sqrt{t}\right) e^{(u^2+v^2+w^2)}\, du\, dv\, dw.$$