JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Sur les coordonnées curvilignes

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 5-18.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les coordonnées curvilignes;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Supposons une courbe tracée dans un plan, et considérons une partie ω de ce plan qui contienne cette courbe et dont tous les points en soient très voisins; de chaque point M du champ ω abaissons une normale MP sur la courbe; ce point sera déterminé par la longueur n de la normale MP et par la longueur σ de la courbe comprise entre un point fixe de cette courbe et le point P. Nous allons entrer dans quelques considérations sur ces coordonnées, et nous en ferons une application qui en prouvera l'utilité; nous terminerons en montrant comment un géomètre très savant et très habile s'est trompé en se servant de ces coordonnées, qu'il avait cru pouvoir regarder comme un système ordinaire de deux variables.

Des premières dérivations par rapport à σ et n.

1. Si u est une fonction des coordonnées rectangulaires x, y d'un point M, dont la valeur est connue pour toutes les positions du point M renfermées dans l'intérieur d'un contour σ, u a aussi une valeur déterminée en chaque point du contour, et si le point M décrit un arc infiniment petit $d\sigma$ du contour, la fonction u acquiert un accroissement infiniment petit que nous représenterons par

$$\frac{du}{d\sigma} d\sigma;$$

désignons par dn un élément de normale, mené intérieurement à la courbe σ et compté à partir de σ; si le point M décrit dn, la fonction u s'accroît d'une quantité que nous représenterons par

$$\frac{du}{dn} dn.$$

On voit, d'après cela, quelles quantités sont désignées par

$$\frac{du}{d\sigma}, \frac{du}{dn},$$

bien que, comme nous verrons, σ et n ne puissent former un véritable système de deux variables.

Désignons par ν l'angle de la normale avec l'axe des x; supposons que l'origine O des coordonnées rectilignes soit située à l'intérieur de la courbe et que l'arc σ croisse quand le point M se meut dans l'angle des coordonnées positives de Ox vers Oy.

Quand M s'avance de $d\sigma$ sur le contour, les coordonnées x, y s'accroissent de

$$d\sigma \sin\nu, \quad - d\sigma \cos\nu;$$

on a donc

$$\frac{du}{d\sigma} d\sigma = \frac{du}{dx} d\sigma \sin\nu - \frac{du}{dy} d\sigma \cos\nu$$

ou

$$\frac{du}{d\sigma} = \frac{du}{dx} \sin\nu - \frac{du}{dy} \cos\nu. \tag{1}$$

On trouve de même

$$\frac{du}{dn} = \frac{du}{dx}\cos\nu + \frac{du}{dy}\sin\nu. \tag{2}$$

Quand on n'a à effectuer qu'une dérivation, il est permis de remplacer l'élément dn de ligne droite par un élément de courbe orthogonale sur la courbe σ. Mais il n'en est plus de même quand on a à effectuer plusieurs dérivations par rapport à σ et n.

Des doubles dérivations par rapport à σ et n.

2. Quand le point M se meut sur la courbe σ, ν varie d'une manière bien déterminée; on peut donc encore former les dérivées des seconds membres des formules (1) et (2) par rapport à σ. Si nous différentions la formule (1) par rapport à σ, nous aurons

$$\frac{d\frac{du}{d\sigma}}{d\sigma} = \left(\sin\nu\frac{d}{dx} - \cos\nu\frac{d}{dy}\right)\left(\frac{du}{dx}\sin\nu - \frac{du}{dy}\cos\nu\right),$$

où il faudra développer les dérivations indiquées dans le second membre, en ayant soin de regarder ν comme fonction de x et y; on peut aussi remarquer que les dérivations qui ne portent pas sur ν donneront ces termes

$$\frac{d^2u}{dx^2}\sin^2\nu - 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\sin\nu\cos\nu + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\nu,$$

et que les dérivations par rapport à σ, en ne les faisant porter que sur ν, donnent

$$\left(\frac{du}{dx}\cos\nu + \frac{du}{dy}\sin\nu\right)\frac{d\nu}{d\sigma} \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dn}\frac{d\nu}{d\sigma}.$$

On a donc

$$\frac{d\frac{du}{d\sigma}}{d\sigma} = \frac{d^2u}{dx^2}\sin^2\nu - 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\sin\nu\cos\nu + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\nu + \frac{du}{dn}\frac{d\nu}{d\sigma};$$

il en résulte cette formule

$$\frac{d^2u}{dx^2}\sin^2\nu - 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\sin\nu\cos\nu + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\nu = \frac{d\frac{du}{d\sigma}}{d\sigma} - \frac{du}{dn}\frac{d\nu}{d\sigma}, \tag{A}$$

où $\frac{d\nu}{d\sigma}$ représente évidemment la courbure de l'arc σ.

En opérant de même sur la formule (2), nous écrirons d'abord

$$\frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma} = \left(\sin\nu\frac{d}{dx} - \cos\nu\frac{d}{dy}\right)\left(\frac{du}{dx}\cos\nu + \frac{du}{dy}\sin\nu\right),$$

et nous en conclurons

$$\text{(B)}\quad \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dy^2}\right)\sin\nu\cos\nu - \frac{d^2u}{dx\,dy}(\cos^2\nu - \sin^2\nu) = \frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma} + \frac{du}{d\sigma}\frac{d\nu}{d\sigma}.$$

3. La dérivation des formules (1), (2), par rapport à n, ne peut se faire avant d'avoir précisé le sens qu'on attachera à $\frac{d\nu}{dn}$. Imaginons une équation entre y et x qui contienne un paramètre a et qui, pour la valeur zéro de ce paramètre, se réduise à l'équation de la courbe σ. En donnant à a de très petites valeurs, on obtiendra des courbes très voisines de σ; concevons des arcs dn orthogonaux à ces courbes. L'angle ν sera celui de la normale à une quelconque des courbes au paramètre a ou de la tangente à dn avec l'axe des x; on voit donc la signification de $\frac{d\nu}{dn}dn$, et par suite celle de $\frac{d\nu}{dn}$.

Nous pouvons maintenant différentier la formule (1) par rapport à n et nous obtiendrons, en opérant comme précédemment,

$$\text{(C)}\quad \frac{d\frac{du}{d\sigma}}{dn} = \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dy^2}\right)\sin\nu\cos\nu - \frac{d^2u}{dx\,dy}(\cos^2\nu - \sin^2\nu) - \frac{du}{dn}\frac{d\nu}{dn}.$$

Cette dérivée seconde n'est pas complètement déterminée comme les deux précédentes; elle dépend, en effet, de $\frac{d\nu}{dn}$ ou de la courbure de l'arc dn; si dn est rectiligne, le dernier terme est nul. Des formules (B), (C), on conclut

$$\text{(3)}\qquad \frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma} + \frac{du}{d\sigma}\frac{d\nu}{d\sigma} = \frac{d\frac{du}{d\sigma}}{dn} + \frac{du}{dn}\frac{d\nu}{dn},$$

ce qui montre que les signes $\frac{d}{ds}$ et $\frac{d}{dn}$ ne peuvent être intervertis sur une même expression.

En différentiant (2) par rapport à n, on aura

$$(\mathrm{D})\qquad \frac{d\frac{du}{dn}}{dn} = \frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\nu + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\sin\nu\cos\nu + \frac{d^2u}{dy^2}\sin^2\nu - \frac{du}{ds}\frac{d\nu}{dn},$$

dont le dernier terme est nul si dn est rectiligne.

Nous aurons à appliquer les formules (A), (B), (C).

Emploi des notations de Lamé.

4. Il est aisé de vérifier la formule (3), en adoptant les notations employées par Lamé dans ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes*.

Considérons deux séries de courbes, orthogonales entre elles, dont les paramètres soient ρ et ρ_1, et représentées par les équations

$$f(x,y) = \rho,\quad f_1(x,y) = \rho_1;$$

les quantités ρ, ρ_1 constituent véritablement un système de deux variables. Désignons par ds_1 les éléments des premières courbes, par ds ceux des secondes. Si nous posons

$$h = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2},\quad h_1 = \sqrt{\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dy}\right)^2},$$

nous aurons

$$ds = \frac{d\rho}{h},\quad ds_1 = \frac{d\rho_1}{h_1}.$$

Soit u une fonction d'un point du plan, on aura

$$\frac{du}{ds} = h\frac{du}{d\rho},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\frac{du}{ds}}{ds_1} &= h_1\frac{d\left(h\frac{du}{d\rho}\right)}{d\rho_1}\\ &= hh_1\frac{d^2u}{d\rho\,d\rho_1} + h_1\frac{dh}{d\rho_1}\frac{du}{d\rho} = hh_1\frac{d^2u}{d\rho\,d\rho_1} + \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{du}{ds}.\end{aligned}$$

On aura de même

$$\frac{d\frac{du}{ds_1}}{ds} = hh_1\frac{d^2u}{d\rho\,d\rho_1} + \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{du}{ds_1}.$$

Comparons ces deux formules, et nous avons

$$\frac{d\dfrac{du}{ds_1}}{ds} + \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{du}{ds} = \frac{d\dfrac{du}{ds}}{ds_1} + \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{du}{ds_1}.$$

Cette formule est identique avec la formule (3), car $\frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}$, $\frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}$ sont les courbures des arcs s et s_1 (*Coord. curvil.*, § **28**).

Supposons que les lignes s_1 soient des droites et, par suite, que les lignes s soient des courbes parallèles. La courbure de s_1 étant nulle, on a $\frac{dh_1}{d\rho} = 0$, et h_1 ne dépend pas de ρ; de plus, nous pouvons prendre pour ρ_1 la longueur de la ligne droite s_1, comptée à partir d'une des courbes s, et nous obtiendrons

$$s_1 = \rho_1, \quad ds_1 = \frac{d\rho_1}{h_1};$$

on aura donc $h_1 = 1$.

5. On peut remarquer que les premiers membres des formules (A), (B) sont exprimés plus simplement par ces formules qu'ils ne le seraient par l'emploi des coordonnées ρ, ρ_1. En effet, en faisant coïncider la courbe σ avec une des courbes s, l'emploi des coordonnées ρ, ρ_1 donnerait, par exemple, au lieu de la formule (A),

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2}\sin^2\varphi - 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\varphi \\ = h^2\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{dh}{d\rho}\frac{du}{d\rho} - \frac{h_1^2}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{du}{d\rho_1}.\end{aligned}$$

Extension des formules (A), (B), (C), (D) *à une surface.*

6. Il n'est peut-être pas sans intérêt de montrer comment on peut trouver pour une surface des formules analogues aux formules (A), (B), (C), (D) relatives à une courbe. Mais pour les démontrer plus rapidement, nous nous servirons des formules des *Leçons sur les coordonnées curvilignes*.

Imaginons trois systèmes de surfaces, orthogonales entre elles, aux paramètres ρ, ρ_1, ρ_2; ces surfaces se coupent suivant leurs lignes de courbure s, s_1, s_2; ces lignes s, s_1, s_2 sont supposées respectivement normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2.

Soit u une fonction d'un point de l'espace et a, b, c les cosinus des angles de la normale à la surface ρ avec les trois axes rectangulaires de coordonnées; on aura

$$\frac{du}{ds} = a\frac{du}{dx} + b\frac{du}{dy} + c\frac{du}{dz},$$

et ensuite

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\frac{du}{ds}}{ds} &= \left(a\frac{d}{dx} + b\frac{d}{dy} + c\frac{d}{dz}\right)\left(a\frac{du}{dx} + b\frac{du}{dy} + c\frac{du}{dz}\right)\\ &= a^2\frac{d^2u}{dx^2} + b^2\frac{d^2u}{dy^2} + c^2\frac{d^2u}{dz^2} + 2bc\frac{d^2u}{dydz} + 2ca\frac{d^2u}{dzdx}\\ &\quad + 2ab\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{du}{dx}\frac{da}{ds} + \frac{du}{dy}\frac{db}{ds} + \frac{du}{dz}\frac{dc}{ds}. \end{aligned}\right.$$

Or on a

$$a = \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx},\quad b = \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dy},\quad c = \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dz};$$

on a donc

$$\frac{da}{ds} = -\frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho};$$

en remplaçant le dernier terme par sa valeur donnée (*Coordonnées curvilignes*, § **10**), on a

$$\frac{da}{ds} = \frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx};$$

on a ensuite

$$\frac{d\rho_1}{dx} = h_1\frac{dx}{ds_1},\quad \frac{d\rho_2}{dx} = h_2\frac{dx}{ds_2},$$

et l'on en conclut la première de ces trois équations

$$\begin{aligned} \frac{da}{ds} &= \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{dx}{ds_1} + \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{dx}{ds_2},\\ \frac{db}{ds} &= \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{dy}{ds_1} + \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{dy}{ds_2},\\ \frac{dc}{ds} &= \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{dz}{ds_1} + \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{dz}{ds_2}, \end{aligned}$$

les deux autres s'en déduisant par analogie. De ces trois équations l'on tire

$$\frac{du}{dx}\frac{da}{ds}+\frac{du}{dy}\frac{db}{ds}+\frac{du}{dz}\frac{dc}{ds}=\frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{du}{ds_1}+\frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{du}{ds_2}.$$

Désignons généralement par $R_{i,j}$ le rayon de la courbure de la surface ρ_j suivant l'arc s_i; on aura

$$\frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}=\frac{1}{R_{0,1}},\quad \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}=\frac{1}{R_{0,2}}.$$

Donc la formule (a) devient

$$(b)\quad\left\{\begin{aligned}&a^2\frac{d^2u}{dx^2}+b^2\frac{d^2u}{dy^2}+c^2\frac{d^2u}{dz^2}+2bc\frac{d^2u}{dy\,dz}+2ca\frac{d^2u}{dz\,dx}+2ab\frac{d^2u}{dx\,dy}\\&=\frac{d\frac{du}{ds}}{ds}+\frac{1}{R_{0,1}}\frac{du}{ds_1}+\frac{1}{R_{0,2}}\frac{du}{ds_2}.\end{aligned}\right.$$

Soient a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2 les cosinus directeurs des tangentes aux arcs ds_1, ds_2, on aura

$$a_1^2\frac{d^2u}{dx^2}+\cdots+2b_1c_1\frac{d^2u}{dy\,dz}+\cdots=\frac{d\frac{du}{ds_1}}{ds_1}+\frac{1}{R_{1,2}}\frac{du}{ds_2}+\frac{1}{R_{1,0}}\frac{du}{ds},$$

$$a_2^2\frac{d^2u}{dx^2}+\cdots+2b_2c_2\frac{d^2u}{dy\,dz}+\cdots=\frac{d\frac{du}{ds_2}}{ds_2}+\frac{1}{R_{2,0}}\frac{du}{ds}+\frac{1}{R_{2,1}}\frac{du}{ds_1}.$$

En ajoutant ces trois formules, on aurait une expression de

$$\Delta u=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}.$$

On pourra former de la même manière la dérivée $\dfrac{d\frac{du}{ds}}{ds_1}$, et on en conclura cette formule

$$(c)\quad\left\{\begin{aligned}&aa_1\frac{d^2u}{dx^2}+bb_1\frac{d^2u}{dy^2}+cc_1\frac{d^2u}{dz^2}+(cb_1+bc_1)\frac{d^2u}{dy\,dz}\\&\quad+(ac_1+ca_1)\frac{d^2u}{dz\,dx}+(ba_1+ab_1)\frac{d^2u}{dx\,dy}\\&=\frac{d\frac{du}{ds}}{ds_1}+\frac{1}{R_{1,0}}\frac{du}{ds_1}=\frac{d\frac{du}{ds_1}}{ds}+\frac{1}{R_{0,1}}\frac{du}{ds}.\end{aligned}\right.$$

7. Soit ensuite une surface S quelconque. Traçons sur cette surface ses deux systèmes de lignes de courbure; puis élevons des normales le long de ces lignes de courbure; ces normales formeront deux systèmes de surfaces orthogonales entre elles et développables. Sur chacune des normales portons, à partir de la surface S, une longueur constante; les extrémités de ces droites formeront deux séries de courbes, qui seront les lignes de courbure d'une surface S_1 parallèle à S. Les surfaces S_1 constitueront avec les deux systèmes de surfaces développables un triple système de surfaces orthogonales. Les surfaces S_1 étant supposées au paramètre ρ, ds sera un élément de droite normale à S et l'on aura $R_{0,1} = \infty$, $R_{0,2} = \infty$; ainsi les premiers membres des formules (b), (c) pourront être représentés respectivement par

$$\frac{d\frac{du}{ds}}{ds}, \quad \frac{d\frac{du}{ds_1}}{ds}.$$

Sur les conditions au contour d'une plaque élastique dont le contour est libre.

8. L'équation qui régit le mouvement vibratoire transversal d'une plaque plane est de cette forme

$$a^2 \Delta \Delta w + \frac{d^2 w}{dt^2} = 0,$$

où w est le déplacement d'un point de la surface moyenne, normalement à cette surface. Pour obtenir une solution simple, on pose

$$w = u \sin l^2 at,$$

et l'on a

$$\Delta \Delta u = l^4 u.$$

Les deux véritables conditions au contour σ de la plaque supposée libre ont été trouvées par Kirchhoff, et sont, en y remplaçant w par u,

$$\begin{aligned}
\mathrm{o} &= \left(\frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{d^3 u}{dx\,dy^2}\right)\cos\nu + \left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy} + \frac{d^3 u}{dy^3}\right)\sin\nu \\
&\quad + \frac{1+\theta}{1+2\theta}\frac{d}{d\sigma}\left[\left(\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{d^2 u}{dy^2}\right)\sin\nu\cos\nu + \frac{d^2 u}{dx\,dy}(\sin^2\nu - \cos^2\nu)\right], \\
\mathrm{o} &= \frac{d^2 u}{dx^2}\cos^2\nu + 2\frac{d^2 u}{dx\,dy}\sin\nu\cos\nu + \frac{d^2 u}{dy^2}\sin^2\nu + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2}\right),
\end{aligned}$$

θ étant une certaine constante. (Voir Kirchhoff, 30[e] de ses *Vorlesungen über mathematische Physik.*)

Ces deux conditions peuvent être présentées sous une forme très simple par l'emploi des formules des n[os] **2**, **3**. On a en effet, en supposant l'élément dn de normale rectiligne,

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{d^2 u}{dy^2}\right)\sin\nu\cos\nu + \frac{d^2 u}{dx\,dy}(\sin^2\nu - \cos^2\nu) = \frac{d\dfrac{du}{d\sigma}}{dn} = \frac{d\dfrac{du}{dn}}{d\sigma} + \frac{du}{d\sigma}\frac{d\nu}{d\sigma}$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 u}{dx^2}\cos^2\nu + 2\frac{d^2 u}{dx\,dy}\sin\nu\cos\nu + \frac{d^2 u}{dy^2}\sin^2\nu \\
&= \Delta u - \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\sin^2\nu - 2\frac{d^2 u}{dx\,dy}\sin\nu\cos\nu + \frac{d^2 u}{dy^2}\cos^2\nu\right) \\
&= \Delta u - \left(\frac{d\dfrac{du}{d\sigma}}{d\sigma} - \frac{du}{dn}\frac{d\nu}{d\sigma}\right).
\end{aligned}$$

D'après cela, si nous posons

$$\frac{1+\theta}{1+2\theta} = \mathrm{A},$$

les deux conditions au contour prennent cette forme très élégante

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\Delta u}{dn} &= -\mathrm{A}\frac{d}{d\sigma}\frac{d\dfrac{du}{d\sigma}}{dn}, \\
\Delta u &= \mathrm{A}\left(\frac{d\dfrac{du}{d\sigma}}{d\sigma} - \frac{du}{dn}\frac{d\nu}{d\sigma}\right).
\end{aligned}\right.$$

9. Si nous supposons une autre solution simple

$$w = u' \sin l'^2 at,$$

nous aurons

$$\Delta\Delta u' = l'^4 u',$$

et u' satisfera sur le contour σ aux deux équations (α), dans lesquelles u sera remplacé par u'.

La forme qui vient d'être donnée aux conditions au contour permet de démontrer très facilement la formule

$$(\beta) \qquad \int uu'\,d\omega = 0,$$

$d\omega$ étant un élément de la surface de la plaque, et l'intégrale étant étendue à tous les éléments de cette surface.

On a la formule

$$\begin{aligned}&\int u\Delta\Delta u'\,d\omega - \int u'\Delta\Delta u\,d\omega \\ &\quad= \int\left(u\frac{d\Delta u'}{dn} - u'\frac{d\Delta u}{dn}\right)d\sigma + \int\left(\Delta u\frac{du'}{dn} - \Delta u'\frac{du}{dn}\right)d\sigma,\end{aligned}$$

les intégrales du second membre s'étendant à tout le contour σ. [Voir mon *Mémoire sur l'équation* $\Delta\Delta u = 0$, etc. (*Journal de M. Liouville*, 1869).] Posons

$$I = \int\left(u\frac{d\Delta u'}{dn} - u'\frac{d\Delta u}{dn}\right)d\sigma, \quad J = \int\left(\Delta u\frac{du'}{dn} - \Delta u'\frac{du}{dn}\right)d\sigma,$$

la formule précédente devient

$$(l'^4 - l^4)\int uu'\,d\omega = I + J.$$

D'après la seconde condition (α), on a

$$\begin{aligned}J &= A\int\left(\frac{d\dfrac{du}{d\sigma}}{d\sigma}\frac{du'}{dn} - \frac{d\dfrac{du'}{d\sigma}}{d\sigma}\frac{du}{dn}\right)d\sigma \\ &= A\left(\frac{du}{d\sigma}\frac{du'}{dn} - \frac{du'}{d\sigma}\frac{du}{dn}\right)_{\sigma=0}^{\sigma=\lambda} - A\int\left(\frac{du}{d\sigma}\frac{d\dfrac{du'}{dn}}{d\sigma} - \frac{du'}{d\sigma}\frac{d\dfrac{du}{dn}}{d\sigma}\right)d\sigma.\end{aligned}$$

λ étant la longueur de la ligne σ. La partie située en dehors du signe d'intégration prend la même valeur aux deux limites, et l'on en conclut

$$J = -A\int\left(\frac{du}{d\sigma}\frac{d\frac{du'}{dn}}{d\sigma} - \frac{du'}{d\sigma}\frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma}\right)d\sigma.$$

Posons

$$L = \frac{d\frac{du}{d\sigma}}{dn} = \frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma} - \frac{du}{d\sigma}\frac{dv}{d\sigma},$$

et désignons par L' la même expression où u est remplacé par u', nous aurons, d'après la première condition (α),

$$I = -A\int\left(u\frac{dL'}{d\sigma} - u'\frac{dL}{d\sigma}\right)d\sigma;$$

intégrons par parties, et remarquons que la quantité située hors du signe d'intégration sera nulle; nous aurons

$$I = A\int\left(L'\frac{du}{d\sigma} - L\frac{du'}{d\sigma}\right)d\sigma.$$

Remplaçons L, L' par leur seconde expression, nous aurons

$$I = A\int\left(\frac{du}{d\sigma}\frac{d\frac{du'}{dn}}{d\sigma} - \frac{du'}{d\sigma}\frac{d\frac{du}{dn}}{d\sigma}\right)d\sigma;$$

I est donc égal et de signe contraire à J, et l'on en conclut la formule (β).

Sur l'emploi fait par Cauchy des coordonnées σ, n dans la théorie de la lame élastique courbe.

10. Dans ses *Exercices de Mathématiques*, 1828, troisième année, p. 285 à 325, Cauchy recherche les équations de l'équilibre ou du mouvement d'une lame naturellement courbe et d'une épaisseur constante. La lame, en se déformant, est supposée rester cylindrique, et les déplacements se font normalement aux génératrices du cylindre et de la même manière dans toute section normale aux génératrices; en sorte qu'il suffit d'examiner les déplacements dans une telle section. Cauchy représente tous les points de la lame à l'état naturel, qui sont renfermés dans cette section, au moyen de la normale abaissée de ce point sur la ligne courbe moyenne et de la longueur σ de cette courbe comprise entre une extrémité de cette ligne et le pied de la normale. Pour adopter ses notations, remplaçons les deux lettres σ, n par s et r. Dans son calcul entrent des dérivées par rapport à s et r qui montent jusqu'au quatrième ordre, sans qu'il tienne compte de cette circonstance, que les signes $\frac{d}{dr}$, $\frac{d}{ds}$ ne peuvent être intervertis sur une même expression.

Pour ce qui va suivre, je suppose que le lecteur a cet Ouvrage entre les mains.

Cauchy transforme les deux équations d'équilibre de la lame par un calcul irréprochable en les équations

$$(212)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathcal{A}}{ds}+\frac{d\mathcal{F}}{dr}-\frac{1}{vr}\frac{d(r^2\mathcal{F})}{dr}+\rho\left(1-\frac{r}{v}\right)\mathcal{S}=0,\\ &\frac{d\mathcal{F}}{ds}+\frac{d\mathcal{B}}{dr}+\frac{1}{v}\left(\mathcal{A}-\frac{d(r\mathcal{B})}{dr}\right)+\rho\left(1-\frac{r}{v}\right)\mathcal{R}=0.\end{aligned}\right.$$

Les équations (212) ne renferment en effet que des dérivées du premier ordre, par rapport à s et r, des forces élastiques $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$.

Les équations (267), qui donnent les expressions de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$ au moyen des dérivées du premier ordre de γ, δ par rapport à s et r, sont aussi exactes.

Les formules (267) doivent être substituées dans les équations (212). Pour la formation des dérivées $\frac{d\mathcal{F}}{dr}$, $\frac{d\mathcal{B}}{dr}$, qui entrent dans les deux équations, remarquons que $\mathcal{F}$, $\mathcal{B}$ renferment respectivement $\frac{d\delta}{ds}$, $\frac{d\gamma}{ds}$. Or, dans la suite de son calcul, Cauchy pose

$$\delta=\delta_0+\delta_1 r+\delta_2\frac{r^2}{2}+\ldots,$$

$$\gamma=\gamma_0+\gamma_1 r+\gamma_2\frac{r^2}{2}+\ldots,$$

où les coefficients $\delta_0, \delta_1, \ldots, \gamma_0, \gamma_1, \ldots$ ne dépendent que de s. Il développe de même $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{I}$ suivant les puissances de r; mais au fond il remplace les deux dérivées

$$(n)\qquad \frac{d\frac{d\delta}{ds}}{dr},\quad \frac{d\frac{d\gamma}{ds}}{dr},$$

qui entrent dans $\frac{d\mathcal{I}}{dr}$, $\frac{d\mathcal{B}}{dr}$ par les séries

$$\frac{d\delta_1}{ds}+\frac{d\delta_2}{ds}r+\frac{d\delta_3}{ds}\frac{r^2}{2}+\ldots,$$
$$\frac{d\gamma_1}{ds}+\frac{d\gamma_2}{ds}r+\frac{d\gamma_3}{ds}\frac{r^2}{2}+\ldots,$$

qui ne leur sont pas égales, et qui représentent

$$(p)\qquad \frac{d\frac{d\delta}{dr}}{ds},\quad \frac{d\frac{d\gamma}{dr}}{ds}.$$

En effet, d'après le n° 4, on peut faire $\rho_1 = r$, et l'on en conclut immédiatement que les dérivées (p) sont représentées par les développements précédents. D'autre part, on aura

$$\frac{d\delta}{ds}=h\frac{d\delta}{d\rho}=h\frac{d\delta_0}{d\rho}+h\frac{d\delta_1}{d\rho}r+\ldots,$$
$$\frac{d\left(\frac{d\delta}{ds}\right)}{dr}=h\frac{d\delta_1}{d\rho}+h\frac{d\delta_2}{d\rho}r+\ldots+\frac{dh}{dr}\left(\frac{d\delta_0}{d\rho}+\frac{d\delta_1}{d\rho}r+\ldots\right),$$

et Cauchy n'a pas tenu compte de la seconde partie de cette expression. Il en est de même pour la seconde dérivée (n).

Pour pouvoir rectifier le calcul de Cauchy dans son entier, il serait indispensable d'y introduire ρ au lieu de s; mais le calcul, déjà très compliqué, le deviendrait encore davantage. Je me propose de traiter ailleurs la question de l'équilibre et du mouvement de la lame élastique courbe.