JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

Sur la détermination du niveau potentiel de l'ellipsoïde

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 55-60.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__55_0>

Sur la détermination du niveau potentiel de l'ellipsoïde;

PAR M. H. RESAL.

1. Nous rappellerons que l'on est convenu d'appeler *niveau potentiel* d'un corps électrisé la valeur constante du potentiel relatif à un point quelconque de l'intérieur du corps rapporté à l'unité de masse. L'expression analytique de ce niveau ne joue aucun rôle important dans la théorie actuelle de l'électrostatique, et c'est ce qui explique pourquoi on n'a considéré jusqu'à présent, à notre connaissance du moins, que le cas très simple de la sphère.

Il nous a semblé, cependant, qu'il y aurait quelque intérêt à étudier le cas plus général de l'ellipsoïde, et ce qui fait l'objet de cette Note.

Comme la position du centre du potentiel est indéterminée dans l'intérieur du corps, nous pouvons la faire coïncider avec celle du centre de figure O de l'ellipsoïde; et, pour ne pas faire intervenir inutilement dans nos formules un facteur constant, nous supposerons égale à l'unité, en valeur absolue, la densité de la couche électrique.

Soient

Ox, Oy, Oz les directions des trois axes principaux de l'ellipsoïde;
$2a$, $2b$, $2c$ les longueurs de ces axes;

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

l'équation de la surface;

λ le rapport de similitude entre la surface extérieure de la couche électrique et celle de l'ellipsoïde.

Jusqu'à nouvel ordre, il ne nous sera pas nécessaire de considérer cette couche comme étant très mince.

Concevons un cône ayant son sommet en O, et dont l'ouverture sphérique $d\omega$ soit infiniment petite. Le cône déterminera dans la couche un élément de volume que nous pouvons diviser en d'autres éléments secondaires par des surfaces infiniment voisines, semblables à celle de l'ellipsoïde.

Soient r, $r' = ru$ les portions de l'une des génératrices du cône déterminées par l'ellipsoïde et l'une des surfaces ci-dessus. Le potentiel d'un élément secondaire sera

$$\frac{r'^2\, d\omega'\, dr'}{r'} = r^2\, d\omega \,.\, u\, du;$$

en intégrant entre les limites $u = 1$ et $u = \lambda$, nous aurons pour celui du volume déterminé dans la couche par le cône

$$\frac{(\lambda^2 - 1)}{2} r^2\, d\omega,$$

et pour le potentiel cherché

$$(2) \qquad V = \frac{(\lambda^2 - 1)}{2} \int r^2\, d\omega,$$

l'intégrale s'étendant à la surface entière de l'ellipsoïde.

Soient, maintenant,

θ l'angle formé par le rayon vecteur r avec Oz;

φ celui que forme, avec Ox, la projection sur le plan xOy de ce rayon.

Nous avons

$$\begin{aligned} d\omega &= \sin\theta\, d\varphi\, d\theta, \\ x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta, \end{aligned}$$

d'où, en vertu de l'équation (1),

$$r^2 = \frac{1}{\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}},$$

par suite,

$$(3)\qquad \int r^2\,d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}.$$

Si nous posons $\cos\theta = u$, celle de ces intégrales qui se rapporte à θ devient

$$(4)\qquad \int_{-1}^{1} \frac{du}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)u^2}.$$

Supposons d'abord que les trois axes de l'ellipsoïde soient inégaux et que c soit le plus petit d'entre eux et posons

$$A^2 = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2},\quad B^2 = \frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2},$$

et l'intégrale ci-dessus prend la forme

$$\frac{1}{AB}\int_{-1}^{1} \frac{d\frac{Bu}{A}}{1 + \frac{B^2u^2}{A^2}} = \frac{2}{AB}\operatorname{arc\,tang}\frac{B}{A}.$$

Il vient donc

$$\int r^2\,d\omega = 2\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)}}$$
$$\times \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{\frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}}},$$

intégrale qu'il est impossible d'obtenir dans le cas général; quoi qu'il en soit, la solution du problème est ramenée à une quadrature.

2. L'intégration s'effectue complètement lorsque l'ellipsoïde est de révolution, ou si $a = b$; car alors l'intégrale (4) relative à u se réduit à

$$a^2 \int_{-1}^{1} \frac{du}{1 + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right) u^2}, \tag{5}$$

et est indépendante de φ.

La masse de la couche a pour expression

$$M = \frac{4\pi}{3}(\lambda^3 - 1) a^2 c. \tag{6}$$

Nous avons maintenant deux cas à distinguer, selon que $a > c$, $a < c$.

3. *Ellipsoïde de révolution aplati ou* $a > c$. — On reconnaît facilement que l'intégrale (5) a pour valeur

$$\frac{2a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1},$$

et, en se reportant aux formules (3) et (2), on trouve

$$V = 2\pi(\lambda^2 - 1) a^2 \frac{\operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}}. \tag{7}$$

Si l'ellipsoïde se réduit à une sphère ou si $c = a$, le dernier facteur de cette expression devient égal à l'unité, et l'on retrouve la formule connue

$$V = 2\pi(\lambda^2 - 1) a^2.$$

4. *Ellipsoïde de révolution allongé ou $a < c$.* — On a

$$\frac{1}{1-\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}\,u} + \frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}\,u}\right),$$

et l'intégrale (5) se réduit à

$$\frac{2a^2}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}.$$

Nous avons donc

$$V = \frac{2\pi(\lambda^2-1)a^2}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}. \tag{8}$$

5. *Formules réduites lorsque l'on suppose que la couche électrique qui recouvre un ellipsoïde de révolution est très mince.* — Dans ce cas, λ diffère très peu de l'unité, et, en désignant par δa l'épaisseur de la couche aux sommets des axes égaux, nous avons

$$a(\lambda^2-1) = a(\lambda-1)(\lambda+1) = 2\delta a,$$
$$a(\lambda^3-1) = a(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) = 3\delta a;$$

par suite, en se reportant à la formule (6),

$$M = 4\pi ac\,.\,\delta a. \tag{6'}$$

et les formules (7) et (8) peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$V = \frac{M}{c}\,\frac{\text{arc tang}\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}, \tag{7'}$$

$$V = \frac{M}{c\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}\log\frac{1+\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}{1-\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}. \tag{8'}$$

En supposant $a = c$, les deux dernières formules donnent la suivante :

$$V = \frac{M}{a},$$

qui se rapporte à la sphère.